Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Melle BELAIDI FAIZA

Existence Globale de la Solution du système de Timoshenko Viscoélastique non Linéaire en Présence d'un Terme de Retard

soutenu publiquement le Juin 2019 *devant le jury composé de :*

Président :	Mr. KAID MOHAMMED	MAA	Université UMAB
Examinateur :	Mmd. DIALA HOURIA	MAA	Université UMAB
Encadreur :	Mr. DJILALI LAID	MCB	Université UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

M
A
S
T
E
R

Table Des Matières

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre cher professeur et encadrant L.DJILALI pour le temps qu'elle a consacré et pour les précieuses informations qu'elle m'a prodiguées avec intérêt et comprénsion.

J'adresse aussi mes vifs remerciements au membres des jurys Monsieur KAID Mohammed et Madame DIALA Houria pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des problèmes concernant la stabilité et l'existence globale des solutions faibles des systèmes vibrants en supposant que ces systèmes sont soumis à des termes d'amortissements,qui font décroître l'énergie.

Plusieurs formes de ces problèmes ont été étudiés par de nombreux mathématiciens sous diverses hypothèses sur les termes d'amortissements.
Un de ces formes, des systèmes qui sont appelés les systèmes de Timoshenko.

En 1921, Timoshenko [45] a donné le système équations hyperbolique suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \rho u_{tt}(x;t) = (K(u_x - \varphi))_x & (x;t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ I_\rho \varphi_{tt}(x;t) = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi) & (x;t) \in]0, L[\times]0, +\infty[, \end{cases}$$

où t, φ, x, ρ, I_ρ, u, E, I et K désignent respectivement la variable temps, l'angle de rotation du filament du faisceau, la variable d'espace le long du rayon de longueur L, la densité et le moment d'inertie polaire d'une section, le déplacement transversal de la poutre, le module de Young, le moment d'inertie, et le module de cisaillement.

De nombreux mathématiciens ont étudié ce type de problème après avoir ajouté certains termes et conditions pour prouver leurs résultats.

Kim et Renardy [24] ont étudié le système (1) avec les deux conditions aux limites de la forme suivante :

$$\begin{cases} K\varphi(L;t) - K\dfrac{\partial u}{\partial x}(L;t) = \alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}(L;t) & \forall t \geq 0 \\ EI\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(L;t) = -\beta\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(L;t) & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Par les techniques de la méthode des multiplicateurs ils ont établi un résultat de décroissance de la fonction de l'énergie.

Raposo, Ferreira, Santos et Castro [40] ont considéré le problème (1) avec deux termes d'amortissements dans le cas linéaire et des conditions homogènes de Dirichlet, précisément, ils ont examiné le système suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \rho_1 u_{tt} - K(u_x + \varphi)_x + u_t = 0 & (x;t) \in]0, 1[\times]0, +1[\\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + K(u_x + \varphi) + \varphi_t = 0 & (x;t) \in]0, 1[\times]0, +1[\\ u(0;L) = u(L;t) = \varphi(0;t) = \varphi(L;t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

Ils ont prouvé que l'énergie associée à (2) décroît exponentiellement.

Soufyane et Wehbe [44] ont montré que le système (1) est stable. Alors, ils ont considéré le système suivant

$$(3)\quad \begin{cases} \rho u_{tt} = (K(u_x + \varphi))_x & (x;t) \in]0,1[\times]0,+1[\\ I\rho\varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x + \varphi) + b\varphi_t = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+1[\\ u(0;L) = u(L;t) = \varphi(0;t) = \varphi(L;t) = 0 & \forall t > 0, \end{cases}$$

où b est une fonction positive et continue, qui satisfaite

$$b(x) \geq b_0 > 0,\ \ \forall x \in [a_0; a_1] \subset [0, L].$$

En fait, ils ont prouvé que le système (3) est uniformément stable si, et seulement, si $(\frac{K}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho})$ sinon, seulement la stabilité asymptotique a été prouvée.

Ammar-Khodja, Benabdallah, Muñoz Rivera, et Racke [5], ont considéré le système de type Timoshenko linéaire avec un terme de mémoire et aussi avec des conditions homogènes, de la forme :

$$(4)\quad \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + K(\varphi_x + \psi) = 0, \\ \varphi(0;t) = \varphi(L;t) = \psi(0;t) = \psi(L;t) = 0, \quad \forall t > 0, \end{cases}$$

dans $]0, L[\times]0, +\infty[$, en tout, ils ont utilisé les techniques de la méthode des multiplicateurs pour prouver que le système est uniformément stable si et seulement si $(\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2})$ et g décroît uniformément.

Belkacem Said-Houari et Yamina Laskri [6], ont considéré le système de Timoshenko linéaire avec un terme de retard constant de la forme suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x;t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x;t) = 0 \\ \rho_2\psi_{tt}(x;t) - b\psi_{xx}(x;t) + K(\varphi_x + \psi)(x;t) + \mu_1\psi_t(x;t) \\ \qquad\qquad +\mu_2\psi_t(x;t-\tau) = 0, \end{cases}$$

où $(x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[$, $\tau > 0$ représente le terme de retard et μ_1, μ_2 sont des constantes positives avec les conditions aux limites suivantes :

$$\varphi(0;t) = \varphi(1;t) = \psi(0;t) = \psi(1;t) = 0\ t > 0$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x;0) = \varphi_0\ \ \varphi_t(x;0) = \varphi_1\ \ \psi(x;0) = \psi_0 \\ \psi_t(x;0) = \psi_1\ \ \psi_t(x;t-\tau) = f_0(x;t-\tau)\ \ (x;t) \in [0,1] \times [0,\tau]. \end{cases}$$

Ils ont établi que l'énergie décroît exponentiellement si, $\left(\dfrac{K}{\rho_1} = \dfrac{b}{\rho_2}\right)$.

Ce mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre, est pour but de prouver la décroissance de l'énergie et l'existence de la solution faible du système de Timoshenko viscoélastique non linéaire à la présence d'un terme de retard constant de la forme :

$$(\mathbf{P_1})\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x;t) - K(\varphi_x+\psi)_x(x;t) = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \rho_2\psi_{tt}(x;t) - b\psi_{xx}(x;t) + K(\varphi_x+\psi)(x;t) + \mu_1 g_1(\psi_t(x;t)) & \\ + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x;s)ds + \mu_2 g_2(\psi_t(x;t-\tau)) = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(0;t) = \varphi(1;t) = \psi(0;t) = \psi(1;t) = 0 & t \geq 0 \\ \psi(x;0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x;0) = \psi_1(x) & x \in]0,1[\\ \varphi(x;0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x;0) = \varphi_1(x) & x \in]0,1[\\ \psi_t(x;t-\tau) = f_0(x;t-\tau) & (x;t) \in]0,1[\times]0,\tau[. \end{cases}$$

Pour établir nos résultats, nous avons besoin des hypothèses suivantes

(H1) $(*)$ $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de class C^2 telle que :

$$h(0) = h_0 > 0; \qquad l = \int_0^{+\infty} h(s)ds < b.$$

$(**)$ De plus, il existe une fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante de classe C^1 vérifie :

$$h'(s) \leq -\zeta(s)h(s), \quad \forall s \geq 0,$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \zeta(s)ds = +\infty$$

(H2) $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
il existe ϵ' ; c_1 ; $c_2 > 0$ et une fonction convexe et croissante $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la classe $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(]0;+\infty[)$ vérifie

$$(*)\begin{cases} H(0) = 0 \quad \text{et} \quad H \quad \text{linéaire sur } [0;\epsilon'] \text{ ou bien} \\ H'(0) = 0 \quad \text{et} \quad H'' > 0 \quad \text{sur }]0;\epsilon'], \end{cases}$$

tels que

$$c_1|s| \leq |g_1(s)| \leq c_2|s| \quad si \quad |s| \geq \epsilon', \tag{1}$$

(2) $$s^2+g_1^2(s)\leq H^{-1}(sg_1(s))\quad si\quad |s|\leq\epsilon',$$

$g_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction impaire croissante de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que :
il existe c_3,α_1,$\alpha_2>0$

(3) $$|g_2^{'}(s)|\leq c_3,$$

(4) $$\alpha_1 sg_2(s)\leq G_2(s)\leq\alpha_2 sg_1(s),$$

où

$$G_2(s)=\int_0^s g_2(r)dr,$$

et

(5) $$\alpha_2\mu_2\leq\alpha_1\mu_1.$$

Le troisième chapitre, est pour objectif de prouver la décroissance de l'énergie et l'existence de la solution faible du système de Timoshenko viscoélastique non linéaire à la présence d'un terme de retard variable de la forme :
(6)

$$(\mathbf{P_{st}})\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}(x;t)-K(\varphi_x+\psi)_x(x;t)=0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \rho_2\psi_{tt}(x;t)-b\psi_{xx}(x;t)+K(\varphi_x+\psi)(x;t)+\mu_1(t)g_1(\psi_t(x;t)) & \\ \qquad +\mu_2(t)g_2(\psi_t(x;t-\tau(t)))+\displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x;s)ds=0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(0;t)=\varphi(1;t)=\psi(0;t)=\psi(1;t)=0 & t\geq 0\\ \psi(x;0)=\psi_0(x),\quad \psi_t(x;0)=\psi_1(x), & x\in]0,1[\\ \varphi(x;0)=\varphi_0(x)\quad \varphi_t(x;0)=\varphi_1(x) & x\in]0,1[\\ \psi_t(x;t-\tau(0))=f_0(x;t-\tau(0)) & (x;t)\in]0,1[\times]0,\tau(0)[.\end{cases}$$

Pour établir nos résultats, nous avons besoin des hypothèses suivantes
(H1) $(*)$ $h:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ de classe C^2 telle que :

$$h(0)=h_0>0;\qquad l=\int_0^{+\infty}h(s)ds<b.$$

$(**)$ De plus, il existe une fonction $\zeta:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ décroissante de classe C^1 vérifie :

$$h'(s)\leq-\zeta(s)h(s),\quad\forall s\geq 0,$$

avec

$$\int_0^{+\infty}\zeta(s)ds=+\infty$$

(H2) $\mu_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} \mu_1(\tau)d\tau = +\infty, \tag{7}$$

$$|\mu_1'(t)| \leq c\mu_1(t). \tag{8}$$

(H3) $\mu_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C_1(\mathbb{R}_+)$

$$|\mu_2(t)| \leq \beta\mu_1(t), \tag{9}$$

$$|\mu_2'(t)| \leq \tilde{c}\mu_1(t), \tag{10}$$

Pour $0 < \beta < 1$ et $\tilde{c} > 0$.

(H4) $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
il existe ϵ' ; c_1 ; $c_2 > 0$ et une fonction convexe et croissante $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la classe $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(]0;+\infty[)$ vérifie

$$(*) \begin{cases} H(0) = 0 \quad \text{et} \quad H \quad \text{linéaire sur } [0;\epsilon'] \text{ ou bien} \\ H'(0) = 0 \quad \text{et} \quad H'' > 0 \quad \text{sur }]0;\epsilon'] \end{cases}$$

tels que

$$c_1|s| \leq |g_1(s)| \leq c_2|s| \quad si \quad |s| \geq \epsilon', \tag{11}$$

$$s^2 + g_1^2(s) \leq H^{-1}(sg_1(s)) \quad si \quad |s| \leq \epsilon', \tag{12}$$

$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire croissante de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que :
il existe c_3,α_1,$\alpha_2 > 0$

$$|g_2'(s)| \leq c_3, \tag{13}$$

$$\alpha_1 s g_2(s) \leq G_2(s) \leq \alpha_2 s g_1(s), \tag{14}$$

où

$$G_2(s) = \int_0^s g_2(r)dr,$$

(H5) τ une fonction telle que :

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1 \ \forall t > 0, \tag{15}$$

où τ_0 et τ_1 sont deux constantes positives et d une constante vérifiant

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0, \tag{16}$$

(H6)

$$\beta < \frac{\alpha_1(1-d)}{\alpha_2(1-\alpha_1 d)}. \tag{17}$$

Chapitre 1

Préliminaires

On commence par rappeler les notions de base et certains résultats classiques d'analyse qui nous serviront à réaliser ce travail.

1.1 Espaces de Lebesgue

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle espace de Lebesgue l'ensemble noté $L^p(\Omega)$ défini par*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ \textit{mesurable} \ : \ \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \Big\}.$$

Théorème 1.1.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'application $\|.\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $L^p(\Omega)$, muni de cette norme, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet(i.e. un espace de Banach).

Définition 1.1.2 *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est défini par*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \middle| \begin{array}{l} u \ \ \textit{mesurable et il existe une constante} \ \ C > 0 \\ |u(x)| \leq C \ \ \textit{p.p sur} \ \Omega. \end{array} \right\}.$$

Théorème 1.1.2 *L'application $\|.\|_\infty : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\|u\|_\infty = \inf \Big\{ C : \ |u(x)| \leq C \ \textit{p.p sur} \ \Omega \Big\},$$

est une norme sur $L^\infty(\Omega)$, muni de cette norme, $L^\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet(i.e. un espace Banach).

Remarque 1.1.1 *En particulier, quand $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.3 *Pour $p \in]1, +\infty[$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif.*

1.2 Les espaces de Lebesgue généralisés

Dans toute la suite Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$

On considère la généralisation suivante. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'ensemble $L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha)$ comme suit :

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^\alpha \ \text{ mesurable } : \ \int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\},$$

où $|.|$ désigne une norme quelconque dans $\mathbb{R}^\alpha$.

Théorème 1.2.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'application $\|.\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^\alpha)} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^\alpha)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha)$, muni de cette norme, l'espace $L^p(\Omega, \mathbb{R}^\alpha)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.2.1 *Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R}^\alpha)$ muni du produit scalaire*

$$< u, v >_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^\alpha)} = \int_\Omega < u, v >_{\mathbb{R}^\alpha} dx = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(x)v_i(x)dx,$$

où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots v_n)$ est un espace de Hilbert.

1.2.2 Les espaces $L^p(0, T; V)$

Définition 1.2.1 *Soient V un espace de Banach et $p \in [1, +\infty[$. L'espace $L^p(0, T; V)$ est défini par*

$$L^p(0, T; V) = \left\{ f : [0, T] \to V \Big| \int_0^T \|f(t)\|_V^p dt < +\infty \right\}.$$

Théorème 1.2.2 *Soient V un espace de Banach et $p \in [1, +\infty[$.*
L'application $\|.\|_{L^p(0,T;V)} : L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\|f\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $L^p(0,T;V)$, muni de cette norme, l'espace $L^p(0,T;V)$ est un espace de Banach.

1.2.3 Les espaces $L^\infty(0,T;V)$

Définition 1.2.2 *Soit V un espace de Banach. On défini L'espace $L^\infty(0,T;V)$ par*

$$L^\infty(0,T;V) = \Big\{ f :]0,T[\to V \text{ mesurable et } \sup_{t \in]0,T[} \big\|f(t)\big\| < +\infty \Big\}.$$

Théorème 1.2.3 *Soit V un espace de Banach. L'application $\|.\|_{L^\infty(0,T;V)} : L^\infty(0,T;V) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{t \in]0,T[} ess \|f(t)\|,$$

est une norme sur $L^\infty(0,T;V)$, muni de cette norme, l'espace $L^\infty(0,T;V)$ est un espace de Banach.

1.3 Espaces des distributions

Définition 1.3.1 *Soit V un espace de Banach. On désigne par $\mathcal{D}'(0,T;V)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans V, défini par*

$$\mathcal{D}'(0,T;V) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0,T[);V);$$

où $\mathcal{D}(]0,T[;V)$ est l'espace des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,T[\to V$ et à suuport compact dans $]0,T[$. De plus

- *Si $f \in \mathcal{D}'(0,T;V)$, sa dérivée distribution est définie par*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi) = -f(\frac{\partial \varphi}{\partial t}).$$

- *Si $f \in L^p(0,T;V)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, il lui correspond une distribution, notée aussi f sur $]0,T[$ à valeurs dans V, par*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

Remarque 1.3.1 *$\mathcal{L}(E;F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F avec (E et F espaces vectoriels topologiques).*

On a le resulatat suivant qui est trés utile.

Lemme 1.3.1 *Soit V un espace de Banach. Si $f \in L^p(0,T;V)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;V)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \to V$.*

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrables. Ces espaces sont complets ce qui est un avantage pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.
Dans toute la suite, nous notons par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec une frontière notée $\partial\Omega$ régulière et nous allons aussi utiliser les notations suivantes pour les dérivées différentielles partielles d'une fonction :

$$\partial_i^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } i = 1; \ldots ; n;$$
$$D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \; u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n} \; u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}};$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que*

$$< T, f >= \int_\Omega f(x)\varphi(x) \; dx, \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

de plus f est unique.

1.4.1 Espaces de Sobolev

Définition 1.4.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p; D^\alpha u \in L^p, \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq m \Big\}.$$

Proposition 1.4.2 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ munit de la norme :*

$$u \mapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si \;\; p = +\infty, \end{cases}$$

est un espace de Banach, réfléxive pour $1 < p < +\infty$ de plus séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Remarque 1.4.1 *Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$, on le munit du produit scalaire*

$$< f, g >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \big(D^\alpha f, D^\alpha g \big)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f \; D^\alpha g \; dx,$$

avec la norme associée

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.4.3

1. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Muni de la norme $\|.\|_{H^m(\Omega)}$, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*
2. *Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Si $p \geq q$, $H^p(\Omega)$ s'inject continûment dans $H^q(\Omega)$.*

Définition 1.4.2 *L'espace $W_o^{m,p}(\Omega)$ (respectivement $H_0^m(\Omega)$) est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ par la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ (respectivement de $H^m(\Omega)$).*

On a le resultat suivant

Lemme 1.4.1

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

où $H_0^m(\Omega)$ est le dual de $H^m(\Omega)$.

1.5 Espaces de Sobolev généralisés

Définition 1.5.1 *Soit X un espace de Banach. Pour $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(a, b; X)$ par :*

$$W^{m,p}(a, b; X) = \left\{ v \in L^p(a, b; X); \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in L^p(a, b; X). \quad \forall j \leq m \right\}.$$

Proposition 1.5.1 *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(a, b; X)$ munit de la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial t^j} \right\|_{L^p(a,b;X)}^p \right)^{1/p}, & si\ 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial t^j} \right\|_{L^\infty(a,b;X)}, & si\ p = +\infty, \end{cases}$$

est un espace de Banach.

Remarque 1.5.1 *Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(a, b; X)$ est noté $H^m(a, b; X)$, on le munit du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(a,b;X)} = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right)_X dt.$$

Proposition 1.5.2 *$H^m(a, b; X)$ est un espace de Hilbert.*

1.5.1 Injections de Sobolev

Théorème 1.5.1 *Soit* $1 \leq p \leq n$*, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

où p^* *est donné par* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ *(*$p = n, p^* = \infty$*). De plus, il existe une constante* $C = C(p,n)$ *telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Corollaire 1.5.1 *Soit* $1 \leq p < p^* < n$*, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

Dans le cas $p = n$, on aura

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [n, +\infty[$$

Théorème 1.5.2 *Soit* $p > n$*, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Corollaire 1.5.2 *Soit* Ω *un ensemble borné de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *et* $1 \leq p \leq \infty$*. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
&si \quad 1 \leq p < \infty, \ alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \ où\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.\\
&si \quad p = n, \ alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[.\\
&si \quad p > n, \ alors\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

De plus, si $p > n$*, alors :* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$*,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p} > 0$, C une constante dépend de p, n et Ω. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Corollaire 1.5.3 *Soit* Ω *un ensemble borné de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *et* $1 \leq p \leq \infty$*. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
&si \quad p < n, \ alors \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[\ où\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.\\
&si \quad p = n, \ alors \quad W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[.\\
&si \quad p > n, \ alors \quad W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Remarque 1.5.2 *On remarque, en particulier, que*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour $1 \leq p \leq \infty$ *et pour* $p \leq q < p^*$.

Corollaire 1.5.4

$$\begin{aligned}
&si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \ \ alors \ \ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \ \ avec \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.\\
&si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \ \ alors \ \ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, +\infty[.\\
&si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0, \ \ alors \ \ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

1.6 Convergence forte, faible, faible étoile dans des espaces de Banach

1.6.1 Convergence forte

Définition 1.6.1 *Soient* $x \in E$;$\{x_n\} \subset E$. *On dit que* $\{x_n\}$ *converge fortement dans* x, *et on écrit* $x_n \to x$ *dans* E, *si*

$$\lim_n \|x_n - x\|_E = 0.$$

1.6.2 Espace dual et bidual

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach. On sait que l'espace de Banach de toutes les formes linéaires continues sur E est l'espace noté E' espace dual de E muni de la norme $\|.\|_{E'}$ définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{| < f, x > |}{\|x\|_E}$$

où $< f, x >$ désigne l'action de f sur x, c'est-à-dire que $< f, x >= f(x)$. De la même manière, on peut définir l'espace dual de E' qu'on le note E'', appelé espace bidual de E qui est aussi un espace de Banach. Un élément x de E peut-être vu comme une forme linéaire continue sur E'' en posant $x(f) =< x, f >$; ce qui signifie que $E \subset E''$.

1.6.3 Convergence faible dans un espace de Banach

Définition 1.6.2 *Soient* $x \in E$ *et* $\{x_n\} \subset E$. *On dit que* $\{x_n\}$ *converge faiblement vers* x *dans* E, *et on écrit* $x_n \rightharpoonup x$ *dans* E, *si*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$$

pour tout $f \in E'$.

1.6.4 Convergence faible dans un espace dual d'un espace de Banach

Définition 1.6.3 *Soient $f \in E'$ et $\{f_n\} \subset E'$. On dit que $\{f_n\}$ converge faiblement vers f dans E', et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ dans E', si*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$$

pour tout $x \in E''$.

1.6.5 Convergence faible dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$

Définition 1.6.4 *On dit que la suite $\{f_n\}$ de $L^p(\Omega)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\Omega)$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n g(x)dx = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \text{ pour tout } g \in L^q(\Omega) \quad \text{avec } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

1.6.6 Convergence faible dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$

Définition 1.6.5 *On dit que la suite $\{f_n\}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ converge faiblement vers $f \in W^{1,p}(\Omega)$, si*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega;\mathbb{R}^n),$$

et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

1.6.7 Convergence faible étoile

Définition 1.6.6 *(Convergence faible étoile) Soient $f \in E'$ et $\{f_n\} \subset E'$. On dit que $\{f_n\}$ converge faible étoile vers f dans E', et on écrit $f_n \rightharpoonup *f$ dans E', si*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle,$$

pour tout $x \in E$.

1.7 Méthode de Faedo-Galerkin

Nous considérons le problème de Cauchy abstrait pour une équation d'évolution du seconde ordre dans un espace de Hilbert séparable H avec le produit scalaire $< .,. >$ et la norme associée $\|.\|$

$$\textbf{(PC)} \quad \begin{cases} u''(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in [0,T] \\ u(t,0) = u_0(t), & u'(t,0) = u_1(t); \end{cases}$$

où u et f sont des fonctions inconnues définies sur l'intervalle fermé $[0,T] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un l'espace H et $A(t) \quad (0 \leq t \leq T)$ sont des opérateurs linéaires bornés dans H, agissants dans un espace $V \in H$ appelé espace d'énergie.

Supposons que $< A(t)u(t), v(t) >= a(t; u(t), v(t))$, pour tout $u, v \subset V$; où $a(t; ., .)$ est une forme bilinéaire continue dans V.

Le problème (**PC**) peut être formulé comme suit : Cherché la solution $u(t)$ telle que

$$(\tilde{\mathbf{P}}) \quad \begin{cases} u \in C([0,T];V), u' \in C([0,T];H) \\ \langle u''(t,v)\rangle + a(t;u(t),v) = \langle f, v\rangle \quad \text{dans} \quad D'(]0,T[) \\ u_0 \in V, \quad u_1 \in H \end{cases}$$

Un tel problème, peut être résolu avec la méthode de Faedo-Galerkin.

1.7.1 Méthode générale(Faedo-Galerkin)

Soit V_m un sous-espace de V de dimension finie d_m, et soit $\{w_{jm}\}$ une base de V_m. Nous définissons la solution u_m du problème approximatif suivant

$$(\mathbf{P_m}) \quad \begin{cases} u_m(t) = \sum_{j=1}^{d_m} g_i(t) w_{jm} \\ u_m \in C([0,T];V_m),\ u'_m \in C([0,T];V_m) \quad , u_m \in L^2(0,T;V_m) \\ \langle u''_m(t), w_{jm}\rangle + a(t; u_m(t), w_{jm}) = \langle f, w_{jm}\rangle \quad 1 \le j \le d_m \\ u_m(0) = \sum_{j=1}^{d_m} \xi_i(t) w_{jm}, u'_m(0) = \sum_{j=1}^{d_m} \eta_j(t) w_{jm} \end{cases}$$

où

$$\sum_{j=1}^{d_m} \xi_i(t) w_{jm} \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad V \text{ comme} \quad m \longrightarrow \infty$$
$$\sum_{j=1}^{d_m} \eta_j(t) w_{jm} \longrightarrow u_1 \quad \text{dans} \quad V \text{ comme} \quad m \longrightarrow \infty$$

De la théorie des équations différentielles ordinaires, le système ($\mathbf{P_m}$) admet une solution locale dans l'intervalle $[0, t_m[$ et les termes non linéaires, d'après le lemme de Zorn, ont la régulartė souhaitée. Les estimations a priori par la suite, montreront qu'on peut obtenir une solution définie pour tout $t > 0$.

1.8 Lemmes techniques

1.8.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.8.1 *Soit H un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $< ., . >$. Alors,*

$$\forall u, v \in H, \quad | < u, v > | \le \|u\|_H \|v\|_H.$$

1.8.2 Inégalité de Young

Lemme 1.8.2 *pour tous réels a et b positifs ou nuls et tous réels p et q strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Lemme 1.8.3 *Pour tous a, $b \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$ab \leq \varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon},$$

où ε est une constante positive.

1.8.3 Inégalité Sobolev-Poincaré

Lemme 1.8.4 *Soit q un nombre tel que*

$$2 \leq q < +\infty \ \ si \ \ n=1,2 \ \ ou \ \ 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-1} \ \ si \ \ n \geq 3,$$

alors, il existe une constante $c_\star = c_\star(q)$ tel que

$$\forall \psi \in H_0^1(0,1), \quad \|\psi\|_q \leq c_\star \|\nabla \psi\|_2.$$

1.8.4 Inégalité de Hölder

Lemme 1.8.5 *Soient p, q et r trois réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, alors*

$$\forall \psi \in L^p(\Omega) \ \varphi \in L^q(\Omega), \quad \|\psi\varphi\|_{L^r(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)},$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1.8.5 Lemme de Gronwall

Lemme 1.8.6 *Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varphi \in L^1([0,T])$ une fonction positive, et soit enfin $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ positive, telle que $f, f\varphi \in L^1([0,T])$ vérifiant*

$$\forall t \in [0,T], \ f(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \varphi(s) f(s) ds.$$

Alors f vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad f(t) \leq C_1 \exp\Big(C_2 \int_0^t \varphi(s) ds\Big).$$

Voici une autre version du lemme, pour les fonctions dérivables.

Lemme 1.8.7 *Soit* $T \in \mathbb{R}_+$*. Soit* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *une fonction positive, et soit* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *positive, dérivable sur* $[0,T]$*, et vérifiant*

$$\forall t \in [0,T],\ \ f'(t) \leq \varphi(t) f(t).$$

Alors f *vérifie*

$$\forall t \in [0,T], \quad f(t) \leq f(0) \exp\Big(\int_0^t \varphi(s) ds \Big).$$

Chapitre 2

Stabilité et l'existence globale de la solution du système de Timoshenko viscoélastique à la présence d'un terme de retard constant

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de la décroissance de l'énergie et l'existence globale de la solution du système de Timoshenko viscoélastique avec un terme de retard constant qui est de la forme :

$$
(\mathbf{P_1}) \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) - K(\varphi_x+\psi)_x(x,t) = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + K(\varphi_x+\psi)(x,t) + \mu_1 g_1(\psi_t(x,t)) & \\ + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds + \mu_2 g_2(\psi_t(x,t-\tau)) = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x) & x \in]0,1[\\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) & x \in]0,1[\\ \psi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) & (x;t) \in]0,1[\times]0,\tau[, \end{cases}
$$

où $\tau > 0$ désigne le retard, μ_1 et μ_2 sont des nombres réels positifs et φ_0 ; φ_1 ; ψ_0 ; ψ_1 ; f_0 sont des données qui appartiennent à un espace fonctionnel approprié.

2.1 Hypothèses

Pour établir nos résultats, nous avons besoin des hypothèses suivantes

(H1) $(*)$ $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2 telle que :

$$h(0) = h_0 > 0; \qquad l = \int_0^{+\infty} h(s)ds < b.$$

$(**)$ De plus, il existe une fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante de classe C^1 vérifie :

$$h'(s) \leq -\zeta(s)h(s), \quad \forall s \geq 0,$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \zeta(s)ds = +\infty$$

(H2) g_1 :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
il existe ϵ' ; c_1 ; $c_2 > 0$ et une fonction convexe et croissante $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la classe $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(]0; +\infty[)$ vérifie

$$(*) \begin{cases} H(0) = 0 \quad \text{et} \quad H \quad \text{linéaire sur} \ [0; \epsilon'] \ \text{ou bien} \\ H'(0) = 0 \quad \text{et} \quad H'' > 0 \quad \text{sur} \ ]0; \epsilon'], \end{cases}$$

tels que

$$c_1|s| \leq |g_1(s)| \leq c_2|s| \quad \text{si} \quad |s| \geq \epsilon', \tag{2.1}$$

$$s^2 + g_1^2(s) \leq H^{-1}(sg_1(s)) \quad si \quad |s| \leq \epsilon', \tag{2.2}$$

$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire croissante de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que :
il existe c_3,α_1,$\alpha_2 > 0$

$$|g_2'(s)| \leq c_3, \tag{2.3}$$

$$\alpha_1 sg_2(s) \leq G_2(s) \leq \alpha_2 sg_1(s), \tag{2.4}$$

avec

$$G_2(s) = \int_0^s g_2(r)dr,$$

et

$$\alpha_2\mu_2 \leq \alpha_1\mu_1. \tag{2.5}$$

2.2 L'étude de la décroissance de l'énergie du problème posé

Pour simplifier nôtre étude, nous aurons besoin, comme dans [35], de la nouvelle variable $z(x;\rho;t)$ définie comme suit

$$z(x;\rho;t)=\psi_t(x;t-\tau\rho),\quad x\in]0,1[,\quad \rho\in]0,1[,\quad t>0. \tag{2.6}$$

De (2.6), on peut écrire

$$\tau z_t(x;\rho;t)+z_\rho(x;\rho;t)=0,\qquad (x;\rho;t)\in]0,1[\times]01[\times]0,+\infty[. \tag{2.7}$$

De ce qui précède, nous pouvons réécrire le problème $(\mathbf{P_1})$ sous la forme suivante

$$(\mathbf{P'_1})\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}(x,t)-K(\varphi_x+\psi)_x(x,t)=0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \rho_2\psi_{tt}(x,t)-b\psi_{xx}(x,t)+K(\varphi_x+\psi)(x,t)+\mu_1g_1(\psi_t(x,t)) & \\ +\displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds+\mu_2g_2(z(x;1;t))=0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \tau z_t(x;\rho;t)+z_\rho(x;\rho;t)=0 & (x;\rho;t)\in]0,1[\times]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(0,t)=\varphi(1,t)=\psi(0,t)=\psi(1,t)=0 & t\geq 0\\ z(x;0;t)=\psi_t(x,t) & (x,t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\quad \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x) & x\in]0,1[\\ z(x;\rho;0)=f_0(x,-\rho\tau) & (x;\rho)\in]0,1[\times]0,1[,\end{cases}$$

On peut donc donner la définition de la fonction de l'énergie associée à la solution du problème $(\mathbf{P'_1})$, comme suit

Définition 2.2.1 *La fonction de l'énergie associée à la solution $(\psi;\varphi;z)$ du problème $(\mathbf{P'_1})$, notée E, est définie sur $[0,+\infty[$ par*

$$\begin{aligned}E(t)=E(t;z;\varphi;\psi)=\;&\frac{1}{2}\int_0^1\{\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+K|\varphi_x+\psi|^2\}dx\\ &+\frac{1}{2}\left(b-\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{1}{2}(ho\psi_x)(t)\\ &+\xi\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx,\end{aligned}\tag{2.8}$$

où ξ est une constante réelle strictement positive telle que

$$\tau\frac{\mu_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1}<\xi<\tau\frac{\mu_1-\mu_2\alpha_2}{\alpha_2}$$

et

$$(ho\psi_x)(t)=\int_0^1\int_0^t h(t-s)\big(\psi_x(s)-\psi_x(t)\big)^2dsdx.$$

Le résulat suivant nous donne la nature de l'énergie associée à la solution du problème $(\mathbf{P}'_1)$.

Lemme 2.2.1 *Soit* $(\varphi;\psi;z)$ *une solution du problème* $(\mathbf{P}'_1)$*. La fonction de l'énergie* E *définie par* (2.8)*, vérifie*

$$
\begin{aligned}
E'(t) &\leq -\Big(-\mu_1 - \frac{\xi\alpha_2}{\tau} - \mu_2\alpha_2\Big)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\
&\quad -\Big(\frac{\xi}{\tau}\alpha_1 - \mu_2(1-\alpha_1)\Big)\int_0^1 z(x,1,t)g_2(z(x,1,t))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(t,.)\|_2^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\big(h'o\psi_x\big)(t) \\
&\leq 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Preuve

En multipliant la première équation du problème $(\mathbf{P}'_1)$ par φ_t et intégrant sur]0,1[, on obtient :

$$
\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx - K\int_0^1(\varphi_x+\psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx = 0. \tag{2.10}
$$

On pose

$$
I_1 = \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx, \quad I_2 = K\int_0^1(\varphi_x+\psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx.
$$

Pour l'intégrale I_1, on remarque que

$$
\frac{d}{dt}\big(\varphi_t\varphi_t\big) = \frac{d}{dt}\big(\varphi_t^2\big) = 2\varphi_{tt}\varphi_t,
$$

d'ou

$$
I_1 = \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1\varphi_t^2(x,t)dx. \tag{2.11}
$$

En intégrant I_2 par parties, on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= K\int_0^1(\varphi_x+\psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx \\
&= K\int_0^1 \varphi_{xx}(x,t)\varphi_t(x,t)dx + K\int_0^1 \psi_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx \\
&= -K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx - K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\varphi_x^2(x,t)dx - K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

En remplaçant (2.11) et (2.12) dans (3.28), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1\varphi_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\varphi_x^2(x,t)dx + K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx = 0. \tag{2.13}$$

En multipliant la deuxième équation du problème $(\mathbf{P_1'})$ par ψ_t, et intégrant sur (0,1), on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx - b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t) + K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)(x,t)\psi_t(x,t)dx\\ &+\mu_1\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx\\ &+\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = 0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Posant

$$S_1 = \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx,\ \ S_2 = b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t)dx,\ \ S_3 = K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)(x,t)\psi_t(x,t)dx.$$

Alors

$$S_1 = \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2(x,t)dx. \tag{2.15}$$

Pour S_2, En utilisant une intégration par parties, on aura

$$\begin{aligned}S_2 &= b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t)dx = -b\int_0^1 \psi_x(x,t)\psi_{tx}(x,t)dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 b\psi_x^2(x,t)dx.\end{aligned} \tag{2.16}$$

On peut écrire S_3 sous la forme

$$\begin{aligned}S_3 &= K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx + K\int_0^1 \psi(x,t)\psi_t(x,t)dx\\ &= K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\psi^2(x,t)dx.\end{aligned} \tag{2.17}$$

En remplaçant (2.15), (2.16) et (2.17) dans (2.14), on obtiendra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\psi_t^2(x,t)dx + b\psi_x^2(x,t) + K\psi^2(x,t)\Big\}dx + K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx\\ &+\mu_1\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx\\ &+\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = 0,\end{aligned} \tag{2.18}$$

or

$$\int_0^1 \int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = -\int_0^1 \int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx. \tag{2.19}$$

Donc (2.18) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\rho_2\psi_t^2(x,t) + K\psi^2(x,t) + b\psi_x^2(x,t)\Big\}dx + K\int_0^1 \psi_t(x,t)\varphi_x(x,t)dx \\
&+\mu_1\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx \\
&-\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Sommant (3.31) et (2.20) membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + K|\varphi_x+\psi|^2 + b\psi_x^2\Big\}dx + \mu_1\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\
&= -\mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx + \int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Le dernier terme dans la partie droite de (3.30) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx + \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\Big[\int_0^t \|\psi_x(.,t)\|_2^2 - (ho\psi_x)(t)\Big] + \frac{1}{2}(h'o\psi_x)(t).
\end{aligned}$$

En effet, on pose

$$I = \int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Big(\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\Big)\frac{d}{dt}\Big[\psi(x,t)\Big]dsdx \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi(x,s)\psi(x,t)dsdx - \int_0^1 \Big(\frac{d}{dt}\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)ds\Big)\psi_x(x,t)dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x)dsdx - \int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx \\
&\quad -\int_0^1 h(0)\psi_x^2(.,t)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx - \int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx \\
&\quad -h(0)\|\psi_x(.,t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,t)dsdx + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,t)dsdx - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx + \frac{1}{2}\Big(h'o\psi_x\Big)(t) - \frac{1}{2}\int_0^1\Big(\int_0^t h'(s)ds\Big)\psi_x^2(x,t)dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx - h(0)\|\psi_x(.,t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x)dsdx = -I + \frac{1}{2}\Big(h'o\psi_x\Big)(t) - \frac{1}{2}\int_0^1\Big(\int_0^t h'(s)ds\Big)\psi_x^2(x,t)dx \\
-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx - h(0)\|\psi_x(.,t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Ceci implique que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx = -\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(h'o\psi_x\right)(t) - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}h(0)\|\psi_x(.,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx,
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(h\circ\psi_x\right)(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx - 2\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_x(x,t)dsdx \\
&\quad +\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x^2(x,t)dsdx \\
&= \int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx + h(0)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \big(h'\circ\psi_x\big)(t) \\
&\quad -2\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx - h(0)\|\psi_x(.,t)\|^2 \\
&\quad -h(t)\|\psi_x(.,t)\|^2 - \int_0^1\int_0^t h'(t-s)\psi_x^2(x,s)dsdx + \frac{d}{dt}\Big[\Big(\int_0^t h(s)ds\Big)\|\psi_x^2(.,t)\|^2\Big] \\
&= \big(h'\circ\psi_x\big)(t) - 2\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx \\
&\quad -h(t)\|\psi_x(.,t)\|^2 + \frac{d}{dt}\Big[\Big(\int_0^t h(s)ds\Big)\|\psi_x^2(.,t)\|^2\Big].
\end{aligned}
$$

Alors

$$\int_0^1 \int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx + \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|^2$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\Big(\int_0^t h(s)ds\Big)\|\psi_x^2(.,t)\|^2 - (h\circ\psi_x)(t)\right] + \big(h'\circ\psi_x\big)(t).$$

Donc l'égalité (3.30) devient :

$$\begin{aligned}(2.22)\qquad &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left\{\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + K|\varphi_x+\psi|^2\right\}dx\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(b-\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + (h\circ\psi_x)(t)\right] + \mu_1\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx\\ &= -\mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(h'\circ\psi_x)(t).\end{aligned}$$

Maintenant, En multipliant la troisième équation du probléme $(\mathbf{P_1'})$ par $\xi g_2(z(x,\rho,t))$ et intégrant sur $(0,1)\times(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1\int_0^1 \xi\tau z_t(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx + \int_0^1\int_0^1 \xi z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx = 0.$$

Ceci implique que

$$\xi\int_0^1\int_0^1 z'(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx = -\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx,$$

et comme :

$$G_2(s) = \int_0^s g_2(r)dr,$$

alors

$$\begin{cases} z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t)) = \dfrac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t)),\\ z_t(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t)) = \dfrac{d}{dt}G_2(z(x,\rho,t)).\end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}(2.23)\qquad \xi\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx &= -\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx\\ &= -\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 \left(G_2(z(x,1,t)) - G_2(z(x,0,t))\right)dx\\ &= -\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx + \frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(\psi_t(x,t))dx.\end{aligned}$$

La somme de (2.22) et (2.23) membre à membre nous donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+K|\varphi_x+\psi|^2\right\}dx+\frac{1}{2}\left(b-\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^1 \psi_x^2dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(h\circ\psi_x\right)(t)+\xi\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx\\
&= -\mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx-\mu_1\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx\\
&\quad-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(h'\circ\psi_x\right)(t)-\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx+\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(\psi_t(x,t))dx.
\end{aligned}$$

On déduit donc

$$\begin{aligned}
E'(t) = &-\mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx-\mu_1\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx\\
&-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(h'\circ\psi_x\right)(t)-\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx\\
&+\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(\psi_t(x,t))dx.
\end{aligned}$$

D'après les hypothéses **(H1)** et **(H2)**, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
E'(t) \leq &-\left(\mu_1-\frac{\xi}{\tau}\alpha_2\right)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx-\frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx\\
&-\mu_2\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(h'\circ\psi_x\right)(t).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Soit $G_2^*(s)$ la fonction conjuguée de la fonction convexe $G_2(s)$ définie par

$$G_2^*(s) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(st-G_2(t)). \tag{2.25}$$

Alors G_2^* est la transformée de Legendre de G_2, qui est donnée par,

$$G_2^*(s) = s(G_2^{'})^{-1}(s)-G_2[(G_2^{'})^{-1}(s)],\quad \forall s\geq 0. \tag{2.26}$$

(Pour plus de détails voir Arnold [28], p.61 à 62).
De (3.38), on peut écrire

$$st \leq G_2^*(s)+G_2(t),\quad \forall t,s\geq 0. \tag{2.27}$$

Puis, à partir de la définition de G_2, on obtient

$$G_2^*(s) = sg_2^{-1}(s)-G_2(g_2^{-1}(s)).$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
G_2^*(g_2(z(x,1,t)) &= z(x,1,t)g_2(z(x,1,t) - G_2(z(x,1,t)) \\
&\leq (1-\alpha_1)z(x,1,t)g_2(z(x,1,t).
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

En utilisant (2.24), (3.40) et (2.28), nous abtenons

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & -\left(\mu_1 - \frac{\xi}{\tau}\alpha_2\right)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx \\
& -\mu_2\int_0^1 (G_2(\psi_t) + G_2^*(g_2(z(x,1,t))))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' \circ \psi_x\right)(t) \\
\leq & \left(\mu_1 - \frac{\xi}{\tau}\alpha_2 - \mu_2\alpha_2\right)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx \\
& +\mu_2\int_0^1 G_2^*(g_2(z(x,1,t)))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h'o\psi_x\right)(t).
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

En utilisant (2.4) et (2.2.1), nous aurons

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & \left(\mu_1 - \frac{\xi}{\tau}\alpha_2 - \mu_2\alpha_2\right)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\
& -\left(\frac{\xi}{\tau}\alpha_1 - \mu_2(1-\alpha_1)\right)\int_0^1 z(x,1,t)g_2(z(x,1,t))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' \circ \psi_x\right)(t) \\
\leq & \ 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

2.3 Existence globale de la solution du problème posé

Le résultat principal, dans ce chapitre, est le théorème d'éxistence suivant :

Théorème 2.3.1 *On suppose que les hypothèses (H1),(H2) et (H3) sont réalisées. Alors, étant donné les couples de données initiales*

$$(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1)$$

et $f_0 \in H_0^1((0,1); H^1(0,1))$ qui vérifie la condition de compatibilité

$$f_0(.,0) = \psi_1,$$

Le problème (P_1) admet une solution faible vérifiant

$$
(*) \begin{cases}
\varphi \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), \quad \varphi_t \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(0,1)), \\
\psi \in H^2(-\tau,0; H_0^1(0,1)) \cap L^\infty_{loc}(-\tau,\infty; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), \\
\psi_t \in H^1(-\tau,0; H_0^1(0,1)) \cap L^\infty_{loc}(-\tau,\infty; H_0^1(0,1)), \\
\psi_{tt} \in L^2(-\tau,0; H_0^1(0,1)) \cap L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(0,1)).
\end{cases}
$$

Preuve

Durant toute la démonstration, on suppose que

$$\varphi_0,\ \psi_0 \in H^2 \cap H_0^1(0;1); \varphi_1,\ \psi_1 \in H_0^1(0;1) \ \text{ et } f_0 \in H_0^1((0;1), H^1(0;1)).$$

On va employer la méthode de Galerkin pour construire une solution globale du problème (P_1).

Nous suivrons la méthode dans [15] avec les changements nécessaires puisque nôtre problème est un système d'équations hyperboliques couplé.

Soit $T > 0$ fixé et on note par V_k à l'espace engendré par la partie $\{w_1; w_2; \ldots; w_k\}$ où $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une base de $H^2 \cap H_0^1$.

Maintenant, nous définissons pour $1 \leq j \leq k$ la suite $\phi_j(x, \rho)$ par :

$$\phi_j(x, 0) = w_j$$

Alors, nous pouvons l'étendre à un élément de $H^2 \cap H^1((0,1); H^1(0,1))$ et notons par Z_k à l'espace engendré par $\{\phi_1; \phi_2; \ldots; \phi_k\}$.

On cherche alors $\{\varphi_k, \psi_k, z_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ solution approchée du problème (P_1) sous la forme

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} g_{jk} w_j, \quad \psi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{g}_{jk} w_j, \quad z_k(t) = \sum_{j=1}^{k} h_{jk} \phi_j,$$

où les g_{jk}, $\tilde{g}_{jk}$ et h_{jk}, $j = 1, 2, \ldots, k$, étant à déterminer par les conditions :

$$(2.30) \qquad \begin{cases} \rho_1(\varphi_k''(t), w_j) + K(\varphi_{kx}(t), w_{jx}) - K(\psi_{kx}(t), w_j) = 0, \\ \rho_2(\psi_k''(t), w_j) - b(\psi_{kx}(t), w_{jx}) + K((\varphi_{kx} + \psi_k)(t), w_j) \\ +\mu_1(g_1(\psi_k'), w_j) - \displaystyle\int_0^t h(t-s)(\psi_{kx}(s), w_{jx}) ds + \mu_2(g_2(z_k(.,1)), w_j) = 0, \\ z_k(x, 0, t) = \psi_k'(x, t), \\ (\tau z_{kt} + z_{k\rho}, \phi_j) = 0, \\ 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Le système (2.30) d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires est à compléter par les conditions initiales :

$$(2.31) \qquad \varphi_k(0) = \varphi_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (\varphi_0, w_j) w_j \to \varphi_0 \quad \text{dans} \quad H^2 \cap H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

$$(2.32) \qquad \varphi_k'(0) = \varphi_{1k} = \sum_{j=1}^{k} (\varphi_1, w_j) w_j \to \varphi_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

$$(2.33) \qquad \psi_k(0) = \psi_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (\psi_0, w_j) w_j \to \psi_0 \quad \text{dans} \quad H^2 \cap H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

$$(2.34) \qquad \psi_k'(0) = \psi_{1k} = \sum_{j=1}^{k} (\psi_1, w_j) w_j \to \psi_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

et

$$(2.35) \quad z_k(\rho, 0) = z_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (f_0, \phi_j) \phi_j \to f_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1((0,1); H^1(0,1)) \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty.$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution de (2.30)-(2.35) dans un intervalle $[0, t_k]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_k = T$.

La première estimation :

On utilise le même calcul comme dans la démonstration du Lemme (2.9), on obtient,

$$(2.36) \qquad \begin{aligned} & E_k(t) + a_1 \int_0^t \int_0^1 \psi_k' g_1(\psi_k') dx ds + a_2 \int_0^t \int_0^1 z_k(x,1,t) g_2(z_k(x,1,s)) dx ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t h(s) \|\psi_{kx}(.,s)\|_2^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t (h' o \psi_{kx})(s) ds \leq E_k(0) \leq C, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_k(t) = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 {\varphi_k'}^2 + \rho_2 {\psi_k'}^2 + K |\varphi_{kx} + \psi_k|^2 \right\} dx \\ & + \frac{1}{2} (b - \int_0^t h(s) ds) \int_0^1 \psi_{kx}^2 dx + \frac{1}{2} (h' o \psi_{kx})(t) \\ & + \xi \int_0^1 \int_0^1 G_2(z_k(x,\rho,t)) d\rho dx, \end{aligned}$$

$$a_1 = \mu_1 - \frac{\xi}{\tau} \alpha_2 - \mu_2 \alpha_2 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{\xi}{\tau} \alpha_1 - \mu_2 (1 - \alpha_1).$$

Ces estimations nous permet de dire que la solution (φ_k, ψ_k, z_k) existe, de plus elle est globale dans $[0, +\infty[$.

De l'estimation (2.36), on obtient

$$(2.37) \qquad \varphi_k, \psi_k \quad \text{sont bornées dans} \quad L^\infty(0, T, H_0^1(0,1)),$$

$$(2.38) \qquad \varphi_k', \psi_k' \quad \text{sont bornées dans} \quad L^\infty(0, T, L^2(0,1)),$$

$$(2.39) \qquad \psi_k'(t) g_1(\psi_k'(t)) \quad \text{est bornée dans} \quad L^1((0,1) \times (0,T)),$$

$$(2.40) \qquad G_2(z_k(x,\rho,t)) \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty(0,T;L^1((0,1)\times(0,1))),$$

$$(2.41) \qquad z_k(x,1,t)g_2(z_k(x,1,t)) \quad \text{est bornée dans} \quad L^1((0,1)\times(0,T)).$$

Pour $T>0$.

La deuxiéme estimation :

Tout d'abord, on estime les termes $\varphi_k''(0)$ et $\psi_k''(0)$. On multiplie la première et la deuxième équation dans (2.30) respectivement par $g_{jk}''(t)$ et $\tilde{g}_{jk}''(t)$, on les somme en j de 1 à k et choisissant $t=0$, il vient :

$$\rho_1\|\varphi_k''(0)\|_2 \leq K(\|\varphi_{0kxx}\|_2 + \|\psi_{0kx}\|_2),$$

et

$$\rho_2\|\psi_k''(0)\|_2 \leq b\|\psi_{0kxx}\|_2 + K(\|\varphi_{0kx}\|_2 + \|\psi_{0k}\|_2) + \mu_1\|g_1(\psi_{1k})\|_2 + \mu_2\|g_2(z_{0k})\|_2.$$

D'aprés, (2.30), (2.31) et (2.35), on a donc

$$\|\varphi_k''(0)\|_2 \leq C.$$

Comme $(g_1(\psi_{1k})_k, (g_2(z_{0k}))_k$ sont bornés dans $L^2(0,1)$ d'aprés (2.31), (2.33), (2.34) et (2.35), d'où résulte que

$$\|\psi_k''(0)\|_2 \leq C.$$

On dérive la première et la deuxième équation dans (2.30) par rapport à t, on obtient

$$(2.42) \qquad (\rho_1\varphi_k'''(t) - K\varphi_{kxx}'(t) - K\psi_{kx}'(t), w_j) = 0,$$

et

$$(2.43) \qquad \begin{aligned} &(\rho_2\psi_k'''(t) - b\psi_{kxx}'(t) + K\varphi_{kx}'(t) + K\psi_k'(t) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)\psi_{kxx}(s)ds\right) \\ &+\mu_1\psi_k''(t)g_1'(\psi_k'(t)) + \mu_2 z_k'(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t)), w_j) = 0. \end{aligned}$$

On multiplie l'équation (2.42) par $g_{jk}''(t)$ et l'équation (2.43) par $\tilde{g}_{jk}''(t)$, on les somme en j de 1 à k, il résulte que

$$(2.44) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2\right) - K\int_0^1 (\varphi_{kx}' + \psi_k')_x\varphi_k'' dx = 0,$$

$$(2.45) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2\right) + K\int_0^1 (\varphi_{kx}' + \psi_k')\psi_k'' dx - h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t), \psi_{kx}'(t)) \\ &+h(0)\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 - \frac{d}{dt}\int_0^1 h'(t-s)(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t))ds + h'(0)(\psi_{kx}(t), \psi'_{kx}(t)) \\ &+\int_0^t h''(t-s)(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t))ds + \mu_1\int_0^1 \psi_k''^2(t)g_1'(\psi_k'(t))dx \\ &+\mu_2\int_0^1 \psi_k''(t)z_k'(x,1,t)g_2(z_k(x,1,t))dx = 0. \end{aligned}$$

De même, on dérive la quatrième équation dans (2.30) par rapport à t, on obtient

$$\left(\tau z_k''(t) + \frac{\partial}{\partial \rho} z_k', \phi_j\right) = 0. \tag{2.46}$$

On multiplie (2.46) par $h_{jk}'(t)$, l'on somme en j de 1 à k, il en résulte que

$$\frac{1}{2}\tau \frac{d}{dt}\|z_k'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|z_k'(t)\|_2^2 = 0. \tag{2.47}$$

On somme membre à membre les égalités (2.44), (2.45) et (2.47), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + K\|(\varphi_{kx}' + \psi_k')(t)\|_2^2 \\
&+\tau\|z_k'(.,.,t)\|_{L_2((0,1)\times(0,1))}^2\Big) + h(0)\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \mu_1\int_0^1 \psi_k''^2(t) g_1'\psi_k'(t))dx \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 |z_k'(x,1,t)|^2 dx = h(0)\frac{d}{dt}\left(\psi_{kx}(t), \psi_{kx}'(t)\right) - h'(0)(\psi_{kx}(t), \psi_{kx}'(t)) \\
&+\frac{d}{dt}\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t)\right)ds - \int_0^t h''(t-s)(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t))ds \\
&-\mu_2\int_0^1 \psi_k''(t) z_k'(x,1,t) g_2'(z_k'(x,1,t))dx + \frac{1}{2}\|\psi_k''(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

On utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young et (2.3), on obtient

$$\left|h'(0)(\psi_{kx}(t), \psi_{kx}'(t))\right| \leq \epsilon\|\psi_{kx}(t)\|_2^2 + \frac{h'(0)^2}{4\epsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2,$$

et

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^t h''(t-s)(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t))ds\Big| &\leq \|\psi_{kx}'(t)\|_2 \int_0^t |h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2 ds \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \varepsilon\|h''\|_{L^1}\int_0^t |h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2^2 ds.
\end{aligned}$$

Alors (2.48) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + K\|(\varphi_{kx}' + \psi_k')(t)\|_2^2 + \tau\|z_k'(.,.,t)\|_{L_2((0,1)\times(0,1))}^2\right) \\
&+\mu_1\int_0^1 \psi_k''^2(t) g_1'(\psi_k'(t))dx + c\int_0^1 |z_k'(x,1,t)|^2 dx + h(0)\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 \leq c'\|\psi_k''(t)\|_2^2 + \varepsilon\|\psi_{kx}(t)\|_2^2 \\
&\frac{h'(0)^2}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \varepsilon\|h''\|_{L^1}\int_0^t \big|h''(t-s)\big|\|\psi_{kx}(s)\|_2^2 ds \\
&+h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t), \psi_{kx}'(t)) + \frac{d}{dt}\int_0^t h'(t-s)(\psi_{kx}(s), \psi_{kx}'(t))ds.
\end{aligned}$$

Intégrant la dernière inégalité sur $(0;t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2+b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kx}'(t)+\psi_k'(t)\|_2^2+\tau\|z_k'(.,.,t)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\right)\\
&+\mu_1\int_0^t\int_0^1\psi_k''^2(s)g_1'(\psi_k'(s))dxds+c\int_0^t\int_0^1|z_k'(x,1,s)|^2dxds\\
&\leq\frac{1}{2}\left(\rho_1\|\varphi_k''(0)\|_2^2+\rho_2\|\psi_k''(0)\|_2^2+b\|\psi_{kx}'(0)\|_2^2+K\|\varphi_{kx}'(0)+\psi_k'(0)\|_2^2+\tau\|z_k'(.,.,0)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\right)\\
&+c'\int_0^t\|\psi_k''(s)\|_2^2ds+h(0)\left(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)\right)-h(0)\left(\psi_{kx}(0),\psi_{kx}'(0)\right)\\
&+\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}'(t)\right)ds+\left(\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{h'(0)^2}{4\varepsilon}-h(0)\right)\int_0^t\|\psi_{kx}'(s)\|_2^2ds\\
&+(\varepsilon+\varepsilon\|h''\|_{L^1}^2)\int_0^t\|\psi_{kx}(s)\|_2^2ds.
\end{aligned}$$

or

$$h(0)\left(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)\right)\leq\varepsilon\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+\frac{h(0)^2}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}(t)\|_2^2,$$

et

$$\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}'(t)\right)ds\leq\varepsilon\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+\frac{\zeta(0)\|h'\|_{L^1}\|h\|_\infty}{4\varepsilon}\int_0^t\|\psi_{kx}(s)\|_2^2ds.$$

On déduit donc

$$\begin{aligned}
&\rho_1\|\psi_k''(t)\|_2^2+\|\psi_k''(t)\|_2^2+\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kx}'(t)+\psi_k'(t)\|_2^2+\tau\|z_k'(.,.,t)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\\
&+\mu_1\int_0^t\int_0^1\psi''^2_k(t)g_1'(\psi_k'(t))dxds+c\int_0^t\int_0^1|z_k'(x,1,t)|^2dxds\leq M,
\end{aligned}$$

Pour tout $t\in[0,T]$ où M est une constante positive indépendante de $k\in\mathbb{N}$. Par conséquent, il résulte que

$$\varphi_k'',\psi_k''\quad\text{sont bornés dans}\quad L^\infty(0,T,L^2),\tag{2.49}$$

$$\varphi_k',\psi_k'\quad\text{sont bornés dans}\quad L^\infty(0,T;H_0^1),\tag{2.50}$$

$$z_k'\quad\text{est borné dans}\quad L^\infty(0,T,L^2((0,1)\times(0,1))).\tag{2.51}$$

La troisième estimation : Remplaçant w_j par $-w_{jxx}$ dans la première et la deuxième équation dans (2.30), aprés, en les multipliant respectivement par $g_{jk}'(t)$ et $\tilde{g}_{jk}'(t)$, et sommant chacune en j de 1 à k, il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\|\varphi_{kx}'\|_2^2\right)+K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)_x\varphi_{kxx}'dx=0,\tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}(2.53)\qquad &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi'_{kx}\|_2^2+b\|\psi_{kxx}\|_2^2\right)-K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)_x\psi'_{kxx}dx\\ &+\mu_1\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g_1'(\psi'_k(t))dx-\int_0^t h(t-s)(\psi_{kxx}(s),\psi'_{kxx}(t))ds\\ &+\mu_2\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t))dx=0.\end{aligned}$$

Par un calcul similaire de la preuve du Lemme (2.9), on aura

$$\begin{aligned}&\int_0^t h(t-s)(\psi_{kxx}(s),\psi'_{kxx}(t))ds+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &\qquad=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(s)ds\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2-(ho\psi_{kxx})(t)\right]+\frac{1}{2}(h'o\psi_{kxx})(t).\end{aligned}$$

Mais d'aprés l'égalité précédente, l'égalité (2.53) devient

$$\begin{aligned}(2.54)\qquad &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2+(ho\psi_{kxx})(t)\right)\\ &-K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)\psi'_{kxx}dx+\mu_1\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g_1'(\psi'_k(t))dx+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &-\frac{1}{2}(h'o\psi_{kxx})(t)+\mu_2\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t))dx=0.\end{aligned}$$

On Remplace ϕ_j par $-\phi_{jxx}$ dans la quatrième équation dans (2.30), aprés, on la multiplie par $h_{jk}(t)$, et on somme en j de 1 à k, Il vient :

$$(2.55)\qquad \frac{1}{2}\tau\frac{d}{dt}\|z_{kx}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|z_{kx}(t)\|_2^2=0.$$

Sommant membre à membre les égalités (2.52), (2.54) et (2.55), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(t)+\psi_{kx}(t)\|+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &+\tau\|z_{kx}(.,.,t)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\Big)+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(h'o\psi_{kxx})(t)+\mu_1\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g_1'(\psi'_k(t))dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1|z_{kx}(x,1,t)|^2dx=-\mu_2\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t))dx+\frac{1}{2}\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

On utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz, Young, et appliquant (2.3) , on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(t)+\psi_{kx}(t)\|+b\|\psi_{kx}(t)\|_2^2+\tau\|z_{kx}(.,.,t)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\Big)\\ &+\mu_1\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g_1'(\psi'_k(t))dx+c\int_0^1|z_{kx}(x,1,t)|^2dx\le c'\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Intégrant la dernière inégalité sur $(0;t)$ et utilisant le Lemme de Gronwall, il vient donc :

$$\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2 + K\|\varphi_{kxx}(t) + \psi_{kx}(t)\| + b\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2 + \tau\|z_{kx}(.,.,t)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))} \leq$$
$$e^{cT}\left(\rho_1\|\varphi'_{kx}(0)\|_2^2 + \rho_2\|\psi'_{kx}(0)\|_2^2 + K\|\varphi_{kxx}(0) + \psi_{kx}(0)\| + b\|\psi_{kxx}(0)\|_2^2 + \tau\|z_{kx}(.,.,0)\|^2_{L^2((0,1)\times(0,1))}\right).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et il résulte que

$$\varphi_k, \psi_k \quad \text{sont bornés dans} \quad L^\infty(0,T;H^2 \cap H_0^1(0,1)), \tag{2.56}$$

$$z_k \quad \text{est borné dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(0,1,L^2(0,1)), \tag{2.57}$$

Appliquant le théorème de Dunford-Petti, nous concluons de (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.49), (2.50), (2.51), (2.56) et (2.57), après avoir remplacé les suites (φ_k) ; (ψ_k) et (z_k) par une des sous-suites si nécessaire, il vient

$$\begin{cases} \varphi_k \to \varphi & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H^2 \cap H_0^1(0,1)) \\ \psi_k \to \psi & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H^2 \cap H_0^1(0,1)) \end{cases} \tag{2.58}$$

$$\begin{cases} \varphi'_k \to \varphi' & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(0,1)) \\ \psi'_k \to \psi' & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(0,1)), \end{cases} \tag{2.59}$$

$$\begin{cases} \varphi''_k \to \varphi'' & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,L^2(0,1)) \\ \psi''_k \to \psi'' & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,L^2(0,1)), \end{cases} \tag{2.60}$$

$$g_1(\psi'_k) \to \chi \quad \text{faible étoile dans} \quad L^2((0,1)\times(0,1)),$$

$$\begin{cases} z_k \to z & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H^1((0,1),L^2(0,1)) \\ z'_k \to z' & \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H^1((0,1),L^2(0,1)), \end{cases} \tag{2.61}$$

$$g_2(z_k(x,1,t) \to \gamma \quad \text{faible étoile} \quad L^2((0,1)\times(0,T)),$$

Pour des fonctions appropriées φ, $\psi \in L^\infty(0,T;H^2 \cap H_0^1(0,1))$; $z \in L^\infty(0;T;L^2((0;1) \times (0;1)))$; $\chi \in L^2((0;1)\times(0;T))$; $\psi \in L^2((0;1)\times(0;T))$ pour tout $T \geq 0$. Nous devrons montrer que $(\varphi;\psi;z)$ est une solution de (P'_1).

Par ailleurs, il résulte en particulier de (2.37) et (2.38), que

$$\begin{aligned} &(\psi'_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0;T;H_0^1(0,1)) \\ &(\psi'_k)_k \text{ est bornée dans } L^2(0;T;H_0^1(0,1)) \\ &(\psi''_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0;T;L^2(0,1)) \\ &(\psi''_k)_k \text{ est bornée dans } L^2(0;T;L^2(0;1)) \end{aligned}$$

Donc en particulier que $(\psi'_k)_k$ demeure dans un borné de $H^1(Q)$, où $Q = (0;1)\times(0;T)$.

Mais on sait que d'aprés le théorème d'Aubin-Lions [25] que

$$\text{l'injection } H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q) \text{ est compacte.}$$

Donc, on peut extraire une sous-suite $(\psi_v)_v$ de $(\psi_k)_k$ telle que

$$\psi_v' \to \psi' \;\text{ fort dans } L^2(Q).$$

Donc

$$\psi_v' \to \psi' \text{ fort est presque partout } \; L^2(Q). \tag{2.62}$$

De même nous obtenons

$$z_v \to z \text{ fort est presque pertout } L^2(Q). \tag{2.63}$$

On a besoin des résultats suivants

Lemme 2.3.1 *Pour tout $T > 0$, $g_1(\psi')$; $g_2(z(x,1,t)) \in L^1(Q)$ de plus, $\|g_1(\psi')\|_L^1(Q)$; $\|g_2(z(.,1,t))\|_L^1(Q) \leq K_1$, où K_1 est une constante indépendante de t.*

Lemme 2.3.2

$$g_1(\psi_k') \to g_1(\psi) \textit{ dans } L^1((0,1)\times(0,T)) \textit{ et } g_2(z_k) \to g_2(z) \textit{ dans } L^1((0,1)\times(0,T)).$$

On peut écrire donc

$$g_1(\psi_k') \to g_1(\psi') \text{ faible étoile dans } \; L^2(Q).$$

De même, on a

$$g_2(z_k) \to g_2(z) \text{ faible étoile dans } \; L^2(Q).$$

Ceci implique que

$$\int_0^T\int_0^1 g_1(\psi_k')v\,dxdt \to \int_0^T\int_0^1 g_1(\psi')v\,dxdt \text{ pour tout } v \in L^2(0,T,H_0^1) \tag{2.64}$$

$$\int_0^T\int_0^1 g_2(z_k)v\,dxdt \to \int_0^T\int_0^1 g_2(z)v\,dxdt \text{ pour tout } v \in L^2(0,T,H_0^1) \tag{2.65}$$

Lorsque $k \to \infty$ Il en résulte à la fois de (2.58), (2.59), (2.64),(2.65) et (2.61) que pour chaque u fixé, v fixé dans $L^2(0,T,H_0^1(0,1))$ et $w \in L^2(0,T,H_0^1(0,1)\times(0,1))$

$$\int_0^T\int_0^1 (\rho_1\varphi_k'' - K(\varphi_{kx}+\psi_k)_x)u\,dxdt \to \int_0^T\int_0^1 (\rho_1\varphi'' - K(\varphi_x+\psi)_x)u\,dxdt$$

$$\int_0^T\int_0^1 (\rho_2\psi_k'' - b\psi_{kxx} + K(\varphi_{kx}+\psi_k) + \int_0^t h(t-s)\psi_{kxx}(x,s)ds + \mu_1 g_1(\psi_k') + \mu_2 g_2(z_k)v\,dxdt$$
$$\to \int_0^T\int_0^1 (\rho_2\psi'' - b\psi_{xx} + K(\varphi_x+\psi) + \int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds + \mu_1 g_1(\psi') + \mu_2 g_2(z)v\,dxdt$$

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau z_k'+\frac{\partial}{\partial\rho}z_k)wdxd\rho dt\rightarrow\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau z'+\frac{\partial}{\partial\rho}z)wdxd\rho dt$$

Lorsque $k\rightarrow\infty$. On déduit donc,

$$\int_0^T\int_0^1(\rho_1\varphi''-K(\varphi_x+\psi)_x)udxdt=0$$

$$\int_0^T\int_0^1(\rho_2\psi''-b\psi_{xx}+K(\varphi_x+\psi)+\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds+\mu_1g_1(\psi')+\mu_2g_2(z)vdxdt=0$$

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau z'+\frac{\partial}{\partial\rho}z)wdxd\rho dt=0.$$

Alors, le problème (P_1) admet une solution globale $(\varphi;\psi)$.

Chapitre 3

Stabilité et l'existence globale de la solution du système de Timoshenko viscoélastique à la présence d'un terme de retard variable

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de la décroissance de l'énergie et l'existence globale de la solution du système de Timoshenko viscoélastique avec un terme de retard variable qui est de la forme :

$$
(\mathbf{P_{st}})\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt}(x;t) - K(\varphi_x+\psi)_x(x;t) = 0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\
\rho_2\psi_{tt}(x;t) - b\psi_{xx}(x;t) + K(\varphi_x+\psi)(x;t) + \mu_1(t)g_1(\psi_t(x;t)) & \\
+\mu_2(t)g_2(\psi_t(x;t-\tau(t))) + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x;s)ds = 0 & (x;t)\in]0,1[\times]0,+\infty[\\
\varphi(0;t) = \varphi(1;t) = \psi(0;t) = \psi(1;t) = 0 & t\in[0,+\infty[\\
\psi(x;0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x;0) = \psi_1(x) & x\in]0,1[\\
\varphi(x;0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x;0) = \varphi_1(x) & x\in]0,1[\\
\psi_t(x;t-\tau(0)) = f_0(x;t-\tau(0)) & (x;t)\in]0,1[\times]0,\tau(0)[,
\end{cases}
$$

où $\tau(t) > 0$ désigne le retard,$\varphi_0\,;\ \varphi_1\,;\ \psi_0\,;\ \psi_1\,;\ f_0$ sont des données qui appartiennent à un espace fonctionnel approprié.

3.1 Hypothèses

Pour établir nos résultats, nous avons besoin des hypothèses suivantes

(H1) $(*)$ $h:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ de class C^2 telle que :

$$h(0) = h_0 > 0; \qquad l = \int_0^{+\infty} h(s)ds < b.$$

(**) De plus, il existe une fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante de classe C^1 vérifie :

$$h'(s) \leq -\zeta(s)h(s), \quad \forall s \geq 0,$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \zeta(s)ds = +\infty.$$

(H2) μ_1 :$\mathbb{R}_+ \longrightarrow]0, +\infty[$ est une fonction croissante de la classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} \mu_1(\tau)d\tau = +\infty. \tag{3.1}$$

$$|\mu_1'(t)| \leq c\mu_1(t). \tag{3.2}$$

(H3) $\mu_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de la classe $C_1(\mathbb{R}_+)$

$$|\mu_2(t)| \leq \beta\mu_1(t), \tag{3.3}$$

$$|\mu_2'(t)| \leq \tilde{c}\mu_1(t). \tag{3.4}$$

Pour $0 < \beta < 1$ et $\tilde{c} > 0$.
(H4) g_1 :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
il existe ϵ' ; c_1 ; $c_2 > 0$ et une fonction convexe et croissante $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la classe $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(]0; +\infty[)$ vérifie

$$(*) \begin{cases} H(0) = 0 \quad \text{et } H \quad \text{linéaire sur } [0; \epsilon'] \text{ ou bien} \\ H'(0) = 0 \quad \text{et } H'' > 0 \quad \text{sur }]0; \epsilon'] \end{cases}$$

tels que

$$c_1|s| \leq |g_1(s)| \leq c_2|s| \text{ si } |s| \geq \epsilon', \tag{3.5}$$

$$s^2 + g_1^2(s) \leq H^{-1}(sg_1(s)) \text{ si } |s| \leq \epsilon', \tag{3.6}$$

$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire croissante de classe $C^1(\mathbb{R})$ telle que :
il existe c_3,α_1,$\alpha_2 > 0$

$$|g_2'(s)| \leq c_3, \tag{3.7}$$

$$\alpha_1 s g_2(s) \leq G_2(s) \leq \alpha_2 s g_1(s), \tag{3.8}$$

où

$$G_2(s) = \int_0^s g_2(r)dr,$$

(H5) τ est une fonction telle que :

$$\tau \in W^{2,\infty}([0,T]),\ \forall T > 0, \tag{3.9}$$

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1\ \forall t > 0, \tag{3.10}$$

où τ_0 et τ_1 sont deux constantes positives et d une constante vérifiant

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0, \tag{3.11}$$

(H6)

$$\beta < \frac{\alpha_1(1-d)}{\alpha_2(1-\alpha_1 d)}. \tag{3.12}$$

3.2 Etude de la décroissance de l'énergie du problème posé

Pour simplifier nôtre étude, nous aurons besoin, comme dans [38], de la nouvelle variable $z(x;\rho;t)$ définie comme suit

$$z(x;\rho;t) = \psi_t(x;t-\tau(t)\rho),\ x \in]0,1[,\ \rho \in]0,1[,\ t > 0. \tag{3.13}$$

De(3.13), on peut écrire

$$\tau(t)z_t(x;\rho;t) + (1-\tau'(t)\rho)z_\rho(x;\rho;t) = 0,\ (x;\rho;t) \in]0,1[\times]0,1[\times]0,+\infty[. \tag{3.14}$$

Par conséquent, le problème $(\mathbf{P_{st}})$ est écrit sous la forme suivante :

$$(\mathbf{P'_{st}}) \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x;t) - K(\varphi_x+\psi)_x(x;t) = 0 & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \rho_2\psi_{tt}(x;t) - b\psi_{xx}(x;t) + K(\varphi_x+\psi)(x;t) + \mu_1(t)g_1(\psi_t(x;t)) & \\ +\mu_2(t)g_2(z(x;1;t)) + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x;s)ds & (x;t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \tau(t)z_t(x;\rho;t) + (1-\tau'(t)\rho)z_\rho(x;\rho;t) = 0 & (x;\rho;t) \in]0,1[\times]0,1[\times]0,+\infty[\\ \varphi(0;t) = \varphi(1;t) = \psi(0;t) = \psi(1;t) = 0 & t \geq 0 \\ z(x;0;t) = \psi_t(x;t) & (x;t) \in]0;1[\times]0,+\infty[\\ \psi(x;0) = \psi_0(x),\quad \psi_t(x;0) = \psi_1(x) & x \in]0,1[\\ \varphi(x;0) = \varphi_0(x),\quad \varphi_t(x;0) = \varphi_1(x) & x \in]0,1[\\ z(x;\rho;0) = f_0(x;-\rho\tau(0)) & (x;\rho) \in]0,1[\times]0,1[, \end{cases}$$

On peut donc donner la définition de la fonction de l'énergie associée à la solution du problème $(\mathbf{P'_{st}})$, comme suit

Définition 3.2.1 *La fonction de l'énergie associée à la solution* (ψ, φ, z) *du problème* $(\mathbf{P}'_{\mathbf{st}})$ *notée* E*, est définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$\begin{aligned} E(t) = E(t, z, \varphi, \psi) = &\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + K|\varphi_x + \psi|^2\Big\}dx \\ &+\frac{1}{2}\Big(b - \int_0^t h(s)ds\Big)\int_0^1 \psi_x^2(x)dx + \frac{1}{2}(h \circ \psi_x)(t) \\ &+\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

ξ *est une fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$\xi(t) = \bar{\xi}\mu_1(t), \tag{3.16}$$

où $\bar{\xi}$ *est une constante positive vérifie*

$$\frac{\beta(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-d)} < \bar{\xi} < \frac{1-\alpha_2\beta}{\alpha_2}, \tag{3.17}$$

et

$$(h \circ \psi_x)(t) = \int_0^1\int_0^t h(t-s)\big(\psi_x(s) - \psi_x(t)\big)^2 ds dx.$$

Le résulat suivant nous donne la nature de l'énergie associée à la solution du problème $(\mathbf{P}'_{\mathbf{st}})$.

Lemme 3.2.1 *Soit* $(\varphi; \psi; z)$ *une solution du problème* $(\mathbf{P}'_{\mathbf{st}})$*. La fonction de l'énergie* E *définie par* (3.15)*, vérifie*

$$\begin{aligned} E'(t) \le &-\big(1 - \alpha_2\bar{\xi} - \alpha_2\beta\big)\mu_1(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t)dx \\ &-\big((1-\tau'(t))\bar{\xi}\alpha_1 - (1-\alpha_1)\beta\big)\mu_1(t)\int_0^1 z(x,1,t)g_2(z(x,1,t))dx \\ &+\frac{1}{2}\big(h' o \psi_x\big)(t) - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 \\ \le\ & 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Preuve

En multipliant la première équation du problème $(\mathbf{P}'_{\mathbf{st}})$ par φ_t et intégrant sur]0,1[, on obtient :

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx - K\int_0^1(\varphi_x + \psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx = 0. \tag{3.19}$$

On pose

$$I_1 = \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx, \quad I_2 = K\int_0^1(\varphi_x + \psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx.$$

Pour l'intégrale I_1, on remarque que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t\varphi_t) = \frac{d}{dt}(\varphi_t^2) = 2\varphi_{tt}\varphi_t,$$

d'où

$$I_1 = \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1\varphi_t^2(x,t)dx. \tag{3.20}$$

En intégrant I_2 par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &= K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx \\ &= K\int_0^1 \varphi_{xx}(x,t)\varphi_t(x,t)dx + K\int_0^1 \psi_x(x,t)\varphi_t(x,t)dx \\ &= -K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx - K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\varphi_x^2(x,t)dx - K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En remplaçant (3.20) et (3.21) dans (3.19), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1\varphi_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\varphi_x^2(x,t)dx + K\int_0^1 \psi(x,t)\varphi_{tx}(x,t)dx = 0. \tag{3.22}$$

En multipliant la deuxième équation du problème $(\mathbf{P'_{st}})$ par ψ_t, et intégrant sur (0,1), on obtient :

$$\begin{aligned} &\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx - b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t) + K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)(x,t)\psi_t(x,t)dx \\ &\quad +\mu_1(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx \\ &\quad +\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Posant

$$S_1 = \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx,\ \ S_2 = b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t)dx,\ \ S_3 = K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)(x,t)\psi_t(x,t)dx,$$

alors

$$S_1 = \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2(x,t)dx. \tag{3.24}$$

Pour S_2, En utilisant une intégration par parties, on aura

$$\begin{aligned} S_2 &= b\int_0^1 \psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t)dx = -b\int_0^1 \psi_x(x,t)\psi_{tx}(x,t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 b\psi_x^2(x,t)dx. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On peut écrire S_3 sous la forme

$$\begin{aligned} S_3 &= K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx + K\int_0^1 \psi(x,t)\psi_t(x,t)dx \\ &= K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 K\psi^2(x,t)dx. \end{aligned} \tag{3.26}$$

En remplaçant (3.26), (3.25) et (3.24) dans (3.23), on obtiendra

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\psi_t^2(x,t)dx + b\psi_x^2(x,t) + K\psi^2(x,t)\Big\}dx + K\int_0^1 \varphi_x(x,t)\psi_t(x,t)dx \\ &+\mu_1(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx \\ &+\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Or

$$\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)\psi_t(x,t)dsdx = -\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx. \tag{3.28}$$

Donc (3.27) devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\rho_2\psi_t^2(x,t) + K\psi^2(x,t) + b\psi_x^2(x,t)\Big\}dx + K\int_0^1 \psi_t(x,t)\varphi_x(x,t)dx \\ &+\mu_1(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_1(\psi_t(x,t))dx + \mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx \\ &-\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Sommant (3.22) et (3.29) membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big\{\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + K|\varphi_x+\psi|^2 + b\psi_x^2\Big\}dx \;\; + \mu_1(t)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\ &= -\mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx + \int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Le dernier terme dans la partie droite de (3.30) peut être réécrit comme suit :

$$\int_0^1\int_0^t h(t-s)\psi_x(x,s)\psi_{tx}(x,t)dsdx+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2$$
$$=\frac{d}{dt}\Big[\int_0^t\|\psi_x(.,t)\|_2^2-(ho\psi_x)(t)\Big]+\frac{1}{2}(h'o\psi_x)(t).$$

Donc l'égalité (3.30) devient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1\left\{\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+K|\varphi_x+\psi|^2+b\psi_x^2\right\}dx\right)\\&+\mu_1(t)\int_0^1\psi_t g_1(\psi_t)dx+\mu_2(t)\int_0^1\psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx\\&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|\psi_x(.,t)\|_2^2-(ho\psi_x)(t)\right]-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2\\&+\frac{1}{2}(h'o\psi_x)(t)\end{aligned}\tag{3.31}$$

Maintenant, En multipliant la troisième équation du probléme $(\mathbf{P'_{st}})$ par $\xi(t)g_2(z(x,\rho,t))$ et intégrant sur $(0,1)\times(0,1)$, On obtient

$$\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 g_2(z(x,\rho,t))z'(x,\rho,t)d\rho dx+\xi(t)\int_0^1\int_0^1(1-\tau'(t)\rho)z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t)d\rho dx=0.$$

Ceci implique que

$$\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 z'(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx=-\xi(t)\int_0^1\int_0^1(1-\tau'(t)\rho)z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t)d\rho dx,$$

et comme :

$$G_2(s)=\int_0^s g_2(r)dr,$$

alors

$$\begin{cases}z_\rho(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))=\dfrac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t)),\\ z_t(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))=\dfrac{d}{dt}G_2(z(x,\rho,t)).\end{cases}$$

Par conséquent ,ona

(3.32)

$$\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 z'(x,\rho,t)g_2(z(x,\rho,t))d\rho dx=-\xi(t)\int_0^1\int_0^1(1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t)))d\rho dx.$$

On a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx\Big)=\xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx\\&+\xi(t)\tau'(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx+\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1\frac{d}{dt}G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx.\end{aligned}\tag{3.33}$$

En remplaçant (3.33) dans (3.28), on obtiendra

$$\frac{d}{dt}(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx) = \xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx$$
$$+\xi(t)\tau'(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx - \xi(t)\int_0^1\int_0^1(1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t)))d\rho dx$$

$$\frac{d}{dt}(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx) = \xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx$$
$$-\xi(t)\int_0^1\int_0^1((1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}G_2(z(x,\rho,t)) - \tau'(t)G_2(z(x,\rho,t)))d\rho dx$$

$$\frac{d}{dt}(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx) = \xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx$$
$$-\xi(t)\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial\rho}((1-\tau'(t)\rho)G_2(z(x,\rho,t)))d\rho dx$$

$$= \xi(t)\tau'(t)\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx + \xi(t)\int_0^1(G_2(z(x,0,t) - G_2(z(x,1,t)))dx$$
$$+\xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))dxd\rho,$$

Par conséquent ,on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t)d\rho dx)\\
&= \xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx\\
&-\xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx + \xi(t)\int_0^1 G_2(z(x,0,t))dx.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

La somme de (3.31) et (3.34) membre à membre nous donne :

(3.35)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1\left\{\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+K|\varphi_x+\psi|^2\right\}dx \quad + \left(b-\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^1\psi_x^2dx + (ho\psi_x)(t)\right]\\
&\quad+\frac{d}{dt}(\xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))d\rho dx)\\
&= -\mu_2(t)\int_0^1\psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx - \mu_1(t)\int_0^1\psi_t g_1(\psi_t)dx\\
&\quad-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(h'o\psi_x)(t)\\
&\quad+\xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\rho,t)dxd\rho - \xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(x,1,t)dx + \xi(t)\int_0^1 G_2(\psi_t(x,t)dx
\end{aligned}$$

On déduit donc

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= -\mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx - \mu_1(t)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\
&-\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' o\psi_x\right)(t) \\
&+\xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))dxd\rho - \xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx \\
&+\xi(t)\int_0^1 G_2(\psi_t(x,t)dx.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Daprès hypothése (3.8), il résulte

$$
\begin{aligned}
E'(t) \le &-(\mu_1(t)-\alpha_2\xi(t))\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx - \mu_2(t)\int_0^1 \psi_t(x,t)g_2(z(x,1,t))dx \\
&+\xi'(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z(x,\rho,t))dxd\rho - \xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx \\
&+\xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' o\psi_x\right)(t)
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Soit $G_2^*(s)$ la fonction conjuguée de la fonction convexe $G_2(s)$ définie par

$$
G_2^*(s) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(st - G_2(t)). \tag{3.38}
$$

Alors G_2^* est la transformée de Legendre de G_2, qui est donnée par,

$$
G_2^*(s) = s(G_2^{'})^{-1}(s) - G_2[(G_2^{'})^{-1}(s)], \quad \forall s \ge 0. \tag{3.39}
$$

(Pour plus de détails voir Arnold [4], p.61 à 62) et Lasiecka [16].
De (3.38), on peut écrire

$$
st \le G_2^*(s) + G_2(t), \quad \forall t, s \ge 0. \tag{3.40}
$$

Puis, à partir de la définition de G_2, on obtient :

$$
G_2^*(s) = sg_2^{-1}(s) - G_2(g_2^{-1}(s)).
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
G_2^*(g_2(z(x,1,t)) &= z(x,1,t)g_2(z(x,1,t) - G_2(z(x,1,t)) \\
&\le (1-\alpha_1)z(x,1,t)g_2(z(x,1,t).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

En utilisant(3.40) ,(3.39) nous abtenons :
(3.42)

$$
\begin{aligned}
E'(t) \le -(\mu_1(t)-\alpha_2\xi(t))\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx + \mu_2(t)\int_0^1 [G_2(\psi_t(x,t)) + G_2^*(g_2(z(x,1,t)))]dx \\
-\xi(t)(1-\tau'(t))\int_0^1 G_2(z(x,1,t))dx - \frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' o\psi_x(t)\right).
\end{aligned}
$$

En utilisant (3.8) et (3.41), nous aurons

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & -(1-\alpha_2\overline{\xi}-\alpha_2\beta)\mu_1(t)\int_0^1 \psi_t g_1(\psi_t)dx \\
& -((1-\tau'(t))\overline{\xi}\alpha_1-(1-\alpha_1)\beta)\mu_1(t)\int_0^1 z(x,1,t)g_2(z(x,1,t)))dx \\
& -\frac{1}{2}h(t)\|\psi_x(.,t)\|_2^2+\frac{1}{2}(h'o\psi_x) \\
\leq & \ 0.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

3.3 Existence globale de la solution du probléme posè

Le résultat principal, dans ce chapitre, est le théorème d'éxistence suivant :

Théorème 3.3.1 *On suppose que les hypothèses (H1),(H2) et (H3) sont réalisées. Alors, étant donné les couples de données initiales*

$$(\varphi_0,\varphi_1),(\psi_0,\psi_1)\in(H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))\times H_0^1(0,1)$$

et $f_0\in H_0^1((0,1);H^1(0,1))$ qui vérifie la condition de compatibilité

$$f_0(.,0)=\psi_1,$$

Le problème (P_1) admet une solution faible vérifiant

$$
(*)\begin{cases}
\varphi\in L^\infty_{loc}(0,\infty;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)), \quad \varphi_t\in L^\infty_{loc}(0,\infty;H_0^1(0,1)),\\
\psi\in H^2(-\tau,0;H_0^1(0,1))\cap L^\infty_{loc}(-\tau,\infty;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)),\\
\psi_t\in H^1(-\tau,0;H_0^1(0,1))\cap L^\infty_{loc}(-\tau,\infty;H_0^1(0,1)),\\
\psi_{tt}\in L^2(-\tau,0;H_0^1(0,1))\cap L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(0,1)).
\end{cases}
$$

Preuve

Durant toute la démonstration, On suppose que

$$\varphi_0,\ \psi_0\in H^2\cap H_0^1(0;1);\varphi_1,\ \psi_1\in H_0^1(0;1)\ \text{ et }\ f_0\in H_0^1((0;1),H^1(0;1)).$$

On va employer la méthode de Galerkin pour construire une solution globale du problème (P_{st}).

Nous suivrons la méthode dans [15] avec les changements nécessaires puisque nôtre problème est un système d'équations hyperboliques couplé.

Soit $T>0$ fixé et on note par V_k à l'espace engendré par la partie $\{w_1;w_2;\ldots;w_k\}$ où $\{w_k,k\in\mathbb{N}\}$ est une base de $H^2\cap H_0^1$.

Maintenant, nous définissons pour $1 \leq j \leq k$ la suite $\phi_j(x, \rho)$ par :

$$\phi_j(x, 0) = w_j$$

Alors, nous pouvons l'étendre à un élément de $H^2 \cap H^1((0,1); H^1(0,1))$ et notons par Z_k à l'espace engendré par $\{\phi_1; \phi_2; \ldots; \phi_k\}$.
On cherche alors $\{\varphi_k, \psi_k, z_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ solution approchée du problème (P_{st}) sous la forme

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} g_{jk} w_j, \quad \psi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{g}_{jk} w_j, \quad z_k(t) = \sum_{j=1}^{k} h_{jk} \phi_j,$$

Où les g_{jk}, $\tilde{g}_{jk}$ et h_{jk}, $j = 1, 2, \ldots, k$, étant à déterminer par les conditions :

$$(3.44) \qquad \begin{cases} \rho_1(\varphi_k''(t), w_j) + K(\varphi_{kx}(t), w_{jx}) - K(\psi_{kx}(t), w_j) = 0, \\ \rho_2(\varphi_k''(t), w_j) - b(\psi_{kx}(t), w_{jx}) + k((\varphi_{kx} + \psi_k)(t), w_j) + \mu_1(t)(g_1(\psi_k'), w_j), \\ -\displaystyle\int_0^t h(t-s)(\psi_{kx}(s), w_{jx}) ds + \mu_2(t)(g_2(z_k(.,1)), w_j) = 0, \\ z_k(x, 0, t) = \psi_k'(x, t), \\ (\tau(t) z_{kt} + (1 - \tau'(t)\rho) z_{k\rho}, \phi_j) = 0, \\ 1 \leq j \leq k, \end{cases}$$

Le système (3.44) d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires est à compléter par les conditions initiales :

$$(3.45) \qquad \varphi_k(0) = \varphi_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (\varphi_0, w_j) w_j \to \varphi_0 \quad \text{dans} \quad H^2 \cap H_0^1 \quad \text{lorsque} k \to \infty,$$

$$(3.46) \qquad \varphi_k'(0) = \varphi_{1k} = \sum_{j=1}^{k} (\varphi_1, w_j) w_j \to \varphi_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

$$(3.47) \qquad \psi_k(0) = \psi_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (\psi_0, w_j) w_j \to \psi_0 \quad \text{dans} \quad H^2 \cap H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

$$(3.48) \qquad \psi_k'(0) = \psi_{1k} = \sum_{j=1}^{k} (\psi_1, w_j) w_j \to \psi_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1 \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

et

$$(3.49) \quad z_k(\rho, 0) = z_{0k} = \sum_{j=1}^{k} (f_0, \phi_j) \phi_j \to f_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1((0,1); H^1(0,1)) \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty.$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution de (3.44)-(3.49) dans un intervalle $[0, t_k]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_k = T$.

La première estimation :

On utilise le même calcul comme dans la démonstration du Lemme (3.18), on obtient,

$$\begin{aligned} E_k(t) &+ \int_0^t \int_0^1 a_1(s)\psi'_k g_1(\psi'_k)dxds + \int_0^t \int_0^1 a_2(s)z_k(x,1,t)g_2(z_k(x,1,s))dxds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t h(s)\|\psi_{kx}(.,s)\|_2^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^t (h'o\psi_{kx})(s)ds \le E_k(0) \le C, \end{aligned} \tag{3.50}$$

où

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\rho_1 {\varphi'_k}^2 + \rho_2 {\psi'_k}^2 + K|\varphi_{kx} + \psi_k|^2\right\} dx \\ &+\frac{1}{2}\big(b - \int_0^t h(s)ds\big)\int_0^1 \psi_{kx}^2 dx + \frac{1}{2}(h'o\psi_{kx})(t) + \xi(t)\tau(t)\int_0^1\int_0^1 G_2(z_k(x,\rho,t))d\rho dx. \end{aligned}$$

$$a_1(t) = \mu_1(t)\big(1 - \alpha_2\overline{\xi} - \beta\alpha_2\big) \quad \text{et} \quad a_2(t) = \mu_1(t)\big(\alpha_1\overline{\xi}(1-\tau'(t)) - (1-\alpha_1)\beta\big).$$

Ces estimations nous permet de dire que la solution (φ_k, ψ_k, z_k) existe, de plus elle est globale dans $[0, +\infty[$.

De l'estimation (2.41), on obtient

$$\varphi_k, \psi_k \text{ sont bornées dans } \quad L^\infty(0,T,H_0^1(0,1)), \tag{3.51}$$

$$\varphi'_k, \psi'_k \text{ sont bornées dans } \quad L^\infty(0,T,L^2(0,1)), \tag{3.52}$$

$$\psi'_k(t)g_1(\psi'_k(t)) \text{ sont bornées dans } \quad L^1((0,1)\times(0,T)), \tag{3.53}$$

$$G_2(z_k(x,\rho,t)) \text{ sont bornées dans } \quad L^\infty(0,T;L^1((0,1)\times(0,1))), \tag{3.54}$$

$$\mu_1(t)z_k(x,1,t)g_2(z_k(x,1,t)) \text{ sont bornées dans } \quad L^1((0,1)\times(0,T)), \tag{3.55}$$

pour $T > 0$.

La deuxiéme estimation :

Tout d'abord, on estime les termes $\varphi''_k(0)$ et $\psi''_k(0)$. On multiplie la première et la deuxième équation dans (3.44) respectivement par $g''_{jk}(t)$ et $\tilde{g}''_{jk}(t)$, on les somme en j de 1 à k et choisissant $t = 0$, il vient :

$$\rho_1\|\varphi''_k(0)\|_2 \le K(\|\varphi_{0kxx}\|_2 + \|\psi_{0kx}\|_2),$$

et

$$\rho_2\|\psi_k''(0)\|_2 \leq b\|\psi_{0kxx}\|_2 + K(\|\varphi_{0kx}\|_2 + \|\psi_{0k}\|_2) + \mu_1(0)\|g_1(\psi_{1k})\|_2 + \mu_2(0)\|g_2(z_{0k})\|_2.$$

D'aprés,(3.45), (3.46) et (3.50), on a donc

$$\|\varphi_k''(0)\|_2 \leq C.$$

Comme $(g_1(\psi_{1k})_k, (g_2(z_{0k}))_k$ sont bornés dans $L^2(0,1)$ d'aprés **(H1)**, (3.45), (3.47), (3.48) et (3.49), d'où résulte que

$$\|\psi_k''(0)\|_2 \leq C.$$

On dérive la première et la deuxième équation dans (3.44) par rapport à t, on obtient

$$(\rho_1\varphi_k'''(t) - K\varphi_{kxx}'(t) - K\psi_{kx}'(t), w_j) = 0, \tag{3.56}$$

et

$$\begin{aligned}
&\big(\rho_2\psi_k'''(t) - b\psi_{kxx}'(t) + K\varphi_{kx}'(t) + K\psi_k'(t) + \mu_1'(t)g_1(\psi_k'(t)) + \mu_1(t)\psi_k''(t)g_1'(\psi_k'(t))\big)\\
&+\mu_2'(t)g_2(z_k(x,1,t)) + \mu_2(t)z_k'(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t))\big)\\
&\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)\psi_{kxx}(s)ds\right), w_j) = 0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

On multiplie l'équation (3.56) par $g_{jk}''(t)$ et l'équation (3.57) par $\tilde{g}_{jk}''(t)$, on les somme en j de 1 à k, il résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2\Big) - K\int_0^1 (\varphi_{kx}' + \psi_k')_x\varphi_k''dx = 0 \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\varphi_{kx}'(t)\|_2^2\right) + K\int_0^1 (\varphi_{kx}' + \psi_k')\psi_k''dx\\
&+\mu_1'(t)\int_0^1 \psi_k''(t)g_1(\psi_k'(t))dx + \mu_1(t)\int_0^1 \psi_k''^2(t)g_1'(\psi_k'(t))dx\\
&+\mu_2'(t)\int_0^1 \psi_k''(t)g_2(z_k(x,1,t))dx + \mu_2(t)\int_0^1 \psi_k''(t)z_k'(x,1,t)g_2'(z_k(x,1,t))dx\\
&-h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)) + h'(0)\|\varphi_{kx}'(t)\|_2^2 + h'(0)(\psi_{kx}(t),\psi'_{kx}(t))\\
&-\frac{d}{dt}\int_0^1 h'(t-s)(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}(t))ds + \int_0^t h''(t-s)(\psi_{kx}(s),\psi'_{kx}(t))ds = 0.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

De même, on dérive la quatrième équation dans (3.44) par rapport à t, on obtient

$$(\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)' z_k'(t) + \frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}z_k''(t) + \frac{\partial}{\partial\rho}z_k', \phi_j) = 0. \tag{3.60}$$

On multiplie (3.60) par $h'_{jk}(t)$, l'on somme en j de 1 à k, il en résulte que

$$\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)' \|z'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\frac{d}{dt}\|z'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|z'_k(t)\|_2^2 = 0, \tag{3.61}$$

d'ou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)' \|z'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z'_k(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|z'_k(t)\|_2^2 = 0. \tag{3.62}$$

En intégrant sur (0,1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)' \|z'_k(t)\|_2^2 d\rho + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z'_k(t)\|_2^2\right) d\rho \\ +\frac{1}{2}\|z'_k(x,1,t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\psi''(.,t)\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.63}$$

On somme membre à membre les égalités (3.58), (3.59) et (2.57), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi''_k(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi''_k(t)\|_2^2 + b\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2 + K\|(\varphi'_{kx}+\psi'_k)(t)\|_2^2 \\ &+\int_0^1 \frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z'_k(.,\rho,t)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho\Big) + \mu_1(t)\int_0^1 \psi''^2_k(t)g'_1\psi'_k(t))dx \\ &+\frac{1}{2}\int_0^1 |z'_k(x,1,t)|_2^2 + h(0)\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2 \\ &= -\mu'_1(t)\int_0^1 \psi''_k(t)g'_1\psi'_k(t))dx - \mu_2(t)\int_0^1 \psi''_k(t)z'_k(x,1,t)g'_2(z'_k(x,1,t))dx \\ &\quad +\mu'_2(t)\int_0^1 \psi''_k(t)g_2(z_k(x,1,t))dx + \frac{1}{2}\|\psi''_k(.,t)\|_2^2 + h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t),\psi'_{kx}(t)) \\ &\quad -h'(0)(\psi_{kx}(t),\psi'_{kx}(t)) + \frac{d}{dt}\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s),\psi'_{kx}(t)\right)ds \\ &\quad -\int_0^t h''(t-s)(\psi_{kx}(s),\psi'_{kx}(t))ds - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)' \|z'_k(.,\rho,t)\|_2^2 d\rho.\end{aligned} \tag{3.64}$$

On utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young et (3.7), on obtient

$$\left|h'(0)(\psi_{kx}(t),\psi'_{kx}(t))\right| \le \epsilon\|\psi_{kx}(t)\|_2^2 + \frac{h'(0)^2}{4\epsilon}\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t h''(t-s)((\psi_{kx}(s),\psi'_{kx}(t)))ds\right| &\le \|\psi'_{kx}(t)\|_2\int_0^t |h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2 ds \\ &\le \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2 + \varepsilon\|h''\|_{L^1}\int_0^t |h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2^2 ds\end{aligned}$$

Alors (3.64) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2+b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+K\|(\varphi_{kx}'+\psi_k')(t)\|_2^2\\
&\quad+\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_k'(.,\rho,t)\|_{L^2(0,1)}^2d\rho\Big)\quad+\mu_1(t)\int_0^1\psi_k''^2(t)g_1'(\psi_k'(t))dx\\
&\quad+c\int_0^1|z_k'(x,1,t)|^2dx+h(0)\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2\\
&\le c'\|\psi_k''(t)\|_2^2+\varepsilon\|\psi_{kx}(t)\|_2^2+\frac{h'(0)^2}{4\epsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2\quad+\varepsilon\|h''\|_{L^1}\int_0^t|h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2^2ds\\
&\quad+\frac{1}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2+\frac{d}{dt}\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}'(t)\right)ds\\
&\quad+c''\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_k'(x,1,t)\|_{L^2(0,1)}^2d\rho+h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t))\\
&\quad+|\mu_1'(t)|\int_0^1|\psi_k''(t)||g_1(\psi_k'(t))|dx\quad+|\mu_2'(t)|\int_0^1|\psi_k''(t)||g_2(z_k'(x,1,t))|dx
\end{aligned}$$

Maintenant, nous estimons les deux derniers termes de l'inégalité précédente, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1|\psi_k''(t)||g_1(\psi_k'(t))|dx\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1|g_1(\psi_k'(t))|^2dx\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{|\psi_k'|\ge1}|g_1(\psi_k'(t))|^2dx+\frac{1}{2}\int_{|\psi_k'|\le1}|g_1(\psi_k'(t))|^2dx\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+c\int_{|\psi_k'|\ge1}\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t))dx+\frac{1}{2}\int_0^1H^{-1}(\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t)))dx\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+c\int_{|\psi_k'|\ge1}\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t))dx+cH^{-1}\left(\int_0^1(\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t)))dx\right)\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+c\int_{|\psi_k'|\ge1}\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t))dx+c'H^*(1)+c''\int_0^1(\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t)))dx\\
&\le\frac{1}{2}\int_0^1|\psi_k''(t)|^2dx+c'H^*(1)+c''\int_0^1(\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t)))dx
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
|\mu_1'(t)|\int_0^1|\psi_k''(t)||g_1(\psi_k'(t))|dx&\le c\|\psi_k''(t)\|^2+c'|\mu_1'(t)|H^*(1)+c''|\mu_1'(t)|\int_0^1(\psi_k'(t)g_1(\psi_k'(t)))dx\\
&\le c\|\psi_k''(t)\|^2+c'|\mu_1'(t)|H^*(1)+c''(-E').
\end{aligned}$$

De (3.7)($|g_2(s)| \leq c|s| \forall s \in \mathbb{R}$),on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\psi_k''(t)||g_2(z_k(x,1,t))|dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\psi_k''(t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |g_2(z_k(x,1,t))|^2dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\psi_k''(t)|^2dx + c\int_0^1 |z_k(x,1,t)g_2(z_k(x,1,t))|dx\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|\mu_2'(t)|\int_0^1 |\psi_k''(t)||g_2(z_k(x,1,t))|dx &\leq c\|\psi_k''(t)\|^2 + c'|\mu_2'(t)|\int_0^1 z_k(x,1,t)g_2(z_k(x,1,t))dx \\ &\leq c\|\psi_k''(t)\|^2 + c'(-E').\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + K\|(\varphi_{kx}' + \psi_k')(t)\|_2^2 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_k'(x,\rho,t)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho) + \mu_1(t)\int_0^1 \psi_k''^2(t)g_1'(\psi_k'(t))dx \\ &\quad + c\int_0^1 |z_k'(x,1,t)|^2dx + h(0)\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 \\ &\leq c'\|\psi_k''(t)\|_2^2 + \varepsilon\|\psi_{kx}(t)\|_2^2 + \frac{[h'(0)^2]}{4\epsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \varepsilon\|h''\|_{L^1}\int_0^t |h''(t-s)|\|\psi_{kx}(s)\|_2^2ds \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt}\int_0^t h'(t-s)(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}'(t))ds \\ &\quad + c''\int_0^1 \frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_k'(.,\rho,t)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho + h(0)\frac{d}{dt}(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)) + c'(-E') + c'|\mu_1'(t)|H^*(1).\end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité sur (0 ; t), on en déduit que
(3.65)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\rho_1\|\varphi_k''(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_k''(t)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + K\|(\varphi_{kx}' + \psi_k')(t)\|_2^2 \\ &+ \int_0^1 \frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_k'(.,\rho,t)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho + \int_0^t\int_0^1 \mu_1(t)\psi_k''^2(t)g_1'(\psi_k'(t))dxds \\ &+ c\int_0^t\int_0^1 |z_k'(x,1,t)|^2dxds \leq \rho_1\|\varphi_k''(0)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_k''(0)\|_2^2 + b\|\psi_{kx}'(0)\|_2^2 \\ &+ K\|(\varphi_{kx}'(0) + \psi_k'(0))\|_2^2 + h(0)(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)) - h(0)(\psi_{kx}(0),\psi_{kx}'(0)) + c'\int_0^t \|\psi_k''(s)\|_2^2ds \\ &+ \int_0^1 \frac{\tau(0)}{1-\tau'(0)\rho}\|z_k'(.,\rho,0)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho + \int_0^t h'(t-s)(\psi_{kx}(s),\psi_{kx}'(t))ds \\ &+ \left(\frac{1}{4\epsilon} + \frac{h'(0)^2}{4\epsilon} - h(0)\right)\int_0^t \|\psi_{kx}'\|_2^2ds + (\varepsilon + \varepsilon\|h''\|_{L^1}^2)\int_0^t \|\psi_{kx}\|_2^2ds \\ &+ \int_0^t\int_0^1 \frac{\tau(s)}{1-\tau'(s)\rho}\|z_k'(.,\rho,s)\|_{L^2(0,1)}^2 d\rho + c_1(E(0)) + c_2\mu_1(0),\end{aligned}$$

$$h(0)(\psi_{kx}(t),\psi_{kx}'(t)) \leq \varepsilon\|\psi_{kx}'(t)\|_2^2 + \frac{h'(0)^2}{4\epsilon}\|\psi_{kx}(t)\|_2^2.$$

$$\int_0^t h'(t-s)\left(\psi_{kx}(s),\psi'_{kx}(t)\right)ds \le \varepsilon\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+\frac{\zeta(0)\|h'\|_{L^1}\|h'\|_{L^\infty}}{4\epsilon}\int_0^1\|\psi_{kx}(t)\|_2^2ds.$$

Intégrant la dernière inégalité sur $(0;t)$ et utilisant le Lemme de Gronwall, il vient donc :

$$\begin{aligned}&\rho_1\|\varphi''_k(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi''_k(t)\|_2^2+b\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|(\varphi'_{kx}+\psi'_k)(t)\|_2^2\\ &+\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z'_k(x,1,t)\|^2_{L_2(0,1)}d\rho+\int_0^t\int_0^1\mu_1(t)\psi''^2_k(t)g'_1(\psi'_k(t))dxds\\ &+c\int_0^t\int_0^1|z'_k(x,1,t)|^2dxds\le M,\end{aligned}\tag{3.66}$$

Pour tout $t\in[0,T]$, où M est une constante positive indépendante de$k\in\mathbb{N}$, et il résulte que

$$\varphi''_k,\psi''_k \text{ est borné dans } L^\infty(0,T,L^2),\tag{3.67}$$

$$\varphi'_k,\psi'_k \text{ est borné dans } L^\infty(0,T;H_0^1),\tag{3.68}$$

$$\tau(t)z'_k \text{ est borné dans } L^\infty(0,T,L^2((0,1)\times(0,1)),\tag{3.69}$$

La troisième estimation :

Remplacant w_j par $-w_jxx$ dans la première et la deuxième équation dans (2.30), aprés, en les multipliant respectivement par $g_{jk}(t)$ et $\tilde{g}_{jk}(t)$, et sommant chacune en j de 1 à k, il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\|\varphi'_{kx}\|_2^2\right)+K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)_x\varphi'_{kxx}dx=0\tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi'_{kx}\|_2^2+b\|\psi_{kxx}\|_2^2\right)-K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)_x\psi'_{kxx}dx\\ &+\mu_1(t)\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g'_1(\psi'_k(t))dx+\mu_2(t)\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g'_2(z_k(x,1,t))dx\\ &-\int_0^t h(t-s)(\psi_{kxx}(s),\psi'_{kxx}(t))ds=0.\end{aligned}\tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t h(t-s)(\psi_{kxx}(s),\psi'_{kxx}(t))ds+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &\qquad=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(s)ds\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2-(ho\psi_{kxx})(t)\right]+\frac{1}{2}(h'o\psi_{kxx})(t).\end{aligned}\tag{3.72}$$

En conséquence, l'égalité (3.71) devient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2+(ho\psi_{kxx})(t)\right)\\ &+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2-\frac{1}{2}(h'o\psi_{kxx})(t)+K\int_0^1(\varphi_{kx}+\psi_k)\psi'_{kxx}dx\\ &+\mu_1(t)\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g'_1(\psi'_k(t))dx+\mu_2(t)\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g'_2(z_k(x,1,t))dx=0.\end{aligned}\tag{3.73}$$

On Remplace ϕ_j par $-\phi_{jxx}$ dans la quatrième équation dans (3.44), aprés, on la multiplie par $h_{jk}(t)$, et on somme en j de 1 à k, Il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(t)\|_2^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)'\|z_{kx}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|z_{kx}(t)\|_2^2=0. \tag{3.74}$$

En intégrant la dernière égalité sur $(0\,;\,1)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_{L_2(0,1)}^2\right]d\rho\\ &-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)'\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_{L_2(0,1)}^2d\rho+\frac{1}{2}\|z_{kx}(.,1,t)\|_{L_2(0,1)}^2\\ &=\frac{1}{2}\|\psi'_{kx}(.,t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.75}$$

Sommant membre à membre les égalités (3.70), (3.73) et (3.75), on obtient :
(3.76)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(t)+\psi_{kx}(t)\|\\ &+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &+(ho\psi_{kxx})(t)+\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_{L_2(0,1)}^2\Bigg]d\rho\\ &+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &+\mu_1(t)\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g'_1(\psi'_k(t))dx+\frac{1}{2}\int_0^1|z_{kx}(x,1,t)|^2dx=-\mu_2(t)\int_0^1\psi'_{kx}(t)z_{kx}(x,1,t)g'_2(z_k(x,1,t))dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\right)'\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_2^2d\rho+\frac{1}{2}\|\psi'_{kx}(.,t)\|_2^2.\end{aligned}$$

On utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, (3.8) , on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(t)+\psi_{kx}(t)\|\\ &+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &+(ho\psi_{kxx})(t)+\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_{L_2(0,1)}^2\Bigg]d\rho\\ &+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\ &+\frac{1}{2}h(t)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2+\mu_1(t)\int_0^1|\psi'_{kx}(t)|^2g'_1(\psi'_k(t))dx\\ &+c\int_0^1|z_{kx}(x,1,t)|^2dx\leq c'\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+c''\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,t)\|_2^2d\rho\end{aligned} \tag{3.77}$$

En intégrant la dernière inégalité sur $(0\,;\,t)$, nous concluons que

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\|\varphi'_{kx}(t)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(t)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(t)+\psi_{kx}(t)\|+(b-\int_0^t h(s)ds)\|\psi_{kxx}(t)\|_2^2\\
&\quad+(ho\psi_{kxx})(t)+\int_0^1\frac{\tau(t)}{1-\tau'(t)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,t)\|^2_{L_2(0,1)}d\rho\\
&\leq e^{cT}\Big(\rho_1\|\varphi'_{kx}(0)\|_2^2+\rho_2\|\psi'_{kx}(0)\|_2^2+K\|\varphi_{kxx}(0)+\psi_{kx}(0)\|\\
&\quad+b\|\psi_{kxx}(0)\|_2^2+\int_0^1\frac{\tau(0)}{1-\tau'(0)\rho}\|z_{kx}(.,\rho,0)\|^2_{Lr(0,1)\times(0,1))}d\rho\Big)
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, et il résulte que

$$\varphi_k,\psi_k \text{ sont bornés dans } L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1(0,1)),\tag{3.79}$$

$$z_k \quad \text{est borné dans } L^\infty(0,T,H_0^1(0,1,L^2(0,1)),\tag{3.80}$$

En appliquant le théorème de Dunford-Petti, nous concluons de (2.37), (3.53), (3.54), (3.55), (3.60), (3.61),(3.63),(3.69) et(3.70), après avoir remplacé les suites φ_k ; ψ_k et z_k par une sous-suites si nécessaire, il vient

$$
\begin{cases}
\varphi_k\to\varphi \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H^2\cap H_0^1(0,1))\\
\psi_k\to\psi \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H^2\cap H_0^1(0,1))
\end{cases}
\tag{3.81}
$$

$$
\begin{cases}
\varphi'_k\to\varphi' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H_0^1(0,1))\\
\psi'_k\to\psi' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H_0^1(0,1))\\
\\
\varphi''_k\to\varphi'' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,L^2(0,1))\\
\psi''_k\to\psi'' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,L^2(0,1))
\end{cases}
\tag{3.82}
$$

$$g_1(\psi'_k)\to\ \chi \text{ faible étoile dans } L^2((0,1)\times(0,1);\mu_1),$$

$$
\begin{cases}
z_k\to z \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H^1((0,1),L^2(0,1))\\
z'_k\to z' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T,H^1((0,1),L^2(0,1))
\end{cases}
\tag{3.83}
$$

$$g_2(z_k(x,1,t)\to\ \gamma \text{ faible étoile dans } \quad L^2((0,1)\times(0,T);\mu_1),$$

Pour des fonctions appropriées $\varphi,\psi\in L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1(0,1))$; $z\in L^(0;T;L2((0;1)(0;1)))$; $\chi\in L^2((0;1)\times(0;T);\mu_1)$; $\psi\in L^2((0;1)\times(0;T);\mu_1)$ $(L^2((0;1)\times(0;T);\mu_1)$ l'espace des fonctions de carré intégrable avec le poid μ_1), pour tout $T\geq 0$. Nous devrons montrer que $(\varphi;\psi;z)$ est une solution de (P'_{st}).
Par ailleurs, il résuite en particulier de (3.53) et (3.54), que

$$
\begin{aligned}
&(\psi'_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0;T;H_0^1(0,1))\\
&(\psi'_k)_k \text{ est bornée dans } L^2(0;T;H_0^1(0,1))\\
&(\psi''_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0;T;L^2(0,1))\\
&(\psi''_k)_k \text{ est bornée dans } L^2(0;T;L^2(0;1))
\end{aligned}
$$

Donc en particulier que $(\psi'_k)_k$ demeure dans un borné de $H^1(Q)$, où $Q = (0;1) \times (0;T)$. Mais on sait que d'aprés le théorème d'Aubin-Lions [25] que

$$\text{l'injection } H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q) \text{ est compacte.}$$

Donc, on peut extraire une sous-suite $(\psi_v)_v$ de $(\psi_k)_k$ telle que

$$\psi'_v \to \psi' \ \text{ fort dans } Ł^2(Q).$$

Donc

$$\psi'_v \to \psi' \text{ fort est presque partout } \ L^2(Q). \tag{3.84}$$

De même nous obtenons

$$z_v \to z \text{ fort est presque pertout } L^2(Q). \tag{3.85}$$

On a besoin des résultats suivants

Lemme 3.3.1 *Pour chaque* $T > 0, g_1(\psi')$ *;* $g_2(z(x,1,t)) \in L^1(Q)$ *et* $\|g_1(\psi')\|_{L^1(Q)}$ *;* $\|g_2(z(.,1,t))\|_{L^1(Q)} \leq K_1$*, où* K_1 *est une constante indépendante de* t*.*

Lemme 3.3.2

$$g_1(\psi'_k) \to g_1(\psi) \in L^1((0,1) \times (0,T)) \ \textit{et} \ g_2(z_k) \to g_2(z) \in L^1((0,1) \times (0,T)).$$

Donc

$$g_1(\psi'_k) \to g_1(\psi') \text{ faible étoile dans } \ L^2(Q).$$

De même, on a

$$g_2(z_k) \to g_2(z) \text{ faible étoile dans } \ L^2(Q).$$

Ceci implique que

$$\int_0^T \int_0^1 \mu_1(t) g_1(\psi'_k) v dx dt \to \int_0^T \int_0^1 \mu_1(t) g_1(\psi') v dx dt \text{ pour tout } v \in L^2(0,T,H_0^1) \tag{3.86}$$

$$\int_0^T \int_0^1 g_2(z_k) v dx dt \to \int_0^T \int_0^1 g_2(z) v dx dt \text{ pour tout } v \in L^2(0,T,H_0^1) \tag{3.87}$$

Il en résulte à la fois de (3.80), (3.81), (3.86),(3.87) et (3.82) que pour chaque u fixé ; v fixé dans $L^2(0,T,H_0^1(0,1))$ et $w \in L^2(0,T,H_0^1(0,1) \times (0,1))$

$$\int_0^T \int_0^1 (\rho_1 \varphi''_k - K(\varphi_{kx} + \psi_k)_x) u dx dt \to \int_0^T \int_0^1 (\rho_1 \varphi'' - K(\varphi_x + \psi)_x) u dx dt$$

$$\int_0^T\int_0^1(\rho_2\psi_k''-b\psi_{kxx}+K(\varphi_{kx}+\psi_k)+\int_0^t h(t-s)\psi_{kxx}(x,s)ds+\mu_1g_1(\psi_k')+\mu_2g_2(z_k)vdxdt$$
$$\to\int_0^T\int_0^1(\rho_2\psi''-b\psi_{xx}+K(\varphi_x+\psi)+\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds+\mu_1g_1(\psi')+\mu_2g_2(z)vdxdt$$
$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau(t)z_k'+(1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}z_k)wdxd\rho dt\to\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau(t)z'+(1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}z)wdxd\rho dt$$

Lorsque $k\to\infty$. On déduit donc,

$$\int_0^T\int_0^1(\rho_1\varphi''-K(\varphi_x+\psi)_x)udxdt=0$$

$$\int_0^T\int_0^1(\rho_2\psi''-b\psi_{xx}+K(\varphi_x+\psi)+\int_0^t h(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds+\mu_1g_1(\psi')+\mu_2g_2(z))vdxdt=0$$
$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1(\tau(t)z'+(1-\tau'(t)\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}z)wdxd\rho dt=0,\quad w\in L^2(0,T,H_0^1((0,1)\times(0,1)).$$

Alors, le problème (P_{st}) admet une solution globale $(\varphi;\psi)$.

Bibliographie

[1] F. Alabau-Boussouira, *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control,* Nonlinear Diff. Equa. Appl., **14** (2007), 643-669.

[2] F. Alabau-Boussouira, *On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems,* Appl. Math. Optim., **51** (2005), 61-105.

[3] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, et al, & R. Byrne, *Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory System,* ACC, San Francisco, (1993), 3106-3107.

[4] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mecanics,* Springer-Verlag, New York, 1989.

[5] F. Amar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Munoz Rivera, and R. Racke. *Energy decay for Timoshenko systems of memory type,* J. Diff. Equations, **194(1)** (2003), 82-115.

[6] Belkacem Said Houari and Yamina Laskri, *A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback,* journal Applied Mathematics and Computation, 217, 6, 2857-2869, 2010.

[7] A. Benaissa and A. Guesmia, *Energy decay for wave equations of ϕ-Laplacian type with weakly nonlinear dissipation.* Electron. J. Differ. Equations **2008** ;1-22.

[8] H. Brezis, Analyse fonctionnelle et application, Ed Masson (1983).

[9] A. Benaissa , M. Bahlil *Global existence and energy decay of solution to a nonlinear Timoshenko beam system with a delay term.* Taiwanesse J. Math.2014 ;18 :1411-1437.

[10] A. Benaissa, A. Benguessoum, SA. Messaodi,*Global existence and energy decay of solution to a viscoelastic wave equation with a delay term in the non-linearinternal feedback.* Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2014 ;5 :1-26.

[11] M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti and I. Lasiecka, *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction,* J. Diff. Equa., **236** (2007), 407-459.

[12] G. Chen, *Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, Part I,* SIAM J. Control Optim., **17** (1979), 66-81.

[13] G. Chen, *Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, Part II,* SIAM J. Control Optim., **19** (1981),114-122.

[14] F. Conrad & M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedbacks,* Ann. Inst. Henri Poincaré, **11** (1994)-5, 485-515.

[15] C. M. Dafermos, *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations,* in "Nonlinear Evolution Equations", M. G. Crandall Ed., Academic Press, New York, (1978), 103-123.

[16] M. Daoulatli, I. Lasiecka and D. Toundykov, *Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions,* Disc. Conti. Dyna. Syst., **2** (2009), 67-95.

[17] R. Datko, J. Lagnese & M.P. Polis, *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations,* SIAM J. Control Optim. **24** (1986), 152-156.

[18] M. Eller, J. E. Lagnese & S. Nicaise, *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping,* Computational. Appl. Math., **21** (2002), 135-165.

[19] H.D. Fernández Sare, J.E. Muñoz Rivera, *Stability of Timoshenko systems with past history* , J. Math. Anal. Appl. 339 (1)(2008) 482-502.

[20] A. Guesmia & S. A. Messaoudi, *General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping,* Math. Methods Appl. Sci. **32** (2009)-16, 2102-2122.

[21] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems,* Research Notes in Mathematics, vol. 122. Pitman : Boston, MA, 1985 ; 161-179.

[22] Z. J. Han and G. Q. Xu, *Exponential stability of timoshenko beam system with delay terms in boundary feedbacks,* ESAIM Control Optim., **17** (2011), 552-574.

[23] T. Kato, *Linear and quasilinear equations of evolution of hyperbolic type,* In : Hyparbolicity, C.I.M.E., Summer Sch, Vol 72, Heideberg : Springer ; 2011.p.125-191.

[24] J. U. Kim, Y. Renardy, *Boundary control of the Timoshenko beam,* SIAM J. Control Optim., **25** (1987), 1417-1429.

[25] T. Kato, Abstract differential equations and nonlinear mixed problems. Lezioni Fermiane, [Fermi

[26] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method* , Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[27] I. Lasiecka & D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary dampin,* Diff. Inte. Equa., **6** (1993), 507-533.

[28] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* , Dunod, Paris 1969.

[29] W. J. Liu & E. Zuazua, *Decay rates for dissipative wave equations,* Ricerche di Matematica, **XLVIII** (1999), 61-75.

[30] I. Lasiecka, Mathematical control theory of coupled PDE's, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, **75** (2002).

[31] I. Lasiecka and D. Toundykov, *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source,* Nonlinear Analysis, **64** (2006), 1757-1797.

[32] Y. Laskri, B. Said-Houari, *A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback,* Appl. Math. Comput. **217** (2010)-6, 2857-2869.

[33] P. Martinez, J. Vancostenoble, *Optimality of energy estimates for the wave equation with nonlinear boundary velocity feedbacks,* SIAM J. Control Optim. **39** (2000)-3, 776-797.

[34] S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa, *On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation*, Math. Meth. Appl. Sci., **32** (2009), 454-469.

[35] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability*, J. Math. Anal. Appl., **276** (2002), 248-276.

[36] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Global stability for damped Timoshenko systems,* Discrete Contin. Dyn. Syst., **9** (2003), 1625-1639.

[37] M. Nakao, *Decay ofsolutions ofsome nonlinear evolution equations,* J. Math. Anal. Appl., **60** (1977), 542-549.

[38] S. Nicaise & C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks,* SIAM J. Control Optim. **45** (2006)-5, 1561-1585.

[39] Park, J. Y. & Park, S. H, *General decay for a nonlinear beam equation with weak dissipation,* J. Math. Phys. 2010 ;**51** :1-8. 073508.

[40] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings,* Applied Math Letters, **18** (2005), 535-541.

[41] F.G. Shinskey, Process Control Systems, McGraw-Hill Book Company, 1967.

[42] I.H. Suh & Z. Bien, *Use of time delay action in the controller design,* IEEE Trans. Autom. Control **25** (1980) 600-603.

[43] Salim A.Messaoudi, Belkacem Said-Houari,*Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III,* Journal of Mathematical Analysis and Applications.2008.

[44] A. Soufyane, A. Wehbe, *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping,* Electron. J. Differential Equations 2003 (29) (2003) 1-14.

[45] Timoshenko S. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars,* Philos. Mag. 1921 ;41 ;744-746.

[46] Q. C. Zhong, *Robust Control of Time-delay Systems,* London : Springer, 2006.

[47] E. Zuazua, *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems,* Asymptot. Anal., **1** (1988), 161-185.