MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'informatique
Département de Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES
Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par :
CHAKI Abdelmadjid

THEME :

Fonctions de Green pour les EDP

Soutenu septembre 2021

Devant le jury composé de :

M BOUZIT.H	Président	MACA	Université de Mostaganem
MME ABLAOUI.N	Examinateur		Université de Mostaganem
MME OULDALI.S	Encadreur		Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2020-2021

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes vifs remerciements :

***A DIEU** le Tout Puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces années d'étude.*

***A MME OULDALI.S** Chargée de cours, pour avoir accepté de me guider dans mon travail et de m'avoir accordé son attention, sa confiance, sa patience, ses conseils et surtout pour sa gentillesse.*

Qu'elle accepte mes sincères remerciements et l'expression de mon profond respect.

***M BOUZIT.H** et **MME ABLAOUI.N** pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

Je remercie tous les enseignants de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique de Mostaganem, particulièrement ceux du département des Mathématiques informatiques pour la qualité des enseignements reçus et les innombrables soutiens durant tout le cursus universitaire.

Enfin, mes sincères remerciements à tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à Tous et à Toutes

Dédicace

Je dédie ce modeste travail A :

Ma mère

À la mémoire de mon père

Mes sœurs et mes frères

Chaque membre de ma famille

A mon amie : Amel

A ceux qu'un jour, par un mot ou un conseil m'ont aidé à me ressourcer et ainsi terminer mon projet de fin d'étude dans les meilleures conditions. Mes amis proches.

Ce travail est également dédié à mes collègues d'études et toute la promotion de la promotion de Filière mathématiques,option : Modélisation, contrôle et optimisation " 2020-2021 "

Résumé

Dans ce travail, on a présenté un traitement précis de la fonction de Green pour certaines EDP. On a donné quelques concepts liés aux notions de base de la théorie des distributions. Ensuite on a calculé la fonction de Green dans IR, on a évoqué également le Développement de la fonction de Green selon une base des fonctions propres aprés être passé par le Problème auto-adjoint.

On a déterminé les fonctions de Green de problèmes simples comme les équations de Laplace, de Poisson et de Helmholtz ; la démarche nous permettra de mettre en évidence une formulation intéressante de ces problèmes.

Abstract :

In this work, an accurate treatment of Green's function for some DEPs was presented we went through a few concepts related to the basic notions and the theory of distributions. Then we calculated the Green function of in IR, we also mentioned the Development of the Green function according to a base of own functions after having passed through the Self-Assistant Problem. Green's functions are determined from simple problems such as the equations of Laplace, Poisson and Helmholtz ; the process will allow us to identify an interesting formulation of these problem.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

En mathématiques et en physique, une fonction de Green est une solution (également appelée solution élémentaire ou solution fondamentale) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.
Ces « fonctions » de Green, qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme.
- Notre compréhension des phénoménes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui sont notées en abrégé EDP, Par exemple les systèmes physiques les plus souvent rencontrés dans la vie, se décrivent habituellement par systèmes d'EDP (l'opérateur de Laplace, de Helmholtz, ...)
L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et d'écrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions. Une méthode de résolution des EDP est constitué par les fonctions de Green, ce qu'on a illustré dans ce travail .
Dans le premier chapitre, on trouve les notions de base nécessaires à la compréhension de notre travail, dans le seconde, on expose la théorie des distributions, ce qui permettra de préciser la notion de fonctions de

Green ; le troisième chapitre est consacré à l'étude de ces fonctions de Green en dimension 1, 2 et 3 et de déterminer dans le quatrième chapitre les fonctions de Green de problèmes simples comme les équations de Laplace de Poisson et de Helmholtz ; la démarche nous permettra de mettre en évidence une formulation intéressante de ces problèmes.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on trouve les notions de base et ce qui permettra de préciser la notion de fonction de Green.
[1], [4]

1.2 Notions de base

1.2.1 Fonction harmoniques

Définition 1.2.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* u *une fonction* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. *On dit que* u *est harmonique sur* Ω *si* u *est de classe* C^∞ *sur* Ω *et si* $\Delta u \equiv 0$ *sur* Ω, *où* Δu *est le Laplacien de* u *dans* R^n *défini par*

$$\Delta u(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Exemple 1.2.1 *Les fonctions complexes f et g_n, $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :*

$$f(x,y) = e^{x+iy}, \;\; g_n(x,y) = (x+iy)^n.$$

1.2.2 Fonction de Bessel

Définition 1.2.2 *Soit $v \geq 0$, on appelle équation de Bessel d'indice v, l'équation suivante sur* $]0, \infty[$:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 - v^2) f(x) = 0 \qquad (B)$$

Définition 1.2.3 *On appelle fonction de Bessel de première espèce d'indice v la fonction J_v définie par la série suivante (convergente dans tout le plan complexe) :*

$$J_v(x) = (\frac{x}{2})^v \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (v+p)!} x^{2p}$$

Définition 1.2.4 *On appelle fonction de Bessel de seconde espèce d'indice v la fonction Y_v définie par :*

$$Y_v(x) = \lim_{\alpha \to v} \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(x) - J_{-\alpha(x)}}{\sin(\alpha\pi)}$$

Définition 1.2.5 *Soient* $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$ *et* $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *La ligne droite passant par* a *et admettant le vecteur directeur* v *est paramétrée comme suit :*

$$\{a + tv : t \in \mathbb{R}\}$$

Définition 1.2.6 *Soit la fonction réelle* g *définie par* $g(t) =, f(a + tv)$, *de domaine de définition* $D(g) = \{t \in \mathbb{R} : a + tv \in E\}$.
Si g *est dérivable en* $t = 0$, *on dit que* f *est dérivable en* a *suivant le vecteur* v. *De plus* $g'(0)$ *est appelé la dérivée de* f *en* a *suivant* v *ou encore la directionnelle de* f *en* a *suivant* v, *que l'on note*

$$Df(a, v) \ ou \ \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

Ainsi

$$Df(a, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

1.2.3 Les fonctions radiales

C'est une classe de fonctions spéciales. Leur réponse croit ou décroit de façon monotone par rapport à la distance d'un point central. Le centre, la distance, et la forme de la fonction à base radiale sont les paramètres du modèle qui est linéaire s'ils sont fixes.
Une fonction à base radiale typique est de la forme :

$$h(x) = exp\left(-\frac{(x - c)^2}{r^2} \right) \tag{1.1}$$

Ces paramètres sont le centre c et le rayon r. Une fonction à base radiale Gaussienne décroît quand la distance par rapport au centre augmente. A l'opposé, une fonction à base radiale multiquadratique croit la distance par rapport au centre augmente. Elle a la forme suivante :

$$h(x) = \frac{\sqrt{r^2 + (x - c)}}{r^2}$$

1.2.4 Les équations différentielles ordinaires (EDO) :

Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction ; elle se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue et ses dérivées successives :

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.2}$$

On dit que l'équation différentielle est d'ordre n, où n est l'ordre de dérivations le plus élevé qui apparaît dans l'équation.
Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \tag{1.3}$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Une équation différentielle linéaire est homogène, (ou sans second membre), si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0 \tag{1.4}$$

1.2.5 Les équations aux dérivées partielles (EDP) :

Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant, la fonction à plusieurs variables $u(x_1, ..., x_n)$ est ses dérivées partielles.

$$F(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}...) = 0. \tag{1.5}$$

où F est une fonction de plusieurs variables. Considérons les variables indépendantes $(x_1, ..., x_n)$ appartenant à un domaine Ω convenable de R^n.

L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé.

La solution d'une EDP est une fonction de plusieurs variables. Par conséquent, le domaine sur lequel on résout l'EDP joue un rôle essentiel et il est important de le connaitre dès le début.

En général, il existe des conditions au bord (c'est à dire des conditions sur la fonction en tout point du bord du domaine), des conditions initiales (lorsque l'une des variables représente le temps par exemple, on possède des informations sur la fonction à $t = 0$), etc.

Les EDP proviennent de la modélisation mathématique, c'est à dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences : physique, chimie, biologie, finance...

Les EDP les plus utilisées en physique sont de second ordre pour l'espace, et de premier ou de second ordre pour le temps.

Beaucoup d'équations de la Physique, comme par exemple l'équation des ondes, l'équation de Laplace, l'équation de la chaleur, l'équation de Schrodinger etc..., peuvent être traitées grâce à la méthode de séparation des variables qui ramène ces équations aux dérivées partielles à des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$\alpha(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \beta(x)\frac{du}{dx} + \gamma(x)u(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in C \tag{1.6}$$

équations dont on cherche les solutions u satisfaisant à des conditions imposées par le problème physique étudié.

1.2.6 Équations différentielles et opérateurs

L'équation (1.2) peut s'écrire sous la forme :

$$L(u) = f(x; y; ...) \tag{1.7}$$

où L est un opérateur différentiel, $f(x; y; :::)$ est une fonction donnée et u est une fonction à déterminer.
Un opérateur L est linéaire si et seulement si $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$ quelque soient les nombres réels a, b et les fonctions $u\ et\ v$.

Si en plus $f(x; y; ...) = 0$, on dit alors que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène.

1.2.7 Opérateur de Sturm-Liouville :

L'opérateur de Sturm Liouville est la forme la plus générale d'opérateur différentiel de second ordre qui peut être écrit sous la forme d'équation.

$$Lu = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u(x) = 0 \tag{1.8}$$

Beaucoup d'équations les plus importantes en physique mathématique sont des équations de S-L.

Par exemple,

$$p(x) = 1, q(x) = 0; \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad \text{équation } \textit{de Laplace}. \tag{1.9}$$

$$p(x) = 1, q(x) = k^2; \frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0 \qquad \text{équation } \textit{de Helmholtz} \tag{1.10}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + l(l+1)u = 0 \qquad \text{équation } \textit{de } \text{Légendre.} \tag{1.11}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2\alpha u = 0, \qquad \text{équation } \textit{de Hermite}. \tag{1.12}$$

$$x\frac{d^2u}{dx^2} - (1-x)\frac{du}{dx} + \alpha u = 0, \qquad \text{équation } \textit{de Laguerre}. \tag{1.13}$$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2-n^2)u = 0, \qquad \textit{quation de Bessel}. \tag{1.14}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \omega_0^2 u = 0, \qquad \text{équation } \textit{d'oscillateur harmonique simple}. \tag{1.15}$$

Remarque 1.2.1 *Il convient de noter que toute équation différentielle linéaire de second ordre peut être changée en forme d'équation de SL.*

CHAPITRE 2

LES DISTRIBUTIONS

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente la théorie des distributions dont on a besoin pour déterminer les fonctions de Green [2].

2.2 Les espaces $C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq +\infty$

2.2.1 Support d'une fonction continue

Définition 2.2.1 *Soit $u \in C^0(\Omega)$. Le support de u est le sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1) Supp $u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$.

2) $x_0 \notin \operatorname{supp} u \Leftrightarrow \exists V_{x_0} : u(x) = 0, \forall x \in V_{x_0}$.

3) $(\operatorname{supp} u)^c$ *est le plus grand ouvert où u est nulle.*

Proposition 2.2.1 *Les propriétés suivantes sont aisées à vérifier*

$$\begin{cases} supp\, u = \emptyset \Leftrightarrow u \equiv 0 \, dans\, \Omega, \\ supp(u.v) \subset supp\, u \cap supp\, v, \\ supp\, \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \subset supp\, u, \; j = 1, ..., n, \; si\, u \in C^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2.2 Les espaces $C_0^k(\Omega)$

Définition 2.2.2

1) Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_0^k(\Omega)$ désigne l'ensemble des $u \in C^k(\Omega)$ tels que $supp\, u$ est un compact contenu dans Ω.

2) Si K est un compact de Ω, $C_0^K(K)$ désigne l'ensemble u de $C_0^k(\Omega)$ tels que $supp\, u \subset K$.

2.3 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ si*

1. φ est de classe C^∞ sur Ω.

2. il existe un compact $K \subset \Omega$; tel que $supp\, \varphi \subset K$.

- *φ est appelée fonction test et $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions tests.*

Remarque 2.3.1

1. Le compact K n'est pas le même pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2. En fait si K est un compact fixé, dans Ω on note

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega);\, supp\,\varphi \subset K\}$$

On a alors

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K\subset\Omega \\ K\ compact}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Exemple 2.3.1 *D'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha\, exp\Big(\dfrac{1}{x^2-1}\Big) & si\ |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ 0 \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

(i) $supp\,\varphi \subset [-1, 1]$.

(ii) $\varphi \in c^\infty(\mathbb{R})$.

2.4 Notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.4.1 *On dit qu'une suite (φ_j) de fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ est convergente vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si*

1. Il existe $K \subset\subset \Omega$; $supp\,\varphi_j \subset K$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$,

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite des dérivées $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge uniformément sur K vers la dérivées correspondante $\partial^\alpha \varphi$.

$$i.e : \sup_{x\in k}|\partial^{\alpha}\varphi_j(x) - \partial^{\alpha}\varphi(x)| \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.5 Définition d'une distribution

Définition 2.5.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que :*
Pour tout compact K de Ω il existe $C_k > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$|T(\varphi)| \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K}|\partial^{\alpha} \varphi(x)|, \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

- *L'ensemble des distributions sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ on note $\langle T, \varphi\rangle$ au lieu de $T(\varphi)$ et le symbole $\langle , \rangle$ est appelé crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Remarque 2.5.1 *On a l'équivalence entre les quatres propriétés suivantes :*
1. T est une distribution sur Ω.
2. T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour tout compact K de Ω, la restriction de T à $\mathcal{D}(K)$ est continue.
3. T est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.
4. Pour toute suite (φ_j) de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\varphi_j \to 0 \, dans \, \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \langle T, \varphi_j\rangle \to 0 \, dans \, K$$

Rappelons qu'une fonction localement sommable est telle que pour tout ensemble borné, l'intégrale $\int_I |f(x)| \, dx$ est convergente. On vérifie trés facilement qu'une telle fonction définit une distribution en posant $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \varphi(x) \, dx$.

Définition 2.5.2 *On appelle distribution régulière une distribution associée à une fonction localement sommable par la formule*

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \;\; pour \;\; \varphi \in D(\mathbb{R})$$

si f est une fonction d'une seule variable et par la formule :

$$T(\varphi) = \int ... \int_{\mathbb{R}^p} f(x_1, ...x_p)\varphi(x_1...x_p)dx_1...dx_p \;\; pour \;\; \varphi \in D(\mathbb{R}^p)$$

si f est une fonction de p variables. On notera T_f la distribution régulière associée à f. On a $T_{f_1} = T_{f_2}$ si et seulement si $f_1 = f_2$ presque partout.

Exemple 2.5.1 Distribution définie par une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on lui associe la distribution T_f définie par,

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\Omega} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.2}$$

T_f est bien définie et c'est une distribution.
En effet, si $K \subset\subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}_k(\Omega)$ on a

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leq \sup_{x\in k} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\,dx \leq C \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

- *En particulier, toute fonction continue sur Ω définit une distribution sur Ω.*

Exemple 2.5.2 La distribution de Dirac

Soit $a \in \Omega$. *On pose*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

L'application δ_a *est bien une distribution. En effet*

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Exemple 2.5.3 La distribution " valeur principale"

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *n'est pas localement intégrable sur* $\mathbb{R}$; *cependant on peut lui associer une distribution appelée valeur principale de* $\dfrac{1}{x}$, *comme suit :*

$$\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

- *La distribution* $vp\,\frac{1}{x}$ *est bien définie.*

2.6 Ordre d'une distribution

Remarque 2.6.1 *L'entier* m *de la définition (2.5.1) dépend, en général, du compact* K.

Définition 2.6.1

- *Si l'entier* m *de la définition (2.5.1) est le même pour tous les compacts* K *de* Ω, *on dit que la distribution* T *est d'ordre* m.

- *L'ensemble des distributions d'ordre* m *est noté* $\mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$.
- *On pose*

$$\mathcal{D}'^{F}(\Omega) = \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup}\mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$$

C'est l'espace des distributions ***d'ordre fini***.

- *On dit que* T *est d'ordre exactement* m *si* $T \in \mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$ *mais* $T \in \mathcal{D}'^{(m-1)}(\Omega)$.
- *Toute distribution définie par une fonction* $L^1_{loc}(\Omega)$ *est d'ordre zéro.*
- *Montrons que* $vp\,\frac{1}{x}$ *n'est pas d'ordre zéro.*

Si elle l'était on aura

$$\left|\langle vp\,\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq C\,\underset{x\in k}{sup}|\varphi(x)|,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(K)$$

Pour $n \geq 1$, *considérons la suite* $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\varphi_n(x) = 1\,si\,x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right],\ \varphi_n(x) = 0\,si\,x \leq \frac{1}{2n}\,ou\,x \geq 2,\ 0 \leq \varphi_n \leq 1$$

On a $sup_{\mathbb{R}}|\varphi_n| = 1$.

D'autre part, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$ *on a*

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = \int_{1/2n}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx \geq \int_{1/n}^{1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x} = ln\,n$$

- $vp\,\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'^{(1)}(\mathbb{R})$.

où $\mathcal{D}'^{(1)}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des distributions d'ordre 1.*

2.7 Opérations sur les distributions

2.7.1 Dérivation des distributions

Définition 2.7.1 *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *La forme linéaire* $\partial T/\partial x_j$ *sur* $\mathcal{D}(\Omega)$ *définit par*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution appelée dérivée partielle, au sens des distributions, de T *par rapport à la variable* x_j.

Théorème 2.7.1 ***(Dérivation)***

Toutes distribution T *a des dérivées successives de tous les ordres et on a la formule de dérivation*

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.3}$$

- *La formule est appelée dérivation au sens des distributions.*

Propriètés 2.7.1 *La dérivé d'une distribution est une distribution, on a*

$$|\langle D^{\alpha} T, \varphi \rangle| = |T, D^{\alpha} \varphi| \leq C_k \sum_{|j| \leq n} sup|\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\psi|$$

avec :

$$\partial^{\alpha}\partial^{\beta} \varphi = \partial^{\alpha+\beta} \varphi = \partial^{\gamma} \varphi$$

$$\leq C_k \sum_{|\gamma| \leq n+|\alpha|} sup|\partial^{\alpha}\varphi(x)| \; et \; D^{\alpha}T \in D'(\Omega)$$

Sachant que :

$$\langle D^{\alpha} T, \varphi \rangle := \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle$$

Remarque 2.7.2 *Si f est de classe C^1 on a avec cette notation*

$$T'_f = T_{f'}$$

si f localement intégrable n'est pas dérivable, dans ce cas f est dérivable au sens des distributions sans l'être au sens ordinaire.

Remarque importante :

Il n'est pas nécessaire qu'une fonction f soit définie en tout point de $\mathbb{R}$ pour que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

soit convergente pour toute fonction test φ. Si par exemple f n'est pas définie en a, il suffit que $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ et $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$, soient convergentes.

Remarque 2.7.3 *Si T est donnée par une fonction $f \in C^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ est donée par $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. En effet on a*

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle &= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\int f(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx\end{aligned}$$

Exemple 2.7.1 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. *On a pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx \\ &= -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\rangle\end{aligned}$$

Donc, pour $T = T_f$, *on a*

$$\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_1}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\rangle,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 2.7.2 *1) Soit* H *la fonction définie par*

$$H(x) = \begin{cases} 1\ si\ x \geq 0 \\ 0\ si\ x < 0 \end{cases}$$

H *est appelée la fonction de Heaviside.*

Si f *est support compact dans* $\mathbb{R}$, *on définit :*

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

On a : $H' = \delta_0$

En effet si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *on a :*

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Exemple 2.7.3

$$\langle \delta_a^n, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

Exemple 2.7.4

$$(Vp\,\frac{1}{x})' = pf\,\frac{1}{x^2}$$

On définit la partie finie de $\dfrac{1}{x^2}$ *notée* $Pf(\frac{1}{x^2})$ *par :*

$$\langle Pf\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\Big[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big],\ \varphi \in D(\mathbb{R})$$

$$\langle Pf\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

Exemple 2.7.5 *Soit* $f(x,t) = H(x - ct)$ *avec* $c > 0$; f *n'admet pas de dérivées partielles mais seulement des dérivées partielles au sens des distributions.*
Nous noterons $\dfrac{\partial^2 T_f}{\partial t^2}$ *la dérivée partielle seconde par rapport à t de la distribution* T_f, *et* $\dfrac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}$ *sa dérivée partielle seconde par rapport à x.*
On a donc

$$\langle \frac{\partial^2 T_f}{\partial t^2}, \varphi(x,t) \rangle = \langle T_f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} H(x - ct)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\,dx\,dt.$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x/c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \tfrac{x}{c})\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(cu, u)\,du.\end{aligned}$$

De même

$$< \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}, \varphi(x,t) > = \int\int_{\mathbb{R}^2} H(x - ct) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\, dx\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{ct}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\, dx$$
$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(ct,t)\, dt$$

Alors

$$< \frac{\partial^2 T_f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}, \varphi(x,t) > = c \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{\partial \varphi}{\partial t}(cu,u) + c\frac{\partial \varphi}{\partial x}(cu,u)]\, du$$

Posons $\psi(u) = \varphi(cu - u)$ *alors*

$$\psi^{'}(u) = c\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(cu,u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(cu,u),$$

comme ψ *est nulle en dehors d'un ensemble borné*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{'}(u)\, du = 0$$

et on a

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} = 0 \ :$$

$H(x - ct)$ *vérifie "au sens des distributions " l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Exemple 2.7.6 Formule des sauts à une variable

Soit $\Omega =]a, b[$ *avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *et soit* $x_1, ..., x_N$, N *points de* Ω. *On pose*

$$\Omega_j =]x_j, x_{j+1}[,\ j = 0, ..., N + 1 \text{ avec } x_0 = -\infty,\ x_{N+1} = +\infty \text{ et } I = \cup_{j=0}^{N} \Omega_j$$

Soit

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction et } f_j = f_{|\Omega_j|}$$

vérifiant les hypothèses

1. $f_j \in C^1(\Omega_j)$,
2. $f(x_j^-) = \lim\limits_{\substack{x \to x_j \\ x < x_j}} f(x)$ *et* $f(x_j^+) \underset{\substack{x \to x_j \\ x > x_j}}{=} \lim f(x)$ *existent.*

On définit le saut de f *au point* x_j *par*

$$\sigma_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)\ 1 \leq j \leq N \tag{2.4}$$

La fonction $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Soit* T_f *la distribution définie par* f *et* T'_f *sa dérivée au sens des distributions.*

Soit g *la fonction définie presque partout sur* I *par*

$$g(x) = f'_j(x) \text{ si } x \in \Omega_j,\ 0 \leq j \leq N. \tag{2.5}$$

$g \in L^1_{loc}(\Omega)$ *alors elle définit une distribution* T_g. *On a la relation suivante :*

Théorème 2.7.4

$$T'_f = T_g + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \delta_{xj}$$

2.7.2 Multiplication par une fonction C^∞

Théorème 2.7.5 *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *et* $\Psi \in C^\infty(\Omega)$. *La forme linéaire sur* $\mathcal{D}(\Omega)$ *définie par*

$$\langle \Psi T, \varphi \rangle = \langle T, \Psi \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution sur Ω.

- *On l'appelle multiplication de* T *par la fonction* Ψ.

Preuve. Du fait que T est une distribution, alors

$$\forall K \subset\subset \Omega, \exists C_k > 0 \, et \, m \in \mathbb{N}; |\langle T, \Psi \varphi | \rangle \leq C_k . \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in k} |\partial^\alpha (\Psi \varphi)(x)|$$

Du fait que $\Psi \in C^\infty(\Omega)$, la formule de leibnitz donne

$$|\langle \Psi T, \varphi \rangle| \leq C'_k . \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in k} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Donc ΨT est bien une distribution. ■

CHAPITRE 3

FONCTION DE GREEN DANS $\mathbb{R}$

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacrè à l'étude des fonctions de Green en dimension un [3] .

3.2 Définitions

Soients p_0, p_1 et p_2 trois fonctions continues sur $[a, b]$, nous allons étudier le problème constitué de l'équation :

$$(E) \qquad p_0(x)f^{''}(x) + p_1(x)f^{'}(x) + p_2(x)f(x) = g(x),\ x \in]a, b[$$

avec les conditions frontières suivantes :

$$(F) \qquad \begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) + a_2 f(b) + a_3 f'(b) = \alpha \\ b_0 f(a) + b_1 f'(a) + b_2 f(b) + b_3 f'(b) = \beta \end{cases}$$

Lorsque a_2, a_3, b_0 et b_1 sont nuls on dit que ces conditions sont séparées. On désignera par problème (E, F) la recherche des solutions de (E) vérifiant (F). A ce problème on associe un problème homogène.

Définition 3.2.1 *On appelle problème homogène associé à (E, F) le problème (E_H, F_H) défini par :*

$$(E_H) \qquad p_0(x) f''(x) + p_1(x) f'(x) + p_2 f(x) = 0$$

$$(F_H) \qquad \begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) + a_2 f(b) + a_3 f'(b) = 0 \\ b_0 f(a) + b_1 f'(a) + b_2 f(b) + b_3 f'(b) = 0 \end{cases}$$

Le problème est dit régulier si, en plus des conditions précédentes, :

1) $[a, b]$ est un segment borné sur lequel $p_0(x)$ ne s'annule pas.

2) Le problème homogène (E_H, F_H) n'admet pas d'autre solution que $f = 0$.

Théorème 3.2.1 *Pour tout problème régulier (E, F) il existe une unique fonction $G(x, y)$ appelée fonction de Green qui est entièrement déterminée par les 4 propriètés suivantes :*

1) pour tout y fixé dans $]a, b[$ la fonction qui à x fait correspondre $G(x, y)$ est solution de E_H dans chacun les intervalles $]a, y[$ et $]y, b[$.

2) pour tout y fixé dans $]a, b[$ cette fonction vérifie la condition frontière en a et la condition frontière en b.

3) $G(x, y)$ est une fonction de deux variables continue sur le carré

$[a \leq x \leq b] \times [a < y < b]$.

4) pour tout y fixé dans $]a, b[$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(x^-, y) = \frac{1}{p_0(y)}$$

Pour toute fonction g continue il existe une unique solution de (E) qui vérifie les conditions (F_H), cette solution est :

$$f(x) = \int_a^b G(x, y)\, g(y)\, dy.$$

Rappelons que $\frac{\partial G}{\partial x}(x^+, y)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}(x^-, y)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche lorsque t tend vers x de la fonction qui à t fait correspondre $\frac{\partial G}{\partial x}(t, y)$.

Exemple 3.2.1 *Cherchons la fonction de Green du problème :*

$$(E_H) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in]0, 1[\;\; \text{et} \quad (F_H) \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Toute solution de (E_H) est de la forme $f(x) = Ax + B$, pour que f vérifie (F_H) il faut que $A = 0$ et $B = 0$: il existe donc une fonction de Green.

1) sur $]0, y[$ $G(x, y) = a(y)x + b(y)$ sur $]y, 1[$ $G(x, y) = c(y)x + d(y)$

2) On doit avoir $G(0, y) = 0$ donc $b(y) = 0$, on doit aussi avoir $G(1, y) = 0$ donc $c(y) + d(y) = 0$.

3) Comme G est continue on a :

$$G(y^-, y) = \lim_{x \uparrow y} G(x, y) = \lim_{x \downarrow y} G(x, y) = G(y^+, y)$$

c'est à dire

$$a(y)y + b(y) = c(y)y + d(y).$$

4) $\frac{\partial G}{x}(y^+, y) = c(y)$, $\frac{\partial G}{x}(y^-, y) = a(y)$ *donc* $c(y) - a(y) = 1$.
Les nombres $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$ sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b(y) = 0 \\ c(y) + d(y) = 0 \\ y[a(y) - c(y)] + b(y) - d(y) = 0 \\ a(y) - c(y) + 1 = 0 \end{cases} \quad ce \;\; qui \;\; donne : \begin{cases} a(y) = y - 1 \\ b(y) = 0 \\ c(y) = y \\ d(y) = -y \end{cases}$$

$$donc \;\; G(x, y) = \begin{cases} x(y-1) \;\; si \;\; 0 \le x \le y \\ y(x-1) \;\; si \;\; y \le x \le 1 \end{cases}$$

La solution de $\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x)$ *qui vérifie* $f(0) = 0 = f(1)$ *est*

$$f(x) = \int_0^1 G(x, y)\, g(y)\, dy$$

c'est à dire

$$f(x) = \int_0^x y(x-1)\, g(y)\, dy + \int_x^1 x(y-1)\, g(y)\, dy.$$

Théorème de généralisation : Soit l'équation différentielle de degrés n définie par :

$$Lf(x) = p_0(x)\frac{d^n f}{dx^n}(x) + ... + p_n(x)f(x) = g(x)$$

sur (a, b) borné avec $p_0(x) \neq 0$.

$$\forall\, x \in [a,b] \; et \; (F_H) \quad \begin{cases} a_0 f(a) + ... + a_{n-1}f^{n-1}(a) + a_n f(b) + ... + a_{2n-1}f^{n-1}(b) = 0 \\ b_0 f(a) + ... + b_{n-1}f^{n-1}(a) + b_n f(b) + ... + b_{2n-1}f^{n-1}(b) = 0 \\ \qquad\qquad (n \;\; conditions) \end{cases}$$

Si le problème homogène n'a pas d'autre solution que $f = 0$ il existe une unique fonction $G(x, y)$ qui vérifie les relations :

1) du théorème 3.2.1.

2) du théorème 3.2.1.

3) G et toutes ses dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre $n - 1$ sont continues sur $[a \leq x \leq b] \times [a < y < b]$.

4)

$$\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(y^+, y) - \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(y^-, y) = \frac{1}{p_0(y)}$$

alors : La fonction $\int_a^b G(x, y)\, g(y)\, dy$ est l'unique solution du problème

$$Lf(x) = g(x)$$

avec les conditions (F_H).

Preuve. Soient $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ les solutions linéairement indépendantes de l'équation $L[f] = 0$.

Sur les intervalles $[a, y)$ et $(y, b]$ la fonction cherchée $G(x, y)$ doit être de la forme :

$$G(x,y) = \begin{cases} a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) & pour \quad a \leq x < y \\ b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \ldots + b_n f_n(x) & pour \quad y < x \leq b \end{cases}$$

avec $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des fonctions de y. En vertu de la continuité au point $x = y$ de la fonction $G(x, y)$ et de ses premières $(n - 2)$ dérivées par rapport à x, nous avons

$$[b_1 f_1(y) + \ldots + b_n f_n(y)] - [a_1 f_1(y) + \ldots + a_n f_n(y)] = 0$$

$$[b_1 f_1'(y) + \ldots + b_n f_n'(y)] - [a_1 f_1'(y) + \ldots + a_1 f_1'(y)] = 0$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$[b_1 f'_{(n-2)}(y) + \ldots + b_{(n-2)} f_n'(y)] - [a_1 f_1^{(n-2)}(y) + \ldots + a_1 f_1^{(n-2)}(y)] = 0$$

Et la condition (3) s'écrit

$$b_1 y_1^{n-1}(y) + \ldots + b_n y_n^{n-1}(y)] - [a_1 y_1^{n-1}(y) + \ldots + a_n y_n^{n-1}(y)] = \frac{1}{p_0(y)}$$

Posons $C_k(y) = b_k(y) - a_{k(y)} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$.

Il vient le système des équations linéaires par rapport à $C_k(y)$:

$$\begin{cases} C_1 f_1(y) + C_2 y_2(y) + ... + C_n y_n(y) = 0 \\ C_1 f_1'(y) + C_2 y_2'(y) + ... + C_n y_n'(y) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 f_1^{(n-2)}(y) + C_2 f_2^{(n-2)}(y) + ... + C_n f_n^{(n-2)}(y) = 0 \\ C_1 f_1^{(n-1)}(y) + C_2 f_2^{(n-1)}(y) + ... + C_n f_n^{(n-1)}(y) = \dfrac{1}{p_0(y)} \end{cases} \tag{3.1}$$

Le déterminant du système (3.1) est égal à la valeur en $x = y$ du wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$, il n'est donc pas nul.

Aussi le système (3.1) détermine-t-il de façon unique les fonctions $C_k(y)(k = 1, 2, ..., n)$.

Déterminons les fonctions $a_k(y)$ et $b_k(y)$ moyennant les conditions aux limites (3.1). Notons $V_k(y)$ sous la forme :

$$V_k(y) = A_k(y) - B_k(y) \tag{3.2}$$

où

$$A_k(y) = \alpha_k f(a) + \alpha_k^{(1)} f'(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)} f^{n-1}(a)$$

$$B_k(y) = \beta_k f(b) + \beta_k^{(1)} f'(b) + ... + \beta_k^{(n-1)} f^{n-1}(b)$$

En vertu des conditions (3) nous obtenons alors :

$$V_k(G) = a_1 A_k(f_1) + a_2 A_k(f_2) + ... + a_n A_k(f_n) + b_1 B_k(f_1) + b_2 B_k(f_2) + ... + b_n B_k(f_n) = 0$$

$(k = 1, 2, ..., n.)$

Compte tenu de $a_k = b_k - C_k$, nous avons

$(b_1 - C_1)A_k(f_1) + (b_2 - C_2)A_k(f_2) + ... + (b_n - C_n)A_k(f_n) + b_1B_k(f_1) + b_2B_k(f_2) + ... + b_nB_k(f_n) = 0$

$(k = 1, 2, ..., n)$.

D'où, en vertu de (3.2)

$$b_1V_k(f_1) + b_2V_k(f_2) + ... + b_nV_k(f_n) = C_1A_k(f_1) + C_2A_k(f_2) + ... C_nA_kf_n \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{3.3}$$

Notons que le système (3.3) est linéaire en $b_1, b_2, ..., b_n$. Son déterminant est :

$$det \begin{pmatrix} V_1(f_1) & V_1(f_2) & \cdots & V_1(f_n) \\ V_2(f_1) & V_2(f_2) & \cdots & V_2(f_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(f_1) & V_n(f_2) & \cdots & V_n(f_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

étant donné l'hypothèse de l'indépendance linéaire des formes $V_1, V_2, ..., V_n$.
Ainsi, le système d'équation (3.3) admet une solution unique en $b_1(y), b_2(y), ..., b_n(y)$, et comme $a_k(y) = b_k(y) - C_k(y)$, les quantités $a_k(y)(k = 1, 2, ..., n)$ sont également définies de façon unique.
Nous venons donc de démontrer l'existence et l'unicité de la fonction de Green $G(x, y)$ et de fournir un procédé de sa construction. ■

Exemple 3.2.2 *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^3f}{dx^3} = 0$$

avec les conditions aux limites

$$f_0 = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$$

Toutes les solutions sont de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$, *elles vérifient les conditions si* $a = b = c = 0$.

Soit

$$G(x,y) = \begin{cases} a_1(y)x^2 + b_1(y)x + c_1(y) & 0 \leq x \leq y \\ a_2(y)x^2 + b_2(y)x + c_2(y) & y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'après les propriétés de G *:*

1. $G(x,y)$ *est continue au point* $x = y$, *on a*

$$G(y^-,y) = G(y^+,y)$$

C'est-à-dire :

$$a_1(y)y^2 + b_1(y)y + c_1(y) = a_2(y)y^2 + b_2(y)y + c_2(y)$$

$\Rightarrow$

$$(a_1(y) - a_2(y))y^2 + (b_1(y) - b_2(y))y + (c_1(y) - c_2(y) = 0 \tag{3.4}$$

2. $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ *est discontinue au point* $x = y$ *:*

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(y^+,y) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(y^-,y) = 1$$

$\Rightarrow$

$$2a_2(y) - 2a_1(y) = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_2(y) - a_1(y) = \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

les propriétés de la fonction de Green entraînent

$$\begin{cases} c_1(y) = 0 \\ b_1(y) = 0 \\ c_2(y) + a_2(y) + b_2(y) = 0 \\ 2a_2(y) + b_2(y) = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} c_1(y) = b_1(y) = 0 \\ c_2(y) = a_2(y) \\ b_2(y) = -2a_2(y) \end{cases} \tag{3.6}$$

La substitution de (3.6) et (3.5) dans l'équation (3.4) donne

$$\frac{1}{2}y^2 + 2a_2(y)y - a_2(y) = 0 \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow a_2(y) = -\frac{y^2}{2(2y-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(y) = -\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2(2y-1)} \\ b_2(y) = \frac{y^2}{2y-1} \\ c_2(y) = -\frac{y^2}{2(2y-1)} \end{cases}$$

donc

$$G(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{y^2}{2(2y-1)}x^2 & pour\ 0 \leq x < y \\ -\dfrac{y^2}{2(2y-1)}x^2 + \dfrac{y^2}{2(2y-1)}x - \dfrac{y^2}{2(2y-1)} & pour\ y < x \leq 1 \end{cases}$$

On peut également résoudre le problème frontière avec des conditions séparées non homogènes.

Théorème 3.2.2 *Soit (E) un problème régulier dont les conditions sont séparées. Il admet pour tout a et tout b une solution unique définie par :*
$f(x) = \int_a^b G(x,y)\,g(y)\,dy + \alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$ avec u_1 et u_2 les solutions de l' équation homogène (E_H) qui vérifient respectivement :

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 1 \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0 \end{cases} pour\ u_1\ et \begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0 \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 1 \end{cases} pour\ u_2$$

La démonstration est élémentaire et le résultat se généralise trés facilement aux équations d'ordre n.

3.3 Problèmes auto-adjoints

Rappelons que l'opérateur A défini sur le sous-espace vectoriel de $L^2(a,b)$ formé des fonctions vérifiant les conditions (F_H) par

$$(Af)(x) = \frac{d}{dx}\Big[p(x)\,\frac{df}{dx}\Big] + q(x)f(x)$$

est qualifié d'auto-adjoint. Le problème frontière associé s'appelle un problème frontière auto-adjoint.

Définition 3.3.1 *On appelle problème régulier auto-adjoint un problème* (E, F) *ainsi défini :*

$$(E) \quad \frac{d}{dx}\Big[p(x)\,\frac{df}{dx}\Big] + q(x)\,f(x) = g(x) \qquad \textit{pour } x \in [a,b]$$

$$(F) \qquad \begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = \alpha \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = \beta \end{cases} \qquad \textit{avec } [a,b] \textit{ un segment borné}$$

$p(x) \neq 0$ *sur* $[a,b]$, q *continue et* p *de class* C^1.

Comme précédemment, lorsque le le problème homogène (E_H, F_H) associé n'admet que la solution $f = 0$, il existe une fonction de Green dont on démontre facilement la symétrie c'est à dire que $G(x,y) = G(y,x)$ pour tout x et tout y de $[a,b]$.
Et lorsque le problème homogène admet une solution non nulle, il existe pour les problèmes autoadjoints une fonction de Green dite fonction de Green généralisée qui joue un rôle analogue.

3.3.1 Un cas particulier du problème auto-adjoint régulier

Avant d'exposer ce dont il s'agit, nous allons d'abord examiner ce qui se passe lorsqu'il existe deux solutions f_1 et f_2 du problème (E_H, F_H) non proportionnelles. Dans ce cas toutes les solutions de (E_H) sont de la forme $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$. Elles vérifient donc automatiquement les conditions (F_H), celles-ci ne sont plus alors des conditions restrictives ; nous éliminerons donc ce cas et nous supposerons que toutes les solutions de (E_H, F_H) sont proportionnelles, il n'existe alors qu'une seule de ces solutions telles que $\int_a^b f_0^2(u)\,du = 1$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit (E, F) un problème régulier auto-adjoint et f_0 l'unique solution de (E_H, F_H) telle que $\int_a^b f_0^2(u)\,du = 1$. Alors :*

A. *L'équation E (non-homogène) admet des solutions vérifiant les conditions homogènes (F_H) si et seulement si : $\int_a^b f_0(u)\,g(u)\,du = 0$*

B. *Il existe une unique fonction G définie pour $a \leq x \leq b$ et $a < y < b$ appelée fonction de Green généralisée qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) Sur chaque intervalle $]a, y[$ et $]y, b[$ la fonction qui a x fait correspondre $G(x, y)$ est solution de :

$$\frac{d}{dx}\,[p(x)\,\frac{df}{dx}] + q(x)\,f(x) = -f_0(x)\,f_0(y)$$

2) Pour tout y fixé, $G(x, y)$ vérifie les conditions frontières pour $x = a$ et $x = b$.

3) G est symétrique et G est continue sur $[a \leq x \leq b] \times [a < y < b]$.

4) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \dfrac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = \dfrac{1}{p(y)}$

5) $\int_a^b G(x, y)\,f_0(x)\,dx = 0.$

C. *Si $\int_a^b f_0(x)\,g(x)\,d(x) = 0$ les solutions de (E, F_H) sont données par la formule*

$$f(x) = k\,f_0(x) + \int_a^b G(x, y)\,g(y)\,dy$$

où k est une constante quelconque ;

$$\widetilde{f}(x) = \int_a^b G(x,y)g(y)dy$$

est la seule de ces solutions qui vérifie $\int_a^b \widetilde{f}(x)f_0(x)dx = 0$

D. *Toutes les solutions de (E,F) sont données par :*

$$f(x) = k\, f_0(x) + \int_a^b G(x,y)\, g(y)\, dy + \alpha u_1(x) + \beta u_2(x),$$

avec u_1 et u_2 les deux fonctions définies au théorème 3.2.2.

Exemple 3.3.1 *Soit le problème suivant à résoudre : (E) $f''(x) = g(x)$ pour $x \in]0,1[$.*

$$\text{avec} \quad (F_H) : \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) - f'(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème homogène $(H,\, F_H)$ a pour solutions $f(x) = ax$ et $f_0(x) = x\sqrt{3}$; on détermine $G(x,\, y)$ en utilisant les propriétés 1 à 5 du théorème précédent.
1) L'équation $f''(x) = -f_0(x)\, f_0(y) = -3xy$ a pour solutions :

$$f(x) = A + Bx - \frac{x^3 y}{2}$$

donc

$$G(x,y) = x\,a(y) + b(y) - \frac{x^3y}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le y.$$
$$G(x,y) = x\,c(y) + d(y) - \frac{x^3y}{2} \quad \text{pour} \quad y \le x \le 1.$$

2) $G(0,\, y) = b(y) = 0$ et
$G(1,\, y) - \dfrac{\partial G}{\partial x}(1,\, y) - c(y) + d(y) - \dfrac{y}{2} - (c(y) - \dfrac{3y}{2}) = d(y) + y$ *donc*

$d(y) = -y.$

3) $G(y^+, y) = yc(y) - y - \frac{y^4}{2}, G(y^-, y) = ya(y) - \frac{y^4}{2}$ *donc* $c(y) - a(y) = 1.$

4) $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = 1,$ *ce qui redonne* $c(y) - a(y) = 1.$

5)

$$0 = \int_0^y \left(x\, a(y) - \frac{x^3 y}{2}\right) x\, dx + \int_y^1 [x(1 + a(y)) - y - \frac{x^3 y}{2}]\, x\, dx = \frac{a(y)}{3} - \frac{y}{10} + \frac{1}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{y}{2} + \frac{y^3}{2}.$$

Ce qui donne $a(y) = \frac{y^3}{2} + \frac{9y}{5} - 1$ *et donc* $c(y) = -\frac{y^3}{2} + \frac{9}{5}.$

$$\text{Ainsi} \qquad G(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^3 y}{2} - \frac{x y^3}{2} + \frac{9}{5} x y - x \text{ si } 0 \le x \le y \\ -\frac{x y^3}{2} - \frac{x^3 y}{2} + \frac{9}{5} x y - y \text{ si } y \le x \le 1. \end{cases}$$

3.4 Problème auto-adjoint singulier

Un problème qui ne vérifie pas l'une des conditions du théorème 3.3.1. est dit singulier. Il y a de trés nombreux problèmes de ce type, par exemple ceux pour lesquels le coefficient de $\frac{d^2 f}{dx^2}$ peut s'annuler, ou ceux pour lesquels l'intervalle $[a, b]$ est infini, ou bien ceux pour lesquels p ou q ne sont pas bornés.

L'étude systématique de ces différents cas est délicate, il est à noter que dans de nombreux cas, on peut encore définir une fonction de Green en adaptant les conditions frontières et que, lorsque cette fonction existe, on la détermine toujours en utilisant successivement chacune des conditions 1 à 4 du théorème 3.2.1, ou 1 à 5 du théorème 3.3.1 convenablement adaptées.

On va illustrer tout ça avec l'exemple suivant :

Exemple 3.4.1 *Soit* $(E)\ :\ x\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{df}{dx}=0$ *pour* $x\in]0,1[$ *avec :*

$$(F)\begin{cases} f \ \text{est borné e si } x \text{ tend vers zéro} \\ f(1)-f'(1)=0 \end{cases}$$

Les solutions de (E) *sont* $f(x)=a+b\,lnx$, *elles vérifient* $(F)\,a=b=0$ *donc* $f=0$.

On cherchera donc une fonction de Green. Elle a la forme suivante :

$$G(x,y)=\begin{cases} a(y)+b(y)\,lnx \ \ si\ 0<x\leq y \\ c(y)+d(y)\,lnx \ \ si\ y\leq x\leq 1. \end{cases}$$

La condition (F) *nous impose d'avoir* $b(y)=0$ *et* $c(y)-d(y)=0$.

La continuité de G entraîne $a(y)=c(y)+d(y)lny$,

enfin $\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^+,y)=\dfrac{d(y)}{y}$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^-,y)=0$ *d'où* $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{1}{y}$

donc $d(y)=1$, $c(y)=1$, $b(y)=0$ *et* $a(y)=1+lny$ *ainsi :*

$$G(x,y)=\begin{cases} 1+lny \ \ pour\ 0<x\leq y \\ 1+lnx \ \ pour\ y\leq x\leq 1. \end{cases}$$

Nous allons maintenant examiner si la fonction $\int_0^1 G(x,y)\,g(y)\,dy$ *existe et si elle est solution de l'équation non homogène* $x\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{df}{dx}=g(x)$. *On vérifiera que c'est le cas si* $\int_0^1 |g(y)\,lny|\,dy<\infty$, *la solution de* $x\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{df}{dx}=g(x)$

qui vérifie (F) *est alors*

$$(1 + lnx) \int_0^x g(y)\,dy + \int_x^1 (1 + lny)\,g(y)\,dy$$

3.5 Développement de G selon une base de fonctions propres :

Soit (E) : $\frac{d}{dx}[p(x)\frac{df}{dx}] + q(x)\,f(x) = g(x)$ et

$$(F_H)\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f^{'}(a) = 0 \\ b_0 f(b) + b_1 f^{'}(b) = 0 \end{cases}$$

un problème régulier auto-adjoint. Nous noterons L, l'opérateur linéaire défini sur l'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant (F_H) par $Lf(x) = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{df}{dx}\Big) + q(x)\,f(x)$. Au problème (E, F_H), associons le problème de Sturm-Liouville constitué par
$Lf(x) + \lambda f(x) = 0$ et les conditions (F_H).

Théorème 3.5.1 *Le système de Sturm-Liouville admet une infinité dénombrable des valeurs propres. Elles sont toutes réelles et simples telle que :*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \infty.$$

la suite φ_n, $n \in \mathbb{N}$ *des fonctions propres associées convenablement normées forme une base orthonormé de* $L^2(a,b)$.

Pour le développement de la fonction de Green, on a deux cas :

Cas 1 : Supposons d'abord que le problème homogène (E_H, F_H) n'admette que la solution identiquement nulle alors, d'une part 0 n'est pas valeur propre du problème de Sturn-Liouville, d'autre part il existe une fonction de Green G et $f(x) = \int_a^b G(x,y)\, g(y)\, dy$ est l'unique solution de (E, F_H).

Puisque f est dérivable et vérifie (F_H) on a $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} < f, \varphi_n > \varphi_n$.

En plus de la convergence L^2, on a une convergence absolue et uniforme sur $[a,b]$. On sait que $< Lf, \varphi_n > = < f, L\varphi_n >$ puisque L est auto-adjoint . Or $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ et $Lf = g$ donc

$< g, \varphi_n > = < Lf, \varphi_n \rangle = < f, L\varphi_n > = \lambda_n < f, \varphi_n > \ \forall n \in \mathbb{N}$ et comme $\lambda_n \neq 0$, alors $< f, \varphi_n > = \dfrac{1}{\lambda_n} < g, \varphi_n >$.

Ainsi $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\lambda_n} < g, \varphi_n > \varphi_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \dfrac{1}{\lambda_n} g(y)\, \varphi_n(y)\, \varphi_n(x)\, dy.$

$= \int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\lambda_n}\, g(y)\, \varphi_n(y)\, \varphi_n(x)\, dy,$ donc pour toute g continue

$$\int_a^b G(x,y)\, g(y)\, dy = \int_a^b [\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n}\, \varphi_n(x)\varphi_n(y)]\, g(y)\, dy,$$

ce qui entraîne que

$G(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\lambda_n}\, \varphi_n(x)\, \varphi_n(y)$ est orthogonale à tout élément d'une base de $L^2(a,b)$ constituée de fonctions continues de sorte que cette fonction est nulle.

Cas 2 : Supposons maintenant qu'il existe φ_0 solution non nulle du problème (E_H, F_H) alors $\lambda_0 = 0$ est valeur propre et φ_0 est une fonction propre associée. On sait qu'il existe une fonction de Green généralisée

G et que $f(x) = \int G(x,y)\,g(y)\,dy$ est la seule solution de (E, F_H) qui est orthogonale à φ_0 :

On a toujours $\lambda_n < f, \varphi_n > = < g, \varphi_n > \ \forall n \in \mathbb{N}$ donc
$f = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < g, \varphi_0 >$ et on obtient $G(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(y)\,\varphi_n(x)$ et on retrouve que $\int_a^b G(x,y)\,\varphi_0(x)\,dx = 0$.

Nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème 3.5.2 *Si le problème homogène n'a que la solution* $f = 0$ *alors :*
$G(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(y)\,\varphi_n(x)$ *avec une convergence uniforme sur* $[a,b] \times [a,b]$ *et dans* $L^2[(a,b) \times (a,b)]$.

Si le problème homogène a une solution φ_0 *non nulle alors :*
$G(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(y)\,\varphi_n(x)$ *avec* $\lambda_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ *et G la fonction de Green généralisée.*

Remarque 3.5.3 *Dans le cas où on considère l'équation suivante :*

$$E_\lambda = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{df}{dx}] + q(x)\,f(x) - \lambda\,s(x)\,f(x) = g(x)$$

Au lieu de E.

La fonction de Green $G(x,y,\lambda)$ *est :*

$$G(x,y,\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x)\,\varphi_n(y).$$

avec λ_n *les valeurs propres de* L *tel que :*

$$Lf = \frac{1}{s}\Big[\frac{d}{dx}(p(x)\,f')\Big] + qf$$

L *est auto-adjoint dans* $H = L^2[s,[a,b]]$. *Les fonctions propres associées* φ_n *forment une base de* H

CHAPITRE 4

FONCTION DE GREEN POUR E.D.P :

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on détermine les fonctions de Green de problèmes simples comme les équations de Laplace, de Poisson et de Helmholtz ; la démarche nous permettra de mettre en évidence une formulation intéressante de certains problèmes [3].

4.2 Solutions fondamentales :

Définition 4.2.1 *Soient L un opérateur différentiel et a un point de $\mathbb{R}^p$, on appelle solution fondamentale pour L de pôle a une fonction E telle que*

$$LE = \delta(x - a).$$

On peut facilement vérifier la propriété suivante :

Proposition 4.2.1

$$si \quad \left.\begin{array}{c} E_0 \, solution \, de \, LE \; = \; 0 \\ et \\ E \, solution \, fondamentale \end{array}\right\} \Rightarrow E \; + \; E_0 \, est \, une \, solution \, fondamentale$$

Il existe une infinité de solutions fondamentales : ainsi en ajoutant une fonction harmonique quelconque à $\frac{1}{2\pi} \, ln \, r$ on obtient une autre solution fondamentale pour Δ.

Pour résoudre certains problèmes frontières, on cherche des solutions fondamentales astreintes à des conditions supplémentaires; C'est ce qu'on va voir dans la section suivante. Dans ce qui suit, on va donner quelques exemples de solutions fondamentales pour certains opérateurs usuels.

4.2.1 Solution fondamentale pour le Laplacien

1) Dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$E \; = \; \frac{1}{2} \, |x \; - \; x_0|$$

est une solution fondamentale pour Δ de pôle x_0.

2) Soit $M_0 \; = \; (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$E(x, y) \; = \; \frac{1}{2\pi} \ln \left((x \; - \; x_0)^2 \; + \; (y \; - \; y_0)^2 \right)^{1/2}$$

est une solution fondamentale pour Δ de pôle M_0.
En particulier $\frac{1}{2\pi} ln\, r$ est solution fondamentale de pôle l'origine $(r^2 = x^2 + y^2)$.

3)Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$. La fonction

$$E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2}$$

est une solution fondamentale pour Δ de pôle M_0.
En particulier $-\frac{1}{4\pi r}$ est solution fondamentale de pôle l'origine $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$.

Démonstration :

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$< [E]^{''}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

On a

$$< [E]^{''}, \varphi > = < [E], \varphi^{''} > = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x - x_0|\, \varphi^{''}(x)\, dx;$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0}(x - x_0)\, \varphi''(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{+\infty}(x - x_0)\, \varphi''\, dx$$

En tenant compte du fait que φ est nulle en dehors d'un ensemble borné et en intégrant par parties on trouve $\varphi(x_0)$.

$$\begin{aligned}\langle [E]'', \varphi\rangle &= -\frac{1}{2}\Big[(x - x_0)\varphi'(x)\Big|_{\varepsilon_1}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0}\varphi'(x)dx\Big] + \frac{1}{2}\Big[(x - x_0)\varphi'(x)\Big|_{x_0}^{\varepsilon_2} - \int_{x_0}^{+\infty}\varphi'(x)\, dx\Big]\\ &= -\frac{1}{2}\Big[-(\varphi(x_0) + \lim_{x\to\varepsilon_1}\varphi(x))\Big] + \frac{1}{2}\Big[-\lim_{x\to\varepsilon_2}(\varphi(x) + \varphi(x_0))\Big]\\ &= \frac{1}{2}\varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi(x_0)\\ &= \varphi(x_0)\end{aligned}$$

2) Il suffit de démonter que $\frac{1}{2\pi} ln\, r$ est solution fondamentale de pôle l'origine Δ c'est à dire que :

$$\langle \frac{1}{2\pi} \Delta[ln\, r], \varphi \rangle = \varphi(0,0).$$

Pour calculer $< ln\, r, \Delta\varphi >$, on passe aux coordonnées polaires on obtient :

$$\langle ln\, r, \Delta\varphi \rangle, = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Delta\varphi(r,\theta) ln\, r\, r\, d\theta\, dr$$

avec

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

Comme

$$\varphi(r,\theta) = \varphi(r, \theta + 2\pi)$$

On a pour tout θ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(r,\theta)\, d\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, 2\pi) - \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, 0) = 0,$$

Il s'ensuit

$$\langle lnr, \Delta\, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} ln\, r[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}]\, rdrd\theta.$$

Puisque φ est nulle hors d'un ensemble borné et que

$$[r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}] = \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial \varphi}{\partial r})$$

On obtient après intégration par parties :

$$\int_0^{\infty} ln\, r[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}]\, r\, dr = [ln\, r.r\frac{\partial\varphi}{\partial r}]_0^R - \int_0^R \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)\, dr = \varphi(0,0)$$

car φ est radiale dont la valeur à chaque point ne dépend que de la distance entre ce point et l'origine, autrement dit, elle est invariante sous toutes les rotations laissant l'origine fixe.
avec R assez grand pour que φ soit nulle pour $r \geq R$.
On trouve bien que

$$< ln\, r, \Delta\varphi >= 2\pi\varphi(0,0).$$

Si M_0 n'est pas l'origine il suffit de faire un changement d'origine.
3) On va démontrer le résultat dans le cas particulier i.e que $\frac{-1}{4\pi r}$ est solution fondamentale de pôle l'origine.
En procédant comme précédemment, on a :
$M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$

La fonction E(x,y,z) = $\frac{-1}{4\pi}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$ est une solution fondamentale pour $\triangle$ de pôle M_0.

En particulier $\frac{-1}{4\pi r}$est une solution fondamentale de pôle l'origine.

On fait un changement en coordonnées sphériques avec le paramétrage :

$x = r\sin(\theta)\cos(\gamma)$

$y = r\sin(\theta)\sin(\gamma)$

$z = r\cos(\theta)$

$\theta \in [0, \pi]$

$\gamma \in [0, 2\pi]$

$r \rangle 0$

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}.$$

ou sous une autre forme, qui peut être plus adaptée pour certains calculs, et redonne la formule précédente

une fois développée :

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle &= \int_{|x|>\varepsilon} E \ \triangle \ \varphi \, dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\sum_3} \frac{1}{r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial E}{\partial r}\Big) r^2 \, dr \, d\sigma \\
&= \sum_3 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial E}{\partial r}\Big) \partial r \\
&= \sum_3 \Big(-\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\Big) \ or \\
\lim_{\varepsilon\to 0} \langle E, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_3 \Big(-\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\Big) &= -\sum_3 \varphi(0) \\
&= -4\pi \, \varphi(0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\text{Avec} \quad \sum_3 = \int d\sigma$$

désignant la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ qui vaut 4π.

4.2.2 Solution fondamentale pour l'opérateur de Helmoltz

Rappelons que l'équation d'Helmholtz est $\Delta u + k^2 u = 0$; elle correspond à l'opérateur $\Delta + k^2 I = 0$; avec I l'opérateur identité.

1) Dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$u(x) = -\frac{ik}{2} exp\, ik\, |x - x_0|$$

est solution fondamentale pour $\Delta + k^2 I$ de pôle x_0.

2) Dans $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{4} Y_0 \left(k[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right)^{1/2}$$

est solution fondamentale de pôle $M_0 = (x_0, y_0)$ où Y_0 est la fonction de Bessel de second espèce .

3) Dans $\mathbb{R}^3$ une solution fondamentale de pôle $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = &-\frac{1}{4\pi}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} \\ &.exp\Big(-i\frac{k}{2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]\Big). \end{aligned}$$

4.2.3 solution fondamentales pour l'équation de la chaleur et l'équation des ondes

Voici encore concernant l'équation de la chaleur et celle des ondes.

1) La fonction définie par

$$u(x, t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} exp(-\frac{x^2}{4t}); & t > 0 \end{cases}$$

est solution fondamentale de $L = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de pôle $(0,0)$

Démonstration :

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle Lu, \varphi\rangle &= \left\langle \left(\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u, \varphi \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\\
&= -\left\langle u, \tfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle\\
&= -\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty]} \tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[\tfrac{-x^2}{4t}\right] \left(\tfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) dxdt
\end{aligned}$$

On calcule

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty]} \tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[\tfrac{-x^2}{4t}\right] \tfrac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\epsilon}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[\tfrac{-x^2}{4t}\right] \left(\tfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) dt \right) dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon$$

Par intégration par parties,

$$I_\epsilon = -\frac{1}{\sqrt{16\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty]} \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-\frac{-x^2}{4t}} \varphi(x,t) dxdt - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \varphi(x,\epsilon) dx$$

De même

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty]} \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dxdt = \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon$$

Après deux intégrations par parties(en x),

$$J_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty]} \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right) e^{\frac{-x^2}{4t}} \varphi(x,t) dxdt$$

On a

$$I_\epsilon + J_\epsilon = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \varphi(x,\epsilon) dx$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u,\varphi\right\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon + J_\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\varphi(x,\epsilon)dx\end{aligned}$$

On fait un changement de variables en posant $y^2 = \frac{x^2}{4\epsilon}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u,\varphi\right\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\frac{\varphi(2\sqrt{\epsilon}y,\epsilon)}{\sqrt{\pi}}dy \\ &= \varphi(0,0)\end{aligned}$$

2) La fonction $-\dfrac{1}{2}H(t-t_0-|x-x_0|)$ est solution fondamentale pour $L=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ de pôle (x_0,t_0) (avec H fonction de Heaviside).
Il est simple de vérifier ça en procédant de la même manière que l'exemple 1. si u_0 est une solution fondamentale et u une solution de $Lu=0$, u_0+u est aussi une solution fondamentale : il existe une infinité de solutions fondamentales : ainsi en ajoutant une fonction harmonique quelconque à $\dfrac{1}{2\pi}lnr$ on obtient une autre solution fondamentale pour Δ. on peut essayer de trouver des solutions fondamentales astreintes à des conditions supplémentaires pour résoudre certains problèmes frontières c'est ce que nous allons faire pour définir les fonctions de Green de certaines E.D.P.

4.3 Fonctions de Green pour les équations de Laplace, Poisson et Helmholtz

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et ∂D sa frontière qui est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ et une surface dans $\mathbb{R}^3$.

La troisième formule de Green peut s'écrire

$$\int_D (f\,\Delta g - g\,\Delta f) = \int_{\partial D} (f\,\frac{dg}{dn} - g\,\frac{df}{dn}),$$

dans $\mathbb{R}^2$ la première intégrale est double et la seconde simple, dans $\mathbb{R}^3$ la première intégrale est triple et la seconde double.

Cette formule est encore vraie si la fonction g est remplacée par une solution fondamentale G de Δ dont le pôle M_0 n'est pas sur ∂D.

Cela donne

$$\int_D (u\,\delta(M - M_0) - G\,\Delta u) = \int_{\partial D} u\,\frac{dG}{dn} - G\,\frac{du}{dn}$$

c'est à dire

$$u(M_0) = \int_D G\,\Delta u + \int_{\partial D} u\,\frac{dG}{dn} - G\,\frac{du}{dn}$$

4.3.1 Équation de Poisson

Nous allons utiliser cette formule pour résoudre des problèmes frontières relatifs à l'équation de poisson $\Delta u = h$ (qui se réduit à l'équation de Laplace Δu si $h = 0$).

• **Problème de Dirichlet** il s'agit de trouver la solution u du problème Dirichlet suivant

$\Delta u = h$, $u = u_0$ sur ∂D.

On prend $G = 0$ sur ∂D et on obtient :

$$u(M_0) = \int_D Gh + \int_{\partial D} u_0 \frac{dG}{dn}$$

.

• **Problème de Neumann :** Le problème de Neumann pour l'équation de Poisson est formule ainsi :

Chercher u solution de $\Delta u = h$ avec $\frac{du}{dn} = v_0$ sur ∂D. On prend $\frac{dG}{dn} = 0$ sur ∂D on obtient alors

$$u(M_0) = \int_D G.h - \int_{\partial D} G.v_0.$$

• **Problème mixte :** on cherche la fonction u solution de $\Delta u = h$ avec la condition mixte u vérifiant $u + \alpha \frac{du}{dn} = w_0$ sur ∂D.

On impose que

$$G + \alpha \frac{dG}{dn} = 0$$

sur la frontière

Alors

$$u \frac{dG}{dn} - G \frac{du}{dn} = w_0 \frac{dG}{dn}$$

et

$$u(M_0) = \int_D G.h + \int_{\partial D} w_0 \frac{dG}{dn}$$

Définition 4.3.1 *Une solution fondamentale qui vérifie les conditions imposées s'appelle une fonction de Green pour l'équation de Poisson, relative à D, concernant le problème de Dirichlet (cas 1), de Neumann (cas 2) ou mixte (cas 3).*

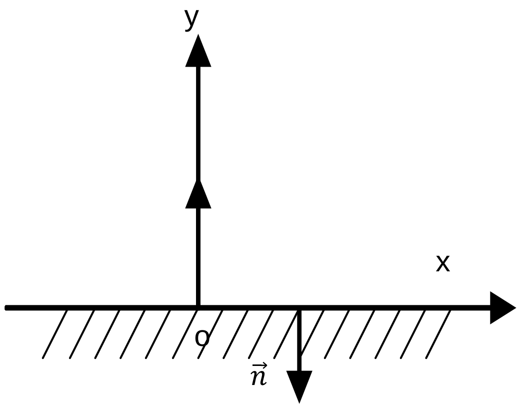
Remarque 4.3.1 *Cette fonction de Green dépend évidemment de* M_0 *puisque c'est une solution de pôle* M_0, *c'est donc une fonction* $G(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *ou* $G(x_0, y_0, x, y)$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

On va illustrer ce qu'on vient de voir par un exemple :

Exemple 4.3.1 *Cherchons la fonction de Green de l'équation de Poisson pour le problème de Neumann dans le demi-plan* $y > 0$.

Pour M_0 *fixé, soit G une solution fondamentale de pôle* M_0 *donc c'est la somme de*

$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$ *et d'une fonction* $H(x,y)$ *Harmonique dans* $y > 0$; *on veut que* $\frac{dG}{dn}(x,0) = 0$.



L'axe des abcisses est parcouru dans le sens habituel pour que le domaine soit à gauche et la normale extérieure est $-\overrightarrow{j}$ *alors :*

$$\frac{dG}{dn} = -\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}$$

La condition imposée nous donne

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,0) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}$$

donc, la fonction $H(x,y) = \frac{1}{2\pi} ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]^{1/2}$ *convient, elle est*

harmonique dans le demi-plan $y > 0$ *puisqu'elle est harmonique hors du point* $(x_0, -y_0)$ *qui est dans le demi-plan* $y < 0$.
On a donc

$$G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{4\pi} ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2][(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]$$

pour l'équation de Poisson il faut ajouter le terme :

$$\int_D G.h = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_0, y_0, x, y) h(x, y)\, dxdy.$$

Remarque 4.3.2 *On notera que G n'est pas unique puisqu'on peut ajouter à H une fonction harmonique telle que* $\frac{\partial H}{\partial Y}(x, 0) = 0$ *(par exemple* $\cos y\, e^x$*).*
Pour obtenir une solution unique, on exige.
La formule $u(M_0) = -\int_{\partial D} G.v_0$ *qui donne la solution au problème de Neumann pour l'équation de Laplace devient :*

$$u(x_0, y_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(x_0, y_0, x, 0)\, dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ln[(x - x_0)^2 + y_0^2] v_0(x)\, dx,$$

4.3.2 Équation d'Helmholtz

La troisième formule de Green permet de faire la même démarche ainsi :

$$\int_D f[\Delta g + k^2 g] - g(\Delta f + k^2 f) = \int_{\partial D} f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn}$$

Une solution fondamentale vérifie $\Delta g + k^2 g = \delta(M - M_0)$, si u est solution de $\Delta u + k^2 u = h$ on a

$$u(M_0) = \int_D g.h + \int_{\partial D} u \frac{dg}{dn} - g \frac{du}{dn}.$$

Comme dans le cas de l'équation de Poisson, on impose $G = 0$ sur ∂D pour le problème de Dirichlet, et $\frac{dG}{dn} = 0$ pour celui de Neumann sur ∂D.

Ceci s'étend à l'équation $\Delta u - k^2 u = h$.

4.4 Conclusion

Il n'existe malheureusement aucune méthode générale pour trouver une fonction de Green.
Les exemples précédents nous montrent qu'on peut déterminer les fonctions de Green dans certains cas particuliers.
Pour des problèmes suffisamment réguliers, il est possible de démontrer l'existence d'une fonction de Green et donc de formules de représentation intégrale des solutions de problèmes aux limites, ce dont on peut parfois tirer avantage.
On démontre par exemple que pour un ensemble borné il existe une unique fonction de Green pour le problème de Dirichlet relatif à Δ et que $G(M, M_0) = G(M_0, M)$.

La troisième formule de Green joue, comme nous l'avons constaté, un rôle primordial dans l'étude des fonctions de Green pour les équations de Poisson, Laplace et Helmoltz liées à l'opérateur Δ.
Pour définir des fonctions de Green pour d'autres équations elliptiques, paraboliques ou hyperboliques il faut introduire une formule comparable.
On montre par exemple que pour $Lf = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ on a :

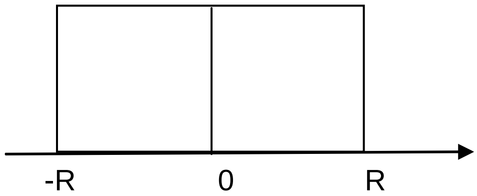
$$\int_D (\varphi L\psi - \psi L\varphi) = \int_{\partial D} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{dt})\, dx + \int_{\partial D} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x})\, dt.$$

Soit G une solution fondamentale de l'équation des ondes, qui vérifie

$\lim\limits_{|x|\to\infty} G(x, x_0, t, t_0) = 0$, $G(x, x_0, T, t_0) = 0$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x, x_0, T, t_0) = 0$.
Prenons $u = \varphi$ une solution de l'équation des ondes et $\psi = G$
en intégrant sur le rectangle constitué par $t = 0$, $t = T$ et les segments $x = R$, $x = -R$ et en faisant tendre R vers l'infini, on obtient :

$$u(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, 0)\frac{\partial G}{\partial t}(x, x_0, 0, t_0) - G(x, x_0, 0, t_0)\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)]\, dx$$

qui redonne la formule de d'Alembret.
Pour des équations paraboliques on peut aussi démontrer des relations analogues à la troisième formule de Green, nous ne développerons pas cette théorie.


-R
0
R

BIBLIOGRAPHIE

[1] Begui MOHAMED, Calcul de la fonction de Green quantique dans une sphère de dimension n,Thèse présentée en vue d'obtention de diplome doctorat en science physiques,faculté des mathématiques et des sciences de la matière département de physique. Université Kasdi Merbah Ouargla

[2] Bouzit.H, éléments de distributions et d'équation aux dérivées partielles, Master cours . Université de Mostaganem.

[3] Hervé Reinhard, Équation aux dérivées partielles-Introduction 2 ème cycle/master. École d'ingénieurs

[4] Yann MORERE, Les réseau de Neurones à fonction à base radiale, Le 10 mai 2001.