

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Mohamed HAMMOU

**Application des ondelettes de Jacobi pour résoudre le
problème du contrôle optimal**

Le jury composé de :

Président :	Bouزيد LEILA	MCB	UMAB
Examineur :	Hamou Maamar MAGHNIYA	MCB	UMAB
Encadreur :	Abbassa NADIRA	MAB	ENS de Mostaganem

Année Universitaire : 2020 / 2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui m'a aidé et m'a donné la force et la patience pour mettre en œuvre ce projet. Sans lui, je ne serais pas arrivé là où j'en suis maintenant. Dieu merci.

Je remercie mon encadreur Nadira Abbassa, pour avoir accepté de continuer avec moi dans l'élaboration de ce projet, et pour tous les conseils et instructions qu'ils m'ont donnés, et pour leur présence tout au long de la période de la réalisation de ce mémoire. Merci de m'avoir fait confiance depuis le début. J'espère être digne de cette confiance. Je tiens à remercier les membres du jury, Bouzid Leila et Hamou Maamer Maghnia, d'avoir aimablement participé à l'évaluation de ce projet et d'avoir consacré une partie de leur temps précieux.

Je remercie particulièrement mes parents, qui m'ont tant soutenu tout au long de ma carrière universitaire et m'ont donné la force et le courage de mettre de réussir. Je n'oublie pas mes frères et sœurs et toute ma famille car ils ont mis à ma disposition tous les moyens à leur disposition, mais surtout pour leur amour. Ces remerciements ne devraient pas se terminer sans mes remerciements à mon professeur, qui était plus que ma sœur aînée, Hamo Maamar Maghnia, pour m'avoir aidé tout le temps sans aucun ennui.

Mes reconnaissances vient aussi à ma fiancée Fathia et tous mes chers amis, en particulier Abdelhak Berroichdi, mamadou, Jamai Yacin, Youcef ouali, taf Youcef ,jbiri Boufalja, Boumziza Abdeloiadoud, bettaha hamza, sofian, reda nadir, walid nacri, meloudi hayat, bilarbi salima et bouhadi abdlhakim Merci pour tous les merveilleux souvenirs que nous avons eus ensemble.

Enfin, je tiens à remercier tous les professeurs et étudiants du département de mathématiques qui m'ont beaucoup aidé. Merci à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, au couronnement de ce travail

Dédicaces

Je dédie ce travail à :
Mes chers parents.
Mes frères Amine, Mahdi, Ossama, Ahmed et sœurs safia, khadidja , Rahil et toute ma
famille.
et ma fiancée
Chers amis.
Et tous ceux qui les aiment.

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle méthode numérique pour résoudre le problème du contrôle optimal quadratique avec contraintes linéaires par les ondelettes de Jacobi. Notre approche est basée sur l'utilisation des ondelettes de Jacobi et de la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Jacobi, l'approche proposée est simple, stable et elle a été testée sur le problème de contrôle optimal linéaire dans \mathbb{R} . En général, pour obtenir des solutions approximatives pour un problème de contrôle optimal, nous avons utilisé la commande "**quadprog**". Les paramètres (α, β) n'ont pas un rôle important dans le changement de solution et le changement de m n'aura pas non plus un rôle significatif, mais le coefficient k qui divise le domaine joue un rôle très important dans le changement la solution.

Mots-Clés. methode de Jacobi, ondelettes de Jacobi, matrice opérationnelle de dérivation, controle optimal, contraintes linéaires , La technique de multiplication de Lagrange

Abstract

In this thesis, we propose a new numerical method to solve the problem of quadratic optimal control with linear constraints by Jacobi wavelets. Our approach uses a combination of Jacobi wavelets method and operational matrix of derivative of Jacobi wavelets, the proposed approach is simple, stable and it has been tested on the optimal control problem in \mathbb{R} . In general, to obtain an approximate solutions for optimal control, we used the command "**quadprog**", the parameters (α, β) do not have a significant role in changing the solution and also the change of m will not have a significant role, but changing the coefficient k that divides the domain plays a very important role in changing the solution.

Keywords. Jacobi method, Jacobi wavelets, operational matrix derivation, optimal control, linear constraints, Lagrange's multiplication technique

Index des notations

E	:	Les espaces de Hilbert mentionnés dans ce manuscrit sont séparables
\mathbb{N}	:	Corps des nombres entiers.
\mathbb{R}	:	Corps des nombres réels.
L^2_ω	:	l'ensemble des fonctions de carré intégrable par le poid ω
x^T	:	le transposé du vecteur x
$\ f\ $:	la norme de f
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	le produit scalaire de deux fonctions
$X_{[\cdot, \cdot]}$:	la fonction caractéristique

Table des matières

Index des notations	v
Liste des tableaux	2
Introduction	4
1 Préliminaires	6
1 Polynômes Orthogonaux	6
1.1 L'orthogonalité	6
1.2 Les Polynômes Classiques	8
2 Les Ondelettes	15
2.1 Historique d'ondelettes	15
2.2 Définition des ondelettes	15
2.3 Exemples	16
2 Les ondelettes de jacobi	19
1 Définition	19
2 Approximation d'une fonction	23
2.1 La Base de fonction	23
2.2 La convergence de fonction	23
3 La matrice opérationnelle de dérivation	24
3.1 La dérive n ème des ondelettes de jacobi	25
3.2 Exemple de la matrice Opératonnelle	26
3 Application des ondelettes de Jacobi pour résoudre un problème du contrôle optimal	27
1 Problème du contrôle optimale à contraintes linéaires	27
2 Approximation de la fonction coût	28
3 Exemples d'application	29
Conclusion	34

Liste des tableaux

1.1	Les 4 type du polynôme de Tchebychev	12
3.1	résultat pour legendre	30
3.2	résultat pour Tchebychev 2 ^{ème} espèce	30
3.3	résultat pour Tchebychev 3 ^{ème} espèce	31
3.4	résultat pour jacobi (0,2)	31
3.5	résultat pour jacobi (-0.5, 1.2)	32
3.6	résultat pour Legendre	32
3.7	résultat pour tchebychev 2 ^{ème} espèce	32
3.8	résultat pour tchebychev 3 ^{ème} espèce	32
3.9	résultat pour jacobi (0,2)	33
3.10	résultat pour jacobi (-0.5, 1.2)	33

Table des figures

1.1	polynome de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 2$)	9
1.2	polynome de Jacobi ($\alpha = -0.3, \beta = 1$)	10
1.3	polynome de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 0$)(Legendre)	11
1.4	polynôme de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = -1/2$) (Tchebychev 1 ^{er} espèce)	13
1.5	polynôme de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$)(Tchebychev 2 ^{ème} espèce)	13
1.6	polynôme de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = 1/2$)(Tchebychev 3 ^{ème} espèce)	14
1.7	polynôme de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = -1/2$)(Tchebychev 4 ^{ème} espèce)	14
1.8	Ondelette de Haar	16
1.9	Ondelette de Morlet	17
1.10	Ondelette Chapeau Mexicain	18
2.1	Ondelette de Legendre	20
2.2	Ondelette de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 2$)	20
2.3	Ondelette de Jacobi ($\alpha = 0.3, \beta = 1$)	21
2.4	Ondelette de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = -1/2$)	21
2.5	Ondelette de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$)	22
2.6	Ondelette de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = 1/2$)	22
3.1	code matlab de J dans \mathbb{R}	37
3.2	code matlab de J dans \mathbb{R}^2	38

Introduction

Certains chercheurs ont pensé que les ondelettes pourraient remplacer l'analyse de Fourier [18], où elle sont proposées la première fois par des physiciens et des ingénieurs pour le traitement du signal où la transformée de Fourier n'était pas l'outil le plus performant. Les ondelettes est une nouvelle famille de base qui demeure un important outil de mathématique [6], elle apparait presque deux siècles, elles sont utilisé notamment dans le développement de la téléphonie, de l'informatique ou dans le domaine audio visuel. Elle combine des propriétés fortes comme l'orthogonalité, [11] des supports compacts et une localisation en temps-fréquence.

L'analyse par ondelettes [13] offre la possibilité d'analyser un signal dans les deux domaines temporel et fréquentiel simultanément, ainsi, l'analyse par ondelettes est utilisée dans différents domaines comme le traitement de signal, l'analyse de signal, la médecine, la géophysique, les problèmes de calcul variationnelles, les équation différentielles : (EDO) [14], EDPs, les EDFs, les SVM, l'optimisation et le contrôle optimal. Ce travail est basé sur le travail de BOUKHARI [5], on a comparé la méthode des ondelettes de jacobi avec d'autre méthode ([5],[18]) où on a utilisé la matrice opérationnelle de dérivation pour résoudre le problème du contrôle optimale quadratique avec contraintes linéaires. Puis, nous avons calculé numériquement le minimum du problème dans les exemples [16].

le manuscrit est structuré comme suit :

- Chapitre 1 : dans ce chapitre ,on va rappeler les notions théoriques nécessaires pour le manuscrit ,on commence par les polynômes orthogonaux ([10] [17]), on va donner leurs définitions et les différents propriétés, on a cité quelque polynômes classiques [7]. Après, on a définie les ondelettes [8], l'historique de l'apparition et des exemples .
- Chapitre 2 : présente les ondelettes de jacobi est leur définition [12] avec des figures qui présentent leurs graphes pour différents indices (α, β) , l'ordre (m, k) . Puis ,nous rappelons quelque théorèmes de l'approximation [2],la base et la convergence de fonction. Enfin, on donne le théorème et sa démonstration de la matrice opérationnelle de dérivation de jacobi [2] et sa dérivée nième .
- Chapitre 3 : dans ce chapitre on utilise les ondelettes de jacobi pour résoudre le problème de contrôl optimal avec contraintes linéaires qui est basé sur l'article de Bokhari [5] et on fait une comparaison numérique avec les résultats obtenues par

leur méthode.

Finalement, on donne deux exemples numériques, le premier dans \mathbb{R} et le deuxième dans \mathbb{R}^2 et le contrôle dans \mathbb{R}

On termine ce manuscrit par une conclusion générale et quelque perspective et annexe.

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les concepts les plus importants pour comprendre le reste du manuscrit.

1 Polynômes Orthogonaux

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable nécessite de travailler dans un espace vectoriel des polynômes à une variable réelle. Une base de cet espace est constituée des monômes $x^n, n \in \mathbb{N}$. Un polynôme $P_n(x)$ est de degré n s'il s'écrit de la façon suivante :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \tag{1.1}$$

avec $a_n \neq 0$; les constantes non nulle sont donc des polynome de degré 0 .

1.1 L'orthogonalité

Plus générale, considérons une fonction qui est non négative et intégrable sur un intervalle $]a, b[$. On suppose également que la fonction poids $\omega(x) > 0$ sur un sous-ensemble suffisamment grand de $]a, b[$ [\[\[9\]\]](#) [\[\[17\]\]](#), pour que

$$\int_a^b \omega(x) dx > 0. \tag{1.2}$$

C'est-à-dire $\omega(x) > 0$ sur un sous-ensemble de mesure de Lebesgue positive. Dans le cas où $]a, b[$ est illimité, nous devons également imposer l'exigence supplémentaire que les moments l'intégrale

$$\int_a^b |x|^n \omega(x) dx > 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

Converge.

On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]a, b[$ telles que

$$\|f\|^2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx} < \infty. \quad (1.4)$$

E est muni du produit scalaire .

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx. \quad (1.5)$$

Définition 1.1 on dit que les deux fonctions f, g sont orthogonaux dans E si

$$\langle f, g \rangle_\omega = 0. \quad (1.6)$$

Définition 1.2 on dit que la famille de polynôme $P_{n>0}, P_n$ si

$$\langle P_m, P_n \rangle_\omega = \int_a^b P_m(x)P_n(x)\omega(x) \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \tau (\tau > 0) & \text{si } m = n \end{cases}$$

Pour $\tau = 1$, cette famille est dite orthonormale.

Définition 1.3

Soit $\{P_n\}_{(n \geq 0)}$ une famille de polynôme de E, qui est orthonormale. Cette famille forme une base orthonormale (B.O.N) de E sur $]a, b[$ si et seulement si chaque polynôme $P \in E$ sur $]a, b[$ admet une décomposition unique dans cette famille

$$P = \sum_{(i \geq 0)} \mu_i P_i. \quad (1.7)$$

Où les coefficients μ_i sont définies par

$$\mu_i = \langle P, P_i \rangle_\omega = \int P(x)P_m(x)\omega(x)dx.$$

On a le procédé d'orthogonalisation de Schmidt donne l'existence d'une unique suite P_n de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire de E, et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n [9]. Ces polynômes sont appelés polynômes orthogonaux avec le poids ω .

[11]. Tous les polynômes orthogonaux vérifient des propriétés particulièrement intéressantes [8].

Tout les polynômes $f(x)$ de degré n peut être décomposé en termes p_0, p_1, \dots, p_n s'il existe les coefficients α_i tel que :

$$f(x) = \sum_{(i=0)}^n \alpha_i P_i(x). \quad (1.8)$$

-On donne l'ensemble du polynôme $\{p_0(x), p_1(x), \dots\}$ qui sont deux à deux orthogonaux.

-Chaque polynôme dans $\{p_0(x), p_1(x), \dots\}$ à n racines réelles, distincts et appartient dans l'intervalle $[a, b]$

-La suite $P_n(x)$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 :

$$P_n(x) = (x - \alpha_n)P_{(n-1)}(x) + \beta_n P_{(n-2)}(x),$$

avec

$$\alpha_n = \frac{(\langle xP_{(n-1)}, P_{(n-1)} \rangle)}{\|P_{(n-1)}\|^2}, \beta_n = \frac{-\|P_{(n-1)}\|^2}{\|P_{(n-2)}\|^2}.$$

1.2 Les Polynômes Classiques

On rappelle les polynômes les plus importantes (et les plus étudiées) sont les suivantes [9] :

1.2.1 Polynôme de Jacobi

Polynômes de Jacobi est les plus général des Polynômes Orthogonaux Classiques dans le domaine $[-1, 1]$ avec la fonction poids intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$ [7]

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta > -1. \quad (1.9)$$

$J_n^{(\alpha, \beta)}$ est la notation des polynômes de Jacobi qui sont des solutions de l'équation différentielle homogène du 2^{ème} ordre.

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

Cette équation est équivalente au problème de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} [(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'] + n(n + \alpha + \beta + 1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0,$$

avec n est le degré du polynôme.

Les polynômes de Jacobi nommés ainsi car c'est Jacobi qui les a introduits en 1859 par les trois manières suivantes :

La formule de récurrence suivante [12]

$$\begin{cases} J_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \\ J_1^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha + 1) + (\alpha + \beta + 2) \frac{x-1}{2} \\ a_{m,0} J_m^{(\alpha,\beta)}(x) = (a_{m,1} x - a_{m,2}) J_{m-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - a_{m,3} J_{m-2}^{(\alpha,\beta)}(x) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_{m,0} = 2m(\alpha + \beta + m)(\alpha + \beta + 2m - 2) \\ a_{m,1} = (\alpha + \beta + 2m - 1)(\alpha + \beta + 2m - 2)(\alpha + \beta + 2m) \\ a_{m,2} = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta + 2m - 1) \\ a_{m,3} = 2(\alpha + m - 1)(\beta + m - 1)(\alpha + \beta + 2m) \end{cases}$$

La Formule de Rodriguez [2]

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)} (1-x)^{(-\alpha)} (1+x)^{(-\beta)} \frac{d^n}{(dx^n)} [(1-x)^{(n+\alpha)} (1+x)^{(n+\beta)}]$$

la Formule de Analytique

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{(k=0)}^n \binom{(n+\alpha)}{k} \binom{(n+\beta)}{(n-k)} (1-x)^{(n-k)} (1+x)^k$$

Voici quelques figures qui présentent ces polynôme pour différents indices α, β

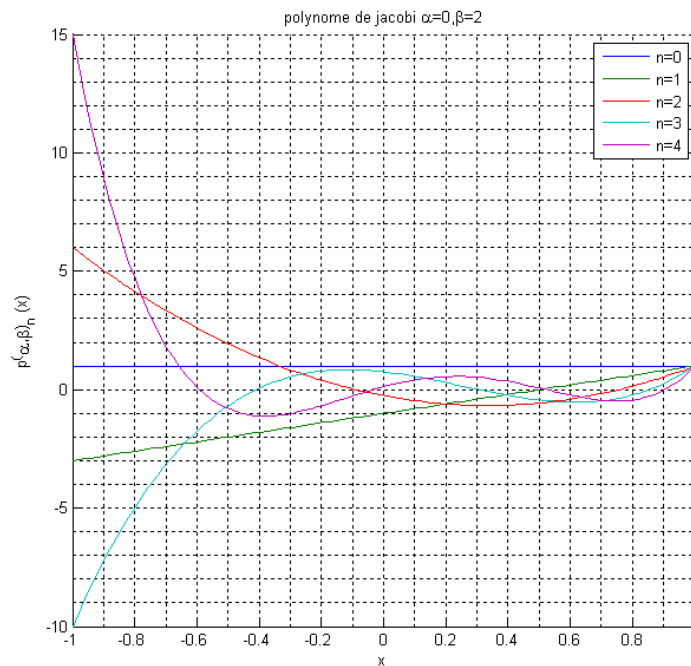


FIGURE 1.1 – polynome de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 2$)

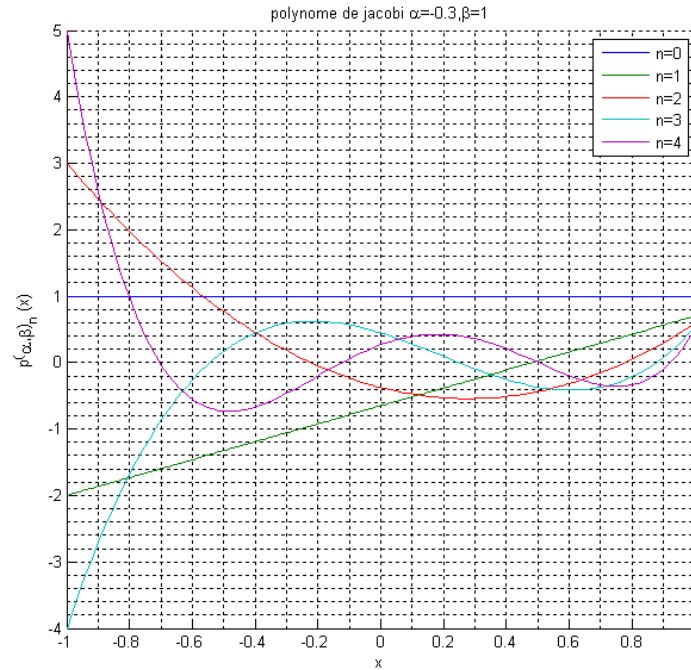


FIGURE 1.2 – polynome de Jacobi ($\alpha = -0.3, \beta = 1$)

1.2.2 Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre sont définis sur le domaine $] - 1, 1[$, avec la fonction de poids

$$\omega(x) = 1 \tag{1.10}$$

Définition 1.4 [3] Les polynômes de Legendre notés l_n sont un cas particuliers de polynôme de Jacobi avec $\alpha = \beta = 0$

$$l_n(x) = J_n^{(0,0)}(x), n \geq 1, x \in] - 1, 1[$$

Les premiers polynômes de Legendre :

$$l_0(x) = 1$$

$$l_1(x) = x$$

$$l_2(x) = \frac{(3x^2 - 1)}{2}$$

$$l_3(x) = \frac{(5x^3 - 3x)}{2}$$

$$l_4(x) = \frac{(35x^4 - 30x^2 + 3)}{8}$$

$$l_5(x) = \frac{(63x^5 - 70x^3 + 15x)}{8}$$

$$l_6(x) = \frac{(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)}{16}$$

Les polynômes de Legendre sont des solutions de l'équation différentielle homogène de 2^{ème} ordre.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

C'est la seule solution définie au voisinage de 0 qui est continue jusque 1 avec $y(1) = 1$.

Les polynômes de Legendre peuvent être définis de différentes manières :

la Formule de Rodriguez :

$$l_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)} \frac{d^n}{(dx)^n} [(x^2 - 1)^n]$$

la Formule de Analytique :

$$l_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{(k=0)}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^2 (x-1)^k (x+1)^{(n-k)}$$

la Formule de récurrence d'ordre 2 :

$$(n + 1)L_{n+1} - (2n + 1)xL_n + nL_{n-1} = 0$$

la figure ci-dessous illustre ces polynômes

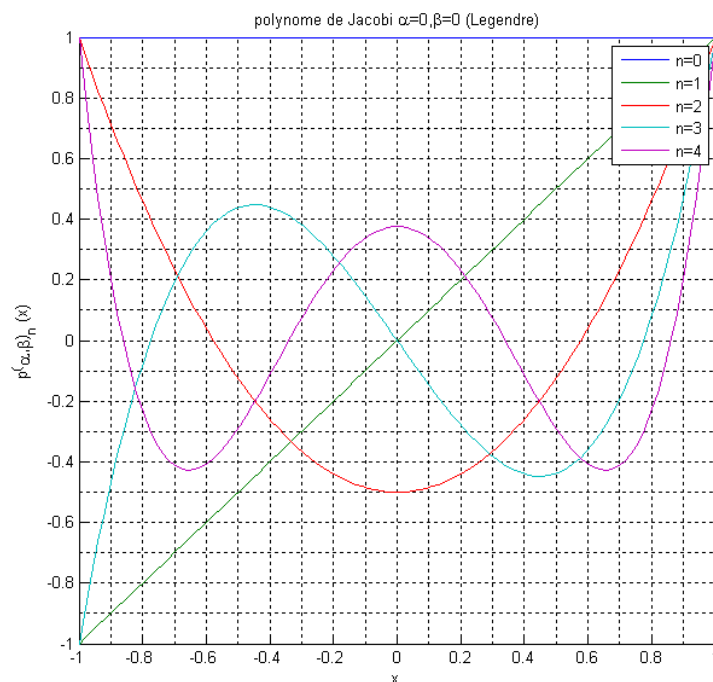


FIGURE 1.3 – polynome de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 0$) (Legendre)

1.2.3 Polynôme de Tchebychev

Le polynôme de Tchebychev noté T_n est un cas particulier de Jacobi définie sur le domaine $] - 1, 1[$, avec la fonction de poids

$$\omega(x) = (1 - x^2) \quad (1.11)$$

il y en a quatre espèces de polynôme dans le tableau (1.1)

Définition 1.5 Les polynômes de Tchebychev du premier espèce $T_n(x)$ sont des polynômes de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\cos(n\theta) = T_n(x) \quad \text{avec} \quad x = \cos\theta$$

Pour tout x dans $] - 1, 1[$, alors θ appartient à $[0, \pi]$ on peut vérifier facilement que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n , voici quelques polynôme $T_n(x)$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Définition 1.6 Les polynômes de Tchebychev du deuxième espèce $U_n(x)$ sont des polynômes de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x) \quad \text{avec} \quad x = \cos\theta$$

Pour tout x dans $] - 1, 1[$, alors θ appartient à $[0, \pi]$ on peut vérifier facilement que U_n est un polynôme de degré n , voici quelques polynôme U_n

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1$$

le tableau 1.1 montre les quatre espèces des polynômes de Tchebyshev [4] :

Les Types de Tchebychev	La Formule Ré cursive	La Fonction Poids
le premier type	$T_0^{(1)}(x) = 0, T_1^{(1)}(x) = x,$ $T_m^{(1)}(x) = 2xT_{m-1}^{(1)} - T_{m-2}^{(1)}$	$\omega^1(x) = (1 - x)^{-1/2} (1 + x)^{-1/2}$
le deuxième type	$T_0^{(2)}(x) = 0, T_1^{(2)}(x) = 2x$ $T_m^{(2)}(x) = 2xT_{m-1}^{(2)} - T_{m-2}^{(2)}$	$\omega^2(x) = (1 - x)^{1/2} (1 + x)^{1/2}$
le troisième type	$T_0^{(3)}(x) = 0, T_1^{(3)}(x) = 2x - 1,$ $T_m^{(3)}(x) = 2xT_{m-1}^{(3)} - T_{m-2}^{(3)}$	$\omega^3(x) = (1 - x)^{-1/2} (1 + x)^{1/2}$
le quatrième type	$T_0^{(4)}(x) = 0, T_1^{(4)}(x) = 2x + 1,$ $T_m^{(4)}(x) = 2xT_{m-1}^{(4)} - T_{m-2}^{(4)}$	$\omega^4(x) = (1 - x)^{1/2} (1 + x)^{-1/2}$

TABLEAU 1.1 – Les 4 type du polynôme de Tchebychev

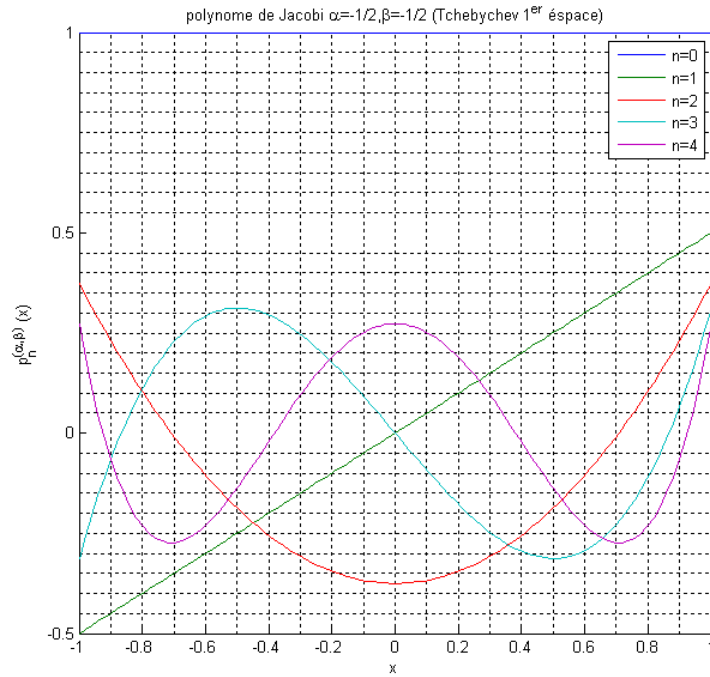


FIGURE 1.4 – polynôme de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = -1/2$) (Tchebychev 1^{er} espèce)

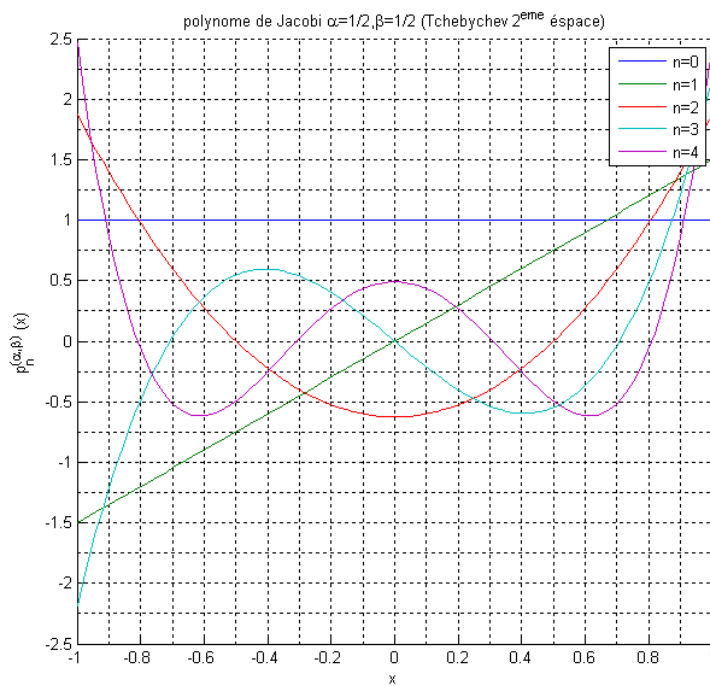


FIGURE 1.5 – polynôme de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$) (Tchebychev 2^{ème} espèce)

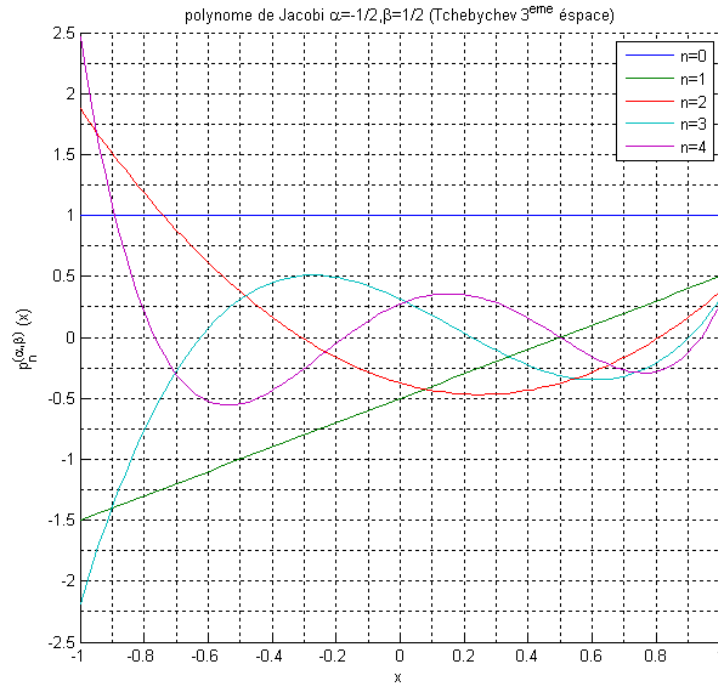


FIGURE 1.6 – polynôme de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = 1/2$) (Tchebychev 3^{ème} espèce)

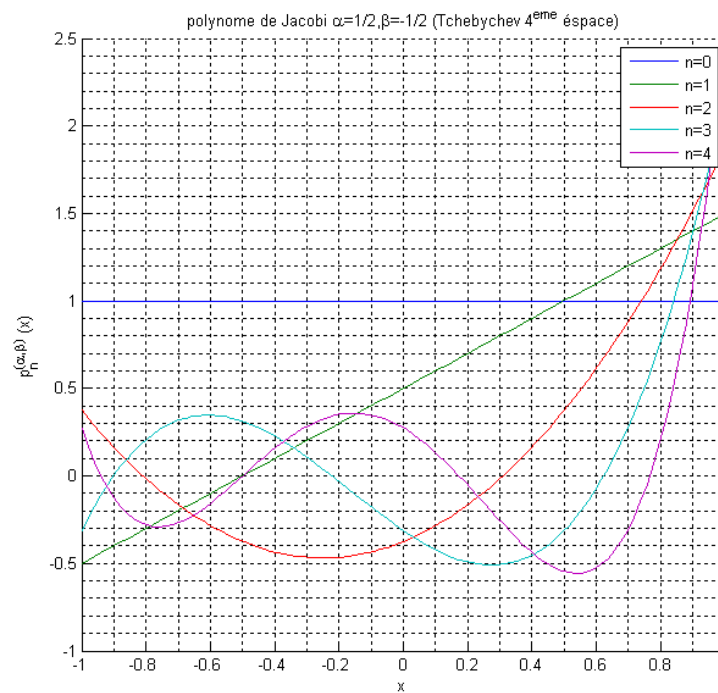


FIGURE 1.7 – polynôme de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = -1/2$) (Tchebychev 4^{ème} espèce)

2 Les Ondelettes

L'ondelette est une oscillation mathématique courte et très forte d'un signal ,elle était présente au début des années 1980 par l'ingénieur en géophysique Jean Morlet en association avec Alex Grossmann, elle est utilisée dans nombreuses disciplines et approches mathématiques et physiques. Ce mot est d'origine française , en anglais c'est « wavelet », avec le terme wav (onde) et let(petite) ,qui signifie des petites oscillations.Elle sont des fonctions à support compact.

2.1 Historique d'ondelettes

Au XXe siècle, l'analyse de Fourier présentée par Jean Baptiste Joseph Fourier en 1768 était la seule technique d'analyse du signal, en transformant la représentation temporelle du signal en fréquence pour le traitement du signal, L'un des inconvénients de l'analyse de Fourier est qu'elle ne peut pas analyser les signaux à haute fréquence en raison de ses fonctions d'analyse «*sin*» et «*cos*» définies sur \mathbb{R} .

En 1946, le physicien Denis Gabor a modifié la transformée de Fourier en courte terme et il a utilisé des fonctions appelées «fenêtre».

Au début des années 1980, l'ingénieur en géophysique Jean Morlet, en collaboration avec Alex Grossmann, a modifié la transformée de Fourier en analyse d'ondelettes pour résoudre des problèmes de traitement du signal.

Les ondelettes sont devenues un outil bien connu dans le traitement du signal, les ondelettes peuvent être utilisées pour zoomer et dé zoomer pour détecter les oscillations.

2.2 Définition des ondelettes

[6] Les ondelettes $\Psi_{a,b}(x)$ sont des fonctions générées par la translation et la dilatation d'une fonction génératrice ,appelée ondelette mère $\Psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

les ondelettes sont définie par

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad (1.12)$$

avec a est le paramètre de dilatation et b est paramètre de translation .

Dans la pratique ,on utilise le cas discret .Donc les deux paramètre prennent des valeurs discrètes tels que

$$\begin{cases} a = a_0^{-j} & a_0 = 2 \\ b = nb_0 a_0^{-j} & b_0 = 1 \end{cases}$$

pour $n, j \in \mathbb{N}^+$, nous avons la famille des ondelettes

$$\Psi_{j,n} = 2^{-j/2} \Psi(2^j x - n) \quad (1.13)$$

2.3 Exemples

2.3.0.1 L'ondelette de Haar : C'est la plus simple des ondelettes , définie sur l'intervalle $[0, 1]$ (ou parfois sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$)

c'est la fonction H constante par morceaux qui vaut :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1/2[\\ -1 & \text{si } x \in]1/2, 1[\end{cases} \quad (1.14)$$

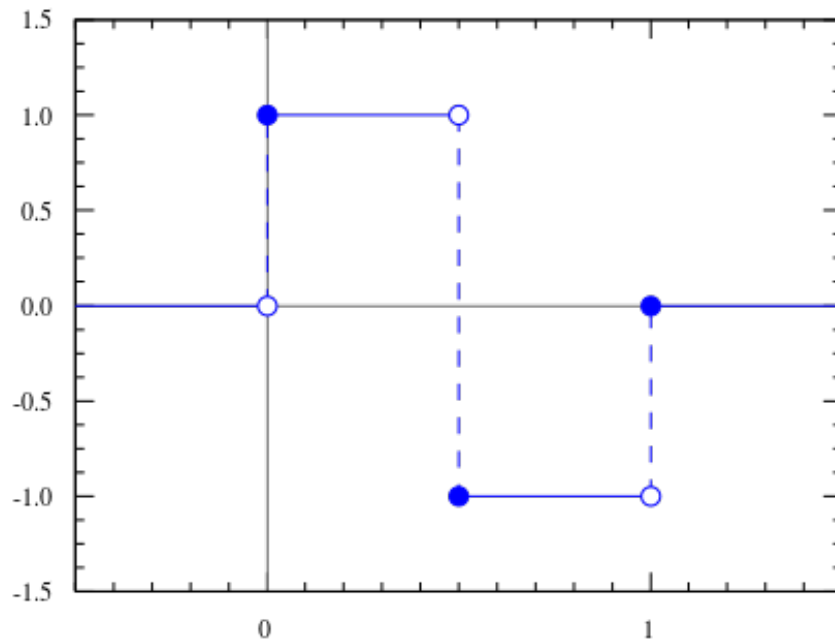


FIGURE 1.8 – Ondelette de Haar

2.3.0.2 L'ondelette de morlet : l'ondelette de morlet est une ondelette complexe elle s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t \quad \text{ou} \quad \Psi(x) = e^{-\pi t^2} e^{10i\pi t} \quad (1.15)$$

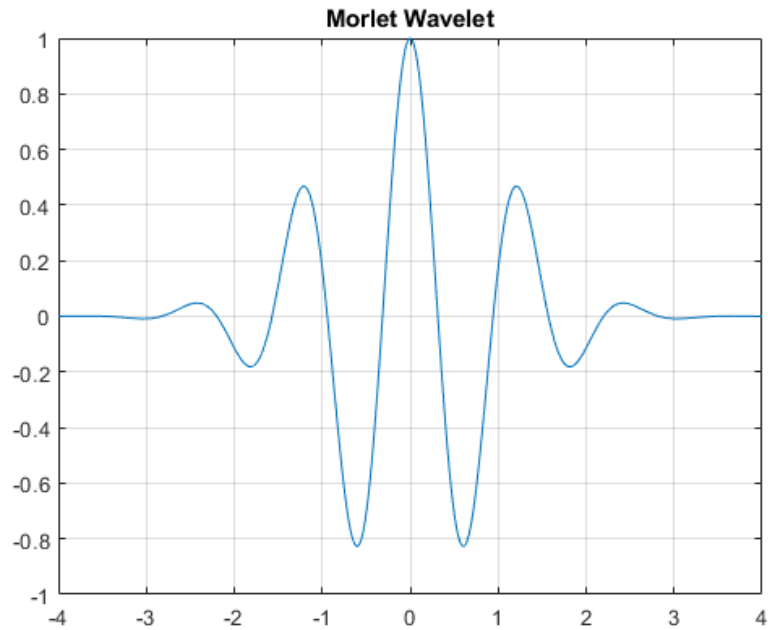


FIGURE 1.9 – Ondelette de Morlet

2.3.0.3 L'ondelette chapeau mexicain : L'ondelette chapeau mexicain est une ondelette continue et s'écrit sous forme :

$$\Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) \quad (1.16)$$

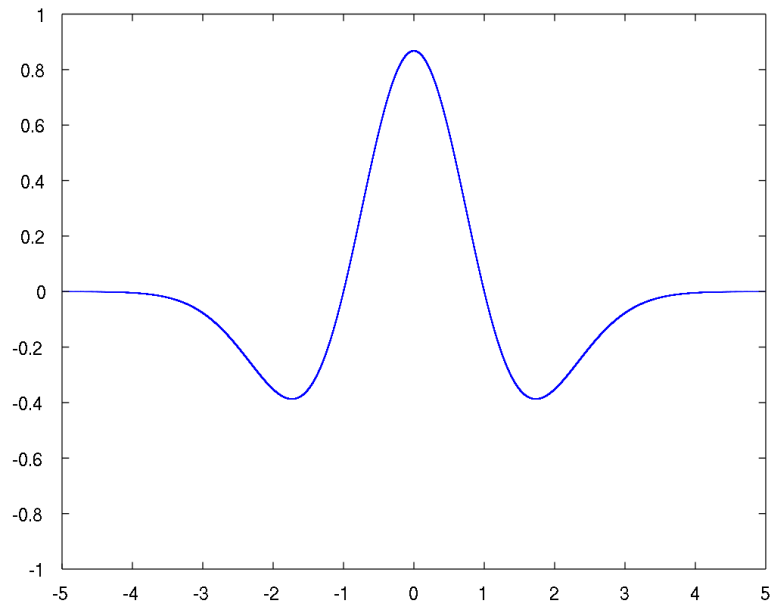


FIGURE 1.10 – Ondelette Chapeau Mexicain

Les ondelettes de jacobi

Dans ce chapitre , on va définir les ondelettes de jacobi , leur propriétés , la matrice opérationnelle de dérivation et on donne un exemple de cette matrice opérationnelle de dérivation .

1 Définition

Les ondelettes de Jacobi sont définies par [12] [1]

$$\Psi_{n,m}^{\alpha,\beta} = \Psi^{\alpha,\beta}(k, \eta, m, t) \quad (2.1)$$

avec quatre arguments $\eta = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots, 2^k$, k un entier positive , m est l'ordre des polynomes de jacobi un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et t est le temps normalisé

Il sont définis sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} \frac{1}{\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|} 2^{\frac{k+1}{2}} J_m^{(\alpha,\beta)}(2^{k+1}t - 2n + 1) \\ 0 \end{cases} \quad \text{ailleurs} \quad (2.2)$$

Telque $\|J_m^{(\alpha,\beta)}\| = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\beta+m+1) \Gamma(\alpha+m+1)}{m!(2m+1+\alpha+\beta) \Gamma(\alpha+\beta+m+1)}}$ assure l'orthonormalité de la base et le coefficient $\frac{1}{\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|}$ pour la normalisation

voici quelques exemples d'ondelettes de jacobi de différents indices

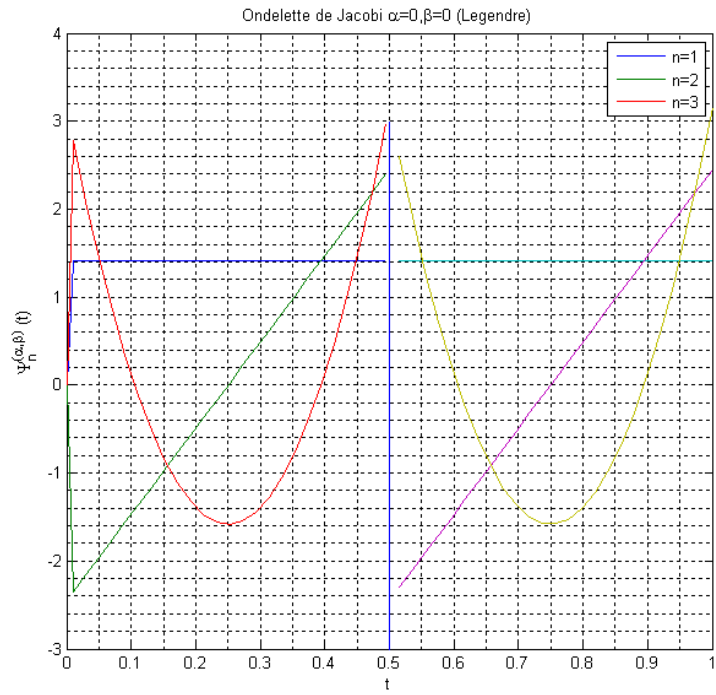


FIGURE 2.1 – Ondelette de Legendre

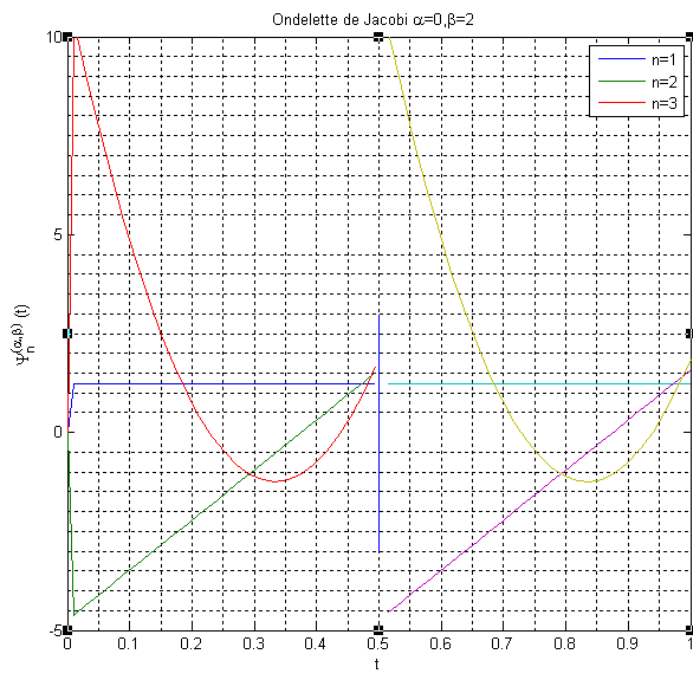


FIGURE 2.2 – Ondelette de Jacobi ($\alpha = 0, \beta = 2$)

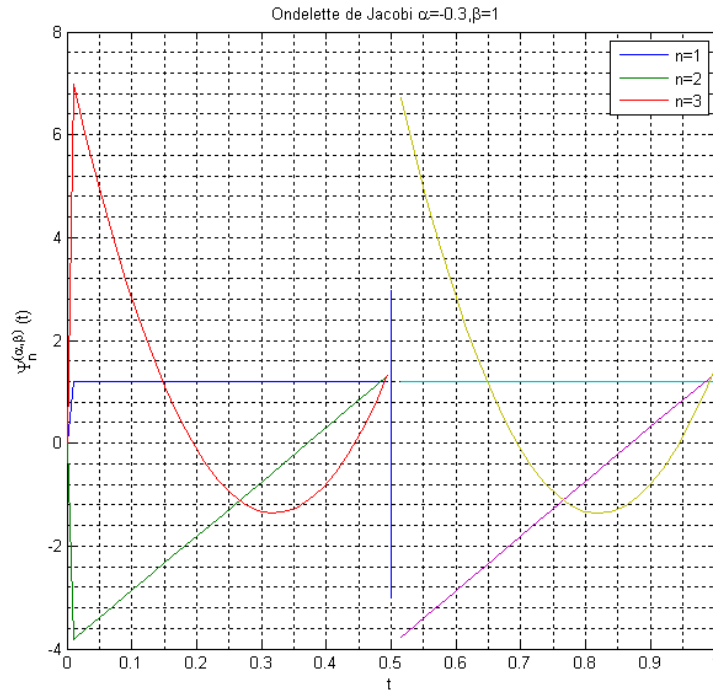


FIGURE 2.3 – Ondelette de Jacobi ($\alpha = 0.3, \beta = 1$)

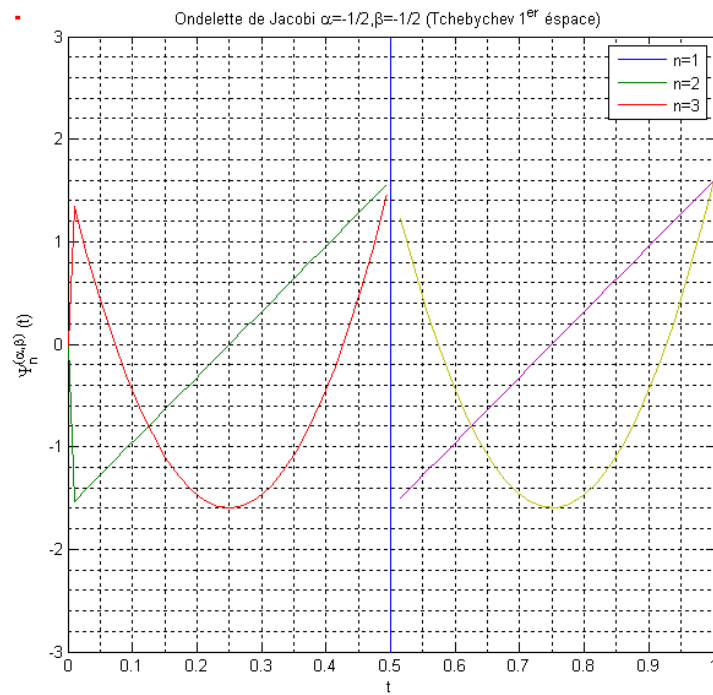


FIGURE 2.4 – Ondelette de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = -1/2$)

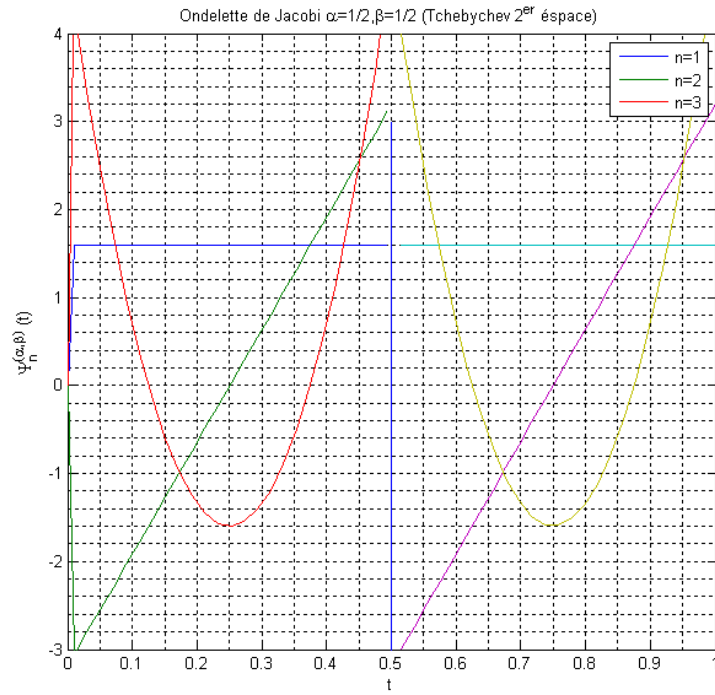


FIGURE 2.5 – Ondelette de Jacobi ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$)

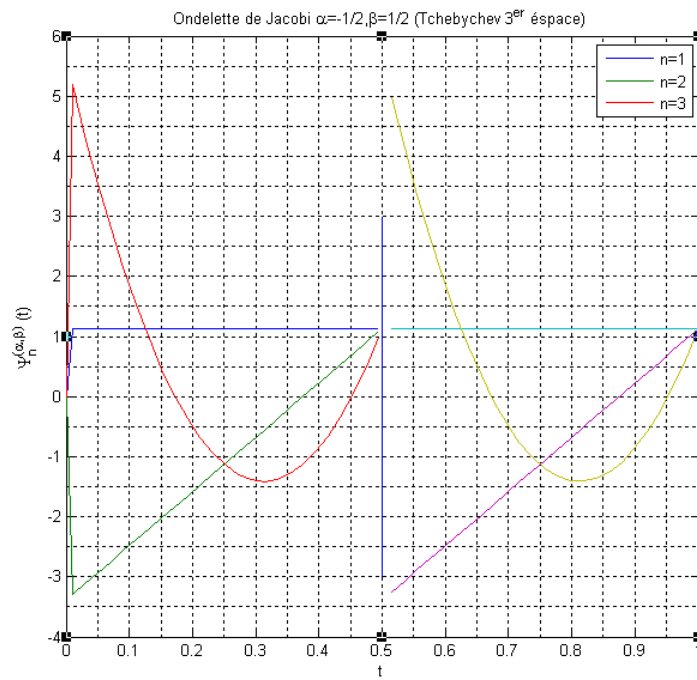


FIGURE 2.6 – Ondelette de Jacobi ($\alpha = -1/2, \beta = 1/2$)

2 Approximation d'une fonction

Puisque les ondelettes de Jacobi forment une base [1], alors on peut décomposer chaque fonction de $L^2_\omega([0, 1])$ dans cette base

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \Psi_{n,m}(x) \quad (2.3)$$

ou

$$c_{n,m} = \langle f, \Psi_{n,m} \rangle = \int_0^1 f(x) \Psi_{n,m}(x) \omega_n(x) dx \quad (2.4)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2^k} \sum_{m=0}^M c_{n,m} \Psi_{n,m}(x) = C^T \Psi(x) \quad (2.5)$$

ou C et Ψ sont deux vecteur de dimension $(M + 1 \times 2^k)$ donné par

$C = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{2^k, M}]$
 et $\Psi(x) = [\Psi_{1,0}(x), \Psi_{1,1}(x), \dots, \Psi_{2^k, M}(x)]$.

2.1 La Base de fonction

On démontre que la famille l'ondelette de jacobi $\{\Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{\substack{n=1,\dots,2^k \\ m \geq 0}}$ forme base ortho-normale dans $L^2_\omega([0, 1])$

Théorème 2.1 [1] la famille d'ondelette de jacobi $\{\Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{\substack{n=1,\dots,2^k \\ m \geq 0}}$ forme une base ortho-normale pour l'espace $(L^2_\omega([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$ muni de produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\omega = \sum_{i=0}^{2^k} \int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} f_i g_i \omega_i dx \quad (2.6)$$

ou f_i est restriction de f sur intrvalle $[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]$ et $\omega_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \omega^{(\alpha,\beta)}(2^{k+1}x - 2i + 1)$

2.2 La convergence de fonction

nous allons montrer la convergence de la suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^M c_{n,m} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x)$ dans $L^2_\omega([0, 1])$

Théorème 2.2 [1] Toute fonction $f \in L^2_\omega([0, 1])$ peut être représenté sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (2.7)$$

Ou la convergence des séries à liens dans $L^2_\omega([0, 1])$

3 La matrice opérationnelle de dérivation

Théorème 2.3 [15] soit $\Psi(t)$ le vecteur d'ondelette de jacobi définie par la relation (2.2) la dérivée de $\Psi(t)$ peut s'exprimer par :

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t)$$

où D est la matrice opérationnelle de dérivation de dimension $2^k(m+1)$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} F & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F \end{pmatrix}$$

avec F est la matrice $(M+1)(M+1)$ définie par :

$$F = \frac{d}{dt} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases} 2^{k+1} \frac{\|J_{j-1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|J_{i-1}^{(\alpha,\beta)}\|} \Phi_{i-1,j-1}^{(\alpha,\beta)}, & \text{si } 1 \leq j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{Avec } \Phi_{i-1,j-1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(i+\beta)(2(j-1)+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+i)}{2\Gamma(\alpha+\beta+i)\Gamma(\alpha+j)} \times \left(\sum_{l=j-1}^{i-2} (-1)^{l-j+1} \frac{2^{l+1+\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+l+1)}{\Gamma(\beta+l+2)} \right)$$

Preuve. [16] on utilise le polynôme de jacobi tronqué sur $[0, 1]$, qui définit le vecteur $\Psi(t)$ par la relation 2.2

$$\Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{1}{\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|} 2^{\frac{k+1}{2}} J_m^{(\alpha,\beta)}(2^{k+1}t - 2n + 1) X_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$$

où $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, 2^k$

et $X_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$ est la fonction caractéristique définie par

$$X_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la dérivée par rapport à t est

$$\frac{d}{dt} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{1}{\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|} 2^{\frac{k+1}{2}} \left(J_m^{(\alpha,\beta)} \right)' (2^{k+1}t - 2n + 1)$$

alors, la dérivée des ondelettes de jacobi $\Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t)$ pour un m, n fixés prendre la forme [1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) &= \frac{1}{\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|} 2^{\frac{k+1}{2}} 2^{k+1} \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{2\Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \times \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2r+1+\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+r+1)}{\Gamma(\alpha+r+2)} \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s-r} \frac{(2(s+1)+\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+s+1)}{\Gamma(\beta+s+2)} \right) J_r^{(\alpha,\beta)}(2^{k+1}t - 2n + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{2^{k+1}}{\|\mathbb{J}_m^{(\alpha,\beta)}\|} \gamma_{m,r}^{(\alpha,\beta)} \|\mathbb{J}_r^{(\alpha,\beta)}\| \Psi_{n,r}^{(\alpha,\beta)}(t)$$

on pose $\gamma_{m,r}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{2\Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \times \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2r+1+\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+r+1)}{\Gamma(\alpha+r+2)} \times \left(\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s-r} \frac{(2(s+1)+\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+s+1)}{\Gamma(\beta+s+2)} \right)$

on a peut écrit la notation matricielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{2^{k+1}}{\|\mathbb{J}_m^{(\alpha,\beta)}\|} \left(\gamma_{m,0}^{(\alpha,\beta)} \|\mathbb{J}_0^{(\alpha,\beta)}\|, \dots, \gamma_{m,m-1}^{(\alpha,\beta)} \|\mathbb{J}_{m-1}^{(\alpha,\beta)}\|, 0, \dots, 0 \right) \begin{bmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix} = 2^{k+1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{\|\mathbb{J}_0^{(\alpha,\beta)}\|}{\|\mathbb{J}_1^{(\alpha,\beta)}\|} \gamma_{1,0}^{(\alpha,\beta)} & \ddots & \vdots \\ \frac{\|\mathbb{J}_0^{(\alpha,\beta)}\|}{\|\mathbb{J}_M^{(\alpha,\beta)}\|} \gamma_{M,0}^{(\alpha,\beta)} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix}$$

où F est donné par 2.8

Enfin ,on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi^{(\alpha,\beta)}(t) &= \begin{pmatrix} F & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & F \end{pmatrix} \Psi^{(\alpha,\beta)}(t) \\ &= D \Psi^{(\alpha,\beta)}(t) \end{aligned}$$

■

3.1 La dérive n ème des ondelettes de jacobi

Corollaire 2.1 Pour tout entier naturel n ,la dérivée n^{ème} du vecteur ondelette de Jacobi s'écrit

$$\frac{d^n}{dt^n} \Psi^{(\alpha,\beta)}(t) = D^n \Psi^{(\alpha,\beta)}(t)$$

ou Dⁿ est la puissance n^{ème} de la matrice D .

3.2 Exemple de la matrice Opératonnelle

nous allons traité quelque exemple numériques

Exemple 2.1 prenons $M = 1, k = 1, \alpha = 0, \beta = 0$ (Legendre)
donc D une matrice (4×4) , alors F matrice (2×2)

$$\frac{d}{dt} \Psi_{2,1}^{(0,0)}(t) = 6.9282 \Psi_{0,1}^{(0,0)}(t)$$

la matrice F est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6.9282 & 0 \end{bmatrix}$

Et D la matrice bloc de diagonale F

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 6.9282 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 6.9282 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.2 prenons $M = 2, k = 1, \alpha = 0, \beta = 2$

D sera matrice (6×6) , alors F matrice (3×3)

la matrice F est $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10.3280 & 0 & 0 \\ 7.6376 & 17.7482 & 0 \end{bmatrix}$

Et

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 10.3280 & 0 & 0 & & & \\ 7.6376 & 17.7482 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 10.3280 & 0 & 0 \\ & & & 7.6376 & 17.7482 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} F^2 & 0 \\ 0 & F^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 183.3030 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 183.3030 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 183.3030 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Application des ondelettes de Jacobi pour résoudre un problème du contrôle optimal

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode analytique pour résoudre des problèmes de contrôle optimal quadratique avec contraintes linéaires. La méthode est basée sur la matrice opérationnelles de dérivation d'ondelettes de Jacobi. Ensuite, la solution est obtenue en réduisant le problème de contrôle optimal en tenant compte des équations algébriques, en utilisant la commande quadprog. On termine ce chapitre par des exemples illustratifs .

1 Problème du contrôle optimale à contraintes linéaires

Soit le problème minimiser fonction coût quadratique en temp discret :

$$\min J = \int_0^1 (x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Mu(t)) dt$$

avec l'équation de l'état du système et de la condition initiale qui présentent les contraintes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

pour Q et M matrices définies positives $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^1, A \in \mathbb{R}^{N \times N}, B \in \mathbb{R}^N$
on écrit chacun des vectures de contrôl x et u (x de létat u de contôle) dans la base des ondelettes de jacobi,

on a :

$$\begin{cases} x_i(t) = C_i^T \Psi(t) & i = 1 \dots \dots N \\ u_p(t) = U_p^T \Psi(t) & p = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$C_i = [c_{i,0,0}, c_{i,0,1}, \dots, c_{i,0,M}, c_{i,1,0}, \dots, c_{i,0,M}, c_{i,2^k,1}, \dots, c_{i,2^k,M}]^T$$

$$U_p = [u_{p,0,0}, \dots, u_{p,2^k,M}]^T$$

2 Approximation de la fonction coût

On décompose les membres du problème, si $u(t) \in \mathbb{R}$ alors $M \in \mathbb{R}^1$ c'à d M est une scalaire positive .

$$J = \int_0^1 (x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Mu(t)) dt$$

$$J = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} u_i u_j \right)$$

En utilisier 3.2 ,on trouve

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} (C_i)^T \Psi(t) \Psi^T(t) C_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} (U_i)^T \Psi(t) \Psi^T(t) U_j \right) dt$$

Puis,on permute entre l'intégrale et la somme :

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} (C_i)^T \left(\int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \right) C_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} (U_i)^T \left(\int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \right) U_j$$

on pose

$$H = \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \quad (3.3)$$

ce qui donne

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} (C_i)^T H C_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} (U_i)^T H U_j$$

on utilise (3.1) avec $\dot{x}(t)$ représenté par

$$\dot{x}_i(t) = C_i^T D \Psi(t) \quad i = 1, \dots, N$$

l'équation 3.1 devient

$$(C_i)^T D \Psi(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (C_j)^T \Psi(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} (U_j)^T \Psi(t) \quad (3.4)$$

De plus, en développant la condition initiale dans les fonctions d'ondelettes de jacobi, on obtient

$$x_i(0) = C_i^T \Psi(0) = x_{i,0},$$

l'équation 3.4 on obtient

$$(C_i)^T D \Psi(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij} (C_j)^T \Psi(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij} (U_j)^T \Psi(t) = 0 \quad i = 1, N$$

$$\Psi^T(t) \left(D^T C_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} C_j - \sum_{j=1}^n b_{ij} U_j \right) = 0 \quad i = 1, N$$

on applique 3.3 on trouve

$$S_i = \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) \left(D^T C_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} C_j - \sum_{j=1}^N b_{ij} U_j \right) dt \quad i = 1, N$$

Ainsi

$$S_i = H \left(D^T C_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} C_j - \sum_{j=1}^N b_{ij} U_j \right) \quad i = 1, N \quad (3.5)$$

$$S_i = [S_1, S_2, S_3, \dots, S_N]$$

tel que $S_i = [s_1, s_2, \dots, s_{2^k(M+1)}, s_{2^k(M+1)+1}, \dots, s_{2^{k+1}(M+1)}, s_{(N-1)2^k(M+1)+1}, \dots, s_{N2^k(M+1)}]$
l'équation 3.5 génère un $N2^k(M+1)$ ensemble d'équations linéaires.

3 Exemples d'application

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques en utilisant a méthode proposée on fait une comparaison avec d'autres méthodes.

Exemple 3.1 on a le problème de minimisation suivant

$$\min 1/2 \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ x_0 = x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

on utilise 3.2, on obtient

$$J = \int_0^1 1/2 (C^T \Psi(t) \Psi^T(t) C + U^T \Psi(t) \Psi^T(t) U) dt$$

d'après 3.3

$$J = 1/2 (C^T H C + U^T H U)$$

en utilisant 3.2 l'équation 3.7 s'écrit

$$C^T D \Psi(t) = -C^T \Psi(t) + U^T \Psi(t)$$

d'ou

$$\Psi(t)(C^T D + C^T - U^T) = 0$$

$$\Psi^T(t)(C D^T + C - U) = 0 \tag{3.8}$$

on multiplis 3.8 par $\Psi(t)$ et on integre sur $[0, 1]$, on trouve

$$\int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) (C D^T + C - U) = 0$$

puis

$$H(C D^T + C - U) = 0$$

la condition initiale devient

$$C^T \Psi(0) = 1$$

d'après l'étude de A. Bokhari dans [5] pour $k = 1, m = 7, m = 8$ ils ont trouvé $J = 0, 192909298093169$ les résultats numériques sont présenté dans le tablue 3.1 suivant, nous pouvons étudier le probleme différents paramètres $(m, k), (\alpha, \beta)$

(α, β)	(0, 0)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.1510	0.150254	0.1487	0.0926	0.0931

TABLEAU 3.1 – résultat pour legendre

(α, β)	(1/2, 1/2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.1510	0.150254	0.1487	0.0926	0.0931

TABLEAU 3.2 – résultat pour Tchebychev 2^{ème} espèce

(α, β)	$(-1/2, 1/2)$				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.1510	0.150254	0.1487	0.0926	0.0931

TABLEAU 3.3 – résultat pour Tchebychev 3^{ème} espèce

(α, β)	$(0, 2)$				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.1510	0.150254	0.1487	0.0926	0.0931

TABLEAU 3.4 – résultat pour jacobi (0, 2)

Exemple 3.2 soit le problème suivante minimiser le probleme de controle optimal pour $u(t) \in \mathbb{R}$ et $x(t) \in \mathbb{R}^2$. [5]

$$\min J = \int_0^1 ((x_1^2(t) + x_2^2(t)) + 0.005u^2(t)) dt \quad (3.9)$$

avec les contrainte suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

et la condition initiale

$$x_1(0) = 0 \quad (3.11)$$

$$x_2(0) = -1 \quad (3.12)$$

on utilise 3.2 on obtient

$$J = \int_0^1 (C_1^T \Psi(t) \Psi^T(t) C_1 + C_2^T \Psi(t) \Psi^T(t) C_2 + 0.005 U^T \Psi(t) \Psi^T(t) U) dt \quad (3.13)$$

d'après 3.3 on a

$$J = C_1^T H C_1 + C_2^T H C_2 + 0.005 U^T H U \quad (3.14)$$

et le systeme 3.10 devient après l'utilisation de 3.2

$$\begin{cases} C_1^T D \Psi(t) = C_2^T \Psi(t) \\ C_2^T D \Psi(t) = -C_2^T \Psi(t) + U^T \Psi(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

d'ou

$$\begin{cases} \Psi^T(t) (D^T C_1 - C_2) = 0 \\ \Psi^T(t) (D^T C_2 + C_2 - U^T) = 0 \end{cases}$$

(α, β)	(-0.5, 1.2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.1510	0.150254	0.1487	0.0926	0.0931

TABLEAU 3.5 – résultat pour jacobi (-0.5, 1.2)

$$\begin{cases} H(D^T C_1 - C_2) = 0 \\ H(D^T C_2 + C_2 - U^T) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

les condition initiale 3.11 et 3.12

$$C_1^T \Psi(0) = 0 \quad (3.17)$$

$$C_2^T \Psi(0) + 1 = 0 \quad (3.18)$$

dans les Tableaux [3.6] [3.7] [3.8] [3.9] [3.10] on obtient résultat numériques par la méthode proposée :

(α, β)	(0, 0)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.0467	0.0433	0.389	0.0370	0.0356

TABLEAU 3.6 – résultat pour Legendre

(α, β)	(1/2, 1/2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.0467	0.0433	0.389	0.0370	0.0356

TABLEAU 3.7 – résultat pour tchebychev 2^{ème} espèce

(α, β)	(-1/2, 1/2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.0467	0.0433	0.389	0.0370	0.0356

TABLEAU 3.8 – résultat pour tchebychev 3^{ème} espèce

(α, β)	(0, 2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.0467	0.0433	0.389	0.0370	0.0356

TABLEAU 3.9 – résultat pour jacobi (0, 2)

(α, β)	(-0.5, 1.2)				
k	1			2	
m	4	5	8	4	5
J	0.0467	0.0433	0.389	0.0370	0.0356

TABLEAU 3.10 – résultat pour jacobi (-0.5, 1.2)

Conclusion

Dans ce travail, on a utilisé la méthode des ondelettes de jacobi pour résoudre un problème du contrôl optimal quadratique avec contraintes linéaires. On a présenté la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de jacobi pour tout indice (α, β) , et la base des ondelettes jacobi pour l'approximation des fonctions . Par la suite ,on a proposé une approche et en se basant sur le travail de BOUKHARI, on a résolu un problème de contrôl optimal par cette méthode . Cette approche est testée sur des exemples numériques dans \mathbb{R} et dans \mathbb{R}^2 , où nous avons utilisé la fonction matlab quadprog pour trouver le minimum . nous avons obtenus des résultats numérique mieux que ceux de BOUKHARI, où le paramètre k (nombre de niveaux) joue un rôle très important dans les résultats

perspectives

Dans notre travail , nous pouvons proposé comme perspectives

- Application les ondelettes de jacobi pour le contrôle optimal dans le cas non linéaire

Bibliographie

- [1] N. ABBASSA, A. Amir, and S. M. Bahri. Regularized jacobi wavelets kernel for support vector machines. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 7(4) :669–685, 2019. [19](#), [23](#), [24](#)
- [2] N. Abbassa, S. M. Bahri, and A. Amir. *Analyse multi échelle d'ondelettes de Jacobi et applications*. PhD thesis, Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, 2020. [4](#), [9](#)
- [3] N. ABLAOUI-LAHMAR, Z. KAISSERLI, and N. BENLAHCENE. [10](#)
- [4] s. ALI MERINA, Houria year=2017. PhD thesis. [12](#)
- [5] A. Bokhari, A. Amir, S. M. Bahri, and F. B. M. Belgacem. A generalized bernoulli wavelet operational matrix of derivative applications to optimal control problems. *Nonlinear Studies*, 24(4) :775–90, 2017. [4](#), [30](#), [31](#)
- [6] L. Claustres. Introduction aux ondelettes, 2002. [4](#), [15](#)
- [7] B. G. S. Doman. *The classical orthogonal polynomials*. World Scientific, 2015. [4](#), [8](#)
- [8] H. Hassani, H. Bechir, B. Snani, et al. *Transformation de Fourier et méthodes des ondelettes*. PhD thesis, Université abderrahmane mira béjaia, 2014. [4](#), [7](#)
- [9] M. Lavoie. Polynômes orthogonaux. 2015. [6](#), [7](#), [8](#)
- [10] T.-T. LEE and Y.-F. TSAY. Analysis and optimal control of discrete linear time-varying systems via discrete general orthogonal polynomials. *international Journal of Control*, 44(5) :1427–1436, 1986. [4](#)
- [11] V. Ludovic. *Généralités sur les polynômes orthogonaux*. PhD thesis, Nantes, 2000. [4](#), [7](#)
- [12] H. M. Maghnia. PhD thesis, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, 2017. [4](#), [9](#), [19](#)

- [13] Y. Meyer. Les ondelettes : algorithmes et applications. Technical report, Armand Colin Editeur, 1992. [4](#)
- [14] F. Mohammadi and M. Hosseini. A new legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations. *Journal of the Franklin Institute*, 348(8) :1787–1796, 2011. [4](#)
- [15] M. Razzaghi and S. Yousefi. The legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, 32(4) :495–502, 2001. [24](#)
- [16] M. Razzaghi and S. Yousefi. Legendre wavelets method for constrained optimal control problems. *Mathematical methods in the applied sciences*, 25(7) :529–539, 2002. [4](#), [24](#)
- [17] G. Szeg. *Orthogonal polynomials*, volume 23. American Mathematical Soc., 1939. [4](#), [6](#)
- [18] V. Yen and M. Nagurka. Linear quadratic optimal control via fourier-based state parameterization. 1991. [4](#)

Annexe

```

%% this function for minimisation de control optimal with méthode of jacobi
function mincontrol
%%
clear all
clc
close all
%%
%% Les données
al=input('donnez al ');
be=input('donnez be ');
x0=1;input('donnez la condition initiale x0 : ');
m=input('donnez l ordre m : ');
k=input('donnez l ordre k:');
x = linspace(0,0.99,(m+1)*2^k);
%%
%% Les données de programme
Psi_matrice =wavellet_matrice(al,be,k,m,x); %la matrice d' ondelette
H=integrale_psi(al,be,k,m,x); %la matrice integrale de matrice ondelette
D=matrix_operational(al,be,k,m); %la matrice operational
psi0=vect_psi_jacobi(al,be,k,m,0 ); % le vecteur psi en x=0
O=zeros((m+1)*2^k,1)';
OO=zeros((m+1)*2^k,1)';
I=eye(size(D)); % la matrice identité
A=[psi0 OO:H*(D'+I) H]; % la matrice A
b=zeros((m+1)*2^k,1);
b=[x0;b]; % le vecteur b
Q=[H O;O H]; % la matrice quadratic
[T,E] = eig(Q); % calculer 'T' les vecteur propre et 'V' les valeur propre
%%
%% la solution avec fmincon
% f=0(x) 1/2*x'*Q*x;
% sol=psi0/x0;
% sol=[sol;zeros((m+1)*2^k,1)];
% %S= fmincon(f,sol,[],[],A,b,[],[]);
%%
%% la solution avec quadprog
S=quadprog(Q,[],[],[],A,b,[],[]);
C=S(1:(m+1)*2^k); % le vecteur C
U=S((m+1)*2^k+1:end); % le vecteur U
%%
%% calcul des sommes
% r=0;
% u=0;
% for i=1:2^k
% for j=1:m+1
% r =r + psiwav(al,be,k,i,j) .*C((m+1)*(i-1)+j);
% u =u + psiwav(al,be,k,i,j) .*U((m+1)*(i-1)+j);
% end
% end
[r,u]=sommes_vecteur(al,be,k,m,C,U);
%%
%% calcule la minimum J
xr=(inline(r)); % pour fonctioné r
x = linspace(0,1,(m+1)*2^k); % le vecteur x
disp(' la condition initiale ')
x0=xr(0)
% la fonction min J
disp(' le résultat donnez : ')
J=1/2*S'*Q*S;
Jmin=sprintf('% .15f',J)
end

```

FIGURE 3.1 – code matlab de J dans \mathbb{R}

```

%% this function for minimisation de control optimal with methode of jacobi R^2
%%
clear all
clc
%%
al=1/2;
be=1/2;
x0=[0;-1];
N=1;
m=input('donnez 1 ordre m: ');
k=input('donnez 1 ordre k:');
ae=0.005;
x = linspace(0,0.99,N*(m+1)*2^k);
%% les donnees de programme
Psi_matrice =wavellet_matrice(al,be,k,m,x); %la matrice d' ondelette
H=integrale_pssi(al,be,k,m,x); %la matrice integrale de matrice ondelette
D=matrix_operational(al,be,k,m); %la matrix_operational
psi0=vect_psi_jacobi(al,be,k,m,0 ); % le vecteur psi en x=0
O=zeros((m+1)*2^k,1);
OO=zeros((m+1)*2^k,1)';
I=eye(size(D)); % la matrice identité
A=[psi0 OO OO;OO psi0 OO;H*D' -H O;O H*(D'+I) -H]; % la matrice A
%A=[psi0 OO OO;OO psi0 OO;D' -I O;O (D'+I) -I];
b=zeros((m+1)*2^k,1);
b=[x0;OO';b]; % le vecteur b
Q=[H O O;O H O ;O O ae*H]; % la matrice quadratic
[T,E] = eig(Q);
%% la solution avec quadprog
S=quadprog(Q,[],[],[],[],A,b,[],[]);
C1=S(1:(m+1)*2^k);
C2=S((m+1)*2^k+1:(2*(m+1)*2^k));
U=S((2*(m+1)*2^k+1:end));
%% calcule des sommes
r=0;
r1=0;
u=0;
for i=1:2^k
    for j=1:m+1
        r =r + psiwav(al,be,k,i,j) .*C1((m+1)*(i-1)+j);
        r1=r1 + psiwav(al,be,k,i,j) .*C2((m+1)*(i-1)+j);
        u =u + psiwav(al,be,k,i,j) .*U((m+1)*(i-1)+j);
    end
end
%% calcule la minimum J
xr=(inline(r));
xr1=(inline(r1));
xu=(inline(u));
x = linspace(0,1,(m+1)*2^k);
x0=[xr(0);xr1(0);xu(0)]
J=1/2*S'*Q*S

```

FIGURE 3.2 – code matlab de J dans \mathbb{R}^2

