

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Ghalem HICHAM

Nouvelle formule d'intégration basée sur les ondelettes de Legendre

soutenu le 20 Juin 2021 devant le jury composé de :

Encadreur :	Ablaoui-Lahmar NAIMA	Dr.	UMAB
Président :	Hamou maamar MAGHNIA	Dr.	UMAB
Examinatrice :	Djelloul NAIMA	Dr.	ENS.M

Année Universitaire : 2020 / 2021

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

A mes parents qui ont éclairé mon chemin et qui ont encouragé et soutenu toute au long de mes études.

A mes frères Khaled et Mossa.

A ma famille surtout mes grands-parents.

A tous mes amis surtout Djamel kader.

Remerciements

Je remercié Allah de nous avoir accordé des connaissances de la science, et de nous avoir aidé à réaliser ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à Mon Encadreuse madame Naima Ablaoui-Lahmar, pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi du travail.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donné les bases de la science.

Je remercie très sincèrement, les membres de jury professeuses Hamou Maamar Maghnia et Djelloul Naima d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.

Je remercie tout personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

Liste des tableaux	4
Table des figures	5
Introduction	6
1 L'intégration numérique	8
1 Introduction	8
2 Les méthodes de Newton-Côte simples	8
3 Les méthodes de Newton-Côtes composites	12
2 Formule d'intégration des ondelettes de Legendre	15
1 Introduction	15
2 Les Polynômes de Legendre	15
3 Les ondelettes de Legendre	17
4 Approximation d'une fonction de $L^2(0,1)$	17
5 La matrice opérationnelle d'intégration	19
6 Formule d'intégration des ondelettes de Legendre	23
3 Tests et résultats numériques	25
1 Exemple 1	25
2 Exemple 2	26
3 Exemple 3	28
Conclusion	30
Annexe	31
4 Les sous programmes	31
BIBLIOGRAPHIE	34

Liste des tableaux

1.1	Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	11
3.1	Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k=2$	25
3.2	Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k=3$	26
3.3	Le tableau des erreurs pour $f(x) = \exp(x) + x$ et $k=2$	26
3.4	Le tableau des erreurs pour $f(x) = \exp(x) + x$ et $k=3$	26
3.5	Le tableau des erreurs pour $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $k=2$	28
3.6	Le tableau des erreurs pour $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $k=3$	28
3.7	Le tableau des erreurs pour $y(x) = 8\sqrt{R^2 - x^2} - 2R^2$ et $k=2$	29
3.8	Le tableau des erreurs pour $y(x) = 8\sqrt{R^2 - x^2} - 2R^2$ et $k=3$	29

Table des figures

1	Interprétation géométrique de l'intégrale	6
1.1	Méthode du point milieu ($n = 0$)	9
1.2	Méthode du Trapèze ($n = 1$)	10
1.3	Méthode de Simpson simple ($n = 2$)	11
1.4	Méthode des trapèzes composite, pour 6 sous intervalles et 7 points	13
1.5	Méthode de simpson composite pour 3 sous intervalles et 7 points	14
2.1	Les six premiers polynômes de Legendre	16
2.2	Les Ondelettes $\psi_{1,1}, \psi_{2,1}$, et le polynôme de Legendre $P_1(x)$	18
2.3	Les Ondelettes $\psi_{1,2}, \psi_{2,2}$, et le polynôme de Legendre $P_2(x)$	19
3.1	représentation graphique du logarithme des erreurs, $f(x) = \exp(x) + x$	27
3.2	représentation graphique du logarithme des erreurs, $f(x) = \exp(x) + x$	27

Introduction

Dans ce mémoire, on veut évaluer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, notée $I(f)$. Si l'on connaît sa primitive F , alors d'après la formule de Newton-Leibniz

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où : $F' = f$.

On peut interpréter l'intégrale d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ comme étant la surface délimitée par l'axe des abscisses, les deux droites d'équations $y = a$, $y = b$ et la portion de la courbe de f délimitée par ces deux droites.

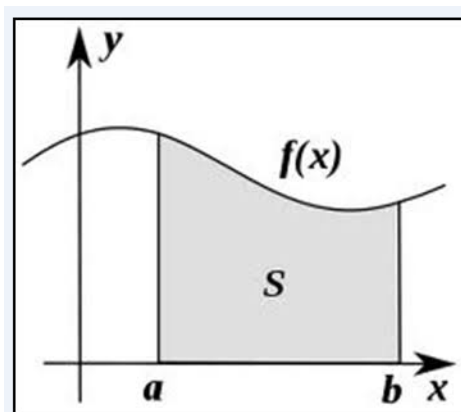


FIGURE 1 – Interprétation géométrique de l'intégrale

Dans de nombreux cas, la primitive F ne peut pas être connue. Comme cela est le cas pour certaines fonctions compliquées telles que :

$$\int_a^b \cos(x^2) dx, \quad \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}} dx.$$

Il arrive aussi que la fonction f soit connue seulement en un nombre fini de points (résultats d'une expérience). Dans ces cas, on préférera calculer numériquement la valeur de l'intégrale $I(f)$.

Il existe plusieurs méthodes pour approcher numériquement $I(f)$. On peut citer les méthodes de Gauss, les méthodes de Newton-Côtes ou alors les méthodes de Monté-Carlo.

Les principes de ces méthodes sont différents. On s'intéresse particulièrement aux méthodes de Newton-Côtes, dont le principe est de remplacer la fonction f par un polynôme

d'interpolation P , ensuite approcher $I(f)$ par $\int_a^b P(x)dx$.

L'objectif principal de ce mémoire est d'élaborer une nouvelle formule d'intégration numérique appelée LWF (Legendre Wavelets Formula). Son principe est proche de celui des méthodes de Newton-Côtes et qui consiste à approcher la fonction f par une somme finie d'ondelettes de Legendre.

Pour valider cette méthode, des tests numériques ont été effectués sur MATLAB et les résultats numériques donnés par cette méthode ont été comparés avec ceux donnés par les trois méthodes de Newton-Côtes; point milieu, trapèzes et Simpson. Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Dans le chapitre 1, on rappelle les formules d'intégration numérique de Newton-Côtes.

Le chapitre 2 est réservé à l'élaboration de la formule d'intégration des ondelettes de Legendre (LWF).

Le dernier chapitre est consacré aux tests numériques.

On termine par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

L'intégration numérique

1 Introduction

Dans ce chapitre, on va rappeler **les méthodes d'intégration numérique** les plus connues et les plus utilisées pour estimer :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

où f est une fonction intégrable sur $[a, b]$.

Pour l'obtention de cette estimation, on va approcher la fonction f par une fonction d'approximation φ , telle que le calcul de $\int_a^b \varphi(x) dx$ soit simple et ensuite admettre que :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Si cette approximation est suffisamment bonne, alors l'intégrale de cette fonction $I = \int_a^b \varphi(x) dx$, sera une bonne approximation de $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

2 Les méthodes de Newton-Côte simples

2.1 Principe

Le principe général des méthodes de Newton-Côtes simples réside dans le choix de la fonction φ . Celle-ci est prise comme étant le polynôme d'interpolation P_n .

Les méthodes de Newton-Côtes varient avec le degré n de ce polynôme d'interpolation.

2.2 La méthode du point milieu (n=0)

Cette méthode utilise le polynôme constant P_0 pour approximer la fonction f [3]. Cependant, elle exploite mieux les symétries du problème en choisissant la valeur milieu, c'est à dire que ce polynôme constant est défini par :

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_0$$

L'intégrale approchée

$$\tilde{I}_0 = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx$$

donne la formule du point milieu qui est :

$$\tilde{I}_0 = (b - a) f_0.$$

Cette méthode nécessite une unique évaluation de la fonction f en $(x_0 = \frac{a+b}{2})$.

L'erreur :

L'erreur de l'approximation par la méthode du point milieu est donnée par :

$$\epsilon_0 = \frac{h^3}{24} f''(\xi) \text{ où } \xi \in]a, b[\text{ et } h = (b - a)$$

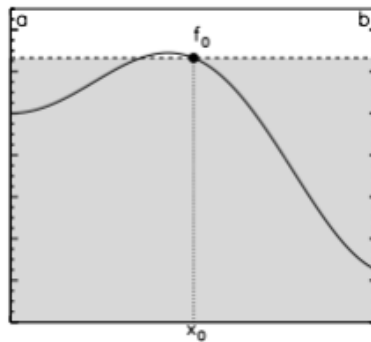


FIGURE 1.1 – Méthode du point milieu ($n = 0$)

L'erreur ϵ_0 n'est pas connue car la valeur de $\xi \in]a, b[$ reste indéterminée. Cependant on peut la majorer, par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré.

2.3 La méthode des trapèzes ($n=1$)

Pour trouver cette méthode, la fonction f est approchée par le polynôme de Lagrange d'ordre 1 [5], P_1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ qui est donné par :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) \frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b) \frac{(x-a)}{(b-a)} \\ &= \frac{f(b)x - af(b) - f(a)x + bf(a) + af(a) - af(a)}{b-a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_1 = \int_a^b P_1(x) dx$, se calcule facilement et donne la formule des trapèzes suivante :

$$\tilde{I}_1 = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

L'erreur :

L'erreur de l'approximation par la méthode des trapèzes est donnée par :

$$\epsilon_1 = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \text{ où } \xi \in]a, b[\text{ et } h = b - a$$

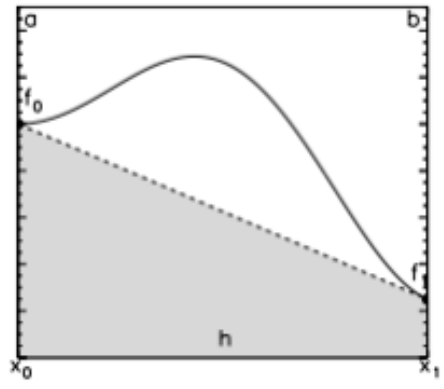


FIGURE 1.2 – Méthode du Trapèze (n = 1)

2.4 La méthode de Simpson simple (n=2)

Cette méthode est obtenue en approchant la fonction f par le polynôme d'interpolation d'ordre 2 [2], P_2 qui passe par les points $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$ et qui est donné sous sa forme de Lagrange par :

$$P_2(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a - b)} f(a) + \frac{(x - a)(x - b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b - a)(b - \frac{a+b}{2})} f(b)$$

$$= 2 \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a + b)(a - b)} f(a) - 4 \frac{(x - a)(x - b)}{(a - b)^2} f(\frac{a+b}{2}) - 2 \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(a - b)^2} f(b)$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_2 = \int_a^b P_2(x) dx$ se calcule alors simplement et donne :

$$\tilde{I}_2 = (b - a) \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction f en $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$

L'erreur :

L'erreur de l'approximation par la méthode de Simpson est donnée par :

$$\epsilon_2 = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \text{où } \xi \in]a, b[\quad \text{et } h = \frac{b-a}{2}$$

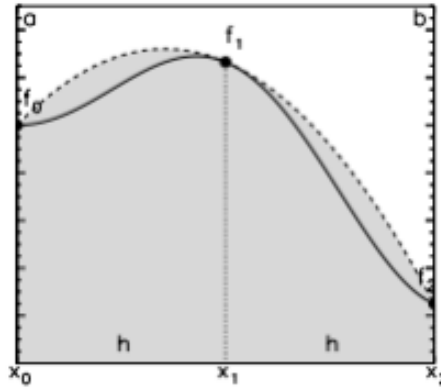


FIGURE 1.3 – Méthode de Simpson simple ($n = 2$)

Exemple 1.1 On va appliquer ces trois méthodes pour estimer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, qui vaut $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

L'erreur associée à cette approximation est donné dans le tableau suivant :

$E_{\text{Point-milieu}}$	E_{Trapzes}	E_{Simpson}
0.0146	0.0354	0.0021

TABLEAU 1.1 – Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Remarque 1.1 -

1. Ces trois méthodes ne fournissent pas une bonne précision. Plus l'intervalle $[a, b]$ est petit, plus l'erreur est faible.
2. Pour améliorer la précision, on peut augmenter le degré du polynôme qui approche la fonction f et ceci en augmentant le nombre de points pris dans l'intervalle $[a, b]$. C'est ce qu'on appelle les méthodes d'ordre supérieur.
3. Une autre manière d'améliorer la précision, est de diviser l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles de même longueur (petite) et d'appliquer une des méthodes d'intégration sus-citées sur chacun des sous intervalles. C'est ce qu'on appelle les méthodes composites (généralisées).

2.5 La méthode d'ordres plus élevés

Plus généralement, on peut construire des approximations en utilisant des polynômes d'ordre quelconque n . Le polynôme d'interpolation d'ordre n passant par $n + 1$ points $x_k, k = 0, \dots, n$ régulièrement espacés entre a et b s'exprime en fonction des polynômes élémentaires de Lagrange $L_k(x), k = 0, \dots, n$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) \text{ avec } L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

L'intégrale approchée $\tilde{I}_n = \int_a^b P_n(x) dx$, peut alors se calculer et donne :

$$\tilde{I}_n = (b - a) \sum_{k=0}^n f(x_k)w_k \text{ avec } w_k = \frac{\int_a^b L_k(x) dx}{b - a}.$$

Une telle méthode nécessite $(n + 1)$ évaluations de la fonction f en $(x_k)_{k=0,\dots,n}$ et le calcul des $(n + 1)$ coefficients w_k . Ainsi plus le degré est élevé, plus la méthode est coûteuse.

Erreur :

L'erreur de cette méthode est donnée par :

si p impair :

$$|e| \leq \frac{h^{n+2}}{C_n} \text{Sup}_{[a,b]}(|f^{n+1}(x)|), \text{ avec } \xi \in]a, b[$$

si p pair :

$$|e| \leq \frac{h^{n+3}}{C_n} \text{Sup}_{[a,b]}(|f^{n+2}(x)|), \text{ avec } \xi \in]a, b[$$

où C_n est un coefficient qui dépend de l'ordre du polynôme P_n .

3 Les méthodes de Newton-Côtes composites

3.1 Principe

On rappelle que le principe général des méthodes de Newton-Côtes composites [8] [7] [4] est de décomposer l'intervalle $[a, b]$ en choisissant une subdivision régulière $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ vérifiant : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a alors

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, on applique l'une des méthodes d'intégration telles que la méthode du point milieu, des trapèzes ou de Simpson.

3.2 La méthode des trapèzes composite ($p=1$)

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'intégrale de trapèzes simple s'exprime par [2] et [6]

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k) \frac{f_k + f_{k+1}}{2},$$

où $f_k = f(x_k)$, $f_{k+1} = f(x_{k+1})$.

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1,C} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &\simeq \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)), \end{aligned}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$. C'est la formule des trapèzes composite sur l'intervalle $[a, b]$.

L'erreur :

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs et qui est donnée par :

$$\epsilon = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi), \quad \text{avec } \xi \in]a, b[$$

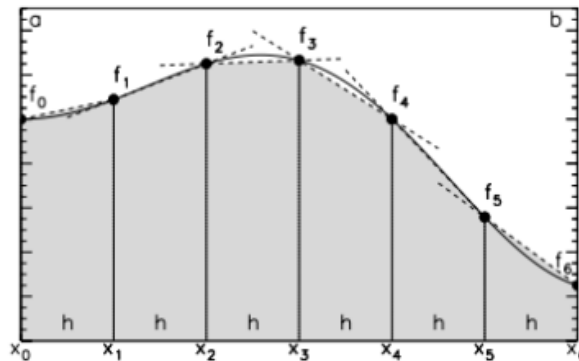


FIGURE 1.4 – Méthode des trapèzes composite, pour 6 sous intervalles et 7 points

3.3 La méthode de Simpson composite

La méthode de Simpson simple sur chaque sous intervalle $[x_k, x_{k+2}]$ s'exprime par :

$$\tilde{I}_2 = (x_{k+2} - x_k) \frac{f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}}{6},$$

où $f_i = f(x_i)$, et x_{k+1} est le point milieu de l'intervalle $[x_k, x_{k+2}]$.

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\tilde{I}_{2,C} \simeq \frac{h}{3} (f(a) + 4 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b)).$$

C'est la formule de Simpson composite.

L'erreur :

L'erreur étant la somme de toutes les erreurs, elle est donnée par :

$$\epsilon_2 = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{avec } \xi \in]a, b[,$$

où l'on a posé : $h = \frac{b-a}{n}$

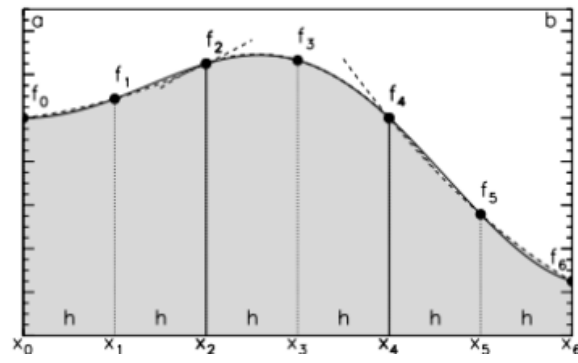


FIGURE 1.5 – Méthode de simpson composite pour 3 sous intervalles et 7 points

Chapitre 2

Formule d'intégration des ondelettes de Legendre

1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter la nouvelle formule d'intégration numérique (LWF) qui est basée sur les ondelettes de Legendre et la matrice opérationnelle d'intégration. Pour cela, on va introduire les outils mathématiques dont on a besoin, tels que, les polynômes de Legendre, les ondelettes de Legendre, l'approximation dans l'espace de Hilbert $L^2(]0,1[)$, ...

2 Les Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont introduits en 1784, par le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752-1833) [1] [8]. Ils sont les solutions de l'équation différentielle dite de Legendre,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + ky = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) peut se représenter par un problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + ky = 0$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Ces polynômes sont définis sur $[-1, 1]$ et possèdent un certain nombre de propriétés mathématiques utiles et intéressantes telle que l'orthogonalité. Ils sont caractérisés de plusieurs manières.

Proposition 2.1 *Les polynômes de Legendre sont définis par la formule connue sous le nom de : Formule de Rodriguez [1]*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m n!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Proposition 2.2 *Ils sont aussi définis par la formule de récurrence, (Celle avec laquelle on va travailler) :*

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ces polynômes possèdent beaucoup de propriétés, parmi lesquelles :

Proposition 2.3 Les polynômes de Legendre vérifient la propriété d'orthogonalité dans le sens où :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Proposition 2.4 Le polynôme de Legendre d'ordre n ; P_n a n racines réelles simples dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Proposition 2.5 La primitive du polynôme de Legendre P_n est donnée par

$$\int P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}). \tag{2.3}$$

Proposition 2.6 Le polynôme de Legendre P_n est pair (respectivement impair) si n est pair (respectivement impair), de plus $\forall n \geq 0$ [1], on a

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 \\ P_n(-1) = (-1)^n \end{cases} \tag{2.4}$$

Remarque 2.1 Les six premiers polynômes de Legendre sont :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{cases}$$

et leur représentation graphique :

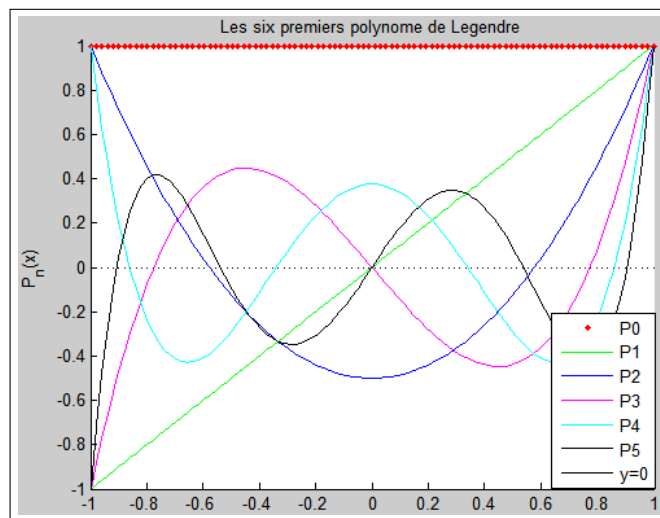


FIGURE 2.1 – Les six premiers polynômes de Legendre

3 Les ondelettes de Legendre

Soit k un entier non nul fixé. On divise l'intervalle $[0, 1]$ en 2^{k-1} domaines notés : $I_n, n = 1, \dots, 2^{k-1} - 1$ du type :

$$I_n = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[.$$

Sauf pour le dernier sous intervalle qui est du type

$$I_n = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, 1 \right]$$

avec $n = 2^{k-1}$ de telle sorte que :

$$[0, 1] = \bigcup_{n=1, \dots, 2^{k-1}} I_n.$$

Définition 2.1 Les ondelettes de Legendre en une dimension [1], notées $\Psi_{n,m}(x) = \psi(n, m, k, x)$, sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\Psi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} P_m(2^k x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Où pour tout entier fixé, $k > 0, n = 1, \dots, 2^{k-1}$ avec 2^{k-1} représente le nombre de niveaux de décomposition de l'intervalle $[0, 1]$ et $m = 0, 1, 2, \dots$ est le degré du polynôme de Legendre P_m .

Proposition 2.7 La famille $\{\Psi_{n,m}(x)\}_{1 \leq n < 2^{k-1}, m \geq 0}$ forme une base Hilbertienne de l'espace $L^2(]0, 1[)$.

Donc tout élément $f \in L^2(]0, 1[)$ peut se décomposer en :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m \geq 0} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x)$$

où les coefficients $C_{n,m}$ de cette décomposition sont définis par :

$$C_{n,m} = \langle f(x), \Psi_{n,m}(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \Psi_{n,m}(x) dx$$

tel que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(]0, 1[)$.

4 Approximation d'une fonction de $L^2(]0, 1[)$

D'après la proposition (2.7), toute fonction f de l'espace $L^2(]0, 1[)$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m \geq 0} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x).$$

Pour obtenir l'approximation des fonctions de $L^2(]0, 1[)$, on tronque la série en ne gardant que les polynômes de degré inférieur M , avec M fixé et on a :

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x). \quad (2.6)$$

Cette approximation prend la forme contractée suivante :

$$f(x) \simeq C^T \psi(x). \quad (2.7)$$

Où C et $\psi(x)$ sont des vecteurs de dimension $2^{k-1}M$ donnés par :

$$C = \left[C_{1,0}, \dots, C_{1,M-1}, C_{2,0}, \dots, C_{2,M-1}, C_{2^{k-1},0}, \dots, C_{2^{k-1},M-1} \right]^T. \quad (2.8)$$

$$\psi(x) = \left[\psi_{1,0}, \dots, \psi_{1,M-1}, \psi_{2,0}, \dots, \psi_{2,M-1}, \dots, \psi_{2^{k-1},0}, \dots, \psi_{2^{k-1},M-1} \right]^T. \quad (2.9)$$

Exemple 2.1 Quelques ondelettes de Legendre [9] :

On prend $k = 2$ et $M = 3$

$$\begin{cases} \psi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \\ \psi_{1,1}(x) = \sqrt{6}(4x - 1) \quad \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ \psi_{1,2}(x) = \sqrt{10}(\frac{3}{2}(4x - 1)^2 - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Les ondelettes $\psi_{1,0}(x)$, $\psi_{1,1}(x)$ et $\psi_{1,2}(x)$ sont nulles sur le deuxième niveau $[\frac{1}{2}, 1]$.

$$\begin{cases} \psi_{2,0}(x) = \sqrt{2} \\ \psi_{2,1}(x) = \sqrt{6}(4x - 3) \quad \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \\ \psi_{2,2}(x) = \sqrt{10}(\frac{3}{2}(4x - 3)^2 - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Les ondelettes $\psi_{2,0}(x)$, $\psi_{2,1}(x)$ et $\psi_{2,2}(x)$ sont nulles sur le premier niveau $[0, \frac{1}{2}]$

- La représentation graphique des ondelettes $\psi_{1,1}$, $\psi_{2,1}$ définies par le polynôme de Legendre $P_1(x)$

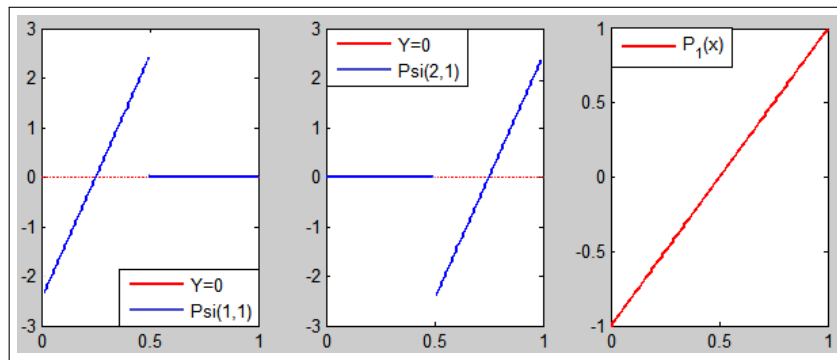


FIGURE 2.2 – Les Ondelettes $\psi_{1,1}$, $\psi_{2,1}$, et le polynôme de Legendre $P_1(x)$

- La représentation graphique des ondelettes $\psi_{1,2}, \psi_{2,2}$ définies par le polynôme de Legendre $P_2(x)$

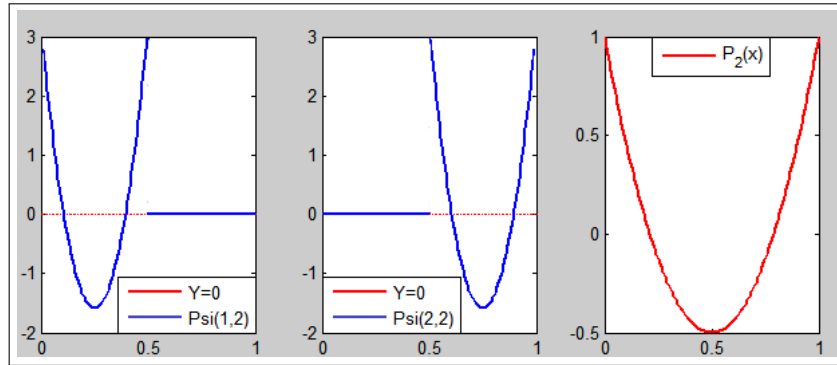


FIGURE 2.3 – Les Ondelettes $\psi_{1,2}, \psi_{2,2}$, et le polynôme de Legendre $P_2(x)$

5 La matrice opérationnelle d'intégration

La matrice opérationnelle d'intégration a été introduite pour la première fois en 2000 par Razzagui M.[10]. Elle a été utilisée pour résoudre les équations variationnelles (équation différentielle, équation intégrale ou équation intégré-différentielle).

Définition 2.2 La matrice opérationnelle d'intégration de Legendre notée P est une matrice inversible définie par la relation :

$$\int_0^x \psi(\tau) d\tau = P\psi(x), \quad (2.10)$$

où le vecteur $\psi(x)$ est défini en (2.9).

La matrice opérationnelle d'intégration P est de dimension $(2^{k-1}M \times 2^{k-1}M)$.

Pour le calcul de cette matrice, et pour une meilleure visibilité de ces calculs, on prend le cas particulier suivant : $M = 3$ et $k = 2$.

Le vecteur des ondelettes ψ est alors donné par :

$$\psi(x) = \left(\psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{2,0}, \psi_{2,1}, \psi_{2,2} \right)^T.$$

On intègre chaque composante de ce vecteur $\psi_{n,m}$, $n = 1, 2$ et $m = 0, 1, 2$ sur l'intervalle $[0, x]$ et on exprime le résultat de cette intégration en fonction du vecteur $\psi(x)$.

- Pour $n = 1, m = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_{1,0}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \int_0^x \psi_{1,0}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1,0}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^x \sqrt{\frac{1}{2}} 2 d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} 2 d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} 2 \frac{1}{2} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On va représenter toute constante par $P_0(x)$ et tout polynôme de degré 1 par une combinaison linéaire de $P_0(x)$ et $P_1(x)$, on trouve [9] :

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_{1,0}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4} P_1(4x-1) + \sqrt{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4} P_0(x) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} P_0(x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} \psi_{1,0}(x) + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \psi_{1,1}(x) + \frac{1}{2} \psi_{2,0}(x) \\ &= \frac{1}{4} \left[1, \sqrt{\frac{2}{6}}, 0, 2, 0, 0 \right]^T \psi(x). \end{aligned}$$

De la même manière, on vérifie que :

- Pour $n = 1, m = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_{1,1}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \int_0^x \psi_{1,1}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1,1}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \psi_{1,0}(x) + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \psi_{1,2}(x) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}, 0, 0, 0 \right]^T \psi(x). \end{aligned}$$

- Pour $n = 1, m = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_{1,2}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \int_0^x \psi_{1,2}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1,2}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^x 2\sqrt{\frac{5}{2}} P_2(4\tau-1) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^x 2\sqrt{\frac{5}{2}} P_2(4\tau-1) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \left(P_3(4\tau-1) - P_1(4\tau-1) \right) \Big|_0^x \\ 2\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \left(P_3(4\tau-1) - P_1(4\tau-1) \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après la proposition (2.4), on obtient :

$$\int_0^x \Psi_{1,2}(\tau) d\tau = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \left(P_3(4x-1) - P_1(4x-1) \right) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

On rappelle qu'on doit exprimer $\int_0^x \Psi_{1,2}(\tau) d\tau$ en fonction du vecteur ψ , or ce dernier ne contient pas l'ondelette $\psi_{3,m}$ qui est définie par le polynôme P_3 , donc on néglige ce polynôme d'ordre 3 et on obtient l'approximation de $\int_0^x \Psi_{1,2}(\tau) d\tau$ en :

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{1,2}(\tau) d\tau &\approx \begin{cases} 2\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \left(-P_1(4x-1) \right) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\approx -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \Psi_{1,1}(x). \\ &\approx \frac{1}{4} \left[0, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0 \right]^T \psi(x). \end{aligned}$$

Pour le deuxième niveau $n = 2$, on utilise les mêmes techniques de calculs pour avoir

- Pour $n = 2, m = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{2,0}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} \Psi_{2,0}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^x \Psi_{2,0}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^x \sqrt{2} P_0(4\tau-1) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} \Psi_{2,0}(x) + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \Psi_{2,1}(x). \\ &= \frac{1}{4} \left[0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}, 0 \right]^T \psi(x). \end{aligned}$$

- Pour $n = 2, m = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{2,1}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} \Psi_{2,1}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^x \Psi_{2,1}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \Psi_{2,0}(x) + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \Psi_{2,2}(x) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[0, 0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \right]^T \psi(x). \end{aligned}$$

• Pour $n = 2, m = 2$:

$$\int_0^x \Psi_{2,2}(\tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} \Psi_{2,2}(\tau) d\tau & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \int_0^x \Psi_{2,2}(\tau) d\tau & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\simeq -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \Psi_{2,1}(x).$$

$$\approx \frac{1}{4} \left[0, 0, 0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}, 0 \right]^T \Psi(x).$$

En regroupant les six expressions de $\int_0^x \Psi_{n,m}(\tau) d\tau$ pour $n = 1, 2; m = 0, 1, 2$ qui sont en fonction du vecteur ψ , on obtient :

$$\int_0^x \Psi(\tau) d\tau = P\Psi(x),$$

avec P une matrice d'ordre $6 = 3 \times 2^{2-1}$

$$P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que cette matrice admet la représentation en bloc suivante [9] :

$$P = \begin{bmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

Où

$$L_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En généralisant ces calculs, on obtient la matrice d'intégration P qui est d'ordre $M \times 2^{k-1}$. Elle est triangulaire supérieure par bloc, formée de 2^k blocs d'ordre M. Elle prend la forme

$$P = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & F & \dots & F \\ 0 & L & F & F & \dots & F \\ 0 & 0 & L & F & \dots & F \\ 0 & 0 & 0 & L & F & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix},$$

avec

$$L_{M \times M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}} & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$F_{M \times M} = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

6 Formule d'intégration des ondelettes de Legendre

Avec les outils mathématiques introduits précédemment, on est en mesure d'énoncer la nouvelle formule de quadrature associée aux ondelettes de Legendre notée LWF. Le principe suivi pour obtenir cette dernière, est celui utilisé pour les formules de Newton-Côtes. Ce principe repose sur le choix de l'approximation de la fonction à intégrer f qui sera, dans ce cas, une série finie de type (2.6).

Théorème 2.1 Soit f une fonction dans $L^2([a, b])$, alors l'intégrale exacte $\int_a^b f(x) dx$ peut être approchée par la formule :

$$LWF = (b - a)C^T P \psi(1)$$

où :

$\psi(1)$ est le vecteur donné par la relation (2.9) au point $x = 1$,

C est le vecteur des coefficients $C_{n,m}$, $n = 1, 2^{k-1}$, $m = 0, M - 1$, de la décomposition de la fonction $f((b - a)x + a)$ suivant les ondelettes de Legendre

et

P est la matrice d'intégration définie par la relation (2.10).

Remarque 2.2 Par le changement des variables $X = (b - a)x + a$, qui ramène l'intervalle $[a, b]$ à l'intervalle $[0, 1]$ On a :

$$\int_a^b f(X) dX = (b - a) \int_0^1 f((b - a)x + a) dx.$$

Preuve.

A partir de la remarque (2.2) on a :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f((b-a)x+a)dx.$$

Or la fonction $x \rightsquigarrow f((b-a)x+a)$, est dans $L^2(]0,1])$ car la fonction $x \rightsquigarrow f(x)$, est dans $L^2(]a,b])$, donc d'après l'approximation (2.6) elle prend la forme :

$$f((b-a)x+a) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x) = C^T \psi(x). \quad (2.11)$$

D'où :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \int_0^1 C^T \psi(x)dx.$$

En posant $x = 1$ dans la relation (2.10), on a :

$$\int_0^1 \psi(x)dx = P\psi(1).$$

En revenant à (2.11), on arrive enfin à :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)C^T \psi(1).$$

■

Chapitre 3

Tests et résultats numériques

Pour vérifier l'efficacité et la performance de la méthode d'ondelette de Legendre LWF, on va l'appliquer sur des exemples de fonctions f dont on connaît la primitive F , puis comparer les valeurs approchées, I_{app} , obtenues à l'aide **des codes MATLAB** avec l'intégrale exacte I_{ex} . On va aussi comparer ces résultats avec ceux donnés par les trois méthodes de Newton-Côtes composites (**point milieu, Trapèzes et Simpson**), en comparant leurs erreurs absolues.

Cette erreur absolue notée E est définie par $E = |I_{ex} - I_{app}|$.

1 Exemple 1

Dans cet exemple, on considère la fonction (1.1) ($f(x) = \frac{1}{1+x^2}$) qu'on a traité dans le chapitre 1. On va voir une amélioration des résultats numériques obtenus par les méthodes de Newton-Côtes composite et LWF. Les programmes décrits dans l'annexe, ont été exécutés pour différentes valeurs de décomposition du domaine $[0, 1]$; k et différentes valeurs du degré du polynôme de Legendre M . On note par : E_{Pm} , E_{Tr} , E_{Simp} , et E_{LWF} les erreurs respectives associées aux méthodes du point milieu, des trapèzes, de Simpson et LWF.

Les résultats obtenus sont représentés dans les tableaux ci-dessous.

- Pour ($k=2, k=3$)(respectivement) :

M	N	E_{Pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	4	0.0013	0.0026	3.7783e-008	0.0140
8	16	8.1380e-005	1.6276e-004	9.2393e-012	1.4093e-008
13	26	3.0819e-005	6.1637e-005	5.0160e-13	5.3402e-013
18	36	1.6075e-005	2.9150e-005	7.1165e-014	3.6637e-015

TABLEAU 3.1 – Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k = 2$

2. EXEMPLE 2

M	N	E_{pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	8	3.2552e-004	6.5104e-004	5.9124e-010	00.32
7	28	2.6573e-005	5.3146e-005	3.2163e-013	1.0543e-010
10	40	1.3021e-005	2.6042e-005	3.7940e-014	2.6867e-014
14	56	6.6433e-006	1.3287e-005	1.1070e-014	5.5511e-016

TABLEAU 3.2 – Le tableau des erreurs pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k = 3$

D'après les deux tableaux (3.1),(3.2), on conclue que les méthodes de Newton-Côtes composites donnent une bonne approximation par rapport aux méthodes Newton-Côtes simple. La méthode LWF reste plus précise.

2 Exemple 2

On considère la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \exp(x) + x$$

et sa primitive $F(x)$ donnée par :

$$F(x) = \exp(x) + \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale exacte de la fonction f sur $[0, 1]$ est alors égale à :

$$I_{ex} = F(1) - F(0) = e - \frac{1}{2}.$$

Les résultats des erreurs sont donnés dans les tableaux (3.3) et (3.4)

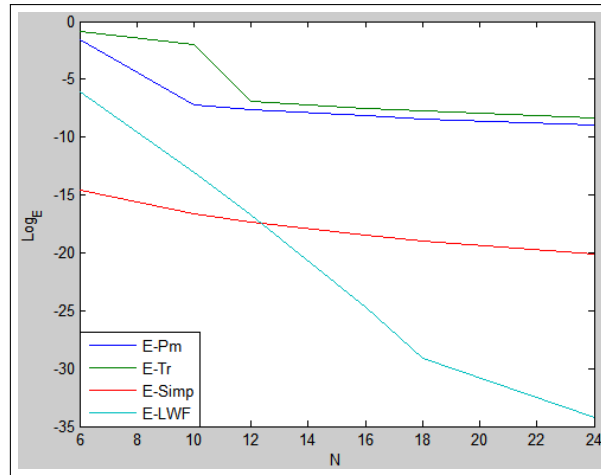
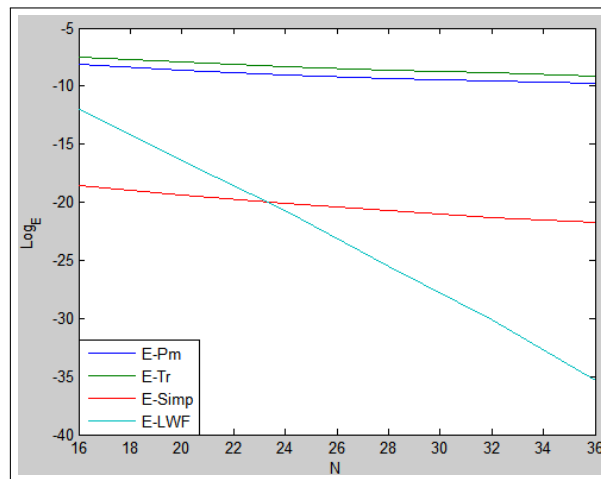
- Pour ($k=2, k=3$)(respectivement) :

M	N	E_{pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
3	6	0.0020	0.0040	4.5998e-007	0.0022
5	10	7.1574e-004	0.0014	5.9645e-008	2.2012e-006
6	12	4.9709e-004	9.9426e-004	2.8767e-008	5.5690e-008
9	18	2.2095e-004	4.4192e-004	5.6829e-009	2.3537e-013
12	24	1.2429e-004	2.4859e-004	1.7982e-009	1.3323e-015

TABLEAU 3.3 – Le tableau des erreurs pour $f(x) = \exp(x) + x$ et $k = 2$

M	N	E_{pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	8	0.0011	0.0022	1.4559e-007	0.0188
4	16	2.9764e-004	5.5930e-004	9.1027e-009	6.0485e-006
7	28	9.1317e-005	1.8264e-004	9.7063e-010	8.4843e-012
8	32	6.9915e-005	4.3983e-004	5.6897e-010	8.0824e-014
9	36	5.5242e-005	1.1048e-004	3.5521e-010	4.4409e-016

TABLEAU 3.4 – Le tableau des erreurs pour $f(x) = \exp(x) + x$ et $k = 3$

FIGURE 3.1 – représentation graphique du logarithme des erreurs, $f(x) = \exp(x) + x$ FIGURE 3.2 – représentation graphique du logarithme des erreurs, $f(x) = \exp(x) + x$

On remarque que les quatre méthodes convergent numériquement (l'erreur associée à chaque méthode diminue quand le nombre de point augmente). Les graphes dans les figures (3.1) et (3.2) illustrent bien cette convergence numérique. Pour un nombre de points réduit ne dépassant pas les 16 points, la méthode de Simpson donne de meilleurs résultats avec une erreur qui ne dépasse pas 10^{-10} . Contrairement, la méthode LWF est plus précise que les trois méthodes de Newton-Côtes quand le nombre de points est élevé et atteint des précisions fines allant jusqu'à 10^{-16} . A partir des résultats exposés dans les deux tableaux (3.3) et (3.4), on remarque que la méthode LWF est sensible au degré M du polynôme de Legendre.

3 Exemple 3

Dans cet exemple on veut estimer la surface S d'un disque de centre $(0,0)$ et de rayon R par les quatre méthodes. L'équation du disque est donnée par :

$$y^2 + x^2 = R^2$$

et la surface S par

$$S = 2 \int_{-R}^R y(x) dx = \pi R^2; y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux (3.5) et (3.6)

- Pour $(k=2, k=3)$ (respectivement) et on prend $R=1$:

M	N	E_{Pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	4	0.1187	0.4095	0.0580	0.2200
5	10	0.0304	0.1045	0.0146	0.0146
7	14	0.0184	0.0632	0.0098	0.0072
13	26	0.0073	0.0250	0.0035	0.0023
15	30	0.0059	0.0202	0.0028	0.0018

TABLEAU 3.5 – Le tableau des erreurs pour $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $k = 2$

M	N	E_{Pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
3	12	0.0232	0.0796	0.0111	0.0197
5	20	0.0108	0.0371	0.0051	0.0051
9	36	0.0045	0.0154	0.0021	0.0016
11	44	0.0033	0.0114	0.0016	0.0011
13	52	0.0028	0.0189	0.0012	8.0194e-004

TABLEAU 3.6 – Le tableau des erreurs pour $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $k = 3$

Pour cet exemple, on remarque que les quatre méthodes ne donnent pas une bonne approximation. Cela n'est pas dû à une défaillance des méthodes, mais à la fonction $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ qui présente de très grandes variations au voisinage de $-R$ et R .

On veut donc, que le domaine d'intégration ne contienne pas $-R$ et R . Pour cela, on remarque que l'aire de S est égale à 8 fois l'aire de la portion comprise entre l'arc d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = y$. C'est à dire

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} \sqrt{R^2 - x^2} dx - 2R^2 \end{aligned}$$

Les résultats de cette approximation sont donnés dans les tableaux (3.7) et (3.8)

- Pour $(k=2, k=3)$ (respectivement) et on prend $R=1$:

3. EXEMPLE 3

M	N	E_{Pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	4	0.0103	0.0207	3.0037e-005	0.0628
5	10	0.0017	0.0033	8.2137e-007	3.4899e-005
10	20	4.1648e-004	8.3313e-004	5.1891e-008	5.2338e-009
14	28	2.1254e-004	2.2512e-004	1.3532e-008	1.1237e-011
17	34	1.4415e-004	2.8833e-004	6.2280e-009	4.7962e-014

TABLEAU 3.7 – Le tableau des erreurs pour $y(x) = 8\sqrt{R^2 - x^2} - 2R^2$ et $k = 2$

M	N	E_{Pm}	E_{Tr}	E_{Simp}	E_{LWF}
2	8	0.0026	0.0052	1.9897e-006	0.0190
3	12	0.0012	0.0023	3.9783e-007	7.7568e-004
7	28	2.1254e-004	4.2515e-004	1.3532e-008	1.2287e-008
10	40	1.0416e-004	2.0832e-004	3.2522e-009	1.8910e-011
14	56	5.3143e-005	1.0629e-004	8.4696e-010	1.7764e-015

TABLEAU 3.8 – Le tableau des erreurs pour $y(x) = 8\sqrt{R^2 - x^2} - 2R^2$ et $k = 3$

D'après les deux tableaux (3.7) et (3.8), on note qu'il y a une nette amélioration des résultats (l'erreur atteint l'ordre de 10^{-15}). Le problème a donc été traité et ceci est dû au fait que l'on connaisse le comportement de la fonction à intégrer f

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, on a présenté une nouvelle méthode de quadrature (LWF) basée sur les ondelette de Legendre.

Numériquement, cette méthode a été comparée avec les méthodes de Newton-Côtes composites associées à la méthode du point milieu, des trapèzes et de Simpson.

Dans les domaines qui exigent une très grande précision dans la résolution, la méthode LWF est recommandée car les erreurs d'approximation par cette méthodes atteignent l'ordre 10^{-16} .

La méthode LWF s'exprime en fonction de la matrice d'intégration P et du vecteur C (vecteur de décomposition de la fonction à intégrer dans la base d'ondelettes). La matrice P a été calculée de manière approximative dans [Rezagui 2000]. Le vecteur C a été aussi calculé de manière approximative (voir annexe).

Pour améliorer les résultats de l'approximation par la méthode LWF, il serait intéressant de se pencher sur le calcul exacte de la matrice P et (ou) du vecteur C.

Annexe

Cette partie concerne l'application Matlab.

4 Les sous programmes

• Méthode Point milieu

```
function [Iapp] =PointMelieu(a,b,n,f)
    h=(b-a)/n;
    Iapp=0;
    for i=1 : n
        Iapp=Iapp+f(a+(i-1/2)*h);
    end
    Iapp=Iapp*h;
end
```

• Méthode Trapèze

```
function[Iapp]=Trapèze(a,b,n,f)
    h=(b-a)/n;
    s=f(a)+f(b);
    for i=1 :n-1
        s=s+2*f(a+i*h);
    end
    Iapp=h/2*s;
end
```

• Méthode Simpson

```
function [Iapp ] = Simpson(a,b,n,f)
    h=(b-a)/(2*n);
    s=f(a)+f(b);
    for i=1 :n
        s=s+4*f(a+(2*i-1)*h);
    end
    for i=1 :n-1
        s=s+2*f(a+2*i*h);
    end
    Iapp=h/3*s;
end
```

• **Polynôme de Legendre :**
function pk = legendre-polyx(x,k)
 if k==0
 pk=1;
 else if k==1
 pk=x;
 else if k==2
 pk = 3/2*x.^(2) -1/2;
 else
 p0 =1;
 p(1)=x;
 p(2)= 3/2*x.^(2)-1/2;
 for i = 3 :k
 p(i) = ((2*(i-1)+1)/i*x)*p(i-1)+((-i+1)/i)*p(i-2);
 end
 pk=p(k);
 end
 end
 end
 end
 end

• **L'ondelette de Legendre :**
function psi =Ondel-leg (j,n,k,x)
 LK= legendre-polyx(2^(j)*x-2*n+1,k);
 if (x>=(n-1)/2^(j-1)) & (x<=(n)/2^(j-1))
 psi=sqrt(k+1/2)*2^(j/2)*LK;
 else
 psi=0;
 end
 end

• **Vecteur d'ondelette de Legendre :**
function psi = VectLegWav(K,M,x)
 for n=1 :2^(K-1)
 for k=0 :M-1
 psi(k+(n-1)*M+1)=Ondel-leg (K,n,k,x);
 end
 end
 end

• **La matrice ondelette de Legendre :**
function psi = MatLegWav(K,M,x)
 p = 2^(K-1)*M;
 for i=1 :p
 psi(:,i)=VectLegWav(K,M,x(i));
 end
 end

• **La matrice d'intégration :**

```
function L= tri-diag-matricx(Mx)
    v = zeros(Mx-1,1);
    for i = 1 :Mx-1
        v(i) = 1/sqrt(4*(i)^(2)-1);
    end
    L= diag(v,1) + diag((1,zeros(1,Mx-1))) - diag(v,-1);
end
```

```
function P= Mat-Int(M,K)
    n=2^(K-1);
    L = 1/2^(K) *tri-diag-matricx(M);
    F = zeros(M);
    F(1,1)=1/2^(K-1);
    for i = 1 :n
        P((i - 1)*M + 1 :i*M,(i - 1)*M + 1 :i*M) = L;
        for m = i+1 :n
            P((i - 1)*M + 1 :i*M,(m - 1)*M + 1 :m*M) = F;
        end
    end
end
```

• **Application**

```
clear all
clc
a=0;
b=1;

M=input('M');
k=input('k');

n=2^(k-1)*M;

for i=1 :n
    x(i)=(i-1/2)/n;
end

fun= @(x)(exp(x)+x);
Fun= @(x)(exp(x)+(1/2)*x.^ 2);

f=fun(x);
V= MatLegWav(k,M,x)';
P= Mat-Int(M,k);
C=pinv(V)*f';
Iex=Fun(1)-Fun(0);

[IappPtml]=PointMilieu(a,b,n,fun );
```

```
[IappTrpz]=Trapèze(a,b,n,fun);  
[IappSimp]= Simpson(a,b,n,fun);  
IappLeg=(C')*(P)*(VectLegWav(k,M,1))';
```

```
ErrPtml=abs(Iex-IappPtml)  
ErrTrpz=abs(Iex-IappTrpz)  
ErrSimp=abs(Iex-IappSimp)  
ErrLeg=abs(Iex-IappLeg)
```

Bibliographie

- [1] N. Abblaoui-Lahmar, O. Belhamitib, and S. Bahri. A new legendre wavelets decomposition method for solving pdes. *Malaya Journal of Matematik (MJM)*, 2(1, 2014) : 72–81, 2014. [15](#), [16](#), [17](#)
- [2] J.-Y. Briend. Chapitre 4–propriétés élémentaires de lintégrale. In *Petit traité d'intégration*, pages 49–60. EDP Sciences, 2021. [10](#), [12](#)
- [3] C. Cabuzel. Une méthode du point milieu de newton pour les équations généralisées. In *GDR MOA*, 2012. [8](#)
- [4] J. Haag. Sur le calcul approché des quadratures. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 17 :135–137, 1917. [12](#)
- [5] P.-J. Hormière. Calcul approché des intégrales. [9](#)
- [6] H. MOKRANE. *Comparaison entre Runge-Kutta et méthode de Trapèze Pour un Problème Initiale*. PhD thesis, Faculté des Mathématiques et de Informatique Département des Mathématiques, 2020. [12](#)
- [7] S. Noeiaghdam and M. F. Araghi. Finding optimal step of fuzzy newton-cotes integration rules by using the cestac method. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2017 (2) :62–85, 2017. [12](#)
- [8] K. Peano. Méthodes de calcul de valeurs approchées dune intégrale. [12](#), [15](#)
- [9] M. Razzaghi and S. Yousefi. Legendre wavelets direct method for variational problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53 :185–192, 09 2000. doi : 10.1016/S0378-4754(00)00170-1. [18](#), [20](#), [22](#)
- [10] M. Razzaghi and S. Yousefi. The legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, 32 :495–502, 04 2001. doi : 10.1080/00207720120227. [19](#)

Résumé

Une nouvelle méthode de quadrature appelée LWF est élaborée. Elle est basée sur les ondelettes de Legendre et sur la matrice opérationnelle d'intégration. Les notions mathématiques nécessaires à la démonstration de cette formule sont données. Cette méthode a été implémentée sur MATLAB et comparée avec les méthodes de Newton-Côtes composites (Méthode de Trapèzes, Méthode de point milieu, Méthode de Simpson).

Mots-Clés : Ondelettes de Legendre, matrice opérationnelle d'intégration, intégration numérique.

Abstract

A new quadrature method called LWF is elaborate. It is based on Legendre wavelets and on the operational matrix of integration. The mathematical notions necessary for the demonstration of this formula are given. This method has been implemented on MATLAB, and compared with composite Newton-Côtes methods (Trapezoidal method, Middle Point method and Simpson method)

Key words : Legendre wavelet, operational integration matrix, numerical integration.

ملخص

تم تطوير صيغة تربيعية تسمى صيغة موجات ليجندر، تعتمد على موجات ليجندر وعلى مصفوفة التكامل التشغيلي. تم تقديم المفاهيم الرياضية اللازمة لإثبات هذه الصيغة ثم برمجتها على برنامج مطلب و مقارنتها مع تركيبات نيوتن كوت. (طريقة شبه المنحرف، طريقة النقطة المتوسطة، طريقة سيمبسون)

كلمات مفتاحية: موجات ليجندر، مصفوفة التكامل التشغيلية، التكامل العددي.