République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques Appliquées

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Appliquées délivré par

L' université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Mlle BENDEHIBA Akila

Analys de stabilité d'une classe du système 1D fractionnaire à temps continu

soutenu publiquement le -/-/ - devant le jury composé de :

Président :	Pr.Bouagada Djilali	Prof	UMAB
Examinateur :	Mr.ELosmani Aissa Omar	MCB	USTO, ORAN
Encadreur :	Dr.Ghezzar Mohammed Amine	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2020/2021

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة بعض أنظمة احادية الابعاد الخطية الجزئية و (أو) المفرد حيث يتعين علينا تحليل فكرة الإيجابية والاستقرار لهذه الأنظمة.

الكلمات المفتاحية. نظام احادي الابعاد ، نظام كسري ، نظام فردي ، إيجابية ، استقرار.

résumée

Dans ce mémoire nous fait une étude sur quelques systèmes 1D linéaire fractionnaire et/ou singulier où nous avons traiter analyser la notion de positivité et de stabilité pour ces systèmes.

Mots-Clés. système 1D, système fractionnaire, système singulier, positivité, stabilité.

abstract

In this thesis we study some fractional linear 1D systems and / or singular where we have to analyse the notion of positivity and stability for these systems.

Key words. 1D system, fractional system, singular system, positivity, stability.

Dédicaces

Ce travail est dédié :

À mon chèr père.

À ma trés chère mère qui cherche toujours mon avantage.

À mes soeurs et à mon frère.

Remerciements

Avant tout, Je remercie le DIEU de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'étude et que grâce à lui ce travail a pu être réalise. AprÃ¨s j'adresse ma reconnaissance à mon encadreur le Professeur : **Mr. GHEZZAR Mohammed Amine** son sérieux et sa compétence ont été trés utiles pour mener à bien ce travail. Je remercie également les membres de jury **Mr.BOUAGADA Djilali** et **Mr.ELOSMANI Aissa Omar** pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail. Mes remerciements vont également à tous nos enseignants du département de Mathématiques et Informatiques, l'université de Mostaganem qui ont participé à notre formation. Enfin, je remercie mon amie proche, **BERRAHAL Naima**, pour son soutien continu.

Index des notations

$\mathbb{N}^*$	:	Corps des nombres entiers non nul.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{C}^-$	:	Corps des nombres complexes négatifs.
$\mathbb{Z}_+$	:	Corps des entiers non négatifs.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles.
${\mathbb{R}_+}^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles non négatives.
$\mathbb{R}^{nn}$	:	Espace des matrices carrées de dimension n à entrée dans R.
${\mathbb{R}_+}^{nn}$	:	Espace des matrices carrées à entrée réelles non négatives.
$\mathbb{R}^{nm}$	:	Espace des matrices réelles de dimensions nm.
${\mathbb{R}_+}^{nm}$	:	Espace des matrices à entrées réelles non négatives.
$\mathbb{M}_n$	:	Ensemble des matrices de Metzler de dimensions nn.
A^T	:	Transposée d'une matrice A.
A^{-1}	:	Inverse d'une matrice A.
I_n	:	Matrice identité d'ordre n.
$Re(Z)$	:	Partie réelle du nombre complexe Z.
$\det(A)$	:	Déterminant d'une matrice A.
$\sigma(A)$	:	Ensemble des valeurs propres de la matrice A.
$[a_{ij}]$	:	Matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne est a_{ij}.
$\mathcal{L}$	:	La transformée de Laplace.
$\mathcal{L}^{-1}$	:	La transformée inverse de Laplace.

Table des matières

Chapitre I

Introduction

Le monde industriel connait actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigent, du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce projet est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en générale a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de la physique et de l'ingénierie.
L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connait actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et l'ingénierie, est celle du calcul fractionnaire qui étant la dérivation et l'intégration aux ordres non entiers. Nous considérons dans ce projet une nouvelle classe de systèmes dits systèmes singuliers/fractionnaires unidimensionnels (1D). Ces systèmes sont décrits par l'équation différentielle à dérivée fractionnaire et sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme pour leurs homologues les systèmes singuliers linéaires d'ordre entier.
Les systèmes 1D sont des systèmes dont l'information se propage en une seule directions. Et qui trouvent leurs applications en électronique, en imagerie et traitement du signal, en automatique, en biomathématiques, ainsi qu'en économie. Nous traitons le problème de solvabilité pour différents modèles (discret, continu). A l'instar des modèles standards, l'étude de la stabilité des systèmes singuliers est importante pour comprendre le comportement

transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. Contrairement au cas non singulier, la localisation des valeurs propres finies du faisceau singulier est insuffisante pour caractériser la stabilité (lorsque det(E) est non nul), d'autres propriétés doivent être vérifiées. Nous signalons que très peu de contributions traitent les problèmes d'analyse et de commande des systèmes singuliers fractionnaires. De récents travaux font état de la puissance de la discrétisation pour l'analyse des systèmes fractionnaires, étant donné que le passage du continu au discret en utilisant un formalisme mathématiques basé sur la théorie des méthodes numériques et du fractionnaire, connait un essor faramineux. Il est bien connu que la positivité et la stabilité sont des notions importantes en théorie des systèmes et de contrôle. Précisément ; si on considère la classe des systèmes fractionnaires. Le problème de la positivité et la stabilité pour cette dernière paraît important et difficile.

Nous étudièrons la classe des systèmes fractionnaires où la dérivation conforme à été introduite nous donnerons quelque exemples d'illustration.

Dans le, Chapitre 1 : La première partie de ce chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels sur théorie de matrice[2]. Et la deuxième partie, nous rappelons l'historique de la théorie du calcule fractionnaire et nous présentons quelques outils de base sur les définitions des fonctions spéciales[17, 16], et quelques définitions sur les dérivées fractionnaires conforme, au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo et la relation entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés ainsi que leurs transformées de Laplace[19, 11, 20].

Et le chapitre 2 : La première partie de ce chapitre étudie la positivité et la stabilité des systèmes 1D linéaires positifs standard, et donnant une présentation détaillée de la théorie de Lyapunov [4, 7]. Et la deuxième partie étudie la positivité et la stabilité des systèmes 1D linéaires fractionnaires à temps continu, et des système singulier[14, 15].

Chapitre II

Les Notions Fondamentales

2.1 Matrices particulieres

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions et caractérisations des matrices non-négatives, positives, strictement positives, et de Metzler, ainsi que les définitions des polynôme caractéristique. Nous nous basons pour ce faire aux références[2].
Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ *et* $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{nm}$ des matrices à cœfficients réels.

2.1.1 Matrices non-négatives

Définition 2.1.1. *A est une matrice* ***non-négative*** *si* $\forall i \in n, \forall j \in m : a_{ij} \geq 0$ *autrement dit toutes ses entrées son non-négatives. Nous noterons une telle matrice par :* $A \geq 0$ *ou encore,* $A \in \mathbb{R}_+^{nm}$.

Exemple . Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{II.1}$$

est une matrice non-négative.

2.1.2 Matrices positives

Définition 2.1.2. *A est une matrice* ***positive*** *si A est non-négative et* $\exists k \in n, \exists l \in m : a_{kl} > 0$, *c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice par :* $A > 0$.

2.1.3 Matrices strictement positives

Définition 2.1.3. *A est une matrice* ***strictement positive*** *si* $\forall i \in n, \forall j \in m : a_{ij} > 0$, *c'est à dire toute ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice par :* $A >> 0$. *Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension* n , $n \geq 2$. *Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positive* $\alpha >> 0$ *coïncide avec* $\alpha > 0$.

2.1.4 Matrices de Metzler

Définition 2.1.4. *A est une matrice de* ***Metzler*** *si* $\forall i \in n, \forall j \in n, i \neq j : a_{ij} \geq 0$ *c'est à dire toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.*

Exemple .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tag{II.2}$$

A est une matrice de Metzler.

Proposition 2.1.1. *[2] A est une matrice de* ***Metzler*** *si et seulement si* $\forall t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{nn}$

Preuve. Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler , on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A+\lambda I_n) > 0$, sachant que

$$(A+\lambda I_n)(-\lambda I_n) = (-\lambda I_n)(A+\lambda I_n) \tag{II.3}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I_n)t+(-\lambda I_n)t} \\ &= e^{(A+\lambda I_n)t} \cdot e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{nn} \;\; car\ (II.3) \end{aligned}$$

Alors : $e^{At} \in \mathbb{R}_+^{nn}$. Du fait que $e^{(A+\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{nn}$ et $e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{nn}$

Suffisance :

Supposons que $\forall t \geq 0 : e^{At} \geq 0$. Ainsi , puisque

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t\to 0_+} \frac{e^{At} - I}{t}$$

prenons comme e_j le j^{me} vecteur de la base canonique , nous obtenons pour $i \neq j$

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \lim_{t \to 0_+} \frac{\langle \mathrm{e}^{At} e_j - e_j, e_i \rangle}{t} \\
&= \lim_{t \to 0_+} \left\{ \frac{\langle \mathrm{e}^{At} e_j, e_i \rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i \rangle}{t} \right\} \\
&= \lim_{t \to 0_+} \frac{\langle \mathrm{e}^{At} e_j, e_i \rangle}{t} \geq 0
\end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i \rangle = 0$. Dés lors ,$a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de **Metzler**. .

2.1.5 Le polynôme caractéristique et valeurs propres

Définition 2.1.5. *pour $A \in \mathbb{R}^{nn}$ on appelle* ***polynôme caractéristique*** *de la matrice A le polynôme $P_A(\lambda)$ d'ordre n défini par :*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Ce polynôme admet donc p racines $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ qui peuvent être simples où multiples. Ces racines sont appelées valeurs de A. On peut alors écrire

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ....(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

avec m_i la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ_i , et $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$

Exemple . soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.4}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned}
|\lambda I_n - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1) \\
&= (\lambda^2 - 1)(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

Théorème 2.1.1. ***Cayley-Hamilton***
Toute matrice carrée A satisfait son équation caractéristique :

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

avec les $a_i, i = 1, \ldots, n$ constantes réelles.
On déduit du théorème la relation suivante :

$$\begin{aligned} A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_1 A - a_0 I_n \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \end{aligned}$$

2.2 Notions sur le calcul fractionnaire

Dans cette partie. Nous donnons un petit rappel historique de la théorie du calcul fractionnaire. Puis l'accent est mis sur deux différentes apprôches de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, ainsi que la transformation de Laplace dans le calcul fractionnaire : la fonction Gamma, et la fonction de Mittag-Leffler.

2.2.1 Historique

La théorie du calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitivé et de dérivation d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Malgré que la dérivation fractionnaire a été définie par plusieurs apprôches aux noms de Grünwald-Letnikov,Riemann-Liouville, Caputo...ect, cette notion a été introduite au $XVII^e$ siècle lorsque Gottfried Leibniz a défini le symbole de la dérivation d'ordre entier positif, Guillaume l'Hôspital l'a interrogé sur la possibilité d'avoir une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Cette question a attiré l'attention des mathématiciens dont Euler ou Lagrange au $XVIII^e$ siècle et suivi par Liouville en 1837, Riemann en 1847 ainsi que Grünwald 1867 et Letnikov en 1868. Pour plus de détails historique, on peut consulter [17, 16]

2.2.2 Les fonctions spécialles

Dans cette section, on présente les définitions et propriétés de quelques fonctions spécialles.

2.2.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 2.2.1. *[17] On appelle la fonction* ***Gamma d'Euler*** *notée* Γ *, la fonction définie par l'intégral suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt; Re(z) > 0 \tag{II.5}$$

Propriétés 2.2.1. *[17] La fonction Gamma d'Euler possède la propriété suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); Re(z) > 0$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

avec $0! = 1$

2.2.2.2 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 2.2.2. *[17] Pour* $\theta \in \mathbb{C}$ *et* $0 < \alpha < 1$*, on appelle fonction de* ***Mittag-Leffler*** *et notée* $E_\alpha(.)$*, la fonction suivante :*

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \tag{II.6}$$

On remarque que $E_1(\theta) \equiv e^\theta$

Propriétés 2.2.2. *fonction de Mittag-Leffler de deux paramètre et noté* $E_{\alpha,\beta}(.)$ *:*

$$E_{\alpha,\beta}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$$

2.2.3 Dérivation Fractionnaire

2.2.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.3. *[19] On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de **Riemann-Liouville** d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{d^n}{dt^n}(J_a^{n-\alpha}[f(t)])$$

$$^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau; n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dt^n}f(t); \alpha = n \end{cases} \tag{II.7}$$

Remarque 2.2.1. *[19] La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de **Riemann-Liouville** n'est pas nulle.*

Propriétés 2.2.3. *[19]*

*1)- Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaires de **Riemann-Liouville** existent. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, ^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g]$ existe , et on a :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g] = \lambda ^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu ^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)] \tag{II.8}$$

2)- En général , an a

$$^{RL}D_a^{\alpha}[^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq ^{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)] \tag{II.9}$$

3)- on a aussi

$$^{RL}D_a^{\alpha}[^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq ^{RL}D_a^{\beta}[^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]] \tag{II.10}$$

Lemma 2.2.1. *[19] Soit f une fonction définie sur [a,b] vérifiant $^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = 0, \alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i} \tag{II.11}$$

où les $b_i, i = 0, \ldots, n-1$ sont des constantes arbitraires.

2.2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.2.4. *[19] Soit $f \in C^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$ on définit la dérivée fractionnaire au sens de* ***Caputo*** *d'ordre $\alpha \geq 0$ de la fonction f comme suite :*

$$^{C}D_a^{\alpha}[f(t)] = J_a^{n-\alpha}[f^n(t)]$$

$$^{C}D_a^{\alpha}[f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau)d\tau; n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t); \alpha = n \end{cases} \tag{II.12}$$

Remarque 2.2.2. *[19] La dérivée fractionnaire de* ***Caputo*** *d'une fonction constante est nulle. En effet , si $f = c$, alors*

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t ((t-\tau)^{n-\alpha-1}0)d\tau = 0 \\ &=^{C} D_a^{\alpha}[c] = c^{C}D_a^{\alpha}[1] \end{aligned} \tag{II.13}$$

Propriétés 2.2.4. *[19]*

1)- pour tout $\alpha > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$^{C}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g] = \lambda^{C}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu^{C}D_a^{\alpha}[g(t)] \tag{II.14}$$

2)- pour tout $\alpha > 0, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a :

i)-

$$^{C}D_a^{\alpha}J_a^{\alpha}[f(t)] = f \tag{II.15}$$

ii)- si $^{C}D_a^{\alpha}[f(t)] = 0$ alors

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i \tag{II.16}$$

3)- $^{C}D_a^{\alpha}[^{C}D_a^{\beta}f(t)] = [^{C}D_a^{\alpha+\beta}f](t)$ où $f \in C^1[a,b], 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ et $0 < \alpha + \beta < 1$.

Lemma 2.2.2. *[19]*

$$J_a^{\alpha\, C}D_a^{\alpha}[f(t)] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i \tag{II.17}$$

tel que c_i sont des constantes arbitraires dans $\mathbb{R}$

Lemma 2.2.3. *[19] Soit $\beta > \alpha > 0, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$^{C}D_a^{\alpha}J_a^{\beta}[f(t)] = J^{\beta-\alpha}[f(t)], t \in [a,b] \tag{II.18}$$

2.2.3.3 Relation entre Caputo et Riemann-Liouville

D'aprés les travaux de **(PODLUBNY, 1999)** [19], soient $\alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tels que $f \in C^n(]a,b[)$, on a :

$$^{C}D_a^\alpha f(t) = ^{RL} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right] \tag{II.19}$$

ce qui peut être écrit autrement par :

$$^{RL}D_a^\alpha f(t) = ^{C} D_a^\alpha \left[f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} f^{(i)}(a) \right] \tag{II.20}$$

Preuve.

On considère le développement en série de Taylor de la fonction f au point $x = a$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + J^n D^n f(t) \tag{II.21}$$

puis on applique $^{RL}D_a^\alpha$ sur les deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^\alpha f(t) &= ^{RL} D_a^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + D^n J^{n-\alpha} J^n D^n f(t) \\ ^{RL}D_a^\alpha f(t) &= ^{RL} D_a^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + J^{n-\alpha} D^n f(t) \\ ^{RL}D_a^\alpha f(t) &= ^{RL} D_a^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + ^{C} D_a^\alpha f(t) \end{aligned} \tag{II.22}$$

d'où

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^\alpha f(t) &= ^{RL} D_a^\alpha f(t) - ^{RL} D_a^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \\ &= ^{RL} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right] \end{aligned}$$

.

2.2.4 Transformation de Laplace

Définition 2.2.5. *[20] La transformée de Laplace d'une fonction f est la fonction notée $F = \mathcal{L}f$ de la variable complexe s définie par :*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{II.23}$$

2.2.4.1 Transformation inverse de Laplace

Définition 2.2.6. *[20] Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, on dit que f est l'original de F, et on note aussi*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \tag{II.24}$$

2.2.4.2 Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Soient $f \in C^{\infty}[a, +\infty[$, $n-1 \leq \alpha < n$, et $a \leq 0$

cas a=0 [20]

on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_0^C D_t^{\alpha} x](s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_{\tau}^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} (t-\tau)^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(u+\tau)} u^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-su} \frac{u^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} du \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right](s) \cdot \mathcal{L}\left[x^{(n)} \right](s) \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[x^{(n)} \right](s)
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{L}\left[x^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}\left[x\right](s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_0^C D_t^{\alpha} x](s) &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}\left[x\right](s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0) \right] \\
&= s^{\alpha} \mathcal{L}\left[x\right](s) - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}x'(0) - \cdots - s^{\alpha-n}x^{(n-1)}(0) \\
&= s^{\alpha} X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} x^{(i)}(0)
\end{aligned} \tag{II.25}$$

En général :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_a^C D_t^\alpha x](s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) d\tau\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) d\tau\right] dt \\
&+ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^0 (t-\tau)^{n-1-\alpha} x^{(n)}(\tau) d\tau\right] dt \\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[x^{(n)}\right](s) + \int_a^0 \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dt\right) x^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[x^{(n)}\right](s) + \int_a^0 \mathcal{L}\left[\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\right](s) x^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[x^{(n)}\right](s) + s^{\alpha-n}\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n)}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{II.26}$$

une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n)}(\tau) d\tau &= \int_a^0 s\mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n-1)}(\tau) d\tau + \left[\mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n)}(\tau)\right]_a^0 \\
&= s\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n-1)}(\tau) d\tau + x^{(n-1)}(0) - \mathrm{e}^{-as} x^{(n-1)}(a)
\end{aligned}$$

En intégrant encore une fois par parties, on obtient

$$\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n-1)}(\tau) d\tau = s^2\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n-2)}(\tau) d\tau + \left[s x^{(n-2)}(0) + x^{(n-1)}(0)\right] - \mathrm{e}^{-as}\left[s x^{(n-2)}(a) + x^{(n-1)}(a)\right]$$

ce que l'on généralise par parties :

$$\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x^{(n)}(\tau) d\tau = s^n\int_a^0 \mathrm{e}^{-s\tau} x(\tau) d\tau + \left[s^{n-1} x(0) + \cdots + x^{(n-1)}(0)\right] - \mathrm{e}^{-as}\left[s^{n-1} x(a) + \cdots + x^{(n-1)}(a)\right] \tag{II.27}$$

une combinaison de (II.26) et (II.27), en simplifiant les termes en $x^k(0)$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_a^C D_t^\alpha x](s) &= s^\alpha \mathcal{L}\left[x\right](s) - \mathrm{e}^{-as}\left[s^{\alpha-1}x(a) + s^{\alpha-2}x'(a) + \cdots + s^{\alpha-n}x^{(n-1)}(a)\right] \\
&= s^\alpha X(s) - \mathrm{e}^{-as}\sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} x^{(i)}(a)
\end{aligned} \tag{II.28}$$

2.2.5 Dérivée Fractionnaire Conforme

Définition 2.2.7. *[8, 11] Soit fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Alors la **"Dérivée fractionnaire conforme"** de f d'ordre $\alpha, 0 < \alpha < 1$ est définie par*

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, pour\ tout\ t > 0 \tag{II.29}$$

si (II.29) existe, alors la fonction f est appelée α-différentiable.

Théorème 2.2.1. *[8, 11] Si les fonctions f et g sont α-différentiables, $0 < \alpha < 1$ alors :*

1. $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[af(t) + bg(t)] = a\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} + b\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}$ *pour tout $a, b \in \mathbb{R}$*
2. $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[f(t)g(t)] = f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha} + g(t)\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$
3. $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[\frac{f(t)}{g(t)}] = \frac{g(t)\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} - f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}}{[g(t)]^2}$
4. $\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}$
5. $\frac{d^\alpha e^{qt}}{dt^\alpha} = qt^{1-\alpha}e^{qt}$ *pour tout $q \in \mathbb{R}$*
6. $\frac{d^\alpha \ln t}{dt^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha}$
7. $\frac{d^\alpha t^q}{dt^\alpha} = qt^{q-\alpha}$ *pour tout $q \in \mathbb{R}$*
8. $\frac{d^\alpha (c)}{dt^\alpha} = 0$ *pour toutes les fonctions constantes $f(t) = c$*

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[af(t) + bg(t)] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + bg(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - [af(t) + bg(t)]}{\varepsilon} \\
&= a\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + b\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= a\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} + b\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[f(t)g(t)] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= f(t)\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \\
&= f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\lim_{\varepsilon \to 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})
\end{aligned}$$

puisque g est continue à t alors $\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ donc :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[f(t)g(t)] = f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha} + g(t)\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-\frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)+f(t)g(t)}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}\right]\\
&= \left[g(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} - f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g((t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\right]\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}\\
&= \left[g(t)\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} - f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}\right]\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} = \frac{g(t)\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}-f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}}{[g(t)]^2}
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} = \frac{1}{[g(t)]^2}$

4. Soit $h = \varepsilon t^{1-\alpha} \implies \varepsilon = h t^{\alpha-1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}}\\
&= t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}
\end{aligned}$$

5. $\frac{d^\alpha e^{qt}}{dt^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{(qt+\varepsilon q t^{1-\alpha})}-e^{qt}}{\varepsilon}$

soit $z = \varepsilon q t^{1-\alpha} \implies \varepsilon = \frac{z}{qt^{1-\alpha}}$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha e^{qt}}{dt^\alpha} &= \lim_{z\to 0}\frac{e^{(qt+z)}-e^{qt}}{\frac{z}{qt^{1-\alpha}}} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{qt}\cdot e^{z}-e^{qt}}{\frac{z}{qt^{1-\alpha}}}\\
&= qt^{1-\alpha}\lim_{z\to 0}\frac{e^{qt}[e^z-1]}{z} = qt^{1-\alpha}e^{qt}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}
\end{aligned}$$

comme $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$ alors $\frac{d^\alpha e^{qt}}{dt^\alpha} = qt^{1-\alpha}e^{qt}$

6.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha \ln t}{dt^\alpha} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-\ln(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(\frac{t+\varepsilon t^{1-\alpha}}{t})}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(\frac{\varepsilon t^{1-\alpha}}{t}+1)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{t^\alpha}+1)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

soit $z = \frac{\varepsilon}{t^\alpha} \implies \varepsilon = zt^\alpha$ donc

$$
\begin{aligned}
\frac{d^\alpha \ln t}{dt^\alpha} &= \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{zt^\alpha} \\
&= \frac{1}{t^\alpha} \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{z}
\end{aligned}
$$

comme $\lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{z} = 1$ alors $\frac{d^\alpha \ln t}{dt^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha}$

.

Chapitre III

Systèmes unidimensionnels linéaires à temps continu

3.1 Systèmes 1D Positive Standard $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

3.1.1 Systèmes et Représentation d'état

cas continue :

Le système linéaire est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{III.1}$$

avec $x(0) = x_0$ où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle (la commande) du système appelé aussi entrée , $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système , $A \in \mathbb{R}^{nn}, B \in \mathbb{R}^{nm}, C \in \mathbb{R}^{pn}$ *et* $D \in \mathbb{R}^{pm}$ sont des matrices de dimension appropriées tel que :

A :matrice d'état.

B :matrice de commande (d'entrée).

C :matrice de mesure (sortie).

D :matrice de transfert direct.

$x(t)$:vecteur d'état.

$u(t)$:vecteur d'entrée.

$y(t)$:vecteur de sortie.

Trajectoire d'état de systèmes linéaire

Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire. L' équation homogène (équation autonomes) associée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \tag{III.2}$$

Sa solution est de la forme :

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) \tag{III.3}$$

où $t = t_0$ est l'instant initial.

La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\
\mathrm{e}^{-At}\frac{dx}{dt} &= \mathrm{e}^{-At}Ax(t) + \mathrm{e}^{-At}Bu(t) \\
&= A\mathrm{e}^{-At}x(t) + \mathrm{e}^{-At}Bu(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-At}\frac{dx}{dt} - A\mathrm{e}^{-At}x(t) &= \mathrm{e}^{-At}Bu(t) \\
\implies \frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{-At}x) &= \mathrm{e}^{-At}Bu(t) \\
\implies \mathrm{e}^{-At}x(t) &= \mathrm{e}^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{III.4}$$

Réponse du systèmes

$$y(t) = C\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D(\tau) \tag{III.5}$$

Matrice de réponse impulsionnel

$$G(t,t_0) = Ce^{A(t-t_0)}B + D\delta(t,t_0) \tag{III.6}$$

3.1.2 Systèmes linéaire positifs

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à la notion de positivité concernant un système définit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{III.7}$$

Définition 3.1.1. *Un système est dit positif si à toute entrée positive et condition initiale positive , correspond un état positif et une sortie positive. Alors , le système (III.7) est par définition dit positif si et seulement si :*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall u \in \mathbb{R}_+^m \iff x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ } et \text{ } y(t) \in \mathbb{R}_+^p \tag{III.8}$$

3.1.2.1 condition de positivité

cas continue :

Nous nous plaçons dans la classe des systèmes à temps continu , pour caractériser la positivité. Des conditions nécessaires et suffisantes serait cependant établies.
Nous nous basons sur [18, 1, 2].
Soit le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{III.9}$$

De tels systèmes sont identifiés par le triplet (A, B, C)

Théorème 3.1.1. *[4] Un système linéaire à temps continu (A, B, C) est positif si et seulement si la matrice A est une matrice de* ***Metzler*** *et $B \geq 0, C \geq 0$.*

3.1.3 Stabilité des systèmes linéaires positifs

cas continu

on considère le système linéaire à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{III.10}$$

Dans ce qui suit , nous citons quelques résultats concernants la stabilité asymptotique des systèmes linéaires positifs.

La solution de l'équation (III.10) à la forme

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 \tag{III.11}$$

Définition 3.1.2. *Le systéme positif dans l'équation (III.10) est appelé asymptotiquement stable si et seulement si la solution de léquation (III.11) satisfait le état*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \; pour \; chaque \; x_0 \in \mathbb{R}^n_+ \tag{III.12}$$

Théorème 3.1.2. *[7] Le système positif dans l'équation (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matrice de Metzler A ont des parties réelles négatives.*

Preuve.

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \tag{III.13}$$

être le polynôme caractéristique minimale de A [5, 6]

Dans ce cas , en utilisant la formule de sylvestre pour (III.11) nous obtenons

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(A_{k_1} + A_{k_2}t + \ldots + A_{k_{m_k}} t^{m_k - 1} \right) x_0 \mathrm{e}^{\lambda_k t} \tag{III.14}$$

où A_{k_j} , $(j = 1, ..., m_k)$ sont des matrices constantes indépendantes de t définies par la formule

$$A_{k_j} = \sum_{i=j-1}^{m_k - 1} \frac{P_k(\lambda)}{(i-j+1)!(j-1)!} \frac{d^{(i-j+1)}}{d_\lambda^{(i-j+1)}} \left[\frac{1}{P_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} (A - I\lambda_k)^i \tag{III.15}$$

$$P_k(\lambda) := \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}$$

Les valeurs propres de A du système intérieurement positif sont conjuguées réelles où complexes. Il est facile de montrer que [6]

$$\lim_{t\to\infty} t^p|e^{\lambda_k t}| = \begin{cases} 0 \ pour\ Re\lambda_k < 0\ et\ p\ fini \\ 1\ pour\ Re\lambda_k = 0\ et\ p = 0 \\ \infty\ pour\ Re\lambda_k \geq 0\ et\ p > 0 \end{cases} \tag{III.16}$$

où $Re(\lambda_k)$ désigne la partie réelle de λ_k.
Des équations (III.14) et (III.16) il découle immédiatement que la condition dans l'équation (III.12) est satisfaite si et seulement si toutes les valeurs propres de A avoir un partie réel négatif .

Exemple . soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{III.17}$$

pour l'étude de la stabilité du système (III.10) , on prend la matrice dynamique A , on calcul ses valeurs propres , on obtient.

$$\begin{aligned} P_A &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) \end{aligned}$$

Donc $\sigma(A) = \{-1;-2;-3\} \subset \mathbb{C}^-$, d'où la stabilité du système (III.10).

Lemma 3.1.1. $\rho = \max_i |\lambda_i|$ *être le rayon spectral d'une matrice* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{nn}$.
Puis un vrai nombre $\lambda > P$ *si et seulement si tous les mineurs principaux* $M_i[I\lambda - A]$ *de la matrice* $[I\lambda - A]$ *sont positifs ; c'est-à-dire*

$$M_1[I\lambda - A] = \lambda - a_{11} > 0; M_2[I\lambda - A] = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, M_n[I\lambda - A] = \det M[I\lambda - A] > 0$$

Théorème 3.1.3. *[4] : **(Relation entre stabilité asymptotique et polynôme caractéristique).** Le système positif (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ tel que*

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det[\lambda I_n - A] \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

sont positifs , c'est à dire $a_k > 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Théorème 3.1.4. *[7] Le système positif (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les mineurs principaux $\Delta_i, i = 1, \ldots, n$ de la matrice $(-A)$ sont positifs c'est-à-dire :*

$$\Delta_1 = -a_{11} > 0 \tag{III.18}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \det[-A] > 0$$

Exemple . soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \tag{III.19}$$

on va calculer les mineurs principaux de la matrice A. On obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -a_{11} = -(-3) = 3 > 0 \\
\Delta_2 &= -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0 \\
\Delta_3 = \det(-A) &= -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 3[8-4] = 12 > 0
\end{aligned}$$

Par conséquent , le système (III.10) est asymptotiquement stable.

Théorème 3.1.5. *Le système (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement si toute les entrées diagonales de la matrice triangulaire supérieure (inférieure)*

$$\tilde{A}_s = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix} \tag{III.20}$$

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,1} & \tilde{a}_{n,2} & \cdots & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix} \tag{III.21}$$

Sont négatives.

Théorème 3.1.6. *Le système positif avec la matrice (III.21) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales de cette matrice sont négatives.*

Preuve.

Les valeurs propres de la matrice (III.21) sont égales à ses entrées diagonales $\tilde{a}_{11}, \ldots, \tilde{a}_{n,n}$ et le système positif est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les entrées diagonales sont négatives. .

Théorème 3.1.7. *Le système linéaire positif (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :*

i) Les entrées diagonales de la matrice

$$A_{n-k}^{(k)} \; pour \; k = 1,\dots,n-1 \tag{III.22}$$

Sont négatives , où $A_{n-k}^{(k)}$ sont définis comme suite :

$$A_n^{(0)} = A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(0)} & \cdots & a_{n,n}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} \\ c_{n-1}^{(0)} & a_{n,n}^{(0)} \end{bmatrix}, \tag{III.23}$$

$$A_{n-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n-1,1}^{(0)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(0)} \end{bmatrix}, b_{n-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{1,n}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n}^{(0)} \end{bmatrix}, c_{n-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{1,n}^{(0)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Et :

$$A_{n-k}^{(k)} = A_{n-k}^{(k-1)} - \frac{b_{n-k}^{(k-1)} c_{n-k}^{(k-1)}}{a_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1,n-k}^{(k)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-k,1}^{(k)} & \cdots & a_{n-k,n-k}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-k-1}^{(k)} & b_{n-k-1}^{(k)} \\ c_{n-k-1}^{(k)} & a_{n-k,n-k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$A_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1,n-k-1}^{(k)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-k-1,1}^{(k)} & \cdots & a_{n-k-1,n-k-1}^{(k)} \end{bmatrix}, b_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,n-k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n-k-1,n-k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$c_{n-k-1}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{n-k,1}^{(k)} & \cdots & a_{n-k,n-k-1}^{(k)} \end{bmatrix}, \; pour \; k = 1,\dots,n-1.$$

ii) Les entrées diagonales de la matrice triangulaire inférieur (III.21) sont négatives , c'est-à-dire :

$$\tilde{a}_{kk} < 0 \; pour \; k = 1,\dots,n \tag{III.24}$$

Preuve.

Pour simplifier la notation , nous allons montrer l'équivalence des conditions (III.18) et (III.22) pour $n = 3$. D'aprés le théorème (3.1.4) pour $n = 3$, nous avons

$$-\Delta_1 = a_{11} < 0 \tag{III.25}$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^2\Delta_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0\\
(-1)^3\Delta_3 &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\\
&= a_{33}\det\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} - \frac{1}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\right\}\\
&= a_{33}\det\left\{\frac{1}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}\\ a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\end{bmatrix}\right\} < 0
\end{aligned}
$$

par la condition i) du théorème (3.1.7) pour $n = 3$ entrées diagonale des matrices.

$$
A_2^{(1)} = A_2^{(0)} - \frac{b_2^{(0)}c_2^{(0)}}{a_{33}^{(0)}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} - \frac{1}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32}\end{bmatrix} \qquad \text{(III.26)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}\\ a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}\\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}\end{bmatrix}\\
A_1^{(2)} &= A_1^{(1)} - \frac{b_1^{(1)}c_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\\
&= \bar{a}_{11} - \frac{\bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} = \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}}
\end{aligned}
$$

Sont négatives. Notez que la conditions (III.25) est équivalente aux conditions (III.26) à partir de $a_{ii} < 0$, i=1,2,3 et les inégalités.

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{33}} < 0,\\
\bar{a}_{22} &= \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}{a_{33}} < 0 \; et \; \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} < 0
\end{aligned}
$$

Sont satisfaites si et seulement si

$$
\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} > 0
$$

et

$$
\det\left\{\frac{1}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}\\ a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\end{bmatrix}\right\} < 0
$$

pour montrer l'équivalence de conditions (III.22) et (III.24) noter que le calcul de la matrice $A_{n-1}^{(0)}$ par l'utilisation de (III.23) pour k=1 est équivalent à la réduction à zéro des entrées $a_{j,n}$, j=1,. . . ,n-1 de la matrice (III.20) par des opérations élémentaires sur les lignes puisque

$$A_{n-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{n,n}} \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,1} & a_{n,n-1} \end{bmatrix} \tag{III.27}$$

Notez que $-\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}} > 0$ pour i=1,. . . ,n-1 et $-\frac{a_{n,i}a_{1n}}{a_{n,n}} > 0$ pour i=1,. . . ,n-1 de puis $a_{n,n} < 0$ et $a_{i,j} \geq 0$ pour $i \neq j$

Ainsi , la matrice $A_{n-1}^{(1)}$ est une matrice de Metzler. Pour suivant cette procédure après n étapes , on obtient la matrice triangulaire inférieure de Metzler (III.21).Par conséquent , les conditions (III.22) et (III.24) sont équivalentes. .

Exemple . soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{III.28}$$

On va calculant les entrées diagonales des matrices $A_{n-k}^{(k)}$ pour k=1,2 , on obtient

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} &= A_2^{(0)} - \frac{b_2^{(0)} c_2^{(0)}}{a_{33}^{(0}} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\ A_1^{(2)} &= A_1^{(1)} - \frac{b_1^{(1)} c_1^{(1)}}{a_{22}^{(1}} \\ &= -2 + \frac{0.5}{0.5} = -1 \end{aligned}$$

Donc, le système (III.10) est asymptotiquement stable.

Théorème 3.1.8. *[4](théorème de Lyapunov pour les systémes positifs).*

Le système positif (III.10) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale strictement positif P de telle sorte que la matrice $A^T P + PA$ est définie négative , c'est-à-dire :

$$\exists P > 0 : A^T P + PA < 0 \tag{III.29}$$

3.1.4 Stabilité et théorie de Lyapunov dans le cas linéaire

cas continu :

Dans cette partie , nous étudions d'abord les propriétés de stabilité de l'équilibre $x_\varepsilon = 0$ des systèmes **homogènes** linéaires **autonomes** :

$$\dot{x} = Ax \tag{III.30}$$

Théorème 3.1.9. *L'origine x_ε de (III.30) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive Q il existe une matrice définie positive P telle que*

$$A^T P + PA = -Q \tag{III.31}$$

Preuve. Condition Suffisante :

Il suffit d'observer que $V(x) = x^T Px$ est une fonction de Lyapunov pour (III.30) en $x_\varepsilon = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \\ &= x^T (A^T P + PA)x \\ &= -x^T Qx \end{aligned}$$

Donc le théorème de Lyapunov s'applique et montre que $x_\varepsilon = 0$ est asymptotiquement stable.

Condition Nécessaire :

Supposons que toutes les valeurs propres de A vérifiant $Re(\lambda_i) < 0$, et considérons la matrice P définie par :

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T S} Q e^{AS} dS$$

cette intégrale et bien définie la matrice P est clairement symétrique.

En remplaçant l'équation de P dans (III.31) , on obtient

$$
\begin{aligned}
A^T P + PA &= \int_0^{+\infty} \left[A^T e^{A^T S} Q e^{AS} + e^{A^T S} Q e^{AS} A \right] dS \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dS} \left(e^{A^T S} Q e^{AS} \right) dS \\
&= e^{SA^T} Q e^{SA} \Big|_0^{+\infty} = -Q
\end{aligned}
$$

il reste maintenant de montrer qu'elle est définie positive.

Supposons le contraire , il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $x^T P x = 0$. Comme la matrice e^{AS} est inversible pour tout $t \geq 0$, il vient que

$$
\begin{aligned}
x^T P x = 0 &\implies \int_0^{+\infty} x^T e^{A^T S} Q e^{AS} x dS = 0 \\
&\implies e^{AS} x = 0, \forall S \geq 0 \implies x = 0
\end{aligned}
$$

Cette contradiction montre que P est définie positive.

Ce qui montre que P est bien une solution de l'équation (III.31) , appelée l'équation matricielle de Lyapunov. .

Exemple . Soient

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \; et \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; et \; P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}
$$

on doit résoudre

$$
A^T P + PA = -Q
$$

Alors

$$
\begin{bmatrix} -P_1 & -P_2 \\ 3P_1 - 2P_3 & 3P_2 - 2P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_1 & 3P_1 - 2P_2 \\ -P_3 & 3P_3 - 2P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

alors on a

$$
\begin{bmatrix} -2P_1 & 3P_1 - 3P_2 \\ 3P_1 - 3P_3 & 3P_2 + 3P_3 - 4P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

d'où la solution

$$
P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}
$$

3.2 Systèmes 1D Positive Fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux systèmes 1D fractionnaire Positif au sens de Caputo.

3.2.1 Solvabilité des systèmes 1D positifs fractionnaires à temps continu

Cosidérons le système linéaire fractionnaire en temps continu décrit par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t), 0 < \alpha \geq 1 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{III.32}$$

où $D^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$ la dérivée au sens de caputo, $x(t) \in \mathbb{R}^{n}$,$u(t) \in \mathbb{R}^{m}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{p}$ sont respectivement l'état, les vecteurs d'entrée et de sortie et, $A \in \mathbb{R}^{nn}$, $B \in \mathbb{R}^{nm}$, $C \in \mathbb{R}^{pn}$, $D \in \mathbb{R}^{pm}$

Théorème 3.2.1. *[10] La solution de la première équation de système (III.32) est donnée par :*

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(t)x_i + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ x_i = x^{(i)}(0), i = 0, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{III.33}$$

où

$$\phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma(k\alpha + i + 1)} \tag{III.34}$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \tag{III.35}$$

Preuve. En appliquant la transformée de Laplace à première équation de système (III.32), on obtient

$$\mathcal{L}[^{C}D^{\alpha}x(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[^{C}D^{\alpha}x(t)] &= s^{\alpha}X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1}x_0^{(i)} \\ &= AX(s) + BU(s) \end{aligned}$$

où

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

Alors

$$\begin{aligned} s^{\alpha}X(s) - AX(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1}x_0^{(i)} + BU(s) \\ (s^{\alpha}I_n - A)X(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1}x_0^{(i)} + BU(s) \end{aligned}$$

Supposons $(s^{\alpha}I_n - A)$ est régulière, alors

$$X(s) = (s^{\alpha}I_n - A)^{-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1}x_0^{(i)} + BU(s)\right]$$

Or

$$\begin{aligned} (s^{\alpha}I_n - A)^{-1} &= \left[(s^{\alpha}I_n)\left(I_n - (s^{\alpha}I_n)^{-1}A\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} \end{aligned} \tag{III.36}$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1}x_0^{(i)} + BU(s)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} A^k s^{-(k\alpha+i+1)}x_0^{(i)} + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}BU(s) \end{aligned}$$

En appliquant les propriètés de la transformée inverse de Laplace, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+i+1)}]x_0^{(i)} + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}BU(s)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(t)x_i + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+i+1)}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma(\alpha k+i+1)}, i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

et pour $i = 0$ on a :

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{III.37}$$

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} t^{\alpha-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}
\end{aligned} \tag{III.38}$$

.

Exemple . D'après la formule de solution avec $0 < \alpha \leq 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \ pour \ t > 0 \\ 0 \ pour \ t < 0 \end{cases} \tag{III.39}$$

de l'utilisation de (III.37) et (III.38) nous obtenons

$$\phi_0(t) = I_2 + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{III.40}$$

$$\phi(t) = I_2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + A \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \tag{III.41}$$

depuis

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} pour \ k = 2, 3, \ldots$$

donc la solution devient avec $u(t) = 1$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \phi_0(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\
x(t) &= x_0 + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}x_0 + \int_0^t \left(\frac{B(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{AB(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \right) d\tau \\
x(t) &= x_0 + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}x_0 + \left[\frac{Bt^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{AB(t)^{2\alpha}}{2\alpha\Gamma(2\alpha)} \right]
\end{aligned}$$

on a $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, alors

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}x_0 + \frac{Bt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{AB(t)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ 1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2.2 Positivité des systèmes 1D fractionnaires à temps continu

Définition 3.2.1. *[10] Le système(III.32) est un système positive fractionnaire si et seulement si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$ pour toutes les conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$*

Lemma 3.2.1. *[10] Soit $A \in \mathbb{R}_+^{nn}$ et $0 < \alpha \leq 1$ puis*

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \in \mathbb{R}_+^{nn} \ pour\ t \geq 0 \tag{III.42}$$

et

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{nn} \ pour\ t \geq 0 \tag{III.43}$$

Si et seulement si A est une matrice de Metzler.

Preuve. Nécessité

On a :

$$
\begin{aligned}
\phi_0(t) &= I_n + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \cdots \\
\phi(t) &= I_n\frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + A\frac{t^{(2\alpha-1)}}{\Gamma(2\alpha)} + \cdots
\end{aligned}
$$

il s'ensuit que $\phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{nn}$ et $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^{nn}$ pour $t \geq 0$ si et seulement si A est une matrice de Metzler.

Suffisance

il est bien connu dans [9] que

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{nn} \ pour\ t \geq 0 \tag{III.44}$$

si et seulement si A est une matrice de Metzler. Nous pouvons écrire (III.42)

$$\begin{aligned}\phi_0(t) - \mathrm{e}^{At^\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} - \frac{(At^\alpha)^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!(At^\alpha)^k - \Gamma(k\alpha+1)(At^\alpha)^k}{k!\Gamma(k\alpha+1)} \geq 0 \; pour \; t \geq 0\end{aligned} \tag{III.45}$$

depuis $k! \geq \Gamma(k\alpha+1)$ pour $0 < \alpha \leq 1$.

de (III.44) et (III.45) nous avons donc $\phi_0(t) \geq \mathrm{e}^{At^\alpha}$ pour $t \geq 0$ et la démonstration est similaire pour $\phi(t)$. .

Théorème 3.2.2. *[9, 3] Le système (III.32) est un système positive fractionnaire à temps continu si et seulement si A est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{nm}, C \in \mathbb{R}_+^{pn}, D \in \mathbb{R}_+^{pm}$

Preuve. Suffisance

D'après la solution de système (III.32) de la forme

$$x(t) = \phi_0(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{III.46}$$

et $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$, si $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^{nn}$ et A est une matrice de Metzler puisque $\phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{nn}, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$

Nécessité

Soit $u(t) = 0, t \geq 0$ et $x_0 = e_i$(le i-ème colonne de la matrice Identité I_n) *et* $\mathrm{e}_i = (0, 0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, 0, \ldots, 0)$ (vecteur de la base canonique). La trajectoire du système ne quitte pas l'orthant $\mathbb{R}_+^n$ seulement si $x^\alpha(0) = Ae_i \geq 0$. Ce qui implique $a_{ij} > 0$ pour $i \neq j$ alors la matrice A doit être une matrice de Metzler . Pour la même raison $x_0 = 0$, nous avons $x^\alpha(0) = Bu(0) \geq 0$, ce qui implique $B \in \mathbb{R}_+^{nm}$, puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peuvent être arbitraires. À partir de (III.32) et $u(t) = 0, t \geq 0$ on a $y(0) = Cx_0 \geq 0$ et $C \in \mathbb{R}_+^{pn}$, puisque $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

De même en supposant $x_0 = 0$ on obtient $y(0) = Du(0) \geq 0$ et $D \in \mathbb{R}_+^{pm}$ puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$.

3.2.3 Stabilité des systèmes 1D fractionnaires positifs

Considérons le systéme linéaire fractionnaire positif en temps continu suivant :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t), \; x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n \tag{III.47}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0, A \in M_n$

Définition 3.2.2. *[12, 13] Le système fractionnaire positif (III.47) est appelé asymptotiquement stable si*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \; pour \; toute \; x_0 \in \mathbb{R}_+^n \tag{III.48}$$

Théorème 3.2.3. *[12] Le système fractionnaire positif (III.47) est asymptotiquement stable si et seulement si l'un des équivalents suivants les conditions sont satisfaites :*

1- *Il existe un vecteur strictement positif*
$\lambda^T = [\lambda_1 \dots \lambda_n], \lambda_k > 0, k = 1, \dots, n$ *tel que*

$$A\lambda < 0 \tag{III.49}$$

2- *Les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A*

$$\det[I_n\lambda - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{III.50}$$

Sont positifs, c'est à dire $a_k > 0$ *pour* $k = 0, 1, \dots, n-1$

3- *Les principaux mineurs de la matrice*

$$\bar{A} = -A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \tag{III.51}$$

Sont positifs, c'est à dire

$$\bar{a}_{11} > 0, \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det[-A] > 0 \tag{III.52}$$

Preuve. *Soit* $I_\alpha(0,t)$ *l'opérateur intégral fractionnaire de d'ordre* $\alpha, 0 < \alpha < 1$ *satisfaisant [9]*

$$I_\alpha(0,t)\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = x(t) - x(0) \tag{III.53}$$

En appliquant cet opérateur à (III.47), pour $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ *et* $x(0) > 0$*, on obtient*

$$-x(0) = AI_\alpha(0,\infty) = A\lambda < 0 \tag{III.54}$$

Puisque l'intégrale fractionnaire de $x(t)$ *appartient à* $\mathbb{R}_+^n$ *et* $I_\alpha(0,\infty) > 0$.
Notez que le dual système

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = A^T x(t) \tag{III.55}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si le système (III.47) est asymptotiquement stable.
*En tant que fonction **Lyapunov** du système dual, nous choisir*

$$V(x) = x^T(t)\lambda > 0 \; pour \; x(t) > 0 \tag{III.56}$$

et, en utilisant (III.55), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha V(x)}{dt^\alpha} &= \frac{d^\alpha (x^T(t)\lambda)}{dt^\alpha} \\ &= x^T(t)A\lambda < 0 \end{aligned} \tag{III.57}$$

si la condition (III.49) est satisfaite. Par conséquent, le système fractionnaire positif (III.47) est asymptotiquement stable si et seulement si la condition (III.49) est satisfaite.
L'équivalence des conditions (1) et (2), ainsi que (2) et (3), a été montré par [13, 14].

Remarque 3.2.1. *Si* $\det A \neq 0$ *alors en tant que vecteur* λ *on peut choisir*

$$\lambda = A^{-1}C \; pour \; toute \; C < 0, C \in \mathbb{R}^n \tag{III.58}$$

puisque $A\lambda = AA^{-1}C < 0$

Exemple . *Considérons le système fractionnaire positif (III.47) avec*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in M_3 \tag{III.59}$$

le système est asymptotiquement stable puisque pour $\lambda^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *nous avons*

$$A\lambda = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

En utilisant (III.58) et (III.59), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda &= A^{-1}C \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6C_1 + 2C_2 + C_3 \\ 3C_1 + 4C_2 + 2C_3 \\ 3C_1 + C_2 + 5C_3 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}_+^3$ non nul.

Le polynôme caractéristique de (III.59)

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_3 - A] &= \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9 \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) \end{aligned}$$

a tous les coefficients positifs et ses zéros sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$

La condition (2) du théorème (3.2.3) est satisfaite et le système est asymptotiquement stable. Condition (3) du même théorème est également satisfaite puisque les principaux mineurs de la matrice

$$\bar{A} = -A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sont positifs, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= 2, \\ \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \\ \det \bar{A} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \end{aligned}$$

Comparaison des conditions de stabilité asymptotique pour les définitions Caputo et conformes, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. *Les conditions de stabilité asymptotique pour des systèmes linéaires en temps continu pour le Caputo et les conditions conformes du dérivé fractionnaire sont les même.*

3.2.4 Le cas général $\det E \neq 0$

Nous considérerons des systèmes à temps continu implicites fractionnaires de la forme

$$D^{\alpha} Ex(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{III.60}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{III.61}$$

où $D^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$ *est la dérivée au sens de Caputo,* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *est le vecteur d'état du modèle,* $u(t) \in \mathbb{R}^m$ *est le vecteur d'entrée,* $y(t) \in \mathbb{R}^p$ *le vecteur de sortie du modèle, et* $A \in \mathbb{R}^{nn}, B \in \mathbb{R}^{nm}, C \in \mathbb{R}^{pn}$ *et* $D \in \mathbb{R}^{pm}$. *La frontière les conditions de (III.60) sont données par* $x(0) = x_0$, *avec la compatibilité suivante conditions :* $Ex(0)$ *et* $\lambda^{\alpha-k-1} Ex^{(k)}(0)$ *pour tout* k *tel que* $0 \leq k \leq n-1$ *sont connus et* $u(t)$ *spécifié pour* $t \geq 0$, *ce qui implique que la solution est sans impulsion. Dans cette formulation, l'ordre n'apparaît pas dans le dérivées de* $x(t)$, *mais plutôt dans le multiplicateur précédent* $\lambda^{\alpha-k-1}$, *donc tout à fait commodément, les dérivés d'ordre entier de* $x(0)$ *(c'est-à-dire* $x(0), x^{(1)}(0), x^{(2)}(0)$ *et ainsi de suite) sont utilisées comme conditions initiales, pour lesquelles un certain l'interprétation existe.On peut écrire l'équation (III.60) sous la forme*

$$ED^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{III.62}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{III.63}$$

Et notée

$$h_0(\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\alpha-k-1} x^{(k)}(0) \tag{III.64}$$

et appliquer la transformée de Laplace au système (III.62), on obtient

$$\mathcal{L}(ED^{\alpha} x(t)) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t))$$

et, en utilisant $X(\lambda)$ *et* $U(\lambda)$ *comme transformées de Laplace de* $x(t)$ *et* $u(t)$, *respectivement :*

$$(E\lambda^{\alpha} - A)X(\lambda) = Eh_0(\lambda) + BU(\lambda) \tag{III.65}$$

Si nous supposons également que $(E\lambda^{\alpha} - A)$ *est régulier, alors (III.65) équivaut à*

$$X(\lambda) = (E\lambda^{\alpha} - A)^{-1} \Big[Eh_0(\lambda) + BU(\lambda) \Big] \tag{III.66}$$

3.2.4.1 Le cas implicite régulier

Lorsque E est inversible, nous avons

$$\begin{aligned}(E\lambda^{\alpha}-A)^{-1} &= \left[(E\lambda^{\alpha})(I-(E\lambda^{\alpha})^{-1}A)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(E^{-1}A)^{i}E^{-1}\lambda^{-(i+1)\alpha}\end{aligned} \tag{III.67}$$

Si nous remplaçons maintenant (III.67) dans (III.66), on obtient

$$X(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}(E^{-1}A)^{i}\lambda^{-(i+1)\alpha}h_0(\lambda)+\sum_{i=0}^{\infty}(E^{-1}A)^{i}E^{-1}\lambda^{-(i+1)\alpha}BU(\lambda) \tag{III.68}$$

Maintenant, en utilisant les transformées inverses de Laplace, on obtient

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}(E^{-1}A)^{i}x_0^{(k)}+\int_0^t\sum_{i=0}^{\infty}(E^{-1}A)^{i}\frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}E^{-1}Bu(\tau)d\tau \tag{III.69}$$

3.2.5 Le cas implicite singulier $\det E = 0$

Pour le système d'espace d'états fractionnaire implicite avec E non inversible, il existe un développement en série de Laurent autour de zéro, qui est donné par

$$(E\lambda^{\alpha}-A)^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\lambda^{-(i+1)\alpha} \tag{III.70}$$

où le ϕ_i satisfait (δ_{ij} est le delta de Kronecker) :

$$\phi_iE-\phi_{i-1}A=\delta_{i0}=E\phi_i-A\phi_{i-1} \tag{III.71}$$

Cela découle facilement de [15] avec $\lambda^{\alpha}=s\in\mathbb{C}$. En supposant que le fractionnaire le systéme est régulier et sans impulsion, alors remplaçons maintenant de (III.70) dans (III.66), on obtient

$$X(\lambda)=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{\alpha-k-1}x^{k}(0)+\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\lambda^{-(i+1)\alpha}BU(\lambda) \tag{III.72}$$

Appliquer maintenant la transformée de Laplace inverse et le théorème de convolution aux sommes positives et négatives séparément

$$X(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{\alpha-k-1}x^{k}(0)+\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\lambda^{-(i+1)\alpha}BU(\lambda)+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{\alpha-k-1}x^{k}(0)+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\lambda^{(i-1)\alpha}BU(\lambda) \tag{III.73}$$

on obtient alors la solution et

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}\phi_i E x_0^{(k)}\phi_i+\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t \phi_i\frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(Bu(t)^{(i-1)\alpha}+\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{(i\alpha-1)}Ex_0^{(k)}\right) \tag{III.74}$$

Notez qu'il découle de [15] que

$$\phi_i=(\phi_0 A)^i\phi_0,\quad for\ \ i\geq 0$$

de sorte qu'une substitution dans (III.74) donnée

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_0A)^i\phi_0\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}Ex_0^{(k)}+\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t(\phi_0A)^i\phi_0\frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(Bu(t)^{(i-1)\alpha}+\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{(i\alpha-1)}Ex_0^{(k)}\right) \tag{III.75}$$

Considérons maintenant le cas où $n=1$, ce qui correspond à $0<\alpha\leq 1$, alors la solution devient

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_0A)^i\phi_0\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}Ex_0+\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t(\phi_0A)^i\phi_0\frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(Bu(t)^{(i-1)\alpha}+\delta^{(i\alpha-1)}Ex_0\right) \tag{III.76}$$

Remarque 3.2.2. *Notez que dans l'équation (III.76), on définit*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\phi_0At^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha+1)} \tag{III.77}$$

comme fonction de matrice étendue de Mittag-Leffler. Cela découle de ce qui suit observation. Si nous choisissons $E=I$, alors $\phi_0=I$ et nous obtenons le fonction de matrice de Mittag-Leffler connue.

Remarque 3.2.3. *Si $\alpha=1$, alors*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\phi_0At)^i}{\Gamma(i+1)}=e^{\phi_0At} \tag{III.78}$$

ce qui réduit (III.76) à la solution du système implicite de temps continu.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudie la notion des condition positivité et de stabilité des systèmes 1D linéaires positifs standard à temps continu. Et en basant sur la théorie de Lyapunov. Nous avons aussi étudie la théorie des systèmes 1D linéaires fractionnaires à temps continu. Nous avons étudions la positivité et la stabilité de cette classe des systémes. Enfin nous avons étudie la solution du syséme singulier.

Bibliographie

[1] *BOUAGADA, D "Theorie de contrôle" cours pour M1 :MCO et L3 : CAS.*

[2] *BOUAGADA, D. (2007). Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs (Doctoral dissertation, Université de Mostaganem).*

[3] *Engheia, N. (1997). On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 39(4), 35-46*

[4] *Farina, L., Rinaldi, S. (2000). Positive linear systems : theory and applications (Vol. 50). John Wiley Sons.*

[5] *Kaczorek, T. (1998). Vectors and matrices in automation and electrotechnics. WNT, Warszawa.*

[6] *Kaczorek, T. (1999). Stabilization of positive linear systems by state-feedbacks. Pomiary Automatyka Kontrola, 45.*

[7] *Kaczorek, T. (2011, June). New Stability Tests Of Positive 1D And 2D Linear Systems. In ECMS (pp. 237-243).*

[8] *Kaczorek, T. (2018). Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 28(2).*

[9] *Kaczorek, T. (2012). Positive 1D and 2D systems. Springer Science Business Media.*

[10] *Kaczorek, T. (2008). Fractional Positive Continuous-Time Linear Systems and Their Reachability. International Journal of Applied Mathematics Computer Science, 18(2).*

[11] *Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.*

[12] *Kaczorek, T. (2011). Positive electrical circuits and their reachability. Archives of Electrical Engineering, 60(3), 283-301.*

[13] Kaczorek, T., Rogowski, K. (2015). Fractional linear systems and electrical circuits (pp. 49-80). Cham, Switzerland : Springer International Publishing.

[14] Kaczorek, T. (2013). Application of the Drazin inverse to the analysis of descriptor fractional discrete-time linear systems with regular pencils. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 23(1).

[15] Lewis, F. (1984). Descriptor systems : Decomposition into forward and backward subsystems. IEEE Transactions on Automatic Control, 29(2), 167-170

[16] Mikolás, M. (1975). On the recent trends in the development, theory and applications of fractional calculus. In Fractional Calculus and Its Applications (pp. 357-375). Springer, Berlin, Heidelberg.

[17] Oldham, K., Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Elsevier

[18] Panos Anasaklis, J and Anthony Miche. N "A Linear Systems primer " 2007 Birkhauser-L.C.control.

[19] Podlubny I., (1999) Fractional differential equations, Academic Press,San Diego, CA..

[20] Tellab, B., Haouam, K. (2018). Résolution des équations différentielles fractionnaires (Doctoral dissertation).