UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de

MASTER

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Quelques propriétés sur les solutions transcendantes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à coefficients fonctions entières.

Présenté par : Melle. HAGANI Fatima

Président	**Mme H. BENDAHMENE**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**Mme A. FERRAOUN**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	**Mme M. SAIDANI**	**U. MOSTAGANEM.**

Année universitaire : 2020-2021

Dédicace

Grace à mon DIEU

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

A mes frères

A mes amies et mes camarades.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

HAGANI FATIMA

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU le miséricordieux de m'avoir donnés la possibilité de réaliser mon projet, d'arriver à mes souhaits
et d'atteindre mes objectifs.

Je remercie toutes les personnes qui d'une manière ou d'une autre, ont contribué au bon déroulement de mon travail, tout au niveau humain au niveau scientifique.

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Mme Mansouria SAIDANI. Je n'ai pu bénéficier à la fois de ses compétences scientifiques, et de sa grande disponibilité, tant pour résoudre les difficultés rencontrées lors de répondre à mes questions.

Mes remerciements les plus sincères vont à Mme Hafida BENDAHMENE qui m'a honoré en acceptant d'être présidente du jury. Je tiens à adresser mes remerciements à Mme Amina FERRAOUN pour l'intérêt qu'elle a porté pour mon travail en participant à ce jury en tant qu'examinatrice.

A mes très chers parents qui ont tant prié à ma réussite, de soutien moral, je les remercie de m'avoir encouragé et aidé à devenir ce que je suis.

A mes frères, mes sœurs, mes grands-parents, Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $k \geq 0,\ A_0 \neq 0, A_1(z), ..., A_k(z)\ et\ F(z) \neq 0$ sont des fonctions entières d'ordre p-itératif fini. Sous certaines conditions, nous étendons quelques résultats de He, Zheng et Hu ; Long et Zhu en utilisant le concept de l'itératif et nous obtenons des estimations générales de l'exposition de convergence itératif et l'ordre p-itératif des solutions pour les équations ci-dessus

Mots-Clés : Fonctions entières, ordre de croissance, l'exposant de convergence.

Abstract

In this work, we study the growth of meromorphic solutions of linear differential equations

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

and

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

where $k \geq 0$, $A_0 \neq 0, A_1(z), ..., A_k(z)$ and $F(z) \neq 0$ are entire functions of finite p-iterated order. Under certain conditions, we extend some results of He, Zheng and Hu ; Long and Zhu using the concept of the iterative and we get general estimates of iterated convergence exposure and the p-iterated order of solutions for the above equations.
Keywords : Entire functions, order of growth, exponent of convergence.

Introduction

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes et donné des outils très efficaces pour l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe, plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus par des chercheurs effectuant des recherches dans la même thématique.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le **premier chapitre**, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques définitions concernant la mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles.

Le **deuxième chapitre** traite les résultats de l'article [17], où on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

Le dernier chapitre contient des exemples d'applications des résultats obtenus en deuxième chapitre.

Ce travail est achevé par une bibliographie.

Chapitre 1

Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir W.K. Hayman ([10]) et I. Laine ([15])).

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 ***(Formule de Jensen)*** ([*10*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1.1 ([*10*], [*15*]) *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([1]) *Soient $x, y, x_1, ...x_n$ des nombres réels strictement positifs. Alors, nous avons*

(a) $\log x \leq \log^+ x$,

(b) $\log^+ x \leq \log^+ y$ *pour* $x \leq y$,

(c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$,

(d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$,

(e) $\log^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$,

(f) $\log^+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$.

Preuve Les propriétés (a), (b) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1 et la monotonie de la fonction logarithme.

Montrons (c), (d), (e) et (f).

(c) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ - \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0) \\ &= \log x \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0) \\ &= |\log x|. \end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$, alors l'inégalité est évidente. Supposons que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \log^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) &= \log \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j, \text{ d'après } (a). \end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned} \log^+ (\sum_{j=1}^{n} x_j) &\leq \log^+ (n \max_{1 \leq j \leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \log^+ (\max_{1 \leq j \leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 ***(Fonction a-points)*** ([*10*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a. On définit $N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$ la fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq r\}$ par*

$$N(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r, \qquad si\ a \neq \infty,$$

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r,$$

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,\frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\log r \quad (a \neq \infty),$$

et

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\log r\ .$$

où $n(t,a,f)$ désigne le nombre de zéros de l'équation $f(z) = a$ situés dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. $n(t,\infty,f)$ désigne le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité. $\overline{n}(t,a,f)$ désigne le nombre de zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, $\overline{n}(t,\infty,f)$ désigne le nombre de pôles distincts de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$.

Exemple 1.1.1 *Soit $f(z) = \exp(z)$. On a $n(t,\infty,f) = 0$, par suite $N(r,f) = 0$.*

Lemme 1.1.2 ([*10*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ dans le disque $\{z : |z| \leq r\}$ tels que :$0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < ... < |\alpha_n| \leq r$ et $f(0) \neq 0$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|\alpha_j|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha_j|}$$

Proposition 1.1.1 ([*10*], [*15*]) *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m\epsilon\mathbb{Z}.$$

Alors,

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.1.3 ***(Fonction de proximité)*** ([10], [15]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on définit la fonction de proximité de f par*

$$m(r,a,f) = m(r,\frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(r\exp(i\theta)) - a|} d\theta \qquad (a \neq \infty)$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\exp(i\theta))|\, d\theta.$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction caractéristique)*** ([15]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. La fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r,f)$ de la fonction méromorphe f est définie par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.2 *Soit $f(z) = \exp(z)$. On a $n(t,\infty,f) = 0$, par suite $N(r,f) = 0$, et*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |\exp(z)|\, d\theta$$

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} (r\cos(\theta))d\theta. \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,\exp(z)) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Proposition 1.1.2 ***(Propriétés de la fonction caractéristique de Nevanlinna)*** ([15]) *Soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telles que $ab - cd \neq 0$. Alors*

1.

$$T(r,\sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r,f_j) + \log n \text{ pour } r \geq 1,$$

2.
$$T(r,\prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r,f_j), \ \textit{pour } r \geq 1,$$

3.
$$T(r,f^n) = nT(r,f), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

4.
$$T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r,f) + O(1), \ f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

Preuve

1. On a.
$$T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) = m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right),$$

$$\begin{aligned} m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{n} \log^+\left|f_j(r,(re^{i\theta})\right| + \log n\right) d\theta \\ &= \sum_{j=1}^{n} m(r,f_j) + \log n. \end{aligned}$$

D'autre part,
$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} N(r,f_j),$$

par suite
$$\begin{aligned} T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} T(r,f_j) + \log n \ . \end{aligned}$$

2.On a
$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = m\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right).$$

Comme

$$\begin{aligned} m\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j), \end{aligned}$$

de plus, si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j , alors z_0 est un pôle d'ordre au plus $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j$ pour la fonction $\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_j$, ce qui donne

$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}N(r,f_j).$$

Donc

$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j).$$

3.On a $|f| \leq 1$ équivaut à $|f|^n \leq 1$.

(a) Si $|f| \leq 1$, alors

$$m(r,f^n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f^n(re^{i\theta})\right|d\theta = 0,$$

et

$$N(r,f^n) = nN(r,f),$$

d'où

$$T(r,f^n) = nT(r,f).$$

(b) Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f^n(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &= nm(r,f), \end{aligned}$$

et

$$N(r,f^n) = nN(r,f),$$

d'où

$$T(r,f^n) = nT(r,f).$$

4. Posons $g = \frac{af+b}{cf+d}$, avec $ad - cb \neq 0$ alors nous avons

$$gcf + gd = af + b \Leftrightarrow \ f = \frac{b - gd}{gc - a}$$

il suffit donc de montrer que

$$T(r, g) \leq T(r, f) + O\left(1\right).$$

Nous distinguons deux cas.

Cas 1. Si $c = 0$,alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T(r, \frac{af+b}{d}) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Cas 2. Si $c \neq 0$,alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{\frac{a}{c}(cf+d) - \frac{ad}{c} + b}{cf+d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c^2}.\frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right) \\ &\leq T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3 *Soit* $g(z) = \tan(z)$. *On a*

$$\begin{aligned} \tan(z) &= \frac{\sin z}{\cos z} \\ &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{i\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)} \\ &= \frac{1f - 1}{if + 1} \end{aligned}$$

où $f(z) = \exp(2zi)$ et $ad - cb = 2 \neq 0$,et comme $T(r, \exp(2iz)) = \frac{|2i|r}{\pi}$, on obtient

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T(r, f) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.2 ***(Premier Théorème fondamental de Nevanlinna dans le plan complexe)*** ([10], [15]) *Soit f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \epsilon \mathbb{Z}, \quad z \epsilon \mathbb{C}$$

la série de Laurent de $f(z) - a$ $(a \in \mathbb{C})$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a, nous avons

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log|c_m| + \varphi(r, a)$$

où $|\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Preuve Montrons le théorème pour $a = 0$, d'après la proposition 1.1.1 et lemme 1.1.1 $c)$ on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r, f) - m(r, 0, f) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r, f) + N(r, f) - \log|c_m| \\
&= T(r, f) - \log|c_m| \qquad (I)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r, 0) = 0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
N(r, h) &= N(r, f-a) = N(r, f).
\end{aligned}$$

On a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on obtient

$$-(\log^+|a| + \ln 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Alors $\varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2$. On aura

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit :*

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty.$$

1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.2.1 ([10], [15]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini si

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

Définition 1.2.2 ([10], [15]) *Soit f une fonction entière non constante ; alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Dans le cas où l'ordre d'une fonction méromorphe est infini, on introduit une autre notion qui donne plus de précision sur la croissance qui est appelée l'hyper ordre et est définie comme suivant

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r},$$

et pour une fonction entière, on a

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.2.1 *Si f est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nul.*

Théorème 1.2.1 ([10]) *Soient f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

1. $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
2. $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
3. Si $\rho(g) < \rho(f)$. Alors
$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f).$$

1.3 L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur d'une fonction

Définition 1.3.1 ([10]) *Soit f une fonction entière. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de cette fonction sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}\\ \mu_2(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}\end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Soit* $f(z) = \frac{1}{z}\exp(z^n)$. *Alors,*

$$\mu(f) = n.$$

1.4 Exposant de convergence des pôles d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 ([15]) *Soit* f *une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des pôles de la fonction* f *noté* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ *est défini par*

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,f)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence des pôles distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \bar{N}(r,f)}{\log r}.$$

1.5 L'ordre p-itératif d'une fonction

Afin de généraliser quelques résultats sur les propriétés des solutions de certaines équations différentielles, nous avons besoin de définir l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe, mais pour le faire il faut d'abord définir les expressions suivantes sur l'exponentielle et sa fonction réciproque : pour tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r := \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. De la même façon on définit $\log_1 r := \log r$ et $\log_{p+1} r := \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$ et ceci pour r suffisamment grand.

Définition 1.5.1 ([15]) *Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'ordre p-itératif de croissance de la fonction* f *par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \quad (p \geqslant 1,\ p \text{ entier}),$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si* f *est entière, alors l'ordre p-itératif de la fonction* f *est défini par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r} \quad (p \geqslant 1,\ p \text{ entier}),$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.5.1 *$\rho_1(f)$ coïncide avec l'ordre usuel.*

De plus, on définit l'indice de croissance comme suit

Définition 1.5.2 ([15]) *L'indice de croissance d'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f est définit par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & si\ f\ est\ rationnelle \\ \min\limits_{j\in\mathbb{N}} \left\{\rho_j(f) < +\infty\right\}, & si\ f\ est\ transcendante \\ +\infty, & si\ \rho_j(f) = +\infty\ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.6 L'ordre p-itératif inférieur d'une fonction

Définition 1.6.1 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe. L'ordre p-itératif inférieur $\mu_p(f)$ de f est définit par*

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{log_p T(r,\ f)}{log\ r} \quad (p \geqslant 1,\ p\ entier).$$

Si f est entière, alors l'ordre p¡itératif inférieur $\mu_p(f)$ est définit par

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{log_{p+1} M(r,\ f)}{log\ r} \quad (p \geqslant 1,\ p\ entier).$$

1.7 L'exposant de convergence p-itératif d'une fonction

Définition 1.7.1 ([10]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence p-itératif des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On définit l'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.7.2 ([16]) *Le degré de finitude de l'exposant de convergence itératif des zéros d'une fonction méromorphe f est donné par*

$$i_\lambda(f,a) := \begin{cases} 0, & si\ n(r,a) = O(\log r), \\ \min\{j \in \mathbb{N}\ : \lambda_j(f,a) < \infty\}, & pour\ \ j \in \mathbb{N} \\ & avec\ \lambda_j(f,a) < \infty\ existe, \\ +\infty, & si\ \lambda_j(f,a) = \infty\ \ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.8 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.8.1 ([13], [14]) *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E. La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$m_l(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.8.1 *La mesure linéaire d'un ensemble $[0, 1] \subset 0, +\infty[$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_0^1 dt = 1$$

Exemple 1.8.2 *La mesure logarithmique d'un ensemble $F = [e^2, e^6] \subset 1, +\infty[$ est définie par*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_{e^2}^{e^6} \frac{1}{t} dt = 4.$$

Définition 1.8.2 ([13], [14]) *La densité inférieur et la densité supérieur d'un sous ensemble $H \subset [0, +\infty)$ sont définies respectivement par*

$$\begin{aligned} \underline{dens} H &= \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}, \\ \overline{dens} H &= \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}. \end{aligned}$$

Définition 1.8.3 ([13], [14]) *La densité logarithmique supérieure d'un ensemble $F \subset (1, +\infty)$ est définie par*

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

La densité logarithmique inférieure d'un ensemble $F \subset (1, +\infty)$ est définie par

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}$$

Proposition 1.1 ([3]) Pour tout ensemble $H \subset (1, +\infty)$ les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) si $m_l(H) = \infty$, alors $m(H) = \infty$;

(ii) si $\overline{dens}(H) > 0$, alors $m(H) = \infty$;

(iii) si $\overline{\log dens}(H) > 0$, alors $m_l(H) = \infty$.

1.9 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.9.1 ***(Produits canonique)*** ([22]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient $z_1, z_2,..$ ses zéros avec $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ...$ Soit p l'entier minimal tel que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge. On appelle

$$\begin{aligned} E(u,0) &= (1-u), \\ E(u,p) &= (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + ... + \frac{u^p}{p}) \quad p = 1, 2, ... \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p),$$

converge uniformément dans chaque domaine borné dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f . L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.9.1 ([18]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f)$ et soient $\{a_1, a_2, ...\}$ et $\{b_1, b_2, ...\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivement. Supposons que f a une représentation*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ..., (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$. Alors

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $Q(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\rho(f)$ et $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produits canoniques de f formés des zéros et des pôles non nuls de f .

1.9.1 Indice central et le terme maximal

Définition 1.9.2 ([15])*Soit* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *une fonction entière. On définit le terme maximal de* f *par* $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est bien défini. On définit l'indice central de la fonction* f *par*

$$\nu(r, p) = m : \mu(r, f) = |a_m| r^m.$$

Exemple 1.9.1 *Pour* $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *alors quand* $|z| = r \to +\infty$ *, on a le terme maximal est* $|a_n| r^n$ *et par conséquent* $\nu(r, f) = n = \deg(f)$.

Chapitre 2

La croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières

2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions l'ordre itératif des solutions des équations linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $k \geq 2$, $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_k(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre $p-$itératif fini. Nous améliorons et étendons certains résultats de He, Zheng et Hu [12], Long et Zhu [16] en utilisant le concept de l'ordre itératif et nous obtenons des estimations générales de l'exposant de convergence itératif et de l'ordre p-itératif des solutions pour les équations .

Dans [2], Belaïdi a étendu les résultats de Kwon [14], Chen et Yang [5] de la classe des équations différentielles linéaires d'ordre deux à la classe des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur en considérant des conditions plus générales sur les coefficients fonctions entières comme suit.

Théorème 2.1.1 ***A*** [2] *Soient* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\,\{|z|\,;z\in H\}>0$ *et* $A_0(z)\ldots A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières telles que pour certaines constantes réelles* α,β,μ *où* $0\leq\beta<\alpha$ *et* $\mu>0$, *on a*

$$|A_0(z)|\geq e^{\alpha|z|^{\mu}}$$

et

$$|A_j(z)|\leq e^{\beta|z|^{\mu}},\ j=1\ldots.k-1$$

quand $z\to\infty$ *pour* $z\in H$. *Alors, toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{k-1}A_j(z)f^{(j)}(z)+A_0(z)f(z)=0 \tag{2.1.1}$$

est d'ordre infini et $\rho_2(f)\geq\mu$.

Théorème 2.1.2 ***B*** [2] *Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\,\{|z|=:z\in H\}>0$ *et soient* $A_0(z),\ldots A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières avec*

$$\max\{\rho(A_j):j=1\ldots.k-1\}\leq\rho(A_0)=\rho<+\infty$$

telles que pour certaines constantes réelles α,β,μ $(0\leq\beta<\alpha)$, *on a pour tout* $\varepsilon>0$

$$|A_o(z)|\geq e^{\alpha|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

et

$$|A_j(z)|\leq e^{\beta|z|^{\rho-\varepsilon}},j=1\ldots.k-1$$

quand $z\to\infty$ *pour* $z\in H$. *Alors, toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.1) *est d'ordre infini et* $\rho_2(f)=\rho(A_0)$.

Très récemment, dans [16], Long et Zhu ont amélioré les résultats précédents de [[2], [5], [14], [20]] en étudiant la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (2.1.1) et

$$f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{k-1}A_j(z)f^{(j)}(z)+A_0(z)f(z)=F(z) \tag{2.1.2}$$

où $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_k(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes. Une estimation de l'hyper ordre des solutions méromorphes des équations ci-dessus a été donnée à condition qu'il existe un coefficient dominant.

Théorème 2.1.3 ***C*** *[16] Soit E un ensemble de nombres complexes vérifiant $m_l(\{|z| : z \in E\}) = +\infty$ et soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un nombre entier $s\,(s \leq 0 \leq k-1)$ satisfaisant*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) = \rho < \infty$$

et pour certaines constantes $0 \leq \beta < \alpha$, et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\left(\beta\,|z|^{\rho-\varepsilon}\right), \quad j \neq s,$$

$$|A_s(z)| \geq \exp\left(\alpha\,|z|^{\rho-\varepsilon}\right)$$

quand $z \to \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution méromorphe non triviale f de l'équation (2.1.1)*, dont les pôles sont d'une multiplicité uniformément bornée, satisfait $\rho(A_s) = \rho_2(f)$.*

Pour le cas d'une équation non homogène, ils obtiennent le résultat suivant.

Théorème 2.1.4 ***D*** *[16] Soit E un ensemble de nombres complexes vérifiant $m_l(\{|z| : z \in E\}) = +\infty$ et soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un nombre entier $s\,(s \leq 0 \leq k-1)$ satisfaisant*

$$\max\left\{\rho(A_j), j \neq s, \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right), \rho(F)\right\} < \mu(A_s) \leq \rho(A_s) = \rho < \infty$$

et pour certaines constantes $(0 < \beta < \alpha)$ nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$|A_j(z)| \leq \exp\left(\beta\,|z|^{\rho-\varepsilon}\right), j \neq s,$$

$$|A_s(z)| \geq \exp\left(\alpha\,|z|^{\rho-\varepsilon}\right)$$

quand $z \to \infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution méromorphe f de l'équation (2.1.2) *dont les pôles sont d'une multiplicité uniformément bornée, satisfait $\rho(A_s) = \rho_2(f)$.*

Dans ce chapitre, nous considérons pour $k \geq 2$ les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{2.1.3}$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.4}$$

où $A_0(z) (\not\equiv 0), A_1(z), ..., A_k(z) (\not\equiv 0)$ et $F(z) (\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre $p-$ itératif fini. Il est bien connu que si $A_k = 1$ alors toutes les solutions des équations différentielles linéaires (2.1.3) et (2.1.4) sont des fonctions entières, mais lorsque A_k est une fonction entière non constante, l'équation différentielle linéaire (2.1.3) ou (2.1.4) peut posséder des solutions méromorphes. Par exemple l'équation

$$zf''' + 3f" - 2e^{-2z} f' + ((z-2)e^{-3z} - (3z-2)e^{-2z} + ze^{-z})f = 0$$

a une solution méromorphe

$$f(z) = \frac{e^{e^{-z}}}{z}$$

Nous savons aussi que si certains des coefficients $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont des fonctions transcendantes et $A_k = 1$ l'équation (2.1.3) a au moins une solution d'ordre infini. Récemment, plusieurs chercheurs ont étudié les propriétés des solutions des équations (2.1.3) et (2.1.4) et ils ont obtenu de nombreux résultats sur leurs croissance, voir [[6], [11], [12], [21]] . Des questions intéressantes se posent :

– **Question 1.** Quelles sont les conditions sur $A_0(z), A_1(z), ..., A_k(z)$ garantissant que chaque solution $f \not\equiv 0$ des équations (2.1.3) et (2.1.4) est d'ordre itératif infini ?

– **Question 2**. Peut-on remplacer les coefficients fonctions méromorphes des équations (2.1.3) et (2.1.4) dans les Théorèmes 5.3 et 5.4 par des fonctions entières pour les équations (2.1.1) et (2.1.2) ?

Le but principal de ce chapitre est de répondre à ces questions en étudiant les résultats du travail de Saidani et Belaïdi [17] qui ont généralisé

les résultats des travaux mentionnés précédemment. Pour l'équation (2.1.1), notre premier résultat est une extension du Théorème **B** et du Théorème **C**. En fait, nous allons détailler les preuves des résultats suivants.

Théorème 2.1.5 *Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}\{|z|\,;z\in H\}>0$ *(ou* $m(\{|z|:z\in\ H\}=+\infty)$ *et soient* $(A_j=0,1,...,k)$, $F(z)\,(\not\equiv 0)$ *des fonctions entières telles que* $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$. *Supposons qu'il existe un nombre entier s* $(0\leq s\leq k)$ *satisfaisant* $i(A_s)=p\,(0<p<+\infty)$,

$$\max\left\{\rho_p(A_j),s\neq j,j=0,1,...,k\right\}<\mu_p(A_s)\leq\rho_p(A_s)<+\infty$$

et pour certaines constantes α et β telles que $0\leq\beta<\alpha$, *nous avons pour tout* $\varepsilon>0$ *suffisamment petit*

$$\begin{aligned}|A_j(z)| &\leq \exp_p\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right),s\neq j,j=0,1,...,k,\\ |A_s(z)| &\geq \exp_p\left(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

quant $z\to\infty$ *pour* $z\in H$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante f de l'équation* (2.1.3) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p\,(f)$ *satisfait* $i\,(f)=p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f)=\rho_p(A_s)$.
Lorsque $A_k(z)\equiv 1$, *on obtient le corollaire suivant pour des solutions entières.*

Corollaire 2.1.1 *Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}\{|z|\,;z\in H\}>0$ *(ou* $m(\{|z|:z\in\ H\})=\infty$) *et soit* $A_j(z)\,(j=0,1,...,k-1)$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un nombre entier s* $(0\leq s\leq k-1)$ *vérifiant* $i(A_s)=p.0<p<+\infty$ *et*

$$\max\{\rho_p(A_j),j\neq s,j=0,1,...,k-1\}<\mu_p(A_s)\leq\rho_p(A_s)<+\infty$$

et pour certaines constantes réelles α et β telles que $0\leq\beta<\alpha$, *nous avons pour tout* $\varepsilon>0$ *suffisamment petit, on a*

$$\begin{aligned}|A_j(z)| &\leq \exp_p\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right),s\neq j,j=0,1,...,k-1,\\ |A_s(z)| &\geq \exp_p\left(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

quand $z\to\infty$ *pour* $z\in H$. *Alors, toute solution transcendante f de l'équation* (2.1.1) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p\,(f)$ *satisfait* $i\,(f)=p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f)=\rho_p(A_s)$.

Corollaire 2.1.2 *Soient les fonctions* $A_j(z)\,(j=0,1,...,k)$ *et l'ensemble H satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 2.1.5 et soit une fonction méromorphe transcendante φ vérifiant*

$i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$. Alors, toute solution méromorphe transcendante f $(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.3) *avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait*

$$i_\lambda(f-\varphi) = p+1 \text{ et } \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s)$$

Concernant l'équation différentielle linéaire non homogène (2.1.4), nous obtenons une extension du Théorème D.

Théorème 2.1.6 *Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{\log dens}\{|z|\,; z\in H\} > 0$ (ou $m(\{|z| : z\in H\}) = +\infty$) et soient A_j $(j=0,1,...,k)$, $F(z)$ $(\not\equiv 0)$ des fonctions entières telles que $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$. Supposons qu'il existe un nombre entier s $(0\le s\le k)$ tel que $i(A_s) = p$, $(0<p<+\infty)$ satisfaisant*

$$\max\left\{\rho_p(A_j), s\neq j, j=0,1,...,k, \rho_p(F)\right\} < \mu_p(A_s) \le \rho_p(A_s) < +\infty,$$

et pour certaines constantes réelles $0\le\beta<\alpha$ et pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |A_j(z)| &\le \exp_p\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right), s\neq j, j=0,1,...,k,\\ |A_s(z)| &\ge \exp_p\left(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

quand $z\to\infty$ pour $z\in H$. Alors, Alors, toute solution méromorphe transcendante (2.1.4) *avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$

Quand $A_k(z) = 1$, on obtient le corollaire suivant pour des solutions entières.

Corollaire 2.1.3 *Soit H un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\log dens}\{|z|\,; z\in H\} > 0$ (ou $m(\{|z| : z\in H\}) = +\infty$) et soient A_j $(j=0,1,...,k-1)$, $F(z)$ $(\not\equiv 0)$ des fonctions entières. Supposons qu'il y a un entier s $(0\le s\le k-1)$ tel que $i(A_s) = p$ $(0<p<+\infty)$ et satisfaisant*

$$\max\{\rho_p(A_j).J\neq s.j=0,1,...,k-1\} < \mu_p(A_s) \le \rho_p(A_s) < +\infty$$

($p\ge 1$ est un entier) et pour certaines constantes $0\le\beta<\alpha$, nous avons pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit

$$\begin{aligned} |A_j(z)| &\le \exp_p\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right), s\neq j, j=0,1,...,k-1,\\ |A_s(z)| &\ge \exp_p\left(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, tout solution méromorphe transcendante* f *de l'équation* (2.1.2) *avec*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$

Théorème 2.1.7 ***Corollaire 2.1.4*** *Soient les fonctions* $A_j(z)\,(j \neq s, j = 0, 1, ..., k-1)$, $F(z)$, H *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème* (2.1.6) *et soit* φ *une fonction méromorphe transcendante vérifiant* $i(\varphi) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *de l'équation* f *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *de l'équation* (2.1.4) *satisfait*

$$\begin{aligned} i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) &= i_{\lambda}(f-\varphi) = p+1 \\ & \quad et \\ \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) &= \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s). \end{aligned}$$

2.2 Lemmes préliminaires

Nos preuves dépendent principalement des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 [*8*] *Soient* f *une fonction méromorphe transcendante dans le plan et soit* $\eta > 1$ *une constante réelle. Alors, il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B > 0$ *dépendante uniquement de* η *et de* H *tels que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin\notin [0,1] \cup E_1$ *et pour tout* (m, n) $(m, n$ *sont des nombres entiers avec* $0 \leq m < n$ $)$, *nous avons*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leqslant B\left(\frac{T(\eta r, f)}{r}(\log^{\eta} r) \ \log \ T(\eta r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.2.2 [*19*] *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe où* $g(z)$, $d(z)$ *sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant* $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty, 0 < p < +\infty, i(d) < p$ *ou* $\rho_p(d) < \mu$. *Soit* z *un point avec* $|z| = r$ *pour lequel* $|g(z)| = M(r, g)$ *et* $v_g(r)$ *désigne l'indice central de* g . *Alors, l'estimation*

$$\frac{f^{(n)(z)}}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), n \geq 1$$

est vérifiée pour tout z *où* $|z| = r$ *en dehors d'un ensemble* E_2 *de* r *de mesure logarithmique finie.*

Lemme 2.2.3 [4] *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre itératif fini vérifiant*

$$i(g) = p+1, \rho_{p+1}(g) = p, i_{\mu}(g) = q+1, \mu_{q+1}(g) = \mu, 0 < p, q < \infty$$

et soit $v_g(r)$ l'indice central de g . Nous avons

$$\lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_{p+1} v_g(r)}{\log r} = \rho, \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{\log_{q+1} v_g(r)}{\log r} = \mu.$$

Lemme 2.2.4 [9] *Soient $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $\varphi(r) \leq \psi(r)$ pour tout $r \notin (E_3 \cup [0.1])$, où E_3 est un ensemble de mesure logarithmiques finie. Soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors, il existe $r_1 = r_1(\alpha) > 0$ tel que $\varphi(r) \leq \psi(\alpha r)$ pour tout $r > r_1$.*

Lemme 2.2.5 [11] *Soit $p \geq 1$ un entier et soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe, où $g(z), d(z)$ sont des fonctions entières satisfaisant*

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(g) = \rho_p(f) \leq +\infty, 0 < p < +\infty, \rho_p(d) = \lambda_p(\frac{1}{f}) = \beta < \mu.$$

Alors, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie telle que pour tout $|z| = r \notin E_4$,et $g(z) = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, (s \quad \textit{est un entier})$$

Lemme 2.2.6 [6] *Soit $p \geq 1$ un entier et f une fonction entière tels que $i(f) = p, \rho_p(f) = p < +\infty$. Alors, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a*

$$\exp\{-\exp_{p-1}\{r^{\rho+\varepsilon}\}\} \leq |f(z)| \leq \exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}(r \notin E_5).$$

Lemme 2.2.7 [12] *Soient $A_j(z)(j = 0,1,...,k).F\ (\not\equiv 0))$ des fonctions méromorphes et f une solution méromorphe de l'équation (2.1.4) d'ordre p-itératif infini. Si*

$$\max\{i(F) = p.i(A_j)(j = 0.,1,...,k)\} < i(f) = p+1(0 < p < +\infty)$$

ou bien

$$b = \max\{\rho_{p+1}(F).\rho_{p+1}(A_j)(0,1,...,k)\} < \rho_{p+1}(f)..$$

Alors, $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f)$

Lemme 2.2.8 *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe où* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières. Si* $0 \leq \rho_p(d) < \mu_p(f)$, *alors* $\mu_p(f) = \mu_p(g)$ *et* $\rho_p(f) = \rho_p(g)$. *De plus, si* $\rho_p(f) = +\infty$, *alors* $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(g)$.

Remarque Lemme 2.2.8 a été obtenu pour $p = 1$ par Long and Zhu dans [16].

Preuve. Nous avons distingué les trois cas suivants :

__Cas 1__ **:** $\rho_p(f) < +\infty$.

Par définition de de l'ordre itératif, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ et un nombre entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon \in \left(0. \frac{\rho_p(f)-\rho_p(g)}{2}\right)$ $\left(\text{avec } 0 \leq \rho_p(d) < \mu_p(f) \leq \rho_p(f)\right)$, on a

$$\begin{aligned} T(r_n, f) &\geq \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\}, \quad (2.2.1) \\ T(r_n, d) &\leq \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\} \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

de plus,

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}.$$

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T(r, \frac{g}{d}) \\ &\leq T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{d}\right) \\ &\leq T(r, g) + T(r, d) + O(1) \end{aligned}$$

alors pour tout n suffisamment grand, on a

$$\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} \leq T(r, g) + \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\} + O(1)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} - \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\} &\leq T(r, g) + O(1) \\ \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\}\left\{1 - \frac{\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\}}{\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\}}\right\} &\leq T(r, g) + O(1) \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\rho_p(f)-\rho_p(d)}{2}$, on obtient

$$\frac{\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\}}{\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\}} \leq 1$$

donc, de la formule (2.2.3), on déduit que

$$(1+o(1))\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} \leq T(r_n, g) + O(1)$$

pour tout n suffisamment grand . Par conséquent,

$$\rho_p(f) \leq \rho_p(g).$$

D'autre part, comme

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T(r, \frac{g}{d}) \\ &\Rightarrow T(r,g) = T(r, f.d) \leq T(r,f) + T(r,d) \\ &\Rightarrow T(r,g) \leq T(r,f) + T(r,d) \end{aligned}$$

et

$$\rho_p(d) < \rho_p(f)$$

alors $\rho_p(g) \leq \rho_p(f)$. Par suite, $\rho_p(g) = \rho_p(f)$. En utilisant un raisonnement similaire et la définition de l'ordre p-itératif inférieur $\mu_p(f)$ et $\mu_p(g)$, on peut montrer que

$$\mu_p(f) = \mu_p(g).$$

Cas 2 :$\rho_p(f) = +\infty$. Pour monter que

$$\mu_p(f) = \mu_p(g)$$

on suppose le contraIre, c'est a dire

$$\mu_p(f) \neq \mu_p(g).$$

on sait que

$$\mu_p(f) \neq \mu_p(g) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mu_p(f) < \mu_p(g) \\ \text{ou} \\ \mu_p(g) < \mu_p(f) \end{array}$$

on a, $g = f.d$, donc

$$\mu_p(g) \leq \max\left(\mu_p(f); \mu_p(d)\right) \leq \mu_p(f)$$

on suppose donc que

$$\mu_p(g) < \mu_p(f).$$

D'après la définition de l'ordre p-itératif inférieur, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ et un nombre entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}^\star : \forall n > n_0 : -\varepsilon < \frac{\log_p T(r_n, d)}{\log r_n} - \mu_p(d) < \varepsilon$$

d'où

$$T(r_n, d) < \exp_{p-1} r_n^{\left(\mu_p(d)+\varepsilon\right)}, \tag{2.2.4}$$

de même façons

$$T(r_n, g) < \exp_{p-1} r_n^{\left(\mu_p(g)+\varepsilon\right)}. \tag{2.2.5}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} T(r_n, f) &= T(r_n, g.\frac{1}{d}) \\ &\Rightarrow T(r_n, f) \leq T(r_n, g) + T(r_n, d) + 0(1). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Par $(2.2.4)$, $(2.2.5)$ et $(2.2.6)$, on obtient

$$\begin{aligned} T(r_n, f) &\leq \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(g)+\varepsilon}\right\} + \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(d)+\varepsilon}\right\} + 0(1) \\ T(r_n, f) &\leq 2\exp_{p-1}\left\{r_n^{\max\left(\mu_p(g);\mu_p(d)\right)}\right\} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mu_p(f) \leq \max\left\{\mu_p(g); \mu_p(d)\right\}.$$

Ce dernier résultat représente une contradiction avec notre hypothèse.

Cas 3 : $\mu_p(f) < +\infty$ et $\rho_p(f) = +\infty$. En utilisant la même manière pour prouver les cas 1 et 2, nous pouvons prouver le cas 3.

Enfin, nous allons prouver $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$. Supposons que $\rho_p(f) = +\infty$. Ensuite, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$, telle que

$$\rho_{p+1}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{p+1}^{+} T(r_n, f)}{\log r_n}.$$

La combinaison de $\rho_p(d) < \mu_p(f)$ et les définitions de l'ordre $p-$itéré et de l'ordre p-inférieur itéré, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(r_n, d)}{T(r_n, f)} = 0.$$

Alors, il existe un entier positif N, tel que pour $n > N$

$$T(r_n, f) \leq 2T(r_n, g) + O(1).$$

Ainsi, $\rho_{p+1}(f) \leq \rho_{p+1}(g)$. En utilisant de la même manière pour prouver le cas 1, de l'estimation $T(r, g) \leq T(r, f) + T(r, d)$, il existe un entier positif N, tel que pour $n > N$

$$T(r_n, g) \leq 2T(r_n, f).$$

Par conséquent, $\rho_{p+1}(g) \leq \rho_{p+1}(f)$. Donc $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(g)$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.5

De l'équation (2.1.3) on a :

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right) \tag{2.3.1}$$

Moyennant le théorème de factorisation de Hadamard, on peut écrire f comme $f(z) = \left|\frac{g(z)}{d(z)}\right|$ où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty, 0 < p < +\infty, i(d) < p \text{ ou } \rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f).$$

Par le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_{g(r)}}{z}\right)^j (1 + o(1)), j = 1, ..., k. \tag{2.3.2}$$

D'autre part, d'après les hypothèses du Théorème 2.1.5, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp_p r^{\rho(A_s)+\varepsilon} \;, j = 0, 1, ...k,\; j \neq s, \tag{2.3.3}$$

et par Lemme 2.2.6, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie, de sorte que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$ on obtient pour $f(z) = A_k(z)$

$$A_k(z) \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\rho(A_k)+\varepsilon}\right\}\right\}$$

et comme

$$\max\left\{\rho_p(A_j); 0, 1, ...k,\; j \neq s\right\} \leq \rho\left(A_s\right)$$

on trouve que

$$|A_k\left(z\right)| \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_k)+\varepsilon}\right)\right\} \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}. \tag{2.3.4}$$

En remplaçant (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4) dans (2.3.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\nu_g\left(r\right)}{z}\right|^k \left|1 + o\left(1\right)\right| \\ \leq\; & \frac{1}{\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}} \left\{\sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{\nu_g\left(r\right)}{z}\right|^j \left|1 + o\left(1\right)\right| + 1\right\} \exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right) \\ =\; & \left\{\sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{\nu_g\left(r\right)}{z}\right|^j \left|1 + o\left(1\right)\right| + 1\right\} \exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}. \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1 + o(1)| &\leq k\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^{k-1} |1 + o(1)| \exp\left(2\exp_{p-1}\left(r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right)\right) \\ |\nu_g(r)|\,|1 + o(1)| &\leq r^k k|\,|1 + o(1)| \exp\left(2\exp_{p-1}\left(r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$|\nu_g\left(r\right)|\,|1 + o\left(1\right)| \leq kr^k\,|1 + o\left(1\right)| \exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}, \tag{2.3.5}$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0, 1] \cup E_2 \cup E_5)$ et $|g\left(z\right)| = M\left(r, g\right),\; r \to +\infty$. Par (2.3.5) et Lemme 2.2.2, nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1}\nu_g\left(r\right)}{\log r} \leq \rho_p\left(A_s\right) + \varepsilon. \tag{2.3.6}$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, par (2.3.5) et Lemme 2.2.3, nous obtenons

$$\rho_p(A_s) \geq \rho_{p+1}(g).$$

Comme $\rho_p(d) < \mu_p(f)$, par le Lemme 2.2.8, nous avons $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$ et donc

$$\rho_p(A_s) \geq \rho_{p+1}(f).$$

D'autre part, Par (2.1.3), nous avons

$$|A_s| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(|A_0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \right). \tag{2.3.7}$$

En utilisant Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ avec $m(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, de sorte que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, on a pour $(n = j$ et $m = 1)$

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f(z)}\right| \leq B \left(\frac{T(2r; f)}{f(z)} \log^2 r \log T(2r, f) \right)^{k-1}$$

$$\leq B\left[T(2r, f)\right]^{k+1},\ j = 1, 2, \cdots, k,\ j \neq s. \tag{2.3.8}$$

Par Lemme 2.2.5, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ et pour tout r suffisamment grand

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \tag{2.3.9}$$

où $g(z)$ est une fonction entière satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty$, $0 < p < +\infty$.

Par les hypothèses du théorème 2.1.5, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (ou $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) tel que pour tout $z \in H$ quand $z \to \infty$, on a (2.3.3) et

$$|A_s(z)| \geq \exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_s) - \varepsilon}\right). \tag{2.3.10}$$

Posons $H_1 = \{|z| : z \in H\} \diagdown (E_1 \cup E_4)$, alors $m_l(H_1) = +\infty$. Il résulte de (2.3.3), (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9) et (2.3.10) pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |A_s(z)| &\leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|\right) \\ &\leq r^{2s} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|\right) \end{aligned}$$

et

$$\exp_p\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right) \leq kBr^{2s}\left(T\left(2r,f\right)\right)^{k+1} \exp_p\left(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right),$$

en utilisant la condition $0 \leq \beta < \alpha$,

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\exp_{p-1}(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon})\right)}{\exp\left(\exp_{p-1}\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\right)} &\leq r^{2s}(k+1)B(T(2r,f)^{k+1} \\ \exp\left(((1-o(1))\exp_{p-1}(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon})\right) &\leq r^{2s}(k+1)B(T(2r,f)^{k+1} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\exp\left((1-o\left(1\right))\exp_{p-1}\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\right) \leq kBr^{2s}\left(T\left(2r,f\right)\right)^{k+1}. \tag{2.3.11}$$

Il résulte de (2.3.11)

$$\rho_p\left(A_s\right) \leq \rho_{p+1}\left(f\right).$$

Ceci et le fait que$\rho_p\left(A_s\right) \geq \rho_{p+1}\left(f\right)$ donne $\rho_{p+1}\left(f\right) = \rho_p\left(A_s\right)$ et $i\left(f\right) = p+1$. Le théorème 2.1.5 est ainsi prouvé.

2.4 Preuve du corollaire 2.1.1

On posse $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(f) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(f) < \rho_p(A_s)$. Par Theorem 2.1.5, on a $i\left(f\right) = p+1$ et $\rho_{p+1}\left(f\right) = \rho_p\left(A_s\right)$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, on obtient $\rho_{p+1}\left(h\right) = \rho_{p+1}\left(f\right) = \rho_p\left(A_s\right)$. En remplaçant $f = h + \varphi$ dans (2.1.3), on obtient

$$A_k(z)\left(h+\varphi\right)^{(k)} + A_{k-1}\left(z\right)\left(h+\varphi\right)^{(k-1)} + ... + A_1\left(z\right)\left(h+\varphi\right)' + A_0\left(z\right)\left(h+\varphi\right) = 0$$

et donc

$$A_k\left(z\right)h^{(k)} + A_{k-1}\left(z\right)h^{(k-1)} + \cdots + A_1\left(z\right)h' + A_0\left(z\right)h$$

$$= -\left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right).$$

Posons $K(z) = A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi$. Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$, alors, par Théorème 2.1.5, on en déduit que φ n'est pas une solution d'équation $(2.1.3)$, impliquant que $K(z) \not\equiv 0$, et dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \rho_{p+1}(k) &= \rho_{p+1}\left\{A_k^{(k)}\varphi + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + ... + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right\} \\ &\leq \max\left\{\rho_{p+1}(\varphi); \rho_{p+1}(A_j)\right\} \leq \rho_p(A_s) = \rho_{p+1}(f) \end{aligned}$$

$$\max\left\{\rho_{p+1}(K); \rho_{p+1}(A_j); j = 0, 1, 2, ..., k\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_S)$$

sachant que

$$\rho_{p+1}(A_j) = 0 \quad \text{car } \rho_p(A_j) < +\infty.$$

et par Lemme 3.7, on obtient

$$i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) = i_{\lambda}(f-\varphi) = p+1$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s).$$

2.5 Preuve du Théorème 2.1.6

D'après $(2.1.4)$, on obtient

$$|A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(|A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\right) \tag{2.5.1}$$

2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ avec $m(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, de sorte que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, on a pour $(n = j \text{ et } m = 1)$

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(2r;f)}{f(z)}\log^2 r \log T(2r,f)\right)^{k-1} \tag{2.5.2}$$

Par Lemme 2.2.5, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_4$ et $|g(z)| = M(r,g)$ et pour tout r suffisamment grand

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \tag{2.5.3}$$

où $g(z)$ est une fonction entière satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty$, $0 < p < +\infty$. D'après les hypothèses du Théorème 2.1.6, il existe un ensemble H avec

$$\overline{\log dens}\{|z|\,; z \in H\} > 0 \,(\text{ou } m(\{|z| : z \in \ H\}) = +\infty)$$

de sorte que pour tout $z \in H$, les inégalités

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left(\beta\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right), j \neq 0, 1, .., k \tag{2.5.4}$$

$$|A_s(z)| \geq \exp_p\left(\alpha\,|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right) \tag{2.5.5}$$

soient vérifiées.

Posons $H_1 := \{|z| : z \in H\} \backslash (E_1 \cup E_4)$, alors $m_l(H_1) = +\infty$. En remplaçant (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4) et (2.5.5) dans (2.5.1), pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$, $r \to +\infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\exp_p\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right) \leq (k+1)\,Br^{2s}\,(T\,(2r, f))^{k+1}\exp_p\left(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right),$$

en utilisant $0 \leq \beta < \alpha$, on obtient

$$\exp\left((1 - o\,(1))\exp_{p-1}\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\right) \leq (k+1)\,Br^{2s}\,(T\,(2r, f))^{k+1}. \tag{2.5.6}$$

Il résulte de (2.5.6) et du Lemme 2.2.4

$$\rho_p(A_s) \leq \rho_{p+1}(f).$$

D'après (2.1.4), on obtient

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{2.5.7}$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \left|\frac{g(z)}{d(z)}\right|$ où $g(z)$ et $d(z)$ fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty, 0 < p < +\infty, i(d) < p \text{ ou } \rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f).$$

Par le lemme 2.2.2 , il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ pour lequel $|g(z)| = M(r, g)$, on a l'estimation 2.3.2 est vérifiée. Par les hypothèses du Théorème 2.1.6 et du Lemme 2.2.6 pour tout ε donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$, on a

$$A_k(z) \geq \exp\left\{-\exp_{p-1} r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right\} \tag{2.5.8}$$

D'autre part, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|F(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right\} \quad ; \quad |A_j(z)| \leq \exp_p r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}, j \neq 0, 1, .., k,\ j \neq s \tag{2.5.9}$$

car

$$\begin{aligned} \rho_p(A_j) &\leq \rho_p(A_s) \quad , j \neq 0, 1, .., k,\ j \neq s \\ &\quad et \\ \rho_p(F) &\leq \rho_p(A_s). \end{aligned}$$

Donc, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu_p(g) - \rho_p(d))$ et r suffisamment grand, on obtient

$$\varepsilon + \rho_p(d) < \mu_p(g) - \varepsilon \Rightarrow \frac{\exp_p r^{\rho(d)+\varepsilon}}{\exp_p r^{\mu(g)-\varepsilon}} \leq 1$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{F(z)g(z)}{d(z)}\right| = \frac{|F(z)g(z)|}{M(r.g)} \\ &\leq \frac{\exp_p r^{\rho(d)+\varepsilon} \exp_p r^{\rho(A_s)+\varepsilon}}{\exp_p r^{\mu(g)-\varepsilon}} \\ &\leq \exp_p r^{\rho(A_s)+\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

En remplaçant (2.3.2),(2.5.9), (2.5.9) et (2.5.10) dans (2.5.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)| \\
\leq\ & \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{f^j(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right) \\
\leq\ & \frac{1}{\exp\left\{-\exp_{p-1} r^{\rho(A_s(z))+\varepsilon}\right\}}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j + |1+o(1)| + 2\exp_p\left(r^{\rho(A_s(z))+\varepsilon}\right)\right) \\
\leq\ & \left(\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j + |1+o(1)| + 2\right)\exp\left(2\exp_{p-1}\left(r^{\rho(A_s(z))+\varepsilon}\right)\right)
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)| &\leq (k+1)\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^{k-1} |1+o(1)| \exp\left(2\exp_{p-1}\left(r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right)\right) \\
|\nu_g(r)|\,|1+o(1)| &\leq r^k (k+1)\,|1+o(1)| \exp\left(2\exp_{p-1}\left(r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right)\right) \qquad (2.5.11)
\end{aligned}$$

d'après (2.5.11) et lemme (2.2.4)

$$\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} \leq \rho\left(A_s\right)+\varepsilon \qquad (2.5.12)$$

Du fait que $\varepsilon(0<2\varepsilon<\mu_p(g)-\rho_p(d))$ est arbitraire, par (2.5.12) et lemme 2.2.3 on obtient

$$\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} = \rho_{p+1}(g) = \rho \leq \rho\left(A_s\right)+\varepsilon$$

donc :

$$\rho_{p+1}(g) \leq \rho\left(A_s\right)$$

par lemme 2.2.8, ona

$$\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho\left(A_s\right).$$

Ceci et le fait que $\rho_{p+1}(f) \geq \rho(A_s)$ mènent à $\rho_{p+1}(f) = \rho(A_s)$.

Comme $\max\left\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}(A_j)\,(j=0,1,\cdots,k)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$, alors

$$\max\left\{i(F),\ i(A_j)\,(j=0,1,\cdots,k)\right\} < i(f) = p+1\,(0<p<+\infty),$$

par Lemme 2.2.7, on obtient

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p\left(A_s\right).$$

Le Théorème 2.1.6 est ainsi prouvé.

2.6 Preuve du corollaire 2.1.2

On posse $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(f) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(f) < \rho_p(A_s)$. Par Theorem 2.1.6, on a $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, on obtient $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. En remplaçant $f = h + \varphi$ dans (2.1.4), on obtient

$$A_k(z)(h+\varphi)^{(k)} + A_{k-1}(z)(h+\varphi)^{(k-1)} + ... + A_1(z)(h+\varphi)' + A_0(z)(h+\varphi) = F(z)$$

et donc

$$A_k(z)h^{(k)} + A_{k-1}(z)h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)h' + A_0(z)h$$
$$= F(z) - \left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right).$$

Posons $G(z) = F(z) - \left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right)$. Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$, alors, par Théorème 2.1.6, on en déduit que φ n'est pas une solution d'équation (2.1.4), impliquant que $G(z) \not\equiv 0$, et dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\rho_{p+1}(k) &= \rho_{p+1}\left\{F(z) - \left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right)\right\} \\ &\leq \max\left\{\rho_{p+1}(\varphi); \rho_{p+1}(A_j), \rho_{p+1}(F)\right\} \leq \rho_p(A_s) = \rho_{p+1}(f)\end{aligned}$$

$$\max\left\{\rho_{p+1}(G); \rho_{p+1}(A_j); j = 0, 1, 2, ..., k, \rho_{p+1}(F)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_S)$$

sachant que

$$\rho_{p+1}(F) = 0 \quad \text{car } \rho_p(F) < +\infty.$$

et par Lemme 3.7, on obtient

$$i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) = i_\lambda(f-\varphi) = p+1$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s).$$

Chapitre 3

Applications

Dans cette partie, on va citer quelques applications de nos résultats prouvés dans le chapitre précédant.

3.1 Application 1

Soit l'équation différentielle

$$\frac{1}{7}zf^{(3)}(z)+e^{\frac{z}{3}}f^{(2)}(z)+e^{\frac{z}{6}}f'(z)+e^{z^2}f(z)=0 \tag{3.1.1}$$

Dans cette équation, on a

$$\begin{cases} A_0=e^{z^2} \\ A_1=e^{\frac{z}{6}} \\ A_2=e^{\frac{z}{3}} \\ A_3=\frac{1}{7}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho\left(A_0\right)=\rho\left(e^{z^2}\right)=2 \\ \rho\left(A_1\right)=\rho\left(e^{\frac{z}{6}}\right)=1 \\ \rho\left(A_2\right)=\rho\left(e^{\frac{z}{3}}\right)=1 \\ \rho\left(A_3\right)=\rho\left(\frac{1}{7}z\right)=0 \end{cases}$$

et pour tout $z=re^{i\theta}(r\rightarrow+\infty, \frac{\pi}{12}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6})$, pour $0<\varepsilon<1$

$$\begin{aligned} |A_0| &= \left|e^{z^2}\right|=e^{r^2\cos 2\theta}\geq e^{\frac{1}{2}(r^{2-\varepsilon})}, \\ |A_1| &= \left|e^{\frac{z}{6}}\right|=e^{\frac{r}{6}\cos\theta}\leq e^{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon})}, \\ |A_2| &= \left|e^{\frac{z}{3}}\right|=e^{\frac{r}{3}\cos\theta}\leq e^{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon})}, \\ |A_3| &= \left|\frac{1}{7}z\right|=\frac{1}{7}r\leq e^{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Il est clair que les conditions du Théorème 2.1.5 sont vérifiées avec $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$ on a

$$H=\left\{z\in\mathbb{C}, z=re^{i\theta}\backslash r\in[8,+\infty[\right\}.$$

Donc, d'après le Théorème 2.1.5, toute solution méromorphe f de l'équation 3.1.1 avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p\left(f\right)(p=1)$, satisfait $\rho_2\left(f\right)=\rho\left(A_0\right)=2$.

3.2 Application 2 :

Soit l'équation différentielle

$$\exp(z^3)f^{(4)}(z) + z^2 f^{(3)}(z) + \frac{1}{5}zf^{(2)}(z) + \frac{1}{7}zf'(z) + \frac{1}{8}f = e^z \tag{3.2.1}$$

Dans cette équation, on a

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{8} \\ A_1 = \frac{1}{7}z \\ A_2 = \frac{1}{5}z \\ A_3 = z^2 \\ A_4 = \exp(z^3) \\ F(z) = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(A_0) = 0 \\ \rho(A_1) = 0 \\ \rho(A_2) = 0 \\ \rho(A_3) = 0 \\ \rho(A_4) = 3 \\ \rho(F(z)) = 1 \end{cases}$$

et $A_s = A_4 = e^{z^3}$car

$$\max\left\{F(z); \rho_p(A_j); j \neq 4\right\} = 1 < \rho(A_s) = 3 < +\infty,$$

et pour tout $z = re^{i\theta}(r \longrightarrow +\infty,\ \frac{\pi}{18} \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos 3\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2})$, pour $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}
|F(z)| &= |e^z| = e^{r\cos\theta} \leq e^{\frac{1}{3}(r^{3-\varepsilon})}, \\
|A_0| &= \left|\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8} \leq e^{\frac{1}{8}r} \leq e^{\frac{1}{3}(r^{3-\varepsilon})}, \\
|A_1| &= \left|\frac{1}{7}z\right| = \frac{1}{7}r \leq e^{\frac{1}{7}r} \leq e^{\frac{1}{3}(r^{3-\varepsilon})}, \\
|A_2| &= \left|\frac{1}{5}z\right| = \frac{1}{5}r \leq e^{\frac{1}{5}r} \leq e^{\frac{1}{3}(r^{3-\varepsilon})}, \\
|A_3| &= \left|z^2\right| = r^2 \leq e^{r^2} \leq e^{\frac{1}{3}(r^{3-\varepsilon})}, \\
|A_4| &= |A_s| = \left|\exp(z^3)\right| = e^{r^3\cos 3\theta} \geq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r^{3-\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Il est clair que les conditions du Théorème 2.1.6 sont vérifiées avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$, on a

$$H = \left\{z \in \mathbb{C}, z = re^{i\theta} \backslash r \in [2, +\infty[\right\}.$$

Donc d'après le Théorème 2.1.6, toute solution meromorphe f de l'équation 3.2.1 avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)\ (p=1)$, satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_4) = 3$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

dont les coefficients sont des fonctions entières.

Nous avons obtenu des estimations générales de l'ordre p-itératif et de l'exposant de convergence itératif des zéros de ces solutions.

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions méromorphes d'ordre $[p, q]$ fini ?

Bibliographie

[1] S. Bank, *A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations.* Compositio Math. 25 (1972), 61-70.

[2] Belaïdi, B., *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions*. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 5 (2002), 1-8.

[3] Belaïdi, B., *Iterated order of meromorphic soloutions of homogeneous and nonhomogeneous linear differential equations*. Romai J. 11 (1) (2015), 33-46.

[4] Cao, T.B., Chen, Z.X., Zheng, X.M., Tu, J., *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*. Ann. Differential Equations 21 (2) (2005), 111-122.

[5] Chen, Z.X., Yang, C.C., *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*. Kodai Math. J. 22 (2) (1999), 273-285.

[6] Ferraoun, A., Belaïdi, B., *Growth of solutions of complex differential equations with coefficients being Lacunary series of finite iterated order*. Nonlinear Studies 23 (2) (2016), 237-252.

[7] Goldberg, A.A., Ostrovskii, I.V., *The distribution of values of meromorphic functions.* Moscow : Irdat Nauk, 1970. (in Russian), Transl. Math. Monogr. 236, Providence RI : Amer. Math. Soc., 2008.

[8] Gundersen, G.G., *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates,* J. London Math. Soc. (2) 37 (1) (1988), 88-104.

[9] Gundersen, G.G., *Finite order solutions of second order linear differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1) (1988), 415-429.

[10] Hayman, W.K., *Meromorphic functions.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford : Clarendon Press, 1964.

[11] Hamani, K., Bela di, B., *Growth of solutions of complex linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order.* Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 27 (2011), 203-216.

[12] He, J., Zheng, X.M., Hu, H., *Iterated order of meromorphic solutions of certain higher order linear differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order.* Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 33 (2013), 145-157.

[13] Kinnunen, L., *Linear differential equations with solutions of nite iterated order.* Southeast Asian Bull. Math. 22 (4) (1998), 385-405.

[14] Kwon, K.H., *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations.* Bull. Korean Math. Soc. 33 (3) (1996), 487-496.

[15] Laine, I., *Nevanlinna theory and complex differential equations.* de Gruyter Studies in Mathematics 15, Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1993.

[16] Long, J.R., Zhu, J., *On hyper-order of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients.* Adv. Difference Equ. 2016, 2016 :107, 13 pages.

[17] M. Saidani, B.Belaïdi, *On the fast growth of solutions to higher order linear differential equations with entire coefficients*, Novi Sad J. Math. Vol. 46, No. 2 (2016), 117-133.

[18] X. Shen and H. Y. Xu, *The zeros and growth of solutions of higher order differential equations*, Fourth International Conference Computational and Information Sciences (2012), 605-608.

[19] Tu, J., Long, T., *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009 (66) (2009), 1-13.

[20] Tu, J., Chen, Z.X., Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of nite iterated order. Southeast Asian Bull. Math. 33 (1) (2009), 153-164.

[21] Wang, L., Liu, H., *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Elec. Jour. Diff. Equ. 2014 (125) (2014), 1-11.

[22] H. Wittich, (1968), *Neuere Untersuchungen ber eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[23] Wu, S.Z., Zheng, X.M., *On meromorphic solutions of some linear differential equations with entire coefficients being Fabry gap series.* Adv. Difference Equ. 2015, 2015 :32, 13 pages.

[24] Yang, C.C., Yi, H.X., *Uniqueness theory of meromorphic functions. Mathematics and its Applications.* 557, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers Group, 2003.