Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques appliquées délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Walid **Manseri**

Analyse et contrôle de modèles positifs fractionnaires 1D : une autre approche

soutenu le 15 juin 2021 *devant le jury composé de :*

Président :	Zineb Kaisserli	MCA	UMAB
Examinateur :	Laid Djillali	MCB	UMAB
Encadreur :	Mohammed Amine Ghezzar	MCA	UMAB
Co-encadreur :	Djillali BOUAGADA	Prof	UMAB

Année Universitaire : 2020 / 2021

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce travail
A mes chers grand parents Allah yerhamhoum.
A mes parents.
A mes sœurs.
A mes encadreurs.
Spécialement à mon meilleur ami Majid, merci pour tout.

Remerciement

Je voudrais en premier remercier mes chers encadreurs Dr **Mohammed Amine Ghezzar** et Pr **Djillali Bouagada** pour la disponibilité, la gentillesse, la sympathie ainsi que l'aide que vous m'avez porté.

Mes reconnaissances viennent aussi aux membres de jury, Dr **Zineb Kaisserli** et Dr **Laid Djillali** qui ont accepté d'évaluer ce mémoire et d'avoir contribué aux discussions lors de la soutenance.

Je remercie spécialement Mme ablaoui et Mlle Hamou Mammar de m'avoir soutenu, conseillé, encouragé durant mon parcours d'étude.

J'adresse également mes reconnaissances à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques et informatique.

Et enfin je passe une très grand merci a Majid et Amel.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}$	:	Corps des nombres relatifs.
$\mathbb{N}^*$	:	Corps des nombres relatifs non nuls.
$\mathbb{Z}$	:	Corps des nombres relatifs.
$\mathbb{Z}_+$	:	Corps des relatifs non négatifs.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Espaces des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}_+^n$	:	Espaces des vecteurs à n entrées réelles non négatifs.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espaces des matrices réelles de dimensions n ×m.
$\mathbb{M}_n$	:	Ensemble des matrices de Metzler de dimension n.
I_n	:	Matrice identité de dimension n.
Γ	:	Fonction gamma d'Euler.
E_α	:	Fonction de Mittag-leffler.
$n!$	:	Factorielle de n.
$\mathrm{R}e$	:	partie réel.
$\binom{n}{k}$	:	Coefficients binomiaux.
$\mathscr{L}$	:	Transformée de Laplace.
$\mathscr{L}^{-1}$	:	Transformée de Laplace inverse.

Introduction

La science à eu un petit impact tout au long de la première révolution industrielle. Cependant, à partir des années 1950, la nouvelle révolution industrielle est devenu lier au progrès scientifique.

C'est là que la théorie des systèmes commence. La théorie des systèmes peut être résumée comme un ensemble de méthodes analytiques et mathématiques appliquées à un système afin de mieux comprendre son fonctionnement et sa prise de décision.

Qu'est-ce donc qu'un système? Un système peut être défini à la fois d'un point de vue réel et abstrait. Les systèmes physiques sont au centre du point de vue réel. C'est une collection d'objets ou de choses qui sont liés et interagissent les uns avec les autres afin d'atteindre un but. Peu importe qu'il s'agisse de processus industriels, de climatologie ou d'économie, du corps humain, la population...etc.

D'un point de vue théorique, on peut discuter du système. Le système est réduit à un modèle virtuel, qui se manifeste par des symboles ou des équations qui expliquent et décrivent le mieux le comportement et l'évolution du soi-disant système réel. L'étude des systèmes a été abordée d'un point de vue interne depuis la fin des années 1960, c'est là où les systèmes n'était plus considérés comme des boîtes noires avec des mesures et des actions. Le fonctionnement interne du système est caractérisé par un vecteur de facteurs intrinsèquement pertinents. Les variables, comme les variables d'état, sont ensuite utilisées pour fonder une étude. Une équation d'état est ensuite utilisée pour modéliser le système.

Il y a beaucoup d'efforts dans l'analyse des systèmes où la classe des systèmes dynamiques a été bien examinée ce qui résultat en la création d'une branche de recherche active concernant ce type des systèmes. Un système dynamique est un terme utilisé pour décrire les événements qui se produisent tout au long du temps quelle que soit sa nature (physique, chimique, électromécanique, biologique, économique...etc) change au fil du temps.

Ces systèmes peuvent se présenter en tant que différentes formes mathématiques par des equations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, et applications (inversibles ou non).

Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique, car ils peuvent être trouvés dans les premières études de mécanique, donnant lieu à plusieurs équations. Le lien entre le système et son environnement est un aspect clé de la théorie des systèmes. Le système est soumis à des actions qui sont équivalentes à des ordres, des contrôles et des retours données par un système qu'est soumis à des actions qui sont assimilées aux instructions. Quand il s'agit d'un système de contrôle nous parlons des entrées, des sorties ainsi que des détecteurs tandis que les capteurs peuvent être passives ou actives. Lorsqu'un système est commandé de l'extérieur, les commandes sont actives.C'est le scénario le plus courant. Contrairement lorsqu'ils ne sont pas touchés par quoi que ce soit (pas de force qui perturbe l'action), ils sont passifs.

Les contributions externes ou toute activité souhaitée devront évoluer en raison de circonstances ou de limites particulières. L'objectif est alors de faire passer le système d'un état à un autre, un certain état final qui peut ou non correspondre aux exigences spécifiées.

Les systèmes différentiels, les systèmes dynamiques continus et les systèmes dynamiques discrets ne sont que quelques exemples qui peuvent être modéliser dans la nature et qui peuvent avoir des différents comportements observés dans diverses applications industrielles. Dans la littérature nous trouvons plusieurs travaux qui ont traiter les notions de positivité et de stabilté de ces systèmes [4, 9].

La dynamique de ces systèmes implique des interactions entre les processus continus et les activités discrètes et opérations discrètes. Nos recherches portent sur une variété de systèmes dynamiques, y compris les systèmes unidimensionnels, unidimensionnels dont la dérivée est d'ordre entier ou fractionnaire. Dans Parmi les applications possible dans la vie réelle, nous trouvons par exemple qu'un processus chimique peut être évoluer en un système unidimensionnel ou encore que le mémoire d'un ordinateur peut évoluer sous l'action d'un programme informatique. On peut citer encore le mouvement des planètes dans le système solaire (régi par la loi universel de la gravité de Newton). Alors nous concluons que formellement les systèmes sont distingués.

Enfin concernant les systèmes à dérivés d'ordre fractionnaire au cours des dernières années on s'est beaucoup intéressé aux utilisations de ce type des systèmes, parfois appelés dérivés dans divers domaines. L'analyse fractionnelle dans ce domaine représente une discipline qui étudie le potentiel d'un opérateur différentiel qui peut être utilisé pour résoudre un problème ou être reclassé comme un ordre non global, l'ordre d'un système à dérivée d'ordre fractionnaire peut être utilisé pour décrire un grand nombre de systèmes.
Le travail présenté dans ce mémoire est basé sur l'étude de la positivité et la stabilité sur les différentes classes des systèmes unidimensionnels d'ordre fractionnaire. L'étude s'articule autour de quatre chapitres.
Chpitre 1 : consiste à contenir toute les notions préliminaire dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail. Nous citons quelques notions des matrices ainsi que des notions dés dérivées d'ordre non entier en passant par la suite à la trasformé de Laplace et son inverse, et nous finirons par se rappeler de l'approximation au sens des différences finies.
Chapitre 2 : est est un chapitre où nous abordons un type des systèmes appelé système 1D linéaire à temps invariant. Nous allons consacrer cette partie du travail pour étudier la positivité et la stabilité, plus particulièrement nous nous intéressant à la solvabilité de ce type de système.
La deuxiéme partie de ce chapitre contient un nouveau types des systèmes 1D linéaire

dont la dérivées est définie au sens de Caputo. Dans cette partie du chapitre nous allons étudier la solvabilité pour passer à la positivité de ce système.
Chapitre 3 : est consacré à la définition une nouvelle dérivée dite la dérivée d'ordre fractionnaire conforme. En passant par la suite à la citation de la solutions des systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire conforme.
Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions fondamentales

Nous présentons dans cette partie du chapitre quelque définitions élèmentaires concernant quelques matrices paticulieres telles que les matrices non-négatives et les matrices de Metzler. Il existe un grand nombre de références sur cette classe de matrices. Nous citons quelques références de base [22, 25]. Dans ce papier, nous travaillions avec ce type des matrices afin de caractériser la positivité des systèmes linéaires. Par la suite, nous définissons la dérivée fractionnaire au sens de Riman-Liouville et Caputo ainsi que leurs propriétés. Et pour finir, nous mentionnons quelque définissions et propriétés de la transformé de Laplace ainsi que la méthodes des différences finies.

1 Matrices particulières

Dans cette partie nous commençons par donner quelque notions essentielles utilisées dans la suite de notre travail.
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ une matrice avec des entrées réelles.

Définition 1.1. *[22] Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est dite non-négative si toutes ses entrées sont non-négatives c-à-d :* $\forall i, j$ *tel que :* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ *et* $a_{ij} \geq 0$.

Définition 1.2. *[22] Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est dite positive si A est non-négative avec au moin une entrée strictement positive c-à-d :* $\exists i, j$ *tel que :* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ *et* $a_{ij} > 0$.

Définition 1.3. *[22] Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est dite strictement positive si toutes les entrées sont strictement positives c-à-d :* $\forall i, j$ *tel que :* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ *et* $a_{ij} > 0$.

Définition 1.4. *[22] Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est dite une matrice de Metzler si toutes les entrées hors diagonal sont non-négatives c-à-d :* $\forall i \neq j$ *tel que* $1 \leq i, j \leq n$ $a_{ij} \geq 0$.

Exemple 1.1. *Soit A définie par :*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

A est une matrice de Metzler.

2 Théorie du calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaires est une généralisation du calcul classique dans les mathématiques appliquées et l'analyse mathématique. Ce type de calcul introduit les opérations sur les intégrales et la différentiation d'ordre fractionnaires, et cela pour le développement d'un calcul sur les opérateurs de différentiation D et d'intégration J, et cela généralisant le calcul classique. Le calcul fractionnaire a été initié par Leibniz et l'Hôpital après une correspondance qui a duré plusieurs mois en 1695. Durant cette période, Leibniz a écrit une lettre à l'Hôpital en soulevant les questionnements suivants : [9]

"Est-ce que la signification des dérivées d'ordre intégral peuvent-être généralisées en dérivées d'ordre fractionnaires ?" L'Hôpital a été quelque peu curieux à propos de l'interrogation soulevée, et a émis une réponse à Leibniz : *"Et si l'ordre est 1/2 ? "*. Leibniz, dans une lettre qui date du 30 septembre 1695, a répondu : *"Cela va mener à un paradoxe, où un jour, des conséquences utiles vont être levés".*

Cette date est considérée comme étant le jour de la naissance du calcul fractionnaires. Le problème levé par Leibniz pour une dérivée fractionnaire (semi-dérivative, pour être plus précise) était un sujet en cours durant les décennies qui suivront. Après la première mention de la part de L'Hôpital et Leibniz, l'étude des calculs fractionnels était spécialement réservée aux meilleurs cerveaux mathématiciens de l'Europe. Euler [15] a écrit en 1730 :

"Quand n est un entier positif et p est une fonction de x, p = p(x), le ratio de $\frac{d^n p}{dx^n}$ *peut toujours être exprimé algébriquement. Mais quel type de ratio peut être calculé si n est une fraction ?"*
Parmi les grands noms des mathématiciens, nombreux se sont adonnés aux recherches des dérivés fractionnaires. Nous citons Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822 [14]. Indépendamment, les fondations du sujet ont été posées par Liouville dans un article de 1832. L'autodidacte Oliver Heaviside a introduit l'utilisation pratique d'opérateurs différentiels fractionnaires dans l'analyse des lignes de transmission électrique vers 1890. La théorie et les applications du calcul fractionnaire se sont considérablement développées au cours du 19^e et 20^e siècles, et de nombreux contributeurs ont donné des définitions pour les dérivés fractionnaires et les intégrales.

les principales références utilisée dans cette section sont [4, 14].

Définition 1.5. *On appelle la fonction Gamma notée* Γ*, la fonction définie par l'inté-*

grale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{R}e(\alpha) > 0 \tag{1.1}$$

Définition 1.6. *La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentiel* $e^{A_i t}$ *qui joue un rôle très important dans le résolution des systèmes à dérivées d'ordre fractionnaire. Ce type de fonctions est défini par,*

$$E_\alpha(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^i}{\Gamma(\alpha i + 1)} \tag{1.2}$$

Avec Z est une variable complexe. $E_\alpha(Z)$ *est dite la fonction de Mittag-Lefller à un seul paramètre.*

Propriété 1.1. *Nous avons,*

$$E_1(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^i}{\Gamma(\,i+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^i}{i!}$$

Tel que,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^i}{i!} = e^Z$$

2.1 Dérivation fractionnaire au sens de Riman-Liouvile

Définition 1.7. *[14] Soit* $\alpha > 0$ *tel que :* $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$ *et f est une fonction continue définie* $[a, b] \to \mathbb{R}$.
On définit la dérivée fractionnaire au sens de Riman-Liouvile d'ordre $\alpha > 0$ *de f par :*

$$^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m (J_a^{m-\alpha} f(x)) \tag{1.3}$$

où l'intégrale $J_a^{m-\alpha} f(x)$ *est définie par la relation suivante :*

$$J_a^{m-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-a)^{m-\alpha-1} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

Propriété 1.2. *[14] Soient f et g deux fonction définie :* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* $C([a, b])$ *et* $m \in \mathbb{R}_+^*$, $m-1 \leq \alpha \leq m$, *alors on a :*

1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\, {}^{Rl}D^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1^{Rl} D^\alpha f(x) + \lambda_2^{Rl} D^\alpha g(x)$
2. ${}^{Rl}D^\alpha(Cte) \neq 0$ *car* $J^{m-\alpha}(Cte) \neq 0$
3. ${}^{Rl}D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x)$, *La réciproque n'est pas vérifiée.*
4. ${}^{Rl}D^m f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i (t-a)^i$

Remarque 1.1. *Les notions de semi groupe et de commutativité ne sont pas vérifiées en appliquant la dérivée fractionnaire au sens de Riman-Liouville.*

2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.8. *[14, 23] Soit $f \in C^n([a,b])$, $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $m-1 \leq \alpha \leq m$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f comme suit :*

$$ {}^c\mathrm{D}_a^\alpha[f(x)] = \mathrm{J}_a^{m-\alpha}[f^{(m)}(t)] \tag{1.5}$$

tel que :

$$ {}^c\mathrm{D}_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

Propriété 1.3. *[23] [14] Soient f et g deux fonction définie : $[a,b] \to \mathbb{R}$*

1. ***Linéarité** : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*

$$ {}^c\mathrm{D}^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1^c \mathrm{D}^\alpha f(x) + \lambda_2^c \mathrm{D}^\alpha g(x)$$

2. ***Semi-groupe** : soient $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \alpha+\beta \leq 1$ alors :*

$$ {}^c\mathrm{D}_a^\alpha\, {}^c\mathrm{D}_a^\beta f(x) = {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha+\beta}$$

3. ***Commutativité** : ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha\, {}^c\mathrm{D}_a^\beta f(x) = {}^c\mathrm{D}_a^\beta\, {}^c\mathrm{D}_a^\alpha f(x)$*

2.3 Dérivée fractionnaires des fonctions usuelles au sens de Caputo

1. ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha(Cte) = 0$, Cte = constante.
2. ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\alpha f(x) = f(x)$
3. ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha(x-a)^\beta = \mathrm{J}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^m(x-a)^\beta$

Démonstration. Soit $m > 0$ tel que $m-1 \leq \alpha \leq m$ et $x \in [a,b]$ alors,

(a) On a ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha(Cte) = 0$
Puisque,

$$ {}^c\mathrm{D}_a^\alpha(Cte) = \mathrm{J}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^m(Cte)$$

Et,

$$\mathrm{D}^m(Cte) = 0$$

D'où la résultat.

(b) On a ${}^c\mathrm{D}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\alpha f(x) = f(x)$ est vérifiée.
Car :

$$ {}^c\mathrm{D}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\alpha f(x) = \mathrm{J}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^m \mathrm{J}_a^\alpha f(x)$$

Où :

$$\mathrm{J}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^m \mathrm{J}_a^\alpha f(x) = \mathrm{J}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^{m-\alpha+\alpha}\mathrm{J}_a^\alpha f(x)$$

Donc l'égalité est bien vérifiée.

(c) On commence d'abord par la dérivée d'ordre m :

$$D^m (x-a)^\beta = \beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-m+1)(x-a)^\beta$$

Puis, on applique l'intégration d'ordre $(m-\alpha)$ afin d'obtenir :

$$J_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m} = \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-m+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta-m+m-\alpha}$$

D'où,

$$\beta(\beta-1)\dots(\beta-m+1)\frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-m+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Par conséquent,

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

□

Remarque 1.2. *Nous remarquons que la dérivation fractionnaire conserve de nombreuses propriétés de la dérivation classique, par conséquent nous déduisons que la dérivation fractionnaire est une généralisation de la dérivation classique.*

3 La transformé de Laplace

Dans cette section du chapitre nous présentons les outils nécessaires pour obtenir la solution des problématiques posées dans le dernier chapitre pour l'étude de la positivité et la stabilité de ces systèmes afin de pouvoir caractériser les différentes cas en prenons en considération les hypothèses citées.

Définition 1.9. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle transformé de Laplace de la fonction f, La fonction* $F(p)$ *définie par :*

$$F(p) = \mathscr{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

tel que :

— $F(p)$ *faut être continue par morceaux sur* $\mathbb{R}^+$

— $\exists\beta \in]0,1[$ *tel que* $\lim_{t\to 0} t^\beta |f(t)| = 0$

— *la fonction d'ordre exponentiel :* $|f(t)e^{-st}| \le Me^{-(Re(s)-\alpha)t}$
or $\int_0^{+\infty} e^{-(Re(s)-\alpha)t}dt$ *converge pour* $Re(s) > \alpha$ *pour* $s \in \mathbb{C}$.

3.1 Propriétés de la transforme de Laplace

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définie dans $\mathbb{R}_+$, nous citons quelques propriétés utiles pour résoudre le problématique poser.

— **Linéarité :** Soient α, β deux réels et soient f et g $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant respectivement des transformées de Laplace F(p) et G(p).

$$\mathscr{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathscr{L}[f](s) + \beta \mathscr{L}[g](s) \tag{1.8}$$

— **Dérivation :** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et admettant une transformée de Laplace $\mathscr{L}[f](s)$ alors,

$$\mathscr{L}[f'](s) = s\mathscr{L}[f](s) - f(0) = s\mathrm{F}(s) - f(0) \tag{1.9}$$

— **Intégration :** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ alors,

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}(f) \tag{1.10}$$

— **Convolution :**

$$\mathscr{L}[(f \star g)](s) = \mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s) = \mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s) \tag{1.11}$$

Avec,

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)\mathrm{d}y$$

3.2 Transformée de Laplace inverse

La transformée inverse de Laplace de la fonction $\mathrm{F}(p)$ notée $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{F}](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \mathrm{F}(s)e^{st}ds \tag{1.12}$$

Remarque 1.3. *Certain fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace en prenant par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'existence ainsi que $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentielle.*

4 Rappels sur les différences finies

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la dérivée de la fonction f est définie par :

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.13}$$

Et,

$$f_i^{(n-1)} = \frac{1}{h^{n-1}}\left(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{\mathrm{P}}\mathrm{C}_{n-1}^{p} f_{i+n-1-p}\right), \quad avec f_i = f(t_i). \tag{1.14}$$

Avec,

$$C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!p!}$$

si la limite existe. Nous définissons cette notion pour l'utiliser par la suite dans le chapitre 4.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit quelque outils et définitions de base qui concernent la théorie des matrices et les différentes notions de la théorie de la dérivation fractionnaire ainsi que la transformé de Laplace afin de les utiliser par la suite dans ce travail, en particulier dans l'étude de la solvabilité ainsi que la positivité et la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Système 1D linéaire à temps invariant

Nous nous intéressons dans cette partie à la positivité et la stabilité de certains classes des systèmes unidimensionnels à temps invariant où nous allons travailler sur les systèmes à temps continue ainsi que discret. Lors de la modélisation de quelque phénomènes obtenue dans la cinétique chimique, le traitement d'image, l'automatisme,...etc.

Nous commençons par poser la problématique en introduisant le système afin de trouver sa solution et faire une analyse de positivité et de stabilité.

1 Système 1D linéaire à temps invariant à dérivée classique

1.1 Système 1D linéaire à temps continue

De nombreux systèmes dans la nature que l'on étudie dans les sciences comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, ...etc, sont (en première des approximations) des systèmes qui sont faite pour étudier l'évolution des phénomènes qui sont déjà modéliser qui varie en fonction du temps et son état initiale. Citons par exemple l'évolution des concentrations des réactifs dans une réaction chimique, l'évolution de populations (de bactéries, de lapins, ...etc. La description de ce types des systèmes se fait au moyen de quantités numériques, souvent appelées variables, dont il s'agit d'étudier l'évolution au cours du temps.

Dans ce qui suit nous allons donner quelque définitions en basons sur les références suivantes [2, 5, 19]

Définition 2.1. *[22] Soit le système linaire à temps continue définit par les équations suivante : :*

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u \tag{2.1}$$

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{D}u \tag{2.2}$$

tel que : $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état a l'instant t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le contrôle et $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la matrice d'état,* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$,

$\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.
l'équation (2.1) appelée l'équation d'état et (2.2) l'équation de sortie.

Définition 2.2. *La solution du système (2.1) est définie par la relation suivante :*

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.3}$$

Démonstration. Nous considérons le système (2.1) linéaire à temps continue définie par l'équation (2.1) :

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$$

Pour résoudre ce système,il suffit d'appliquer la transformée de Laplace pour le système (2.1).

$$\mathscr{L}[\dot{x}] = \mathrm{A}\mathscr{L}[x] + \mathrm{B}\mathscr{L}[u]$$

Sachant que $x = x(t)$ et $u = u(t)$. Nous savons que,

$$\mathscr{L}[\dot{x}] = s\mathrm{X}(s) - x(0)$$

Et,

$$\mathrm{X}(s) = \mathscr{L}[x] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Après avoir remplacer, nous obtenons que :

$$s\mathrm{X}(s) - x(0) = \mathrm{AX}(s) + \mathrm{BU}(s), \quad avec \quad \mathscr{L}[u] = \mathrm{U}(s)$$

Alors,

$$[\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}]\mathrm{X}(s) = x(0) + \mathrm{BU}(s)$$

Pour $[\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}]$ est inversible.

$$\mathrm{X}(s) = [\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}]^{-1}(x(0) + \mathrm{BU}(s))$$

Et pour,

$$[\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)}$$

Donc,

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)} x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)}\mathrm{BU}(s)$$

En appliquant la transformé inverse,

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{X}(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)}]x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)}\mathrm{BU}(s)]$$

Par conséquent,

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Car,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)}]x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{A}t)^k}{\Upsilon(k+1)} = e^{\mathrm{A}t}$$

Et,

$$\mathrm{U}(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-s\tau}d\tau$$

D'où le résultat. □

1.2 Système 1D linéaire à temps discret

La première occurrence des questionnements qui concernent les systèmes dynamiques relevaient du domaine mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Parmi ces questionnements, le problème le plus pertinent s'est avéré être celui de la probabilité du système solaire. Les recherches de Lagrange sur le sujet ont mené à l'interprétation de l'influence des corps autre que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : ces recherches ont été populaires, jusqu'à être citées dans le théorème de KAM (Kolmogorov - Arnold - Moser).

Les systèmes dynamiques ont trouvé un essor considérable durant le 19^{eme} siècle. Il s'agissait en premier lieu d'itérations des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais avec l'évolution du domaine mathématique, les systèmes dynamiques se sont considérablement élargis. Après 1920, les systèmes dynamiques (surtout les systèmes dynamiques en temps discret ou bien les systèmes données par des suites récurrentes) sont devenus primordiaux vu la variété de ses applications dans les domaines scientifiques, par exemple : la physique (mécanique céleste, météo), la biologie (dynamiques de population), la chimie (cinétique chimique), l'électronique (les circuits électroniques), l'informatique (traitement de l'image), cryptographie (chiffrement des messages, images), l'économie...etc.

Les systèmes dynamiques ont pour rôle de modéliser les phénomènes évoluant dans le temps, ces derniers pouvant provenir de la physique mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie...etc.
Le système dynamique discret joue un rôle très important dans la pratique, il peut aussi être utilisé comme modèle approximatif pour l'étude de système continu.

Nous allons travailler dans cette section avec les références [17, 18, 22]

Définition 2.3. *Soit le système 1D linéaire à temps discret définit par :*

$$x_{i+1} = \mathrm{A}x_i + \mathrm{B}u_i \tag{2.4}$$
$$y_i = \mathrm{C}x_i + \mathrm{D}u_i \tag{2.5}$$

tel que $x_i \in \mathbb{R}^n$ *est le vecteur d'état à l'instant i,* $u_i \in \mathbb{R}^m$ *représente le contrôle et* $y_i \in \mathbb{R}^p$ *la sortie du système,* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la matrice d'état,* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

L'équation (3.3)[respectivement (3.4)] représente la trajectoire du système [respectivement la sortie du système.] La solution de ce système est définie par :

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)} B u_i$$

1.3 Positivité des systèmes 1D linéaires

La théorie des systèmes positifs est profonde et élégante, mais agréablement cohérente avec l'intuition. C'est pour les systèmes positifs donc cette théorie des systèmes dynamiques assume l'une des formes les plus potentielles.
(David Luenberger, dans l'introduction aux systèmes dynamiques , Wiley, 1979)

Comme cité dans le célèbre livre du Professeur Luenberger concernant les systèmes dynamiques, un système positif est un système où les variables d'états sont toujours à valeurs positives (ou au moins non-négatifs). C'est un peu surprenant de réaliser la facilité de la disponibilité de l'information sur la positivité des variables d'états afin de trouver des conséquences de telles informations sur les comportements du systèmes. Encore une fois, cette surprise est très bien décrite dans le livre cité. En effet, juste le fait de savoir que le système est positif nous autorise à faire de fortes déclarations à propos de son comportement, ces déclarations étant vraies peu importe quelle valeur les paramètres peuvent avoir. Donc, si nous décidons d'aller plus encore plus profondément dans ce sentiment de surprise, nous pouvons trouver des preuves dans beaucoup de domaines divers de la science et la technologie, puisque la propriété de positivité définie est presque toujours vérifiée sauf quand il s'agit d'une conséquence immédiate de la nature du phénomène que nous traitons. Un grand nombre d'exemples sont juste devant nos yeux représentés sous différents types possible mesuré par la quantité, le temps, l'argent, les moyens, la taille du tampon, les queues, les paquets de données venant dans un réseau, humain, animal et plantes, concentrations de n'importe quel substance concevable et aussi si vous n'avez pas encore conçu cela les protéines, les molécules, la charge électrique et les niveaux de lumières.

En plus, pour conclure, nous devons mentionner tout les modèles stochastiques (comme les Modèles de Markov cachés), puisque clairement, les probabilités sont des quantités positives. Ceci dit, pour être correct, c'est très important de bien définir les limitations et les limites de cette "famille élargie" de systèmes. Autre que le domaine classique des systèmes électromécanique où n'importe quel valeur est admissible, nous devons montrer que dans beaucoup de situations réelle, nous sommes intéressés dans la considération des déviations des variables d'états depuis un certain équilibre ou point d'opération (point défini) ce qui n'est pas l'origine, donc dans ce cas, la propriété de la positivité des variable d'états originales peuvent être assumée à être conservée étant donné que les déviations sont "assez petites". Mais, cela n'empêche pas que nous allons voir très tôt que dans des situations similaires, nous ne sommes pas du tout à la fin de l'histoire.

La caractéristique principale des systèmes positifs est que pour les conditions initiales non-négatives, leur variables d'états et les sorties assument des valeurs non-

négatives, étant donné que les entrées sont non-négatives. [7, 22]
Dans ce qui suit nous donnons quelques propriétés nécessaires à l'étude de la positivité qui sont référencées dans [7, 16, 17, 19, 22] .

lemme 2.1. *[6] Soit* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice de Metzler si et seulement si* $e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $\forall\, t \geq 0$.

Démonstration. Supposons que A est une matrice de Metzler, nous pouvons trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n) \geq 0$. Sachant que,

$$(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)(-\lambda \mathrm{I}_n) = (-\lambda \mathrm{I}_n)(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)$$

Nous avons,

$$e^{(\mathrm{A}t)} = e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n-\lambda \mathrm{I}_n)t}$$

Alors,

$$e^{(\mathrm{A}t)} = e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t-(\lambda \mathrm{I}_n)t}$$

Ceci dit que,

$$e^{(\mathrm{A}t)} = e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} e^{-(\lambda \mathrm{I}_n)t}$$

Car les matrices $(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}), (-\lambda \mathrm{I})$ commutent.
Sachant que :

$$e^{-(\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

car

$$e^{-(\lambda \mathrm{I}_n)t} = \begin{bmatrix} e^{(-\lambda_1 t)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{(-\lambda_2 t)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{(-\lambda_n t)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(*)}$$

En utilisant la définition de l'exponentiel d'une matrice, nous avons

$$e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} = 1 + (\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t + \tfrac{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)^2}{2!}t + \ldots + \tfrac{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)^{n-1}}{(n-1)!}t$$

Sachant que,

$$(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)^i t > 0, i = 0, \ldots, n-1$$

nous obtenons :

$$e^{\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \qquad \textbf{(**)}$$

De **(*)** et **(**)**, nous déduisant que $e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Supposons que $\forall\, t \geq 0$, $e^{(\mathrm{A}t)} \geq 0$ sachant que,

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(e^{(\mathrm{A}t)})_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{(\mathrm{A}t)} - \mathrm{I}_n}{t}$$

Prenons e_j le j^{eme} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$

$$a_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{< e^{(\mathrm{A}t)} e_j - e_j, e_i >}{t}$$

Ceci dit que,

$$a_{ij} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{< e^{(At)} e_j, e_i >}{t} - \frac{< e_j, e_i >}{t} \right)$$

Par conséquent,

$$a_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{< e^{(At)} e_j, e_i >}{t} \geq 0$$

Puisque $< e_j, e_i >= 0$, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ alors A est une matrice de Metzler. D'où la résultat. □

Définition 2.4. *[22] Le système (2.1),(2.2) est dit positif si pour toute condition initiale x_0 positive, et contrôle u positif, l'état x(t) restera positif et la sortie y(t) restera positive c-à-d :* $\forall x_0 > 0 , \forall u > 0 , x \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y \in \mathbb{R}_+^p$.

Théorème 2.1. *[22] Le système (2.1),(3.2) est dit positif si est seulement si A est une matrice de Metzler, et les matrices* $B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ *sont positives c-à-d :* $B \geq 0$, $C \geq 0$ *et* $D \geq 0$.

.

Démonstration. D'abord nous savons que,

$$x(t) = e^{(At)} x(0) + \int_0^t e^{(A(t-\tau))} Bu(\tau) d\tau$$

D'après le lemme précédent, A est une matrice de Metzler si et seulement si $e^{(At)} \geq 0, \forall t \geq 0$. Supposons que A est une matrice de Metzler, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $u \geq 0$ et $x_0 \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.
Nous obtenons $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour tout $t \geq 0$ et de la même manière $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $t \geq 0$.
D'autre part nous avons,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Supposons que $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$ et $x_0 = e_i (i^{eme}$ colonne de $I_n)$ donc,

$$\dot{x}(0) = Ax(0)$$

Ce qui implique que,

$$\dot{x}(0) = Ae_i$$

alors nous concluons que a_{ij} est non négatif pour $i \neq j$ par conséquent A est une matrice de Metzler.
Pour la même raison nous prenons $x_0 = 0$ afin d'avoir que,

$$\dot{x}(0) = Bu(0)$$

Ce qui implique que B est positif car $u(0)$ est positif. Par le même raisonnement supposons que $u(0) = 0$ alors,

$$y(0) = Cx_0$$

qui est positif d'où C est positif car $u(0)$ est positif. Ainsi de suite nous prenons $x_0 = 0$ pour obtenir,

$$y(0) = \mathrm{D}u(0)$$

Et qui est positif ainsi que $u(0)$ est positif alors D est positif. □

Théorème 2.2. *[22] Le système (2.3), (2.4) est dit positif si est seulement si toutes les matrices A,B,C,D sont positives c-à-d :* $\mathrm{A} \geq 0$, $\mathrm{B} \geq 0$, $\mathrm{C} >\geq$ *et* $\mathrm{D} \geq 0$.

Démonstration. D'abord nous savons que la trajectoire d'état est représenté par l'égalité suivante,

$$x_{i+1} = \mathrm{A}^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathrm{A}^{i-(k+1)} \mathrm{B} u_k, i > 0$$

Ainsi que la sortie qui est,

$$y_i = \mathrm{C}\mathrm{A}^i x_0 + \mathrm{C} \sum_{k=0}^{i-1} \mathrm{A}^{k-(k+1)} \mathrm{B} u_k, i > 0$$

Supposons que $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ alors $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$ ainsi que la sortie $y_i \in \mathbb{R}_+^p$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$.
D'autre part nous avons,

$$x_{i+1} = \mathrm{A}x_i + \mathrm{B}u_i$$

Supposons que $u_i = 0$ pour $i \in \mathbb{Z}_+$ alors nous obtenons pour $i = 0$,

$$x_1 = \mathrm{A}x_0$$

Et qui signifie que $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ car $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ puisque $x_1 \in \mathbb{R}_+^n$. Ainsi de suite nous prenons $x_0 = 0$ afin d'obtenir,

$$x_1 = \mathrm{B}u_0$$

et monter que $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$.
Par le même raisonnement nous obtenons $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ pour $u_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $x_0 = 0$. □

1.4 Stabilité des systèmes 1D linéaires positifs

nous nous sommes concentrés sur leur stabilité en raison de son importance.

Les systèmes positifs ont été fréquemment rencontré en pratiques puisque beaucoup de quantités comme la pression de l'instance, la concentration du sucre dans le sang, etc.., prennent exclusivement les variables non-négatives [2, 5, 16, 25]. Pour ces raisons, les systèmes positifs sont fréquemment rencontrés dans l'ingénierie [10, 19], la médecine et la biologie [12, 13], l'économie, etc...

La stabilité et la stabilisation sont les clés principales dont nous avons besoins depuis les systèmes dynamiques, et les systèmes positifs ne sont pas une exception dans ce point de vue. Le problème de la stabilité pour les systèmes positifs ont été considérés dans beaucoup de papiers [11, 17, 18].

Définition 2.5. *[22] Soit A une matrice carré d'ordre n. Le polynôme caractéristique de A, noté* P_A *est définie par,*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$$

où I_n *est la matrice identité d'ordre n et* λ *qui est une valeur propre.* P_A *est un polynôme puisque le déterminant d'une matrice est défini comme une somme des produits.*

Définition 2.6. *[22] Les systèmes autonomes sot définies par ce qui suit :*
Pour le cas continue :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{2.6}$$

Pour le cas discret,

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{2.7}$$

Nous nous intéressons à ce type des systèmes dans l'étude de la stabilité.

Définition 2.7. *[22, 25] Le système* (2.6) *est asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \quad \|x(0)\| < \infty$$

Théorème 2.3. *[22, 25] le système* (2.6) *est est dit asymptotiquement stable si et seulement si* $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ *tel que* λ_i *est une valeur propre de A.*

Théorème 2.4. *[22, 25] le système* (2.6) *est est dit stable si et seulement si les mineurs principaux sont strictement positive.*

Théorème 2.5. *[22, 25] le système* (2.6) *est est dit asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A sont strictement positive.*
ie :

$$P(A) = det(A - \lambda I) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}, a_i > 0, i = 0, \bar{n} - 1$$

Théorème 2.6. *[22, 25] le système* (2.6) *est est dit asymptotiquement stable si l'existe P définie positive tel que :*

$$A^T P - PA < 0 \tag{2.8}$$

Démonstration. le système (2.6) est asymptotiquement stable s'il existe une norme $\|x(t)\|$ qui décroit strictement avec le temps.
prenons :

$$\|x(t)\| = V(x(t)) = X^*(t)PX(t)$$

D'abord, on veux montrer que : $\dot{V}(x(t)) < 0 \; \forall t \; \forall x(0)$
Alors,

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{X}^*(t)PX(t) + X^*(t)P\dot{X}(t)$$

Ceci dit que,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)A^*PX(t) + X^*(t)PAX(t)$$

d'où,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)(A^*P + PA)X(t)$$

Par conséquent, nous concluons que $\dot{V}(x(t))$ est négatif si est seulement si l'existe P définie positif tel que $A^*p + pA$ est définie négatif. □

Démonstration. Nous savons que λ est une valeurs propre de A alors Nous avons,

$$Ax = \lambda x$$

D'autre part nous savons que,

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{X}^*(t)PX(t) + X^*(t)P\dot{X}(t)$$

Alors,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)\bar{\lambda}PX(t) + X^*(t)P\lambda X(t)$$

Et,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)(\bar{\lambda}P + P\lambda)X(t)$$

Où,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)(\bar{\lambda}P + \lambda P)X(t)$$

Ceci dit que,

$$\dot{V}(x(t)) = X^*(t)(\bar{\lambda} + \lambda)PX(t)$$

Et donc,

$$\bar{\lambda} + \lambda < 0 \text{ car } P > 0$$

Par conséquent,

$$Re(\lambda) < 0 \text{ car } \bar{\lambda} + \lambda = Re(\lambda)$$

□

Théorème 2.7. *[22, 25] le système* (2.7) *est asymptotiquement stable si et seulement si* $|\lambda_i| < 1$ *tel que les* λ_i *sont des valeurs propres de A.*

Théorème 2.8. *[22] le système* (2.7) *est asymptotiquement dit stable si l'existe P définie positive tel que*

$$A^T PA - P < 0 \tag{2.9}$$

Démonstration. le système (2.7) est stable s'il existe une norme $\|x(t)\|$ qui décroit strictement avec le temps.
prenons :

$$\|x^k\| = \dot{V}_k = X_k^* PX_k$$

Afin de démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\dot{V}_k < 0 \; \forall t \; \forall V_0$
D'abord,

$$V_k = X_k^* PX_k$$

Alors,

$$V_{k+1} = X_{k+1}^* PX_{k+1}$$

Par la suite Nous trouvons que,

$$V_{k+1} = X_k^* A^* P A X_k$$

Calculons,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* A^* P A X_k - X_k^* P X_k$$

D'où,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* (A^* P A - P) X_k$$

Par conséquent, nous concluons que $\dot{V}_k$ est négatif si et seulement si l'existe V définie positif tel que $A^* PA - P$ est définie négatif. □

Démonstration. Nous savons que λ_i est une valeurs propre de A alors nous avons,

$$Ax = \lambda x$$

D'autre part nous avons,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* A^* P A X_k - X_k^* P X_k$$

En plus de ça,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* \bar{\lambda} P \lambda X_k - X_k^* P X_k$$

Alors,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* (\bar{\lambda} P \lambda - P) X_k$$

D'où,

$$V_{k+1} - V_k = X_k^* (\bar{\lambda} \lambda P - P) X_k$$

Ceci dit que,

$$(\bar{\lambda}\lambda - 1)P \text{ avec } P > 0$$

Par conséquent,

$$|\lambda_i| < 1 \text{ car } \bar{\lambda}_i \lambda_i = |\lambda_i|$$

□

Exemple 2.1. *Soit le circuit électronique RLC de la FIGURE (2.1) modélisé par la loi de Kirchhoff pour finalement obtenir le système différentiel suivant :*

$$e_1 = (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (2.10)$$

$$e_2 = -R_2 i_1 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2.11)$$

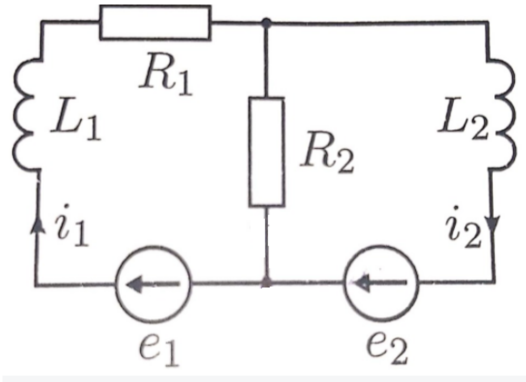

FIGURE 2.1 – Exemple 1

En substituions,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \mathrm{B}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Alors,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_1} & \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_1} \\ \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2} & -\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{L}_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{L}_2} \end{bmatrix}$$

En prenant $\mathrm{R}_1 = 0.1, \mathrm{R}_2 = 0.2, \mathrm{L}_1 = 0,3$ *et* $\mathrm{L}_2 = 0,5$ *pour obtenir que,*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0.66 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}$$

Alors, nous trouvons que le système est positif car A est une matrice de Metzler. D'autre part, nous avons :

$$\lambda \in \{-1.29, -0.1\}$$

Par conséquent, le système est stable car $\mathrm{Re}(\lambda_1) = -1.29 < 0$ *et* $\mathrm{Re}(\lambda_2) = -0.1 < 0$.

Exemple 2.2. *Considérons le circuit électrique de la FIGURE (2.2) définie par :*

En utilisant la loi de Kirchhoff, nous obtenons le système définie par définie par :

$$e_1 = (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)i_1 - \mathrm{R}_2 i_2 + \mathrm{L}_1\frac{di_1}{dt} \tag{2.12}$$

$$0 = -\mathrm{R}_2 i_1 + (\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3)i_2 - \mathrm{R}_3 i_3 + \mathrm{L}_2\frac{di_2}{dt} \tag{2.13}$$

$$e_2 = -\mathrm{R}_3 i_2 + \mathrm{R}_3 i_3 + \mathrm{L}_3\frac{di_3}{dt} \tag{2.14}$$

En obtenons,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \mathrm{B}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

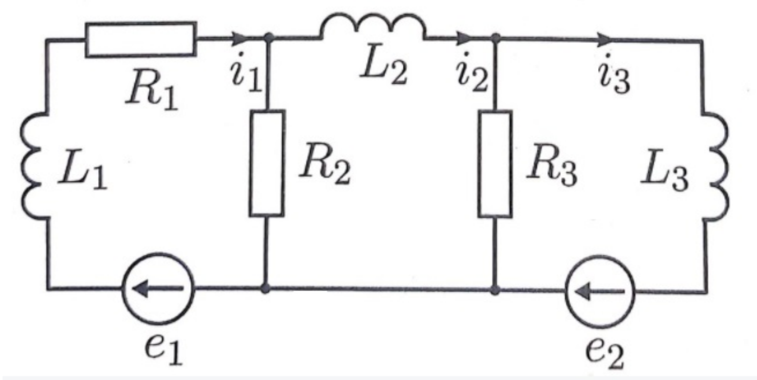

FIGURE 2.2 – Exemple 2

Sachant que,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} & \frac{R_3}{R_2} \\ 0 & \frac{R_3}{L_3} & -\frac{R_3}{L_3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}$$

En prenant, $R_1 = 0.1, R_2 = 0.4, R_3 = 3, L_1 = 0.7, L_2 = 0.9 \quad et \quad L_3 = 0.8$. *Nous substituons que,*

$$det(A) = -0.2381$$

Ainsi que,

$$\lambda_A \in \{-7.3188, -0.8866, -0.0367\}$$

Par conséquent, nous déduisons que le système est positive car $a_{ij} \geq 0, 1 \leq i, j \leq 3 \quad pour\, i \neq j$ *et stable car* $\lambda_i < 0 \quad pour \quad 1 \leq i \leq 3$.

2 Système 1D linéaire à dérivée d'ordre non entier

Dans cette partie du chapitre nous intéressons aux problèmes représentés par des systèmes d'ordre non entier. Pour commencer nous citons une définition de base qui concerne la transformation de Lapalce. Par la suite nous nous basons sur la résolution de ce type de problème afin de passer à l'étude de la positivité et la stabilité. Pour ce faire, nous fondons cette partie sur les références suivantes [5, 7, 16, 23]

2.1 Système 1D linéaire d'ordre non entier à temps continue

Dans cette partie nous considérons le système de type :

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{d^{\alpha} x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + Bu(t), 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.15}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.16}$$

avec $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$,$B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ tel que ${}^{c}D_t^{\alpha} x(t)$ représente le dérivée d'ordre fractionnaire avec $\alpha > 0$ au sens du Caputo, Notre objectif est basé sur l'étude de la positivité et la stabilité. Mais avant cela nous fondons sur la recherche de la solution du système définie par :

$$x(t) = \varphi_0(t)x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.17}$$

Sachant que,

$$\varphi_0(t) = \mathrm{E}_\alpha(\mathrm{A}t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

Et,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))}$$

Démonstration. En appliquant la transformé de Laplace pour obtenir :

$$\mathrm{X}(s) = \mathscr{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

Et,

$$\mathscr{L}[\mathrm{D}^\alpha x(t)] = s^\alpha \mathrm{X}(s) - s^{\alpha-1}x(0)$$

Alors,

$$\mathrm{X}(s) = [\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]^{-1}[s^{\alpha-1}x(0) + \mathrm{BU}(s)], \quad \mathrm{U}(s) = \mathscr{L}[u(t)]$$

Donc,

$$[\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)\alpha}$$

Ainsi que,

$$[\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)\alpha}\right) = \mathrm{I}_n$$

En substituons que,

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k\alpha+1)}x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)\alpha}\mathrm{BU}(s)$$

En appliquent la transformé de Laplcae inverse afin de trouver que,

$$\begin{aligned} x(t) = \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{X}(s)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k\alpha 1)}x(0)] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}\mathrm{BU}(s)] \\ &= \varphi_0(t)x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Avec,

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k\alpha 1)}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))}$$

□

2.2 Système 1D linéaire d'ordre non entier à temps discret

D'abord avant d'entamer cette section nous définissons une notion très importante concernant le système à temps discret

Définition 2.8. *L'opérateur des différences finies est définies par la relations suivante :*

$$\Delta^n x_i = \Delta^{n-1} x_i - \Delta^{n-1} x_{i-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x_{i-k}$$

Pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, $n \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *Sachant que,*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Et,

$$\Delta^n x_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{k} x_{i-j}$$

tel que,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!} & \text{si } k=0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Définition 2.9. *L'opérateur des différences fines de Grunwald et Letnikov à temps discret est définie par la relation suivante :*

$$\Delta^\alpha x_i = \Delta^{\alpha-1} x_i - \Delta^{\alpha-1} x_{i-1} = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i-k}$$

Pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *Sachant que,*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Et,

$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j}$$

tel que,

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} & \text{si } k=0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous considérons le système 1D linéaire fractionnaire suivant :

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \mathrm{A}x_k + \mathrm{B}u_k, 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.18}$$

$$y_k = \mathrm{C}x_k + \mathrm{D}u_k \tag{2.19}$$

avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice d'état, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La solution de ce système est définie par :

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} B u_k$$

Avec, $A_\alpha = A + \alpha i_n$

Démonstration. Nous avons,

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1}$$

$$x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = A x_k + B u_k$$

Alors,

$$x_{k+1} = A x_k + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} B u_k$$

Donc,

$$x_{k+1} = (A + \alpha i_n) x_k + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} B u_k$$

Par conséquent,

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} B u_k$$

Avec, $A_\alpha = A + \alpha i_n$ □

Remarque 2.1. *Nous remarquons que la solution obtenue représente une système discret à retard.*

2.3 Positivité des systèmes 1D linéaires d'ordre non entier

Dans cette section nous nous l'intéressons a ce type

Définition 2.10. *le système* (2.15) *et* (2.16) *est dit positif si est seulement si* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *pour* $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$.

lemme 2.2. *Soit* $A \in Mn$ *et* $0 < \alpha \leq 1$ *si et seulement si*

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, t \geq 0$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, t \geq 0$$

Démonstration. Si $\varphi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $\varphi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour $t \geq 0$ si est seulement si A est une matrice de Metzler.
D'autre part, nous savons que A est une matrice de Metzler si et seulement si $e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
Prenons

$$\varphi_0(t) - e^{\mathrm{A}t^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{A}t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} - \frac{\mathrm{A}(t^\alpha)^k}{k!}$$

tel que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{A}t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} - \frac{\mathrm{A}t^\alpha)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! - \Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} \times \frac{\mathrm{A}(t^\alpha)^k}{k!}$$

Pour $t \geq 0$ nous avons $k! \geq \Gamma(\alpha k+1) \geq 0$ pour $0 < \alpha \leq 1$
D'autre part nous avons $\varphi_0(t) \leq e^{\mathrm{A}t^\alpha} \leq 0$ pour $t \leq 0$
Par la suite nous passons a $\varphi(t)$ en démontrant que A et une matrice de Metzler si et seulement si $\varphi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
Par le même raisonnement nous obtenons :

$$\varphi(t) - e^{\mathrm{A}t^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{A}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)} - \frac{\mathrm{A}(t^\alpha)^k}{k!}$$

$$\varphi(t) - e^{\mathrm{A}t^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha k} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)} - \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha k}}{k!}$$

Alors,

$$\varphi(t) - e^{\mathrm{A}t^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}k! - \Gamma[(k+1)\alpha]}{\Gamma[\alpha(k+1)]} \times \frac{\mathrm{A}^k t^{\alpha k}}{k!}$$

Nous remarquons que pour tout $t \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ que $t^{\alpha-1}k! \geq \Gamma[(k+1)\alpha]$ ainsi que $\varphi(t) \geq e^{\mathrm{A}t^\alpha} \geq 0$. Par conséquent, A est une matrice de Metzler car $e^{\mathrm{A}t^\alpha}$. □

Définition 2.11. *le système* (2.15) *et* (2.16) *est dit positif si est seulement si A est une matrice de Metzler et B,C,D sont des matrices définie positive càd :* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}n$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ *et* $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour prouver que le système (2.15),(2.16) est positif. D'abord, nous savons que :

$$x(t) = \varphi_0(t)x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

D'après le lemme (4.1), si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$ alors $\varphi_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $\varphi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour tout $t \geq 0$.
Supposons que $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ avec $u \geq 0$ et $x(0) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ alors $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \geq 0$.
Par le même raisonnement nous déduisons que $y(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $t \geq 0$.

D'autre part nous supposons que le système est positif a pour but de prouver que $A \in Mn$, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$. Pour commencer nous avons,

$$^{c}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t), 0 < \alpha \leq 1$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

En supposons que $u(t) = 0$ et $x(0) = e_i$ ($i^{éme}$ colonne de la matrice identité I_n) afin d'obtenir :

$$^{c}D_t^{\alpha}x(0) = Ax(0) = Ae_i \geq 0$$

Ce qui prouve que $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, alors A est une matrice de Metzler. Pour la même raison nous supposons que $x(0) = 0$ pour trouver que :

$$^{c}D_t^{\alpha}x(0) = Bu(0) \geq 0$$

Ceci dit que $B \geq 0$ car $u(0) \geq 0$.
En passant par le même raisonnement nous supposons que $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$ pour obtenir $y(0) = cx(0)$ afin de prouver que $C \geq 0$ car $x(0) \geq 0$. Par la suite nous prenons $x(0) = 0$ pour trouver que $D \geq 0$ car $y(0) = Du(0) \geq 0$ et $u(0) \geq 0$.
D'où le résultat.

□

Définition 2.12. *Les systèmes* (2.18) *et* (2.19) *sont dite positifs si et seulement si* $x_k \in \mathbb{R}_+^n, y_k \in \mathbb{R}_+^p$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $u_k \geq \in \mathbb{R}_+^m$ *pour* $k = \mathbb{Z}_+$

Définition 2.13. *le système fractionnaire discret* (2.18),(2.19) *est dit positif si et seulement si les matrices A, B,C et D sont définies poritives c-à-d :* $A > 0, B > 0, C > 0$ *et* $D > 0$.

Exemple 2.3. *Soit le système fractionnaire et avec* $0 < \alpha \leq 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si\ t>0 \\ 0 & si\ t<0 \end{cases}$$

En utilisant les formules et , nous avons :

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = I_2 + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\varphi(t) = I_2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}$$

Avec,

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots$$

D'autre part, nous savons que :

$$x(t) = \varphi_0 x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

En prenant $u(t) = 1$ *la solution devient :*

$$x(t) = x(0) + \frac{A t^\alpha x(0)}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t \frac{B(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{AB(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}$$

$$x(t) = x(0) + \frac{A t^\alpha x(0)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{B t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{AB t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

Par conséquent,

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $A \in M_n$ *(*$a_{ij} \geq 0$ *pour* $i \neq j$*) et* $B \in \mathbb{R}^2_+$ *alors nous concluons que le système est positif d'après la définitions* (3.4).

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini les systèmes 1D linaire à temps continu et à temps discret. Par la suite nous avons étudiés les différents critères de positivité et de stabilité de ce type des systèmes. Les résultats obtenus sont basés sur la stabilité au sens de lyaponov en remarquant que la positivité joue une rôle très important pour assurer la stabilité à ce sens cité. Dans ce qui suit, nous avons étudiés la positivité et la stabilité d'une nouvelle classe des systèmes pour visualiser de prés la différence entre l'étude de la positivité avec une dérivée classique et une dérivée d'ordre non entier.

Chapitre 3

Système linéaire d'ordre fractionnaire conforme

Dans cette partie du chapitre nous présentons une nouvelle dérivée fractionnaire qui est dite la dérivée d'ordre fractionnaire conforme et qui est inventé par R.Khalil, M.Al Horani, A.Yousef et M.Sababheh.Cette nouvelle définition est une extension naturelle de la dérivée usuelle, et elle satisfait les quatre premières propriétés mentionnées ci-dessous. Cette définition coïncide avec la dérivée fractionnaire sur les polynômes. Dans ce qui suit nous allons faire une étude de solvabilité ainsi que nous introduirons un lien entre le cas continue et le cas discret de cette dérivée. Dans cette partie du travail nous nous basons sur les références [1, 8, 20, 24]

1 Dérivée fractionnaire conforme

Définition 3.1. *Soit* $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *pour tout* $t > 0$. *La dérivée fractionnaire conforme est défini par :*

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad pour\, t > 0 \quad et \quad \alpha \in [0,1] \tag{3.1}$$

Remarque 3.1. *[20] Si f ets une fonction* α*-différentiable au point (0,a) avec a>0 et* $\lim_{t\to 0^+} f^{\alpha}(t)$ *existe alors :*

$$f^{\alpha}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{\alpha}(t)$$

Théorème 3.1. *Soit* $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction* α*-différentiable pour tout* $t_0 > 0$, $\alpha \in [0,1]$ *alors f est une fonction continue en* t_0

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit que :

$$\lim_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$$

D'abord, nous savons que :

$$f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t) = \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}\epsilon$$

Et,

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon$$

En prenant $h = \epsilon t_0^{1-\alpha}$ pour obtenir,

$$\lim_{h\to 0} [f(t_0+h) - f(t_0)] = f^{\alpha}(t_0).0$$

Ce qui implique,

$$\lim_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$$

Par conséquent, f est continue en t_0. □

Propriété 3.1. *Soit* $\alpha \in [0,1]$ *et f,g sont des fonctions* α*-différentiable au point a pour t>0 alors,*

1. $\frac{d^\alpha}{dt}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{d^\alpha f}{dt} + \beta \frac{d^\alpha g}{dt}, \quad pour a, b \in \mathbb{R}.$
2. $\frac{d^\alpha}{dt}(t^p) = p t^{p-\alpha}, \quad pour p \in \mathbb{R}.$
3. $\frac{d^\alpha \lambda}{dt} = 0, \quad pour fonction constante f(t) = \lambda.$
4. $\frac{d^\alpha}{dt}\frac{f}{g} = \frac{g\frac{d^\alpha f}{dt} - f\frac{d^\alpha g}{dt}}{g^2}.$
5. *Si nous utilisons la définition de la dérivée fractionnaire conforme, nous obtenons que :* $\frac{d^\alpha f}{dt}(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t).$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0,1]$ et f,g deux fonctions α-différentiable au point $t > 0$, alors :

$$\frac{d^\alpha}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\epsilon}$$

Alors,

$$\frac{d^\alpha(fg)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\epsilon}$$

Donc,

$$\frac{d^\alpha(fg)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) + f(t) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\epsilon}$$

Par conséquent,

$$\frac{d^\alpha(fg)}{dt} = \frac{d^\alpha f(t)}{dt} \lim_{\epsilon\to 0} g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) + f(t)\frac{d^\alpha g(t)}{dt}$$

Comme g est une fonction continue donc $\lim_{\epsilon\to 0} g(t+\epsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$. Alors nous déduisons que la 4^{eme} propriété est vérifiée .
En passant a la 6^{eme} propriété où nous avons,

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha} - f(t)}{\epsilon}$$

Pour $h = \epsilon t^{1-\alpha}$ nous obtenons :

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = \lim \frac{f(t+h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}}$$

Et,

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = \lim \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Alors,

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.2. *si* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction* α*-différentiable pour* $t_0 > 0$, $\alpha > 0$ *alors f est continue en* t_0.

Démonstration. Nous veuillons démontrer la continuité de f. D'abord, nous savons que :

$$f(t_0 + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \epsilon$$

alors,

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(t_0 + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon$$

Pour $h = \epsilon t_0^{1\alpha}$, nous obtenons :

$$\lim_{h \to 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{\alpha}(t_0).0$$

Ce qui implique que,

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

Par conséquent f est une fonction continue en t_0.

□

Définition 3.2. *Soit* $\alpha \in [n, n+1]$ *et f est n-différentiable pour tout* $t > 0$, *alors la dérivée fractionnaire conforme de la fonction f d'ordre* α *est définie par :*

$$\frac{D^{\alpha} f}{dt}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f^{\lceil \alpha \rceil - 1}(t + \epsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{\lceil \alpha \rceil - 1}(t)}{\epsilon}$$

Sachant que $\lceil \alpha \rceil = \alpha + 1$.

Remarque 3.2. *D'après la définition précédente, nous déduisons que :*

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{\lceil \alpha \rceil}(t)$$

sachant que f est une fonction $(n+1)$*-différentiable pour* $\alpha \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $t > 0$.

2 L'approximation des systèmes 1D linéaires fractionnaire au sens de la dérivée conforme

Dans cette partie du chapitre, nous nous intéressons à travailler su le système défini par :

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad pour\, t > 0 \quad et \quad \alpha \in [0,1] \tag{3.2}$$

Sachant que,

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$

A pour but de déduire un lien entre le cas continue et la cas discret. Pour démontrer ce passage nous avons besoin d'une approximation de la dérivée d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode des différences finie ainsi que la remarque (3.2).
D'abord, pour $0 < \alpha < 1$ nous avons :

$$D^{\alpha} x(t) = t^{1-\alpha} x^{'}(t)$$

Donc,

$$t^{1-\alpha} x^{'}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

En prenant $t = t_0 + ih$ avec $t_0 = 0$,

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = (ih)^{\alpha-1} Ax_i + (ih)^{\alpha-1} Bu_i$$

Alors,

$$x_{i+1} = x_i + h[i^{\alpha-1} h^{\alpha-1} Ax_i + i^{\alpha-1} h^{\alpha-1} Bu_i]$$

Ceci dit que,

$$x_{i+1} = x_i + i^{\alpha-1} h^{\alpha} Ax_i + i^{\alpha-1} h^{\alpha} Bu_i$$

Par conséquent,

$$x_{i+1} = \tilde{A} x_i + \tilde{B} u_i \tag{3.3}$$

Alors nous déduisons que le système obtenue est un système 1D à temps discret variant ainsi que :

$$\tilde{A}_i = i^{\alpha-1} h^{\alpha} A + I_n$$
$$\tilde{B}_i = i^{\alpha-1} h^{\alpha} B$$

D'après la solution du problème (3.2) nous déduisons que le système (3.2) est positif si et seulement si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des matrices définies positives pour toute condition initiale positive c-à-d : $\tilde{A} > 0, \tilde{B > 0}, x_0 > 0$ et $u_0 > 0$. D'autre part, dans cette partie nous avons introduis une relation entre le système linéaire continue à dérivée d'ordre fractionnaire conforme et (3.2). Mais sous quelle conditions le système (3.2) restera positif. Supposons que (3.2) est positif alors $\tilde{A} > 0$ et $\tilde{B} > 0$. Nous remarquons que,

$$\tilde{B}_i = i^{\alpha-1} h^{\alpha} B > 0$$

Car $i^{\alpha-1} > 0$, $h^{\alpha} > 0$ et $B > 0$, reste à savoir les conditions pour que $\tilde{A}$ soit positif.

$$\tilde{A}_i = i^{\alpha-1} h^{\alpha} A + I_n \geq 0$$

Nous savons que $\tilde{a}_{nk} > 0$ pour $n \neq k$ car : $i^{\alpha-1} h^{\alpha} a_{ij} + 0 > 0$ puisque A est une matrice de Metzler.
En passant au cas où $n = k$. Nous concluons deux cas :
1^{er} cas où $a_{nn} \geq 0$ alors $\tilde{a}_{nn} \geq 0$.
2^{eme} cas où $a_{nn} < 0$ alors :

$$i^{\alpha-1} h^{\alpha} a_{nn} + 1 \geq 0 \Rightarrow i^{\alpha-1} h^{\alpha} a_{nn} > -1$$

$$\Rightarrow h^{\alpha} < \frac{-1}{i^{\alpha-1} a_{nn}}, \quad car \quad a_{nn} < 0$$

Alors,

$$h^{\alpha} < \frac{1}{i^{\alpha-1} |a_{nn}|}, \quad \forall n$$

Donc,

$$h^{\alpha} < \frac{1}{i^{\alpha-1} max(|a_{nn}|)}, \quad \forall n$$

De même nous avons, $t = t_0 + ih = ih$ pour $t = [0, T_f]$ et $i \in 1, 2, \ldots i_{max}$.
Par conséquent,

$$h^{\alpha} < \frac{i_{max}^{1-\alpha}}{max(|a_{nn}|)}$$

$$h < \left(\frac{i_{max}^{1-\alpha}}{max(|a_{nn}|)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

3 Comparaison entre la dérivée d'ordre fractionnaire conforme et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riman-Liouville ainsi qu'au sens de Caputo

Toutes les définitions incluant la définition de Riemann-Liouville et Caputo satisfont la propriété qui dit que la dérivée fractionnaire est linéaire. Ceci est la seule propriété héritée de la première dérivée de toute les définitions proposées. Cependant, ce qui suit sont les inconvénients des définitions restantes :

1. La dérivée Riemann-Liouville ne satisfait pas $D_a^{\alpha}(1) = 0$($D_a^{\alpha}(1) = 0$ pour la dérivée de Caputo), Si alpha n'est pas un nombre naturel.
2. Toutes les dérivées fractionnelles ne satisfont pas la formule connue de la dérivée du produit de deux fonctions :

$$D_a^{\alpha}(f \times g) = f D_a^{\alpha}(g) + g D_a^{\alpha}(f)$$

3. Toutes les dérivées fractionnelles ne satisfont pas la formule connue du quotient des deux fonctions :
$$D_a^{\alpha}\frac{f}{g} = \frac{gD_a^{\alpha}(f) - fD_a^{\alpha}(g)}{g^2}$$
4. Toutes les dérivées fractionnelles ne vérifient pas la règle de la composition des deux fonctions :
$$D_a^{\alpha}(f \circ g)(t) = f^{\alpha}(g(t))g^{\alpha}(t)$$
5. Toutes les dérivées fractionnelles ne satisfont pas la règle du semi-groupe en général.
6. La définition de Caputo assume que la fonction f est différentiable.

Théorème 3.3. *[8] Nous considérons le système (3.2) linéaire à dérivée d'ordre fractionnaire conforme définie par :*

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t), 0 < \alpha < 1$$

Sachant que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Alors le système (.) admet une unique solution définie par :*

$$x(t) = e^{A\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}x_0 + e^{A\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}\int_{t_0}^{t} e^{A\frac{(s-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} f(s)(s-t_0)^{\alpha-1}ds \tag{3.4}$$

4 Positivité des système 1D linéaires à dérivée conforme

le reste de cet travail est basée sur la références suivantes [24].

Définition 3.3. *Le système* (3.2) *est dit positif si est seulement si* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$.

Théorème 3.4. *Le système* (3.2) *est dit positif si est seulement si* $A \in M_n$, $B \in \mathbb{R}_+^{\times}$

Démonstration. Avant d'entamer la partie du preuve, nous rappelons que $e^{\frac{A}{\alpha}t^{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour tout $t \leq 0$, $0 < \alpha < 1$ si et seulement si $A \in M_n$.(démonstration dans le chapitre2). D'abord pour commencer nous supposons que $A \in M_n$ et $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ sachant que :

$$x(t) = e^{\frac{A}{\alpha}t^{\alpha}}x_0 + \int_0^t e^{\frac{A}{\alpha}(t^{\alpha}-\tau^{\alpha})}Bu(\tau)(\tau)^{\alpha-1}d\tau$$

Comme $e^{\frac{A}{\alpha}t^{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour $t \leq 0$ car $A \in M_n$ et $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}_+^n, u(t) \in \mathbb{R}_+^p$ alors $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$. D'autre part, nous supposons que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, x_0 \in \mathbb{R}_+^n, u(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \leq 0$. Nous affectons x_0 le vecteur e_i et a $u(t)$ le vecteur nul, nous obtenons :

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Ae_i \in \mathbb{R}_+^n$$

Pour $i \neq j$, nous substituons que $a_{ij} \leq 0$ alors nous concluon que A est une matrice de Metzler. Pour la même raison, nous prenons $x_0 = 0$ afin d'obtenir,

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Bu(0) \in \mathbb{R}_+^n$$

Ceci dit que $B \in \mathbb{R}^{n\times m_+}$ d'où le résultat. □

5 stabilité des système 1D linéaires à dérivée conforme

Considérions le système suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n \tag{3.5}$$

Sachant que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \leq 0$ et $A \in M_n$

Définition 3.4. *le système* (3.5) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad pour\, x_0 \in \mathbb{R}_+$$

Théorème 3.5. *le système* (3.5) *est dit asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un vecteur positif* $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$, $\lambda_k > 0$ *pour* $k = 1, ..., n$ *sachant que :* $A\lambda < 0$.

Théorème 3.6. *le système* (3.5) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique sont strictement positif c-à-d :*

$$det[A - \lambda I_n] = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

Avec, $a_k > 0$ *pour* $k = 0, 1, ..., n$

Théorème 3.7. *le système* (3.5) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si les mineurs principaux de la matrice* $\bar{A} = -A$ *sont strictements positifS.*

Exemple 3.1. *Considérons le système :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'abord, nous remarquons que ce système est positive car $A \in M_3$ *et* $B \in \mathbb{R}_+^3$. *D'autre part, d'après le théorème* (3.4) *pour que ce système soit asymptotiquement stable alors il suffit de prendre un vecteur* λ *définie positif par exemple :* $\lambda^T = [1 \quad 1 \quad 1]$ *c-à-d :*

$$A\lambda = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

d'où le résultat.

Remarque 3.3. *les critères de stabilité asymptotique des systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et d'ordre fractionnaire conforme sont semblable.*

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons définie une nouvelle dérivée dite dérivée d'ordre fractionnaire conforme. Dans ce qui suit, nous avons considérés un nouveau système à dérivée conforme afin d'étudier sa positivité et sa stabilité.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous somme intéressés à l'étude de la positivité des systèmes 1D linéaire à dérivée classique et d'ordre fractionnaire au différents sens.

Nous avons consacrés la première partie de ce travail pour se rappeler des notions principales de la théorie des matrices et la théorie de la dérivation d'ordre fractionnaire. Dans ce qui suit, nous avons définis les différents classe des systèmes cités en dessus pour faire caractériser les différentes critères de positivité et de stabilité.

Dans la deuxième partie, nous nous somme intéressé à une nouvelle classe des systèmes dite système 1D linéaire ̀dérivée d'ordre non entier conforme où nous avons citée la particularité de cette dérivée dans la partie comparaison entre les dérivée d'ordre fractionnaire. Parmi les avantages de cette dérivée, ça nous donne l'opportunité de passer des systèmes à temps continue a des systèmes à temps discret en utilisant la méthode des différences finies. Enfin, nous avons étudiés la positivité et la stabilité d'une nouvelle classe des systèmes 1D linéaire à dérivée d'ordre fractionnaire conforme.

les résultat obtenue dans l'étude de cette classe des systèmes peut nous généraliser l'étude de la pisitivité et la stabilité du reste des systèmes à dérivée d'ordre non entier.

Bibliographie

[1] **ABDELJAWAD, T**, On Conformable Fractional Calulus , Math.DS , 46,2014. 34

[2] **A. Berman, M. Neumann, and R.J. Stern**, Nonnegative Matrices in Dynamic Systems, Wiley, New York, 1989.

[3] **Chaparro, Luis**. Signals and Systems using MATLAB. 10.1016/C2009-0-19375-3, 2014. 16, 22

[4] **Debnath, L.**, "Une brève introduction historique au calcul fractionnaire". Journal international d'éducation mathématique en science et technologie . 35 (4) : 487–501, 2004.
7, 10

[5] **D.G. Luenberger**, Introduction to Dynamic Systems, Wiley, New York, 1979. 16, 22, 27

[6] **D. Bouagada**, thése de doctorat : "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs", université d'Oran Es-Senia, 2004. 20

[7] **Farina, Lorenzo.** (2002). Positive Systems in the State Space Approach : Main Issues and Recent Results. 20, 27

[8] **F.Martinez, I.Martinez, Mohamed k.A. Kaabar, S.Paredes** Solving systems of conformable linear differential equations via the conformable exponential matrix. 34, 39

[9] **G. H. Pertz and C. J.** Gerhardt,editors. Leibnizens gesammelte Werke, Lebinizens mathematische Schriften,Erste Abtheilung,Band II, pages 301.302. Dritte Folge Mathematik (Erster Band). A. Asher and Comp., Briefwechsel zwischen Leibniz,Hugens van Zulichem und dem Marquis de l'Hospital,1849. 7, 10

[10] **G. Silva-Navarro and J. Alvarez-Gallegos**, On the property signstability of equilibria in quasimonotone positive nonlinear systems, Proc. 33rd Conf. on Decision and Control 4, 4043– 4048, 1994. 22

[11] **H. Gao, J. Lam, C. Wang, and S. Xu**, Control for stability and positivity : Equivalent conditions and computation, IEEE Trans. Circuits Syst. II 52, 540–544, 2005. 22

[12] **J.A. Jacquez**, Compartmental Analysis in Biology and Medicine, University of Michigan Press, New York, 1985. 22

[13] **J.J. DiStefano, M. Jang, T.K. Malone, and M. Broutman**,Comprehensive kinetics of triodothyronine production, distribution, and metabolism in blood and tissue

pools of the rat using optimized blood-sampling protocols, Endocrinology 110 (1), 198–213, 1982. 22

[14] **Lazarević, Mihailo , Rapaić, Milan , Šekara, Tomislav.**, Advanced topics on modeling, system stability and control applications of fractional calculus, chapitre 1 :Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background, Publisher : WSEAS PRESS, ISBN : 978-960-474-348-3, 2014. 10, 11, 12

[15] **L. Euler.** De progressionibus transcendendibus seu quarum termini generales algebraicae dari nequent. Comm. Acad. Sci. Petropolitanae, 5 :36.57,1738. Translated to english by S. G. Langton, University of San Diego. 10

[16] **L. Farina and S. Rinaldi**, Positive Linear Systems – Theory and Applications, John Wiley and Sons, New York, 2000. 20, 22, 27

[17] **M. Busłowicz and T. Kaczorek**, Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays, Bull. Pol. Ac. Tech. 52, 99–102, 2004. 18, 20, 22

[18] **M. Busłowicz**, Stability of positive linear discrete-time systems with unit delay with canonical forms of state matrices, 12th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, on CD-ROM, 2006. 18, 22

[19] **R. Shorten, F. Wirth, and D. Leith**, A positive systems model of TCP-like congestion control : asymptotic results, IEEE/ACM Trans. Networking 14 (3), 716–629, 2006. 16, 20, 22

[20] **R.khalil, M.Al Horani, A.Yousef, M.Sababheh**, A new definition of fractional derivative, journal of computational and applied mathematics, 2014, 65-70. 34

[21] **S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan**, Lin- ear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, Philadelphia, 1997.

[22] **T.Kaczorek.** . Positive 1D and 2D Systems, 2002. 9, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24

[23] **T.Kaczorek**, Selected Problems of Fractional Systems Theory, 2011. 12, 27

[24] **T.KACZOREK**, ANALYSIS OF POSITIVE LINEAR CONTINUOUS–TIME SYSTEMS USING THE CONFORMABLE DERIVATIVE, 2018. 34, 39

[25] **Twardy, M.**, On the alternative stability criteria for positive systems. BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES. 55, 2007. 9, 22, 23, 24

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudiés la positivité et la stabilité des systèmes 1D linéaire à temps invariant à dérivée classique et à dérivée d'ordre non entier en passant par l'étude de la solvabilité de ces derniers. Dans ce qui suit, nous avons définis une nouvelle classe des systèmes dites système 1D linaire à dérivée d'ordre fractionnaire conforme afin de faire une analyse de positivité et de stabilité.

Through the research of the solvency of the latter, we investigated the positivity and stability of linear 1D systems with invariant time, classical derivative, and not integer order derivative. to undertake an analysis of positivity and stability, we have developed a new class of systems called 1D linear systems with fractional order conformable derivative.

من خلال البحث في الملاءة المالية لهذه الأخيرة، قمنا بالتحقيق في الإيجابية والاستقرار للأنظمة D1 الخطية مع الوقت الثابت بمشتق الكلاسيكي ومشتق غير صحيح. قمنا بتطوير فئة جديدة من الأنظمة تسمى أنظمة خطية مع مشتقة قابلة للتوافق دو ترتيب كسري لإجراء تحليل الإيجابية والاستقرار.