MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par :

BELGACEM Sara

THEME :

Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles Fractionnaires

Soutenu Juin 2021

Devant le jury composé de :

HAMANI Samira	Prof.	Université de Mostaganem	Présidente
DIALA Horiya	M.A.A	Université de Mostaganem	Examinatrice
TAÏEB Amele	M.C.A	Université de Mostaganem	Encadrante
FETTOUCH Houari	M.C.B	Université de Mostaganem	Co-Encadreur

Année Universitaire : 2020-2021

Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles Fractionnaires

Résumé

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles dans la résolution des équations différentielles pour montrer l'existence et l'unicité de solutions pour divers types d'équations.

Dans ce manuscrit :

1- On a étudié une classe d'équations fractionnaires non linéaires. On a donc présenté une étude sur l'existence et l'unicité de la solution du système considéré. La démonstration du résultat obtenu est basée sur le Théorème du point fixe de Banach. Pour illustrer le résultat obtenu, on a présenté une application.

2- On a présenté d'autre résultat qui porte sur la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de solution du problème considéré.

Mots-clés: Dérivée au sens de Caputo, point fixe, existence et unicité, stabilité au sens d'Ulam-Hyers.

Dédicaces

Avec unénorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie.
Que je dédie ce mémoire.
A mes trés chers parents qui m'ont toujours soutenu.
A ma trés chère amie Meryem.
A mes fréres.
A mes seours.
A toute ma famille.
A tout mes amis.
A mon encadreur pour son soutien et patience et ses conseils.
Et enfin ceux qui sont présents dans mon cœur .

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier " **ALLAH** " le clément et le mésirécordieux.

Mes premiers remerciements vont à mon encadrante Madame **TAÏEB** Amele, Maître de conférence à l'Université de mostaganem, qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse et surtout pour ses précieux conseils.

Je tiens à remercier également Madame **HAMANI** Samira, Professeur à l'Université de Mostaganem, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire

J'adresse aussi mes remerciements à Madame **DIALA Horiya** , Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens aussi mes remerciements à Monsieur **FETTOUCH Houari**, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté de juger ce travail.

Il est important pour moi de remercier tous enseignants d'Université de Mostaganem qui ont participé dans notre formation.

Finalement et spécialement un grand merci à mon père, ma mère, mes frère, mes soeurs et mes amies, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$: Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels positifs et non nuls.
$[a,b]$: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$(a,b]$: Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
(a,b) : Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\|.\|_\infty$: Norme infinie.
$\|.\|_\mathrm{X}$: Norme de l'espace X.
$\Gamma(.)$: Fonction Gamma d'Euler.
$\mathrm{B}(.,.)$: Fonction Béta d'Euleur.
D^m(ou $\frac{d^m}{dt}$) : Dérivée d'ordre m.
$f^{(m)}$: Dérivée m-ième de f.
I_a^α : Intégrale fractionnaire de Riemann-Lioville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Lioville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

Les théorèmes de points fixes sont des outils trés utiles dans la résolution des équations différentielles pour montrer l'existence et l'unicité de solutions au divers types d'équations. L'analyse non linéaire comme une branche autonome des mathématiques à été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens, comme Browder, une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cependant, les premiers résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, les résultats non linéaires sont applicables à un large un domaine donné. Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, èconomie à des modèles non linéaires. L'équations différentielles et intégrales, les problèmes d'optimisation générale.

La qualité ainsi que le montant de la recherche de la théorie des point fixe dans l'espace métrique a grandement augmenté dans les années 1970.(voir[1]).

L'histoire de l'équations différentielles à commencé avec l'invention du calcul par Newton et Leibnitz (1671) sont constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques.

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc...

L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatif. La théorie et les applications du calcul fractionnaire se sont considérablement développées au cours du $19^{\text{è}me}$ et $20^{\text{è}me}$ siècles, et de nombreux contributeurs ont donné des définitions pour les dérivées fractionnaires et les intégrales.

l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomène naturels.

Organisation Du MÉMOIRE

Le mémoire est composé de trois chapitres :

Chapitre 1 : Préliminaires.

Le premier chapitre correspond à une élément mathématiques ,et quelques approches sur les dérivées fractionnaires utiles.

Chapitre 2 : Unicité des solutions pour un Système Non Linéaires d'ordre Fractionnaire.

Ce chapitre va présenter l'unicité de la solution pour un systèmes non linéaire aux dérivées d'ordre fractionnaire. La démonstration des nouveaux résultats sera basées sur le Théorème du point fixe de Banach. On va présenter ce chapitre par une application, pour illustrer les résultats.

Chapitre 3 :Existence des solutions pour un Système Non Linéaires d'ordre Fractionnaire.

Ce chapitre On présente un résultat sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré. La démonstration des nouveaux résultats sera basées sur le Théorème du point fixe de Schaefer.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques connaissances sur la théorie du calcul fractionnaire. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes des points fixes.

1 Fonctions élémentaires du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Après, on présente l'intégrale de Riemann-Liouville et dérivées fractionnaires, voir [13, 14, 22, 23].

1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans cet objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grand importance, elle a été étudiées par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Chritoph Gudermann (1798-1852) Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendantes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparait également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres (voir [22]).

Définition 1.1 *[13, 14, 22, 23]*
L'une des fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réel, et même aux nombres complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, z > 0; \Re e(z) > 0. \tag{1.1}$$

Avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.
La fonction Gamma Γ possède une propriété importante donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), z > 0, \tag{1.2}$$

qui se démontre par une intégration par parties, en effet :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car :

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.4}$$

Exemple 1.1 *On montre maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.*

De la définition (1.1) on a :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt. \tag{1.5}$$

Si on pose $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et on obtient maintenant

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.6}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dy. \tag{1.7}$$

Si on multiplie ensemble (1.6) et (1.7) on obtient :

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.8}$$

L'équation (1.8) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \tag{1.9}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.2 La fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{1.10}$$

La fonction de Bêta d'Euler peut être aussi définie en termes de la fonction Gamma :

$$\mathrm{B}(x,y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{1.11}$$

2 Dérivée et intégrale fractionnaires

Dans cette section, on cite quelques définitions et résultats du calcule fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, on va commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville. Ensuite, on va présenter deux dérivées de Riemann-Liouville et celle de Caputo. Voir de [13, 14, 22, 23].

2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est basée sur la formule de l'intégrale répétés n fois qui est données par :

$$\mathrm{I}^n f(t) := \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\,ds, n\in\mathbb{N}^*. \tag{1.12}$$

En généralisant la formule(1.12) à un ordre α réel positif et en remplaçant la "fonction factorielle" par la fonction Gamma. On a donc la définition suivante :

Définition 1.2 *[14] Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f continue sur de f continue sur $[0,\infty)$, d'ordre α avec $\alpha\geq 0$ est définie par la formule suivante :*

$$\mathrm{I}_a^\alpha f(t) := \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \alpha>0, t\geq 0, \\ \\ f(t), \alpha=0, t\geq 0. \end{array} \right\} \tag{1.13}$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Définition 1.3 *[10, 14] l'opérateur d'ordre intégral fractionnaire de Riemann-Liouville $\alpha>0$, pour une fonction continue f sur $[0,\infty)$ est défini comme :*

$$\mathrm{J}^\varphi f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\int_0^t (t-s)^{\varphi-1} f(s)\,ds, & \varphi>0, \\ f(t), & \varphi=0, \end{array} \right.$$

où $t\geq 0$, et $\Gamma(\varphi) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\varphi-1}\,dx$.

Exemple 1.2 ***(Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles)***

Soit la fonction $f(t)=(t-a)^n$ où $n>-1$,

$$\mathrm{I}_a^\alpha (t-a)^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^n\,ds. \tag{1.14}$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables
$s=a+(t-a)\tau$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_a^\alpha (t-a)^n &= \frac{(t-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} s^n\,ds, \\ &= \frac{(t-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(\alpha,n+1), \\ &= \frac{(t-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}, \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(t-a)^{n+\alpha}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

En prenant $\alpha = 0.5, n = 1, a = 0$, on obtient :

$$\mathrm{I}_0^{0.5} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5}. \tag{1.16}$$

Proposition 1.1 *soit* $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$, *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*Pour* $\alpha > 0, \beta > 0$, *on a :*

(a) :$\mathrm{I}_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \lambda_1 \mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) + \lambda_2 \mathrm{I}_a^{\alpha} g(t)$.

(b) :$\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta} f(t) = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(t)$.

(c) :$\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta} f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t)$.

Preuve. soient $\alpha > 0, \beta > 0$, $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Pour (a) la démonstration on applique la Définition (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(\lambda_1 f(s) + \lambda_2 g(s)) ds, \qquad (1.17)\\
&= \frac{\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + \frac{\lambda_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,\\
&= \lambda_1 \mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) + \lambda_2 \mathrm{I}_a^{\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

Pour (b) la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Beta. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^{\alpha}(\mathrm{I}_a^{\beta} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}((\mathrm{I}_a^{\beta} f(s)) ds, \qquad (1.18)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\int_0^s (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau) ds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau)(\int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} ds) d\tau,
\end{aligned}$$

en posant,

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}. \tag{1.19}$$

D'ou,

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} ds, \qquad (1.20)\\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \mathrm{B}(\alpha,\beta),\\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

En remplaçant (1.20) dans (1.18), on aura :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}(\mathrm{I}_a^{\beta} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(t). \tag{1.21}$$

Maintenant pour démonterer (c) en utilisant la propriété précédente (b) Alors :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}(\mathrm{I}_a^{\beta} f(t)) = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta+\alpha} f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t).$$

■

2.2 Dérivation Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4 *[13, 14] Soit f une fonction intégrable sur* $[a,t]$. *Alors la dérivée fractionnaire d'ordre* α.

$(m-1 \leq \alpha < m)$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad (1.22) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} (I_a^{m-\alpha} f(t)). \end{aligned}$$

Exemple 1.3 *Dans cet exemple on va calculer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction* $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *Soient* $m-1 \leq \alpha < m$ *et* $\beta > -1$.*Alors on a :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= D^m I_a^{m-\alpha}(t-a)^{\beta} \qquad (1.23) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta} d\tau. \qquad (1.24) \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} (t-a)^{m-\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^{\beta} ds, \qquad (1.25) \\ &= \frac{\beta(m-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

(1.26)

Ensuite, en utilisant la relation de dérivation classique :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}(t-a)^p &= p(p-1)...(p-m+1), \qquad (1.27) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} (t-a)^{p-m}, \end{aligned}$$

on obtient,

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \qquad (1.28)$$

Remarque 1.1 *En générale, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante, mais elle est définie par :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}. \qquad (1.29)$$

Proposition 1.2 *Soient* $m-1 \leq \alpha < m, (m \in \mathbb{N}^*), f \in C([a,b], \mathbb{R})$. *Alors, l'opérateur* ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ *possède les propriétés suivantes :*

(a) L'opérateur ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ est linéaire.

(b) ${}^{RL}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t)$.

(c) Si ${}^{RL}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = 0$,alors $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)} (t-a)^{j+\alpha-m}$,

$(c_j)_{j=0,\dots,m-1} \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soient $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$.

(a) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^{m-\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)). \tag{1.30}$$

D'aprés la proposition (a), on a :

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) &= \lambda_1 \mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^{m-\alpha} f(t) + \lambda_2 \mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^{m-\alpha} g(t), \\ &= \lambda_1^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) + \lambda_2^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

(b) En appliquant la Définition (1.22), et en basant sur la propriété classique

$$^{RL}\mathrm{D}^m \mathrm{I}^m f(t) = f(t). \tag{1.31}$$

On obtient,

$$^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} \mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) = \mathrm{D}^m \mathrm{I}^{m-\alpha} \mathrm{I}_a^{\alpha} f(t), \tag{1.32}$$

D'aprés la proposition (b), on a :

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} \mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) &= \mathrm{D}^m \mathrm{I}^{m-\alpha+\alpha} f(t), \\ &= \mathrm{D}^m \mathrm{I}^m f(t) = f(t). \end{aligned} \tag{1.33}$$

(c) En appliquant la Définition (1.22), on obtient :

$$^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) = \mathrm{D}^m \mathrm{I}^{m-\alpha} f(t). \tag{1.34}$$

$$\text{Si } ^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) = 0, \text{ alors } \mathrm{D}^m \mathrm{I}^{m-\alpha} f(t) = 0.$$

On applique (I_a^{α}) aux deux membres sur l'expression précédente et en utilisant la proposition (b), on a :

$$\mathrm{I}_a^m f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} (t-a)^{j+\alpha}. \tag{1.35}$$

L'application de(D^m) a (1.35), donne:

$$\mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^m f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} \frac{d^m}{dt^m} (t-a)^{j+\alpha}, \tag{1.36}$$

la formule (1.27) implique

$$\mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^m f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j+\alpha+1-m)} (t-a)^{j+\alpha-m}, \tag{1.37}$$

d'où,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)} (t-a)^{j+\alpha-m}. \tag{1.38}$$

■

2.3 Dérivation Fractionnaire au sens de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville mène à des conditions contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$.

Une certaine solution de ce problème a été proposée par M. Caputo.

Définition 1.5 *[13, 14] Pour $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C^m([a, +\infty))$, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de f est définie par :*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{dt^m} f(s) ds. \tag{1.39}$$

Pour $m = \alpha$, on obtient

$$\frac{d^m}{dt^m} f(t)$$

Définition 1.6 *[10] La dérivée Caputo de l'ordre α pour une fonction $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, qui est au moins $n-$times différentiable peut être défini comme :*

$$D^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s)\, ds = J^{n-\alpha} u^{(n)}(t),\ \alpha > 0,$$

pour $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Exemple 1.4 *La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$. Soient n un nombre entier et p un nombre non entier avec $0 \leq m-1 < p < m$ et $\alpha > m-1$, Alors :*

$$f^{(m)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} (\tau-a)^{\alpha-m}.$$

D'où

$$^{C}_{a}D_t^{\alpha} (t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} (\tau-a)^{\alpha-m} d\tau. \tag{1.40}$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} ^{C}_{a}D_t^{\alpha} (t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} (\tau-a)^{\alpha-m} d\tau, \qquad (1.41)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{m-p-1} s^{\alpha-m} ds, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(m-p, \alpha-m+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} (t-a)^{\alpha-p}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

2.4 La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Soient $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$,et $f\in C^m([a,+\infty))$, si ${}^{C}D_a^{\alpha}f(t)$ et ${}^{RL}D_a^{\alpha}f(t)$ existe, alors on a :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(t)={}^{C}D_a^{\alpha}f(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}, \tag{1.42}$$

de (1.42), on déduit que,

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(t)={}^{C}D_a^{\alpha}f(t) \tag{1.43}$$

Si $f^{(k)}=0$ pour $k=0,1,2,...,m-1$.

Preuve. voir [13, 14]

■

Remarque 1.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}C=0. $$

3 Quelque Théorèmes de Point Fixe

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. On commence cette section par les définitions suivantes :

Définition 1.7 *On dit que* X *est complet pour la norme* $\|.\|_X$ *si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.8 *Soient* X *un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_X$ *et* T *une application de* X *dans* X. *On appelle point fixe de* T *tout point* $x\in X$ *tel que :*

$$ T(x)=x \tag{1.44}$$

Définition 1.9 *Soit* $(X,\|.\|_X)$ *un espace vectoriel normé* X. *Une application* Φ *de* X *est dite contractante s'il existe un nombre positive* $\kappa\in\,]0,1[$, *tel que pour tout* $x,y\in X$, *on a :*

$$ \|\Phi(x)-\Phi(y)\|_X\le\kappa\|x-y\|_X. \tag{1.45}$$

Définition 1.10 *soit* (f_n) *une suite de fonctions définies sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

On dit que la suite est équicontinue si quelque soient $t_1,t_2\in I,\epsilon>0$, il va existe $\delta>0$, tel que soit $n\in\mathbb{N}, |t_1-t_2|<\delta$, alors :

$$ |f_n(t_1)-f_n(t_2)|<\epsilon. \tag{1.46}$$

Définition 1.11 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. L'opérateur continu*

$\Phi: X\to Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.

Théorème 1.1 ***(Théorème de Point Fixe de Banach)***

Soient X un espace de Banach et $\Phi : X \to Y$ est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe $x \in X$ tel que

$$\Phi x = x \tag{1.47}$$

Lemme 1.1 ***(Ascoli-Arzelà)***

soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Ω est uniformément borné.
2. Ω est équicontinu.

Théorème 1.2 ***(Théorème de Point Fixe de Schaefer)***

Soient X un espace de Banach et $\Phi : X \to Y$ est un opérateur complément continu. Si l'ensemble

$$\Omega := \left\{x \in X : x = \mu\Phi x, 0 < \mu < 1\right\} \tag{1.48}$$

est borné, alors Φ possède au moin un point fixe.

Chapitre 2

Unicité des solutions pour un Systèmes Non Linéaires d'ordre Fractionnaire

1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente de nouveau résultats sur l'unicité pour le système fractionnaire suivant d'équations intégro-différentielles non linéaire, voir[2, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 15, 19, 20] :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} u_1(t) = f_1 \begin{pmatrix} t, u_1(t), ..., u_n(t), D^{a_1^1} u_1(t), ..., D^{a_1^{n-1}} u_1(t), \\ D^{a_2^1} u_2(t), ..., D^{a_2^{n-1}} u_2(t), ..., \\ D^{a_n^1} u_n(t), ..., D^{a_n^{n-1}} u_n(t), \\ \int_0^t h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, ..., \int_0^t h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{pmatrix}, \\ \vdots \\ D^{\alpha_n} u_n(t) = f_n \begin{pmatrix} t, u_1(t), ..., u_n(t), D^{a_1^1} u_1(t), ..., D^{a_1^{n-1}} u_1(t), \\ D^{a_2^1} u_2(t), ..., D^{a_2^{n-1}} u_2(t), ..., \\ D^{a_n^1} u_n(t), ..., D^{a_n^{n-1}} u_n(t), \\ \int_0^t h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, ..., \int_0^t h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{pmatrix}, \\ t \in J, \\ n-1 < \alpha_k < n,\ k = 1, 2, ..., n,\ i-1 < \alpha_k^i < i,\ i = 1, 2, ..., n-1, \\ u_k^{(j)}(0) = a_j^k,\ j = 0, 1, ..., n-2, \\ u_k^{(n-1)}(1) = D^{\mu_k} u_k(1),\ n-2 < \mu_k < n-1,\ k = 1, 2, ..., n, \\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $J := [0,1]$, $f_k : [0,1] \times \mathbb{R}^{n^2+n} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, D^{α_k} et $D^{\alpha_k^i}$, $i = 1, 2, ..., n-1$, $k = 1, 2, ..., n$, sont les dérivées fractionnaires de Caputo.

Leur meilleur connaissance, c'est qu'il n'y a pas d'articles qui est considéré ce type de systèm couplé fractionnaire.

2 Lemmes Auxiliaires

Donne maintenant la solution intégrale du système (2.1) par le résultat auxiliare suivant :

Lemme 2.1 *Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $n-1 < \alpha_k < n$, $k = 1,2,...,n$, et $A_k \in C(J,\mathbb{R})$. Puis, la solution unique du problème suivant*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} u_1(t) = A_1(t),\ t \in J, \\ \vdots \\ D^{\alpha_n} u_n(t) = A_n(t),\ t \in J, \\ \\ u_k^{(j)}(0) = a_j^k,\ j = 0,1,...,n-2, \\ \\ u_k^{(n-1)}(1) = D^{\mu_k} u_k(1),\ n-2 < \mu_k < n-1, \end{cases}$$

est donné par $(u_1, u_2, ..., u_n)(t)$;

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} A_k(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j^k}{j!} t^j \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\mu_k)\, t^{n-1}}{\left(\Gamma(n-\mu_k) - 1\right)\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} A_k(s)\, ds, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $k = 1,2,...,n$.

Preuve.

Grâce le Lemme 2.3, on obtient

$$\begin{cases} u_1(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} A_1(s)\, ds - \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j^1 t^j, \\ \vdots \\ u_n(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} A_n(s)\, ds - \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j^n t^j, \end{cases} \tag{2.3}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{n-1}^1 \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_0^n & c_1^n & \dots & c_{n-1}^n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Pour tous $k = 1,...,n$, on observer que

$$\begin{cases} u_k^{(j)}(0) = -j! c_j^k,\ j = 0,1,...,n-2, \\ u_k^{(n-1)}(1) = -(n-1)! c_j^{n-1}, \\ D^{\mu_k} u_k(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} A_k(s)\, ds - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\mu_k)} c_{n-1}^k. \end{cases}$$

par les conditions : $u_k^{(j)}(0) = a_j^k$, $j = 0,1,...,n-2$, et $u_k^{(n-1)}(1) = D^{\mu_k} u_k(1)$, on a

$$c_j^k = \begin{cases} -\frac{a_j^k}{j!},\ j = 0,1,...,n-2, \\ \\ \frac{\Gamma(n-\mu_k)}{\Gamma(n)\left(1 - \Gamma(n-\mu_k)\right)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} A_k(s)\, ds,\ j = n-1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Substitution (2.4) dans (2.3), on a (2.2). ceci termine la preuve. ■
On introduire l'espace de Banach suivant :

$$B := \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2, ..., u_n) : u_k \in C([0,1], \mathbb{R}),\ D^{\alpha_k^i} u_k \in C([0,1], \mathbb{R}), \\ k = 1, 2, ..., n,\ i = 1, 2, ..., n-1 \end{array} \right\},$$

muni de la norme :

$$\|(u_1, u_2, ..., u_n)\|_B = \max_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le i \le n-1}} \left(\|u_k\|_\infty, \left\| D^{\alpha_k^i} u_k \right\|_\infty \right),$$

où, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\|u_k\|_\infty = \max_{t \in J} |u_k(t)|$, $\left\| D^{\alpha_k^i} u \right\|_\infty = \max_{t \in J} \left| D^{\alpha_k^i} u_k(t) \right|$.

3 Unicité de Solutions

Dans le but d'établir des conditions suffisantes pour l'unicité des solutions pour le système (2.1), on impose les hypothèses suivantes :

Pour tout $k = 1, ..., n$, $i = 1, 2, ..., n-1$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k + 1)} + \frac{\Gamma(n - \mu_k)}{\left|\Gamma(n - \mu_k) - 1\right| \Gamma(n)\, \Gamma(\alpha_k - \mu_k + 1)}, \\ \Delta_k &= \sum_{j=1}^{n^2} \lambda_j^k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n^2+j}^k \omega_j, \\ M_k^i &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k - \alpha_k^i + 1)} + \frac{\Gamma(n - \mu_k)}{\Gamma(n - \alpha_k^i) \left|\Gamma(n - \mu_k) - 1\right| \Gamma(\alpha_k - \mu_k + 1)}. \end{aligned}$$

(H_1) : Il existe des constantes non négative $\left(\lambda_j^k\right)_{j=1,...,n^2+n}^{k=1,...,n}$, et $(\omega_j)_{j=1,...,n}$, telles que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall \left(x_1, ..., x_{n^2+n}\right), \left(y_1, ..., y_{n^2+n}\right) \in \mathbb{R}^{n^2+n} :$$

$$\left| f_k\left(t, x_1, ..., x_{n^2+n}\right) - f_k\left(t, y_1, ..., y_{n^2+n}\right) \right| \le \sum_{j=1}^{n^2+n} \lambda_j^k \left| x_j - y_j \right|,$$

et

$$\left| h_j\left(t, x_j\right) - h_j\left(t, y_j\right) \right| \le \omega_j \left| x_j - y_j \right|,\ j = 1, ..., n.$$

(H_2) :

$$\Theta := \max_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le i \le n-1}} \left(M_k, M_k^i \right) \Delta_k < 1.$$

(H_3) : Les fonctions

$$\left(f_k\right)_{k=1,2,...,n} : [0,1] \times \mathbb{R}^{n^2+n} \to \mathbb{R},\ \left(h_k\right)_{k=1,2,...,n} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

sont continues.
Défine l'opérateur non linéaire $T : B \to B$ par

$$T(u_1, u_2, ..., u_n)(t) := \left(T_1(u_1, u_2, ..., u_n)(t), ..., T_n(u_1, u_2, ..., u_n)(t)\right),$$

où $t \in J$,

$$\begin{aligned}
& T_k(u_1, u_2, \dots, u_n)(t) \\
:= & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_k \left(\begin{array}{c} s, u_1(s), \dots, u_n(s), D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds \\
& + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j^k}{j!} t^j + \frac{\Gamma(n - \mu_k)\, t^{n-1}}{\left(\Gamma(n - \mu_k) - 1\right) \Gamma(n)} \\
& \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} f_k \left(\begin{array}{l} s, u_1(s), \dots, u_n(s), \\ D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \\ \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Évidemment, on a

$$\begin{aligned}
& D^{\alpha_k^i} T_k(u_1, u_2, \dots, u_n)(t) \\
:= & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - \alpha_k^i - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \alpha_k^i)} f_k \left(\begin{array}{l} s, u_1(s), \dots, u_n(s), D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds \\
& + \sum_{j=i}^{n-2} \frac{a_j^k}{\Gamma(j + 1 - \alpha_k^i)} t^{j - \alpha_k^i} + \frac{\Gamma(n - \mu_k)\, t^{n-1-\alpha_k^i}}{\Gamma(n - \alpha_k^i) \left(\Gamma(n - \mu_k) - 1\right)} \\
& \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} f_k \left(\begin{array}{l} s, u_1(s), \dots, u_n(s), \\ D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \dots, n-2$,

$$\begin{aligned}
& D^{\alpha_k^{n-1}} T_k(u_1, u_2, \dots, u_n)(t) \\
:= & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - \alpha_k^{n-1} - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \alpha_k^{n-1})} f_k \left(\begin{array}{l} s, u_1(s), \dots, u_n(s), D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds \\
& + \frac{\Gamma(n - \mu_k)\, t^{n-1-\alpha_k^{n-1}}}{\Gamma(n - \alpha_k^{n-1}) \left(\Gamma(n - \mu_k) - 1\right)} \\
& \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - \mu_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k - \mu_k)} f_k \left(\begin{array}{l} s, u_1(s), \dots, u_n(s), \\ D^{\alpha_1^1} u_1(s), \dots, D^{\alpha_1^{n-1}} u_1(s), \\ \dots, D^{\alpha_n^1} u_n(s), \dots, D^{\alpha_n^{n-1}} u_n(s), \\ \int_0^s h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, \dots, \int_0^s h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{array} \right) ds. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Théorème 2.1 *On suppose que l'hypothèse* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Alors, le système (2.1) a une solution unique sur* $[0,1]$.

Preuve. on montre que T est un opérateur contractif sur B. Soit $(u_1,...,u_n),(v_1,...,v_n)\in \mathrm{B}$ et $t\in[0,1]$. Puis,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)-\mathrm{T}_k(v_1,...,v_n)\right\|_\infty \\
\leq\; & \max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left|\begin{array}{l} f_k\left(\begin{array}{l} s,u_1(s),...,u_n(s),\\ \mathrm{D}^{\alpha_1^1}u_1(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}u_1(s),\\ ...,\mathrm{D}^{\alpha_n^1}u_n(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}u_n(s),\\ \int_0^s h_1(\tau,u_1(\tau))\,d\tau,...,\\ \int_0^s h_n(\tau,u_n(\tau))\,d\tau \end{array}\right)\\[2ex] -f_k\left(\begin{array}{l} s,v_1(s),...,v_n(s),\\ \mathrm{D}^{\alpha_1^1}v_1(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}v_1(s),\\ ...,\mathrm{D}^{\alpha_n^1}v_n(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}v_n(s),\\ \int_0^s h_1(\tau,v_1(\tau))\,d\tau,...,\int_0^s h_n(\tau,v_n(\tau))\,d\tau \end{array}\right)\end{array}\right| ds \\
&+\frac{\Gamma(n-\mu_k)}{\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(n)}\max_{t\in[0,1]}t^{n-1} \\
&\times\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k-\mu_k-1}}{\Gamma(\alpha_k-\mu_k)}\left|\begin{array}{l} f_k\left(\begin{array}{l} s,u_1(s),...,u_n(s),\\ \mathrm{D}^{\alpha_1^1}u_1(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}u_1(s),\\ ...,\mathrm{D}^{\alpha_n^1}u_n(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}u_n(s),\\ \int_0^s h_1(\tau,u_1(\tau))\,d\tau,...,\int_0^s h_n(\tau,u_n(\tau))\,d\tau \end{array}\right)\\[2ex] -f_k\left(\begin{array}{l} s,v_1(s),...,v_n(s),\\ \mathrm{D}^{\alpha_1^1}v_1(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}v_1(s),\\ ...,\mathrm{D}^{\alpha_n^1}v_n(s),...,\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}v_n(s),\\ \int_0^s h_1(\tau,v_1(\tau))\,d\tau,...,\int_0^s h_n(\tau,v_n(\tau))\,d\tau \end{array}\right)\end{array}\right| ds.
\end{aligned}
$$

Il suit l'hypothèse (H_1) que,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(u_1,\dots,u_n)-\mathrm{T}_k(v_1,\dots,v_n)\right\|_\infty \\
\leq\ & \left(\max_{t\in[0,1]}\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma(n)\,\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right) \\
&\times\left(\begin{array}{l}
\lambda_1^k\|u_1-v_1\|_\infty+\dots+\lambda_n^k\|u_n-v_n\|_\infty \\
+\lambda_{n+1}^k\left\|\mathrm{D}^{\alpha_1^1}(u_1-v_1)\right\|_\infty+\dots \\
+\lambda_{2n-1}^k\left\|\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}(u_1-v_1)\right\|_\infty+\dots \\
+\lambda_{n+(n-1)^2+1}^k\left\|\mathrm{D}^{\alpha_n^1}(u_n-v_n)\right\|_\infty+\dots \\
+\lambda_{n^2}^k\left\|\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}(u_n-v_n)\right\|_\infty \\
+\lambda_{n^2+1}^k\omega_1\|u_1-v_1\|_\infty\max\limits_{s\in[0,1]}\int_0^s d\tau+\dots \\
+\lambda_{n^2+n}^k\omega_n\|u_n-v_n\|_\infty\max\limits_{s\in[0,1]}\int_0^s d\tau
\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(u_1,\dots,u_n)-\mathrm{T}_k(v_1,\dots,v_n)\right\|_\infty \\
\leq\ & \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma(n)\,\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right) \\
&\times\left(\sum_{j=1}^{n^2}\lambda_j^k+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{n^2+j}^k\omega_j\right) \\
&\times\max\left(\begin{array}{c}
\|u_1-v_1\|_\infty,\dots,\|u_n-v_n\|_\infty, \\
\left\|\mathrm{D}^{\alpha_1^1}(u_1-v_1)\right\|_\infty,\dots,\left\|\mathrm{D}^{\alpha_1^{n-1}}(u_1-v_1)\right\|_\infty,\dots, \\
\left\|\mathrm{D}^{\alpha_n^1}(u_n-v_n)\right\|_\infty,\dots,\left\|\mathrm{D}^{\alpha_n^{n-1}}(u_n-v_n)\right\|_\infty
\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\left\|\mathrm{T}_k(u_1,\dots,u_n)-\mathrm{T}_k(v_1,\dots,v_n)\right\|_\infty\leq \mathrm{M}_k\Delta_k\left\|u_1-v_1,\dots,u_n-v_n\right\|_{\mathrm{B}}. \tag{2.8}
$$

Par les même arguments, on a

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k^i} T_k(u_1,\dots,u_n) - D^{\alpha_k^i} T_k(v_1,\dots,v_n) \right\|_\infty \\
\leq & \left(\begin{array}{l} \max\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{t^{\alpha_k-\alpha_k^i}}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^i+1\right)} \\ \\ +\dfrac{\Gamma(n-\mu_k)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^i\right)\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(\alpha_k-\mu_k+1)} \end{array} \right) \\
& \times \left(\begin{array}{l} \lambda_1^k \|u_1-v_1\|_\infty + \dots + \lambda_n^k \|u_n-v_n\|_\infty \\ +\lambda_{n+1}^k \left\| D^{\alpha_1^1}(u_1-v_1)\right\|_\infty + \dots \\ +\lambda_{2n-1}^k \left\| D^{\alpha_1^{n-1}}(u_1-v_1)\right\|_\infty + \dots \\ +\lambda_{n+(n-1)^2+1}^k \left\| D^{\alpha_n^1}(u_n-v_n)\right\|_\infty + \dots \\ +\lambda_{n^2}^k \left\| D^{\alpha_n^{n-1}}(u_n-v_n)\right\|_\infty \\ +\lambda_{n^2+1}^k \omega_1 \|u_1-v_1\|_\infty \max\limits_{s\in[0,1]} \int_0^s d\tau + \dots \\ +\lambda_{n^2+n}^k \omega_n \|u_n-v_n\|_\infty \max\limits_{s\in[0,1]} \int_0^s d\tau \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k^i} T_k(u_1,\dots,u_n) - D^{\alpha_k^i} T_k(v_1,\dots,v_n) \right\|_\infty \\
\leq & \left(\begin{array}{l} \dfrac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^i+1\right)} \\ +\dfrac{\Gamma(n-\mu_k)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^i\right)\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(\alpha_k-\mu_k+1)} \end{array} \right) \left(\sum_{j=1}^{n^2} \lambda_j^k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n^2+j}^k \omega_j \right) \\
& \times \max \left(\begin{array}{l} \|u_1-v_1\|_\infty, \dots, \|u_n-v_n\|_\infty, \\ \\ \left\| D^{\alpha_1^1}(u_1-v_1)\right\|_\infty, \dots, \left\| D^{\alpha_1^{n-1}}(u_1-v_1)\right\|_\infty, \dots, \\ \\ \left\| D^{\alpha_n^1}(u_n-v_n)\right\|_\infty, \dots, \left\| D^{\alpha_n^{n-1}}(u_n-v_n)\right\|_\infty \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k = 1,\dots,n$, et tout $i = 1,\dots,n-1$,

$$\begin{aligned}
&\left\| D^{\alpha_k^i} T_k(u_1,\dots,u_n) - D^{\alpha_k^i} T_k(v_1,\dots,v_n) \right\|_\infty && (2.9) \\
\leq \quad & M_k^i \Delta_k \|u_1-v_1,\dots,u_n-v_n\|_B . && (2.10)
\end{aligned}$$

En combinant (2.8) avec (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|T(u_1,\dots,u_n) - T(v_1,\dots,v_n)\|_B \\
\leq & \max_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq i\leq n-1}} \left(M_k, M_k^i\right) \Delta_k \|u_1-v_1,\dots,u_n-v_n\|_B .
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (H_2), on dèduit que T est contractif. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, on affirme que T a un point fixe qui est l'unique solution de (2.1). cela complète la preuve. ■

4 Application

Exemple 2.1 *Considére le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{9}{4}}u_1(t) = \\ \dfrac{\left| \begin{array}{c} u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+D^{\frac{1}{4}}u_1(t)+D^{\frac{7}{4}}u_1(t) \\ +D^{\frac{5}{6}}u_2(t)+D^{\frac{7}{6}}u_2(t)+D^{\frac{2}{3}}u_3(t)+D^{\frac{4}{3}}u_3(t) \end{array} \right|}{648\pi\left(1+\left| \begin{array}{c} u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+D^{\frac{1}{4}}u_1(t)+D^{\frac{7}{4}}u_1(t) \\ +D^{\frac{5}{6}}u_2(t)+D^{\frac{7}{6}}u_2(t)+D^{\frac{2}{3}}u_3(t)+D^{\frac{4}{3}}u_3(t) \end{array} \right|\right)}, \\ +\frac{t}{36}\left(\int_0^t \frac{\cos u_1(\tau)}{2\pi}d\tau+\int_0^t \frac{\sin u_2(\tau)}{2\pi+\tau}d\tau+\int_0^t \frac{\cos u_3(\tau)}{2\pi}d\tau\right), \\ \\ D^{\frac{13}{6}}u_2(t) = \\ \dfrac{\sin\left(\begin{array}{c} u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+D^{\frac{1}{4}}u_1(t)+D^{\frac{7}{4}}u_1(t) \\ +D^{\frac{5}{6}}u_2(t)+D^{\frac{7}{6}}u_2(t)+D^{\frac{2}{3}}u_3(t)+D^{\frac{4}{3}}u_3(t) \end{array} \right)}{324\pi}, \\ +\frac{t^2+1}{72}\left(\int_0^t \frac{\cos u_1(\tau)}{2\pi}d\tau+\int_0^t \frac{\sin u_2(\tau)}{2\pi+\tau}d\tau+\int_0^t \frac{\cos u_3(\tau)}{2\pi}d\tau\right), \\ \\ D^{\frac{7}{3}}u_3(t) = \\ \dfrac{\left(\begin{array}{l} \cos\left(u_1(t)+D^{\frac{1}{4}}u_1(t)+D^{\frac{7}{4}}u_1(t)\right) \\ +\cos\left(u_2(t)+D^{\frac{5}{6}}u_2(t)+D^{\frac{7}{6}}u_2(t)\right) \\ +\cos\left(u_3(t)+D^{\frac{2}{3}}u_3(t)+D^{\frac{4}{3}}u_3(t)\right) \end{array} \right)}{162\pi}, \\ +\frac{\pi}{36(\pi+t)}\left(\int_0^t \frac{\cos u_1(\tau)}{2\pi}d\tau+\int_0^t \frac{\sin u_2(\tau)}{2\pi+\tau}d\tau+\int_0^t \frac{\cos u_3(\tau)}{2\pi}d\tau\right), \\ t\in[0,1], \\ u_1(0)=\sqrt{2},\ u_1'(0)=1,\ u_1''(1)=D^{\frac{5}{4}}u_1(1), \\ u_2(0)=\sqrt{3},\ u_2'(0)=\sqrt{7},\ u_2''(1)=D^{\frac{4}{3}}u_2(1), \\ u_3(0)=7\sqrt{3},\ u_3'(0)=\sqrt{3},\ u_3''(1)=D^{\frac{5}{3}}u_3(1). \end{cases} \tag{2.11}$$

On a $n=3$, $\alpha_1=\frac{9}{4}$, $\alpha_2=\frac{13}{6}$, $\alpha_3=\frac{7}{3}$, $\alpha_1^1=\frac{1}{4}$, $\alpha_1^2=\frac{7}{4}$, $\alpha_2^1=\frac{5}{6}$, $\alpha_2^2=\frac{7}{6}$, $\alpha_3^1=\frac{2}{3}$, $\alpha_3^2=\frac{4}{3}$, $\mu_1=\frac{5}{4}$, $\mu_2=\frac{4}{3}$, $\mu_3=\frac{5}{3}$, $J=[0,1]$,

$$\begin{aligned} h_1(\tau,u_1(\tau)) &= \frac{\cos u_1(\tau)}{2\pi},\ h_2(\tau,u_2(\tau))=\frac{\sin u_2(\tau)}{2\pi+\tau}, \\ h_3(\tau,u_3(\tau)) &= \frac{\cos u_3(\tau)}{2\pi}. \end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,1]$ *et* $(x_1,...,x_{12}),\left(y_1,...,y_{12}\right)\in\mathbb{R}^{12}$, *on a*

$$\begin{aligned} & \left|f_1(t,x_1,x_2,...,x_{12})-f_1\left(t,y_1,y_2,...,y_{12}\right)\right| \\ \leq\ & \frac{1}{648\pi}\left(\begin{array}{c} |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|+|x_4-y_4| \\ +|x_5-y_5|+|x_6-y_6|+|x_7-y_7| \\ +|x_8-y_8|+|x_9-y_9| \end{array} \right) \\ & +\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2\pi}|x_{10}-y_{10}|+\frac{1}{2\pi}|x_{11}-y_{11}|+\frac{1}{2\pi}|x_{12}-y_{12}|\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|f_2\left(t,x_1,x_2,...,x_{12}\right)-f_2\left(t,y_1,y_2,...,y_{12}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{324\pi}\left(\begin{array}{l} \left|x_1-y_1\right|+\left|x_2-y_2\right|+\left|x_3-y_3\right|+\left|x_4-y_4\right| \\ +\left|x_5-y_5\right|+\left|x_6-y_6\right|+\left|x_7-y_7\right| \\ +\left|x_8-y_8\right|+\left|x_9-y_9\right| \end{array}\right) \\
&+\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2\pi}\left|x_{10}-y_{10}\right|+\frac{1}{2\pi}\left|x_{11}-y_{11}\right|+\frac{1}{2\pi}\left|x_{12}-y_{12}\right|\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|f_3\left(t,x_1,x_2,...,x_{12}\right)-f_3\left(t,y_1,y_2,...,y_{12}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{162\pi}\left(\begin{array}{l} \left|x_1-y_1\right|+\left|x_2-y_2\right|+\left|x_3-y_3\right|+\left|x_4-y_4\right| \\ +\left|x_5-y_5\right|+\left|x_6-y_6\right|+\left|x_7-y_7\right| \\ +\left|x_8-y_8\right|+\left|x_9-y_9\right| \end{array}\right) \\
&+\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2\pi}\left|x_{10}-y_{10}\right|+\frac{1}{2\pi}\left|x_{11}-y_{11}\right|+\frac{1}{2\pi}\left|x_{12}-y_{12}\right|\right).
\end{aligned}$$

Alors, on peux prendre :

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_j^1\right)_{j=1,2,...,9} &= \frac{1}{648\pi},\ \left(\lambda_j^2\right)_{j=1,2,...,9}=\frac{1}{324\pi}, \\
\left(\lambda_j^3\right)_{j=1,2,...,9} &= \frac{1}{162\pi},\ \left(\lambda_j^k\right)_{j=10,11,12}^{k=1,2,3}=\frac{1}{36},
\end{aligned}$$

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\frac{1}{2\pi},\ \Delta_1=0.0177, \Delta_2=0.0221,\ \Delta_3=0.0309.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_1 &= 6.0699,\ \mathrm{M}_1^1=7.5601,\ \mathrm{M}_1^2=13.6562, \\
\mathrm{M}_2 &= 5.3603,\ \mathrm{M}_2^1=9.9571,\ \mathrm{M}_2^2=11.4904, \\
\mathrm{M}_3 &= 4.9815,\ \mathrm{M}_3^1=8.4276,\ \mathrm{M}_3^2=11.2387.
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\Delta_1\mathrm{M}_1 &= 0.1074,\ \Delta_1\mathrm{M}_1^1=0.1338,\ \Delta_1\mathrm{M}_1^2=0.2417, \\
\Delta_2\mathrm{M}_2 &= 0.1185,\ \Delta_2\mathrm{M}_2^1=0.2201,\ \Delta_2\mathrm{M}_2^2=0.2539, \\
\Delta_3\mathrm{M}_3 &= 0.1539,\ \Delta_3\mathrm{M}_3^1=0.2604,\ \Delta_3\mathrm{M}_3^2=0.3473.
\end{aligned}$$

Utilisation du Théorèm 2.1, on déduit que le problème (2.11) a une solution unique sur J.

Chapitre 3

Existence des solutions pour un Systèmes Non Linéaires d'ordre Fractionnaire

1 Introduction

Dans cette section, On présente un résultat sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré, voir[5, 6, 7, 9, 16, 17, 18, 21, 24].

Théorème 3.1 *On suppose que l'hypothèse* (H_3) *est satisfaite. Alors, le système 2.1 admet au moins une solution sur* J.

Preuve. Soit donné la preuve en trois étapes :

Étape 1 :Image d'un s'ensemble borné par l'opérateur T est un borné.
soit $\lambda > 0$, on considère l'ensemble $\Omega_\lambda := \left\{(u_1, ..., u_n) \in \mathrm{B} : \ \|(u_1, ..., u_n)\|_{\mathrm{B}} \leq \lambda\right\}$, et on montre que $\mathrm{T}(\Omega_\lambda)$ est borné.

Pour tout $(u_1, ..., u_n) \in \Omega_\lambda$, et tous les $t \in [0,1]$, en utilisant l'hypothèse (H_3), on a h_k sont continues sur $[0,1] \times [-\lambda, \lambda]$. Ensuite, il existe $c_k > 0$:

$$|h_k(t, u_k(t))| \leq c_k, k = 1, 2, ..., n.$$

On obtient aussi f_k sont continues sur $[0,1] \times [-\lambda, \lambda]^{n^2} \times [-c_1, c_1] \times ... \times [-c_n, c_n]$, donc, il existe $\mathrm{L}_k > 0$:

$$\left| f_k \begin{pmatrix} t, u_1(t), ..., u_n(t), \mathrm{D}^{a_1^1} u_1(t), ..., \mathrm{D}^{a_1^{n-1}} u_1(t), \\ \mathrm{D}^{a_2^1} u_2(t), ..., \mathrm{D}^{a_2^{n-1}} u_2(t), ..., \\ \mathrm{D}^{a_n^1} u_n(t), ..., \mathrm{D}^{a_n^{n-1}} u_n(t), \\ \int_0^t h_1(\tau, u_1(\tau))\, d\tau, ..., \int_0^t h_n(\tau, u_n(\tau))\, d\tau \end{pmatrix} \right| \leq \mathrm{L}_k. \tag{3.1}$$

Grâce à (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathrm{T}_k\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{j!}+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma(n)\,\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right)\\
&\times\max_{s\in \mathrm{J}}\left|f_k\left(\begin{array}{l} t,u_1(t),\ldots,u_n(t),\mathrm{D}^{a_1^1}u_1(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_1^{n-1}}u_1(t),\\ \mathrm{D}^{a_2^1}u_2(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_2^{n-1}}u_2(t),\ldots,\\ \mathrm{D}^{a_n^1}u_n(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_n^{n-1}}u_n(t),\\ \int_0^t h_1(\tau,u_1(\tau))\,d\tau,\ldots,\int_0^t h_n(\tau,u_n(\tau))\,d\tau\end{array}\right)\right|\\
\leq\ & \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{j!}+\mathrm{L}_k\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma(n)\,\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left\| \mathrm{T}_k\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{j!}+\mathrm{L}_k\mathrm{M}_k. \tag{3.2}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathrm{D}^{\alpha_k^i}\mathrm{T}_k\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^i+1\right)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^i\right)\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right)\\
&\times\max_{s\in \mathrm{J}}\left|f_k\left(\begin{array}{l} t,u_1(t),\ldots,u_n(t),\mathrm{D}^{a_1^1}u_1(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_1^{n-1}}u_1(t),\\ \mathrm{D}^{a_2^1}u_2(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_2^{n-1}}u_2(t),\ldots,\\ \mathrm{D}^{a_n^1}u_n(t),\ldots,\mathrm{D}^{a_n^{n-1}}u_n(t),\\ \int_0^t h_1(\tau,u_1(\tau))\,d\tau,\ldots,\int_0^t h_n(\tau,u_n(\tau))\,d\tau\end{array}\right)\right|\\
&+\sum_{j=i}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)}\\
\leq\ & \mathrm{L}_k\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^i+1\right)}+\frac{\Gamma\left(n-\mu_k\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^i\right)\left|\Gamma\left(n-\mu_k\right)-1\right|\Gamma\left(\alpha_k-\mu_k+1\right)}\right)\\
&+\sum_{j=i}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)}.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathrm{D}^{\alpha_k^i}\mathrm{T}_k\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \sum_{j=i}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)}+\mathrm{L}_k\mathrm{M}_k^i,\ i=1,2,\ldots,n-2.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

De même, on obtient

$$\left\| \mathrm{D}^{\alpha_k^{n-1}}\mathrm{T}_k\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right\|_\infty \leq \mathrm{L}_k\mathrm{M}_k^{n-1}. \tag{3.4}$$

De (3.2), (3.3) et (3.4), on conclue que

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{T}(u_1,...,u_n)\|_{\mathrm{B}} \\ \leq\ & \max\left(\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{j!}+\mathrm{L}_k\mathrm{M}_k,\sum_{j=i}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)}+\mathrm{L}_k\mathrm{M}_k^i,\mathrm{L}_k\mathrm{M}_k^{n-1}\right) \\ <\ & \infty. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Par conséquent, T est un ensemble borné dans B. la continuité de la fonction f_k donnée dans (H_3) implique que l'opérateur T est continu sur B.
soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, et $(u_1,...,u_n) \in \Omega_\lambda$.
Étape 2 : Image d'un s'ensemble borné par l'opérateur T est un équicontinus.
D'où,

$$\begin{aligned} &|\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_2)-\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_1)| \\ \leq & \left(\begin{array}{l} \frac{\mathrm{L}_k}{\Gamma(\alpha_k+1)}\left(2(t_2-t_1)^{\alpha_k}+\left(t_2^{\alpha_k}-t_1^{\alpha_k}\right)\right) \\ \\ +\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|\left(t_2^j-t_1^j\right)}{j!}+\frac{\mathrm{L}_k\Gamma(n-\mu_k)\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(n)\Gamma(\alpha_k-\mu_k+1)} \end{array}\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{D}^{\alpha_k^i}\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_2)-\mathrm{D}^{\alpha_k^i}\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_1)\right| \\ \leq & \left(\begin{array}{l} \frac{\mathrm{L}_k}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^i+1\right)}\left(2(t_2-t_1)^{\alpha_k-\alpha_k^i}+\left(t_2^{\alpha_k-\alpha_k^i}-t_1^{\alpha_k-\alpha_k^i}\right)\right) \\ \\ +\sum_{j=i}^{n-2}\frac{\left|a_j^k\right|\left(t_2^{j-\alpha_k^i}-t_1^{j-\alpha_k^i}\right)}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)}+\frac{\mathrm{L}_k\Gamma(n-\mu_k)\left(t_2^{n-1-\alpha_k^i}-t_1^{n-1-\alpha_k^i}\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^i\right)\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(\alpha_k-\mu_k+1)} \end{array}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $i = 1,2,...,n-2$,
et

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{D}^{\alpha_k^{n-1}}\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_2)-\mathrm{D}^{\alpha_k^{n-1}}\mathrm{T}_k(u_1,...,u_n)(t_1)\right| \\ \leq & \left(\begin{array}{l} \frac{\mathrm{L}_k}{\Gamma\left(\alpha_k-\alpha_k^{n-1}+1\right)}\left(2(t_2-t_1)^{\alpha_k-\alpha_k^{n-1}}+\left(t_2^{\alpha_k-\alpha_k^{n-1}}-t_1^{\alpha_k-\alpha_k^{n-1}}\right)\right) \\ \\ +\frac{\mathrm{L}_k\Gamma(n-\mu_k)\left(t_2^{n-1-\alpha_k^{n-1}}-t_1^{n-1-\alpha_k^{n-1}}\right)}{\Gamma\left(n-\alpha_k^{n-1}\right)\left|\Gamma(n-\mu_k)-1\right|\Gamma(\alpha_k-\mu_k+1)} \end{array}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

les membres de droite des inégalités (3.6), (3.7) et (3.8) sont indépendants de $(u_1,...,u_n)$ et tendent vers zéro comme $t_2 - t_1 \to 0$. par conséquent, T est un opérateur équi-continu.
Aussi, $\mathrm{T} : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$, est complètement continu.

Étape 3 : Estimation á priori. On va que

$$\mathrm{F} := \left\{(u_1,...,u_n) \in \mathrm{B} :\ (u_1,...,u_n) = \eta\mathrm{T}(u_1,...,u_n),\ 0 < \eta < 1\right\},$$

est borné .
Pour $(u_1,...,u_n) \in \mathrm{F}$ et $t \in \mathrm{J}$, on a

$$(u_1,...,u_n)(t) = \eta\mathrm{T}(u_1,...,u_n)(t).$$

L'inégalité(3.5), rendements

$$\begin{aligned}
& \|(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathrm{B}} \\
\leq \quad & \eta \max\left(\sum_{j=0}^{n-2} \frac{\left|a_j^k\right|}{j!} + \mathrm{L}_k \mathrm{M}_k, \sum_{j=i}^{n-2} \frac{\left|a_j^k\right|}{\Gamma\left(j+1-\alpha_k^i\right)} + \mathrm{L}_k \mathrm{M}_k^i, \mathrm{L}_k \mathrm{M}_k^{n-1}\right) \\
< \quad & \infty. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Par conséquent, F est bornées.
D'après le théorème du point fixe de Scheafer, on conclut que l'opérateur J admet au moin un point fixe qui est la solution du système (2.1) . ■

2 Application

Exemple 3.1 *Considére le systèm fractionnaire*

$$
\begin{cases}
D^{\frac{7}{2}} u_1(t) = \\
\dfrac{e^t \cos\begin{pmatrix} u_1(t) + D^{\frac{1}{2}} u_1(t) + D^{\frac{3}{2}} u_1(t) + D^{\frac{5}{2}} u_1(t) \\ + u_2(t) + D^{\frac{2}{3}} u_2(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{7}{3}} u_2(t) \end{pmatrix}}{2\pi + \sin\begin{pmatrix} u_3(t) + D^{\frac{3}{4}} u_3(t) + D^{\frac{5}{4}} u_3(t) + D^{\frac{11}{4}} u_3(t) \\ + u_4(t) + D^{\frac{1}{6}} u_4(t) + D^{\frac{11}{6}} u_4(t) + D^{\frac{13}{6}} u_4(t) \end{pmatrix}} \\
+ \frac{2}{\pi}\left(\int_0^t \frac{\sin u_1(\tau)}{\tau^2+\pi} d\tau + \int_0^t \frac{\cos u_2(\tau)}{e+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{\sin u_3(\tau)}{(\tau+e^\tau)} d\tau\right), \\
D^{\frac{11}{3}} u_2(t) = \\
\dfrac{\cos\left(u_1(t) D^{\frac{1}{2}} u_1(t) D^{\frac{3}{2}} u_1(t) D^{\frac{5}{2}} u_1(t)\right) \sin\left(u_2(t) D^{\frac{2}{3}} u_2(t) D^{\frac{4}{3}} u_2(t) D^{\frac{7}{3}} u_2(t)\right)}{e - \cos\left(u_3(t) D^{\frac{3}{4}} u_3(t) D^{\frac{5}{4}} u_3(t) D^{\frac{11}{4}} u_3(t) + u_4(t) D^{\frac{1}{6}} u_4(t) D^{\frac{11}{6}} u_4(t) D^{\frac{13}{6}} u_4(t)\right)} \\
+ \frac{t}{\pi+e}\left(\int_0^t \frac{\sin u_1(\tau)}{\tau^2+\pi} d\tau + \int_0^t \frac{\cos u_2(\tau)}{e+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{\sin u_3(\tau)}{(\tau+e^\tau)} d\tau\right), \\
D^{\frac{13}{4}} u_3(t) = \\
\dfrac{\sin\left(u_3(t) D^{\frac{3}{4}} u_3(t) D^{\frac{5}{4}} u_3(t) D^{\frac{11}{4}} u_3(t) + u_4(t) D^{\frac{1}{6}} u_4(t) D^{\frac{11}{6}} u_4(t) D^{\frac{13}{6}} u_4(t)\right)}{2e^t - \cos\left(u_1(t) D^{\frac{1}{2}} u_1(t) D^{\frac{3}{2}} u_1(t) D^{\frac{5}{2}} u_1(t) + u_2(t) D^{\frac{2}{3}} u_2(t) D^{\frac{4}{3}} u_2(t) D^{\frac{7}{3}} u_2(t)\right)} \\
+ \left(t^2+1\right)\left(\int_0^t \frac{\sin u_1(\tau)}{\tau^2+\pi} d\tau + \int_0^t \frac{\cos u_2(\tau)}{e+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{\sin u_3(\tau)}{(\tau+e^\tau)} d\tau\right), \\
D^{\frac{19}{6}} u_4(t) = \\
\dfrac{\cos\left(u_1(t) D^{\frac{1}{2}} u_1(t) D^{\frac{3}{2}} u_1(t) D^{\frac{5}{2}} u_1(t) - u_4(t) D^{\frac{1}{6}} u_4(t) D^{\frac{11}{6}} u_4(t) D^{\frac{13}{6}} u_4(t)\right)}{3(t+1) + \cos\left(u_2(t) D^{\frac{2}{3}} u_2(t) D^{\frac{4}{3}} u_2(t) D^{\frac{7}{3}} u_2(t) - u_3(t) D^{\frac{3}{4}} u_3(t) D^{\frac{5}{4}} u_3(t) D^{\frac{11}{4}} u_3(t)\right)} \\
+ \frac{2te^t}{4\pi^2}\left(\int_0^t \frac{\sin u_1(\tau)}{\tau^2+\pi} d\tau + \int_0^t \frac{\cos u_2(\tau)}{e+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{\sin u_3(\tau)}{(\tau+e^\tau)} d\tau\right), \\
t \in [0,1], \\
u_1(0) = \sqrt{3},\ u_1'(0) = -1,\ u_1''(0) = -\sqrt{2}, \\
u_1'''(1) = D^{\frac{5}{2}} u_1(1), \\
u_2(0) = \sqrt{2},\ u_2'(0) = -1,\ u_2''(0) = 1, \\
u_2'''(1) = D^{\frac{8}{3}} u_2(1), \\
u_3(0) = 3\sqrt{2},\ u_3'(0) = \frac{1}{2},\ u_3''(0) = -\sqrt{3}, \\
u_3'''(1) = D^{\frac{9}{4}} u_3(1), \\
u_4(0) = 2\sqrt{3},\ u_4'(0) = \sqrt{2}+1,\ u_4''(0) = 2\sqrt{5}, \\
u_4'''(1) = D^{\frac{7}{3}} u_4(1).
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

on a : $n = 4$, $\alpha_1 = \frac{7}{2}$, $\alpha_2 = \frac{11}{3}$, $\alpha_3 = \frac{13}{4}$, $\alpha_4 = \frac{19}{6}$, $\alpha_1^1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1^2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_1^3 = \frac{5}{2}$,
$\alpha_2^1 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2^2 = \frac{4}{3}$, $\alpha_2^3 = \frac{7}{3}$, $\alpha_3^1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3^2 = \frac{5}{4}$, $\alpha_3^3 = \frac{11}{4}$,
$\alpha_4^1 = \frac{1}{6}$, $\alpha_4^2 = \frac{11}{6}$, $\alpha_4^3 = \frac{13}{6}$, $\mu_1 = \frac{5}{2}$, $\mu_2 = \frac{8}{3}$, $\mu_3 = \frac{9}{4}$, $\mu_4 = \frac{7}{3}$.

Puisque l'hypothèse de Théorème 2.3 est satisfaite, le système (3.10) a au moins une solution sur J.

Conclusion

À la fin de ce mémoire, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires. Tout d'abord, on présente les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail. Après avoir rappelé quelques fonctions élémentaire du calcul fractionnaire, et quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire de Riemann-liouville et de Caputo. Par la suite, nous avons énoncé un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un système non linéaire fractionnaire. En fin, dans le troisième chapitre on a discuté l'existence d'une solution au moins ainsi que la stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée pour une nouvelle classe d'équations fractionnaires.

Bibliographie

[1] K.Bouguerr, THÉORÈME DU POINT FIXE ET APPLIQUATIONS AUX ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. MÉMOIRE DE MASTER, 2016/2017, UniversitÉ Mohamed Boudiaf de M'sila. 1

[2] Z. Dahmani and A. Taïeb, New Existence and Uniqueness Results for High Dimensional Fractional Differential Systems, *Facta Nis Ser. Math. Inform,* Vol. 30, No. 3, (2015), pp. 281-293. 11

[3] Z. Dahmani and A. Taïeb, Solvability for High Dimensional Fractional Differential Systems with High Arbitrary Orders, *Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems,* Vol. 7, No. 4, (2015), pp. 51-64. 11

[4] Z. Dahmani and A. Taïeb, A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders, *ROMAI Journal,* Vol. 11, No. 2, (2015), pp. 141-177. 11

[5] Z. Dahmani and A. Taïeb, Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions, *PALM Letters,* No. 5, (2015), pp. 29-36. 20

[6] Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui, Solvability and Stability for Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of High Fractional Orders, *Facta Nis Ser. Math. Inform,* Vol. 31, No. 3, (2016), pp. 629-644. 20

[7] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order in : Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics Udine* 1996, CISM Courses Lectures 378, Springer, Vienna (1997), pp. 223–276. 20

[8] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics,* World Scientific Publishing Company, Singapore, (2000). 11

[9] R. W. Ibrahim, Ulam Stability of Boundary Value Problem, *Kragujevac Journal Math,* Vol. 37, No. 2, (2013), pp. 287-297. 20

[10] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies,* Elsevier, Amsterdam, Vol. 204, (2006). 4, 8, 11

[11] F. Mainardi, *Fractional calculus, Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics,* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Vienna, (1997). 11

[12] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,* Wiley, New York, (1993). 11

[13] M.Salhi,APPLICATION DE QUELQUES THÉORÈME DU POINT FIXE POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES. MASTER, MAI 2016, UniversitÉ KASDI MERBAH OUARGLA. 2, 4, 6, 8, 9

[14] S.Salmi, SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. MÉMOIRE DE MASTER,Juin2020, FacultÉ des Sciences Exactes et d'Informatique. 2, 4, 6, 8, 9

[15] A. Taïeb and Z. Dahmani, A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involving m Nonlinear Terms, *Georjian Math. Journal*, Vol. 23, No. 3, (2016), pp. 447-458. 11

[16] A.Taïeb and Z. Dahmani, The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities, *Kragujevac Journal Math*, Vol. 40, No. 2, (2016), 238-259. 20

[17] A. Taïeb and Z. Dahmani, A New Problem of Singular Fractional Differential Equations, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theory*, Vol. 14, No. 2, (2016), pp. 161-183. 20

[18] A. Taïeb and Z. Dahmani, On Singular Fractional Differential Systems and Ulam-hyers Stabilities, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, Vol.14, No. 3, (2016), pp. 262-282. 20

[19] A. Taïeb and Z. Dahmani, Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 10 (1) Jan. 2019, pp. 55-67. 11

[20] A. Taïeb and Z. Dahmani,Triangular System of Higher Order Singular Fractional Differential Equations, *Kragujevac Journal of Math,* Accepted 2018. 11

[21] A. Taïeb, Several Results for High Dimensional Singular Fractional Systems Involving n^2-Caputo Derivatives, *Malaya Journal of Matematik,* Vol. 6, No. 3, (2018), pp. 569-581. 20

[22] B.Tellab, RÉSOLUTION DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES. THèse de DOCTEUREN SCIENCE, 2018,UniversitÉ des Frères Mentouri Constantine-1. 2, 4

[23] A.Ta\"(ı)b,ÉTUDE ANALYTIIQUE DRS ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES ET APPLICATIONS. THÈSE DE DOCTORAT LMD, Juin 2016, Université de Mostaganem e-biblio.univ-mosta.dz. 2, 4

[24] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou, Ulam Stability and Data Dependence for Fractional Differential Equations with Caputo Derivative, *Electronic J Quali TH Diff Equat*, No. 63, (2011), pp.1-10. 20