UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIUQUE

Mémoire de Master en Mathématiques option Modélisation, Controle et Optimisation (MCO)

intitulé

Critère de Régularité des Solutions Faibles des Equations Magnétohydrodynamique (MHD) en Terme de Champ Rotationnel

Présenté par

OUKIL Lemya

Soutenu le 06/2021

Devant le jury

Mme	Bechaoui	Khadidja	**Présidente**	MAA	**U. MOSTAGANEM.**
Mme	Hammou	Amouria	**Examinateur**	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Mme	Diala	Horiya	**Encadreur**	MAA	**U. MOSTAGANEM.**

Remerciements

Mes remerciements vont tout particulièrement, à Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la force durant toutes ces années d'études.

Je remercie vivement Madame Diala Horiya, Professeur à l'université de Mostaganem. Sincèrement, grâce à lui j'ai pu apprendre beaucoup de choses pour mes travaux académiques et professionnelles. Grâce à lui j'ai pu valoriser mes travaux en m'assurant les meilleures conditions. Ce travail a été réalisé sous sa direction sans relâche et avec beaucoup de compétence conseils ont permis de mener à bien l'ensemble de mes recherches.

J'accorde mes remerciements à toutes les membres de jury.

J'adreusse aussi mes remerciements à tous et à tous les étudiants de ma promotion pour leur soutien et leur esprit scientifique ainsi qu'à tous mes enseignants de mon parcours universitaire.

Je garde le meilleur pour la fin, je m'incline respectueusement devant deux êtres à qui je dois mon existence, ma mère et mon père. Je leur exprime mes hauts et profonds signes de reconnaissance et d'obéissance pour tous les efforts qu'ils ont généreusement faits, pour que je grandisse dans des parfaites conditions d'amour, de satisfaction et d'épanouissement. sachez que la fierté que je vois dans vos yeux est mon moteur et c'est à vous que je dédie le résultat de ce travail ainsi qu'à mon cher frère Rabeh et ma soeur Kheira. Un très grand merci à toute ma famille.

Ce mémoire doit beaucoup aux nombreuses personnes qui m'ont encouragé, soutenu et conforté au long de toutes ces années. Qu'elles trouvent dans ce travail l'expression de mes plus sincères remerciements. J'en oublie certainement encore et je m'en excuse. Je remercie enfin toutes les personnes intéressées par mon travail, en espérant qu'elles puissent trouver dans ce mémoire des explications utiles pour leurs propres travaux.

Table des matières

INTRODUCTION

La magnétohydrodynamique (MHD) est une branche de physique consacrée à l'étude des mouvements des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques. C'est une généralisation de l'hydrodynamique (appelée plus communément mécanique des fluides, définie par les équations de Navier-Stokes) couplée à lélectromagnétisme (équation de Maxwell).

La MHD est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas(stabilisation, expulsion ou compression), elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmo-phénomènes, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides.

Dans ce travail ,on considère les équations magnétohydrodynamique (MHD) visqueuse et incompressible en dimension trois :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u - \Delta u + u.\nabla u - b.\nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b - \Delta b + u.\nabla b - b.\nabla u = 0, \\ \nabla.u = \nabla.b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad b(x,0) = b_0(x), \end{array}\right.$$

•t représente le temps ;

•$u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ désigne le champ de vitesse ;

•$b \in \mathbb{R}^3$désigne le champ magnétique ;

•$p = p(x,t)$ désigne le scalaire de la pression ;

•u_0 et b_0 sont le champ de vitesse initiale et le champ magnétique initiale avec l'équation d'incompressibilité $\nabla.u_0 = \nabla.b_0 = 0$;

pour simplifier, on suppose que les forces externes aient un scalaire potentiel inclus dans le gradint de la pression.

Il est bien connu [6] que le problème précédant est localement bien posé pour toute $u_0, b_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ avec $s \geq 3$. Quelques critères de type de Serrin fondamentaux en terme de régularité de la vitesse a été fait seulement dans [1] et [17] de façon indépendante. Récemment, des extensions sont basées sur ces deux documents de base, Chen, Miao et Zhang [9] et [10] ont prouvé la régularité par la condition $\Delta_j(\nabla \times u)$; Zhou et Gala [18] ont prouvé la régularité pour u et ∇u dans les espaces de multiplicateurs ; Wang [15] à prouvé la régularité pour $u \in L^2(0;T;BMO)$. et Y.Zhou [16] à prouvé la régularité par la condition $\nabla \times u$ la rotation de vitesse.

Ce travail est décomposé en trois chapitres. Le premier chapitre est contient des espaces fonctionnels et outils d'analyse Harmonique. Dans le deuxième chapitre on a étudié le critère de régularité des solutions faibles des équations magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateur. Dans le dernier chapitre, on a étudié le critère de régularité des solutions faibles des équations magnétohydrodynamique en termes de champ rotationnel.

Chapitre 1

Préliminaires et outils d'analyse harmonique

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques.

Définition 1.0.1 *pour $1 \leqslant p < \infty$, on définit l'espace L^P comme l'ensemble des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\| f \|_{L^p} = [\int_{\mathbb{R}^3} | f(x) |^p \, dx]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

S'il existe un $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $| f | \leqslant C$ presque partout, on dit que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec la norme $\| \, . \, \|_{L^\infty}$ définie par

$$\| f \|_{L^\infty} = \inf \{C \in \mathbb{R}_+ ; | f | \leq C \text{ presque partout}\}.$$

Lemme 1.0.1 *de Gronwall [11] dit que :*
Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $C \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varphi \in L^1([0,T])$ une fonction positive, et soit
$f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, vérifiant

$$f(t) \leq C + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq C. \exp\left(\int_0^t \varphi(s)ds\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

Définition 1.0.2 *Les espaces L^p_{loc} est défini comme suit :*
Soit $1 \leqslant p < \infty$. on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ si $f \ X_k \in L^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$, où X_k est la fonction caractéristique.

1.1 Les espaces de Sobolev

On va utilisé les espaces de Sobolev dans l'étude des équations aux dérivées partielles [3], comme elles sont très important sur cette étude.

Définition 1.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit les espaces de Sobolev suivants :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \ t.q. D_i u \in L^2(\Omega) \ \ pour\ tout\ i = 1, ..., N \right\}.$$

Dans cette définition, l'orsequ'on dit $D_i u \in L^2(\Omega)$.
"il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle D_i f, \varphi \rangle_{D^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g\varphi dx$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$."
Pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq m \right\}$.
muni de la norme

$$\|u\|_{H^r}^2 = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}} \hat{u}(\xi) \right\|_{L^2}^2 < +\infty.$$

Remarque 1.1.1 *Les espaces $H^r(\mathbb{R}^3)$ sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^r} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}} .\hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

De plus, si $r_1 \geq r_2$, on a $H^{r_1} \subset H^{r_2}$ et l'injection est continue.

Rappelons la définition des espaces de Sobolev homogènes.

Définition 1.1.2 *Soit $|r| < \frac{3}{2}$. On définit l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^r$ comme suit*

$$\|u\|_{\dot{H}^r}^2 = \left\| |\xi|^r \hat{u}(\xi) \right\|_{L^2}^2 = \left\| (-\Delta)^{\frac{r}{2}} u \right\|_{L^2}^2.$$

Si $r = 0$, $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ coïncide avec $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Par conséquence de la définition de $\dot{H}^r$, on a le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Soit $f \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$, et soit $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda > 0$. Alors*

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r - \frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}; \forall r \in \left[0, \frac{3}{2}\right[.$$

Preuve. Soit $f \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$

$$\|f\|_{\dot{H}^r} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} \left|\hat{f}_\lambda(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r}\ \lambda^{-6} \left|\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\lambda z|^{2r}\ \lambda^{-6}\ \lambda^3 \left|\hat{f}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{avec } z = \frac{\xi}{\lambda} \\
&= \lambda^{\frac{2r-3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |z|^{2r} \left|\hat{f}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda^{\frac{2r-3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Signalons aussi le lemme suivant :

Lemme 1.1.2 *Pour tout* $0 \leq r \leq 1$, *on a*

$$\|w\|_{\dot{H}^r} \leq C \|\nabla w\|_{L^2}^r \|w\|_{L^2}^{1-r}.$$

Preuve. pour tout $0 < r < 1$ on a

$$\begin{aligned}
\|w\|_{\dot{H}^r} &= \left\||\xi|^r \hat{w}\right\|_{L^2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\hat{w}(\xi)|^{2r} |\hat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{r}$ et $q = \frac{1}{1-r}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \hat{w}(\xi)|^{2r} |\hat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \hat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^r \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-r},$$

On trouve

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \hat{w}(\xi)|^{2r} |\hat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1-r}{2}} \\ &\leq \||\xi| \hat{w}\|_{L^2}^r \|\hat{w}\|_{L^2}^{1-r} \\ &\leq \|\nabla \hat{w}\|_{L^2}^r \|\hat{w}\|_{L^2}^{1-r}.\end{aligned}$$

D'après Plancherel $\|\hat{w}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2}$.

Donc

$$\|w\|_{\dot{H}^r} \leq C \|w\|_{L^2}^{1-r} \|\nabla w\|_{L^2}^r.$$

$\square$

D'après la définition des espaces de Sobolev, on déduit que pour tout $0 \leq r < \frac{3}{2}$:

$$H^r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{H}^r(\mathbb{R}^3).$$

Corollaire 1.1.1 *On trouve aussi le résultat d'inclusion suivant :*

$$\dot{H}^r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-2r}}(\mathbb{R}^3),$$

pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$.

Chapitre 2

Critère de régularité des solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateur homogène $\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)$

2.1 Les epaces de multiplicateur homogène $\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)$

Les équations magnétohydrodynamique à été introduite par Lemarié-Rieusset [8] et [2] et aussi utilisée par Zhou-Gala [18]. Commençons par rappeler un espace de multiplicateur.

Définition 2.1.1 *Pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$, on définit l'espace de multiplicateur homogène $\dot{X}_r$ par*

$$\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{ f \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right) : \forall g \in \dot{H}^r\left(\mathbb{R}^3\right) \quad fg \in L^2 \right\},$$

où

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}.$$

On a les propositions suivantes [18] :

Proposition 2.1.1 *Soit $0 \leq r < \frac{3}{2}$. on a*

1. $\|f(. + x_0)\|_{\dot{X}_r} = \|f\|_{\dot{X}_r} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^3,$

2. $\|f(\lambda .)\|_{\dot{X}_r} = \frac{1}{\lambda^r}\|f\|_{\dot{X}_r}$; $\lambda > 0$.

L'intérêt de l'espace $\dot{X}_r$ tient tout d'abord à son invariance par le changement d'échelle de l'équation :

$$\|f_\lambda\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0;T;\dot{X}_r\right)} = \|f\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0;T;\dot{X}_r\right)},$$

où $\quad f_\lambda(x,t) = \lambda f\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$, $\forall \lambda > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^3$,

puis à la chaîne d'inclusions suivantes :

Proposition 2.1.2 *Pour* $0 \leq r < \frac{3}{2}$ *on a*

$$\dot{H}^{\frac{3}{2}-r} \subset L^{\frac{3}{r}} \subset \dot{X}_r.$$

la première inclusion est classique, on renvoie le lecteur à [4] et nous démontrons seulement la dernière.

Preuve. soit $f \in L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ d'après l'injection de Sobolev $\dot{H}^r \subset L^q$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{r}{3}$. En utilisant l'inégalité de Hölder, il résult que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}\|g\|_{L^q} \\ &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}\|g\|_{\dot{H}^r}, \end{aligned}$$

et

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|f \cdot g\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}.$$

Donc $\|f\|_{\dot{X}_r} \leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}$. □

2.2 L'équation magnétohydrodynamique dans les espaces de multiplicateur

Définition 2.2.1 *L'équation magnétohydrodynamique en dimension trois définie comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u - \Delta u + u.\nabla u - b.\nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b - \Delta b + u.\nabla b - b.\nabla u = 0, \\ \nabla .u = \nabla .b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad b(x,0) = b_0(x), \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

où $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ est le champ de vitesse, $b \in \mathbb{R}^3$ est le champ magnétique, $p = p(x,t)$ est le scalaire de la pression, tandis que u_0 et b_0 sont la vitesse initiale et le champ magnétique initiale avec $\nabla.u_0 = \nabla.b_0 = 0$.

Pour s'abstraire des difficultés dues aux condition aux limites, on suppose que le fluide remplit tout l'espace (donc x décrit $\mathbb{R}^3$ tout entier).

On aura besoin des espaces fonctionnels suivants [12].

$C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'espace des fonctions φ tels que $\varphi \in (C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3))^3$ et $\operatorname{div}\varphi = 0$ c'est-à-dire

$$C_{0,\sigma}^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{\varphi \in \left(C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 : \operatorname{div}\varphi = 0\right\} \subseteq \left(C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3.$$

$L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^3)$ est défini comme suit

$$L_{\sigma}^2\left(\mathbb{R}^3\right) = \overline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)}^{\|.\|_{L^2}} = \left\{u \in L^2\left(\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 : \operatorname{div} u = 0\right\},$$

$H_{\sigma}^r(\mathbb{R}^3)$ le complété de $C_{0,\sigma}^{\infty}$ dans $H^r(\mathbb{R}^3)$.

2.2.1 Les solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique au sens de Leray

Définition 2.2.2 *[12] soient $(u_0, b_0) \in L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^3)$ et $T > 0$. La fonction mesurable (u, b) sur $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ est dite solution faible de (2.2.1) sur $(0,T)$ si u vérifier les propriétés suivantes*

1. $$(u,b) \in L^{\infty}\left((0,T)\,; L_{\sigma}^2\right) \cap L^2\left((0,T)\,; H_{\sigma}^1\right) \qquad \text{pour tout } \; T > 0.$$

2. *$u(t)$ est continue par rapport le temps t de topologie faible de L_{σ}^2 avec $\langle u(t), \phi\rangle \to \langle a, \phi\rangle$ quand $t \to 0^+$, pour tout $\phi \in L_{\sigma}^2$.*

2.3 Critère de régularité pour solution faible aux équations (MHD) dans l'espace de multiplicateur homogène

On va étudié le critère de régularité de solution faible de l'équation MHD dans l'espace de multiplicateur homogène et qui énoncer comme suit :

Théorème 2.3.1 *[18] supposons que la vitesse initiale et le champ magnétique $u_0, b_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Si le champ de vitesse vérifier :*

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0, T; \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

avec $r \in [0, 1[$. Le gradient de champ de vitesse vérifier

$$\nabla u \in L^{\frac{2}{1-\gamma}}\left(0, T; \dot{X}_\gamma\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

et $\gamma \in [0, 1]$. Alors

$$(u, b) \in L^\infty\left(0, T; H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \cap L^2\left(0, T; H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Donc la solution (u, b) est régulière.

Preuve. Premièrement, nous traitons le cas $u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0, T; \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ et $r \in [0, 1[$. Par dérivation la première et la deuxième équation de 2.2.1 par rapport à x_k, nous prenons le produit scalaire avec $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \partial_k u$ et $\frac{\partial b_k}{\partial x_k} = \partial_k b$, respectivement et intégrer sur $\mathbb{R}^3$. On a la première équation de 2.2.1

$$\partial_t u - \Delta u + u.\nabla u + \nabla p - b.\nabla b = 0.$$

On dérive par rapport à x_k

$$\partial_t \partial_k u - \Delta \partial_k u + \partial_k u.\nabla u + u.\nabla \partial_k u + \nabla \partial_k p - \partial_k b.\nabla b - b.\nabla \partial_k b = 0.$$

Ensuite le produit scalaire avec $\partial_k u$

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t \partial_k u, \partial_k u\rangle - \langle \Delta \partial_k u, \partial_k u\rangle + \langle \partial_k u.\nabla u, \partial_k u\rangle + \langle u.\nabla \partial_k u, \partial_k u\rangle \\ &+ \langle \nabla \partial_k p, \partial_k u\rangle - \langle \partial_k b.\nabla b, \partial_k u\rangle - \langle b.\nabla \partial_k b, \partial_k u\rangle = 0.\end{aligned}$$

Or

$$\langle \nabla \partial_k p, \partial_k u\rangle = -\langle \partial_k p, \partial_k \operatorname{div} u\rangle = 0 \qquad \textit{car} \operatorname{div} u = 0,$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\partial_t |\partial_k u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \partial_k u|^2 dx \;&=\; -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u.\nabla) u.\partial_k u dx - \int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla) \partial_k u.\partial_k u dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b.\nabla) b.\partial_k u dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla) \partial_k b.\partial_k u dx.\end{aligned}$$

Mais

$$-\int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla)\,\partial_k u.\partial_k u dx = 0.$$

Car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla)\,\partial_k u.\partial_k u dx &= \int_{\mathbb{R}^3} u.\nabla\partial_k u.\partial_k u dx \\
&= \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u.\partial_i\partial_k u.\partial_k u dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u.\partial_i\left(\partial_k u.\partial_k u\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u.\nabla\left(\partial_k u.\partial_k u\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(u)\,.\left(\partial_k u.\partial_k u\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\partial_k u\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k u.\nabla\right) u.\partial_k u dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k b.\nabla\right) b.\partial_k u dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k u dx.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Deuxième équation de 2.2.1

$$\partial_t b - \Delta b + u.\nabla b - b.\nabla u = 0.$$

On dérivé par rapport à x_k

$$\partial_t\partial_k b - \Delta\partial_k b + \partial_k u.\nabla b + u.\nabla\partial_k b - \partial_k b.\nabla u - b.\nabla\partial_k u = 0.$$

Ensuite le produit scalaire avec $\partial_k b$

$$\langle\partial_t\partial_k b, \partial_k b\rangle - \langle\Delta\partial_k b, \partial_k b\rangle + \langle\partial_k u.\nabla b, \partial_k b\rangle + \langle u.\nabla\partial_k b, \partial_k b\rangle - \langle\partial_k b.\nabla u, \partial_k b\rangle - \langle b.\nabla\partial_k u, \partial_k b\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\partial_t\left|\partial_k b\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla\partial_k b\right|^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k u.\nabla\right) b.\partial_k b dx - \int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k b dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_k b.\nabla\right) u.\partial_k b dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k u.\partial_k b dx.
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k b dx = 0.$$

Car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (u.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k b dx &= \int_{\mathbb{R}^3} u.\nabla\partial_k b.\partial_k b dx \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u.\partial_i\partial_k b.\partial_k b dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u.\partial_i\left(\partial_k b.\partial_k b\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u.\nabla\left(\partial_k b.\partial_k b\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(u)\,.\left(\partial_k b.\partial_k b\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\partial_k b\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u.\nabla)\, b.\partial_k b dx + \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b.\nabla)\, u.\partial_k b dx \qquad (2.3.2) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k b dx.
\end{aligned}$$

Avec

$$\int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k u dx + \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k u.\partial_k b dx = 0.$$

Par l'intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k b.\partial_k u dx &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(b_i.\partial_i\partial_k b_j\right).\partial_i u_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_i b_j.b_j\right).\partial_k\partial_i u_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_j.\partial_k\partial_i u_j.\partial_i b_j dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla)\,\partial_k u.\partial_k b dx.
\end{aligned}$$

On fait la somme de 2.3.1 et 2.3.2 on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\partial_k u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_k b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\partial_k b\right\|_{L^2}^2 \\
= & -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u.\nabla\right)u.\partial_k u dx + \int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b.\nabla\right)b.\partial_k u dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u.\nabla\right)b.\partial_k b dx + \int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b.\nabla\right)u.\partial_k b dx \\
= & A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Pour le premier terme A_1

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u.\nabla\right)u.\partial_k u dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left(\partial_k u_1, \partial_k u_2, \partial_k u_3\right).\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right)u.\left(\partial_k u_1, \partial_k u_2, \partial_k u_3\right)dx_1dx_2dx_3 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right).\left(u_1, u_2, u_3\right)\left(\partial_k u_1, \partial_k u_2, \partial_k u_3\right)dx_1dx_2dx_3 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \partial_k u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \partial_k u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right. \\
&\quad \left. + \partial_k u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\left(\partial_k u_1, \partial_k u_2, \partial_k u_3\right)dx_1dx_2dx_3 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\partial_k u_1 + \left(\partial_k u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\partial_k u_2 \\
&\quad + \left(\partial_k u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \partial_k u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \partial_k u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\partial_k u_3 dx_1dx_2dx_3 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u_i.\partial_i u_j\right).\partial_k u_j dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k u_i\right)u_j\left(\partial_i\partial_k u_j\right)dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq \left\|u\nabla u\right\|_{L^2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2} \\
&\leq \left\|u\right\|_{\dot{X}_r}\left\|\nabla u\right\|_{\dot{H}^r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

On utilise lemme (1.1.2) avec $w = \nabla u$

$$\left\|w\right\|_{\dot{H}^r} \leq \left\|\nabla w\right\|_{L^2}^r \left\|w\right\|_{L^2}^{1-r}\ .$$

On obtient

$$A_1 \leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r}.$$

Même estimation pour A_2

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b.\nabla)\, b.\partial_k u dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b.\nabla b.\partial_k u_i dx \\ &= -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k \partial_k b.\nabla b_i + \partial_k b.\nabla \partial_k b_i)\, u_i dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} |u| \, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \\ &\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{\dot{H}^r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r} . \end{aligned}$$

Troisième terme A_3

$$\begin{aligned} A_3 &= -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u.\nabla)\, b.\partial_k b dx = -\langle \partial_k u, \nabla b.\partial_k b\rangle = \langle \partial_k (\nabla b.\partial_k b)\, , u\rangle \\ &= \langle (\nabla \partial_k b.\partial_k b + \nabla b.\partial_k \partial_k b)\, , u\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \partial_k b.\partial_k b + \nabla b.\partial_k \partial_k b)\, u dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u| \, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}. \end{aligned}$$

Pour dèrnier terme A_4 égale

$$\begin{aligned} A_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k b.\nabla)\, u.\partial_k b dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b_i.\partial_j u_i.\partial_k b_i dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b_j.u_i.\partial_k \partial_j b_i dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u| \, |\nabla b| \left|\nabla^2 b\right| dx \\ &\leq \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente 2.3.3 devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\partial_k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \partial_k u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\partial_k b\|_{L^2}^2 + \|\nabla \partial_k b\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3\, \|u\|_{\dot{X}_r} \|\nabla b\|_{L^2}^{1-r} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq k \leq 3$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla b\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3\|u\|_{\dot{X}_r}\|\nabla b\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}. \\ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \|u\|_{\dot{X}_r}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1+r} + 3\|u\|_{\dot{X}_r}\|\nabla b\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{1+r}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} + 3\left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}} \\ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & C_1\left[\left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\right]^{\frac{2}{1-r}} + \frac{1}{2}\left[\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}}\right]^{\frac{2}{1+r}} \\ & +C_2\left[\left(\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\right]^{\frac{2}{1-r}} + \frac{1}{2}\left[\left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+r}{2}}\right]^{\frac{2}{1+r}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & C_1\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + C_2\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \frac{C}{2}\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On implique que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & C\|u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

On applique le lemme (1.0.1) à 2.3.4 on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right] \leq \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left(C\int_0^T\|u(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}dt\right).$$

Puisque

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,T;\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Et
$$\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right) < +\infty.$$
Alors
$$\sup_{0\leq t\leq T}\left[\|\nabla u\,(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\,(.,t)\|_{L^2}^2\right] < +\infty.$$
Donc
$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u\,(.,t)\|_{H^1}^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{0\leq t\leq T}\|b\,(.,t)\|_{H^1}^2 < +\infty.$$
Ce qui implique
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad \|b\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2 < +\infty.$$
D'où
$$(u,b) \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$
D'autre coté on intègre 2.3.4 par rapport à t avec $0 \leq t \leq T$
$$\begin{aligned}
&\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] - \left[\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right] + \int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\,(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\,(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt\\
\leq\;& C\int_0^T \|u\,(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\,(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\,(.,t)\|_{L^2}^2\right) dt\\
\leq\;& C^{'}\int_0^T \|u\,(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} dt.
\end{aligned}$$
Car
$$(u,b) \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$
Donc
$$\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\,(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\,(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt \leq \infty,$$
implique
$$\int_0^T \|b\,(.,t)\|_{H^2}^2\, dt + \int_0^T \|u\,(.,t)\|_{H^2}^2\, dt \leq \infty,$$
donc
$$(u,b) \in L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$
D'où
$$(u,b) \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Pour $r = 1$ lemme (1.1.2) devient

$$\|w\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla w\|_{L^2}.$$

Alors

$$A_1 \leq \|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad A_2 + A_3 + A_4 \leq 3\|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2.$$

On obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] + \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 &\leq \|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + 3\|u\|_{\dot{X}_1} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\ &\leq 3\|u\|_{\dot{X}_1} \left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

Après l'intégration par rapport à t

$$\begin{aligned}&\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 - \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \|\nabla b_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt \\ \leq\ & 6\int_0^T \left[\|u(.,t)\|_{\dot{X}_1} \left(\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right)\right] dt. \qquad (2.3.5)\end{aligned}$$

Comme $(u_0, b_0) \in H^1$ donc 2.3.5 devient

$$\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2 \leq C$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 &\leq 6\int_0^T \left[\|u(.,t)\|_{\dot{X}_1} \left(\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right)\right] dt \\ &\quad -2\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt + C \\ &\leq \left[6\|u\|_{L^\infty\left(0,T;\dot{X}_1\right)} - 2\right] \left[\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right] dt\right] + C.\end{aligned}$$

Pour $\|u\|_{L^\infty\left(0,T;\dot{X}_1\right)}$ très petit $\left(\|u\|_{L^\infty\left(0,T;\dot{X}_1\right)} \leq \frac{\xi}{3} \leq \frac{1}{3}\right)$ On trouve

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2 + 2(1-\xi)\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right] dt \leq C.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 &< \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right] dt < \infty \\ \sup_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|_{\dot{H}^1}^2 &< \infty \quad \text{et} \quad \sup_{0\leq t\leq T} \|b(.,t)\|_{\dot{H}^1}^2 < \infty \\ \int_0^T \left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 dt &< \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2 dt < \infty.\end{aligned}$$

Ceci donne

$$(u,b) \in L^{\infty}\left(0,T;H^{1}\left(\mathbb{R}^{3}\right)\right) \cap L^{2}\left(0,T;H^{2}\left(\mathbb{R}^{3}\right)\right).$$

Le cas $\nabla u \in L^{\frac{2}{1-\gamma}}\left(0,T;\dot{X}_{\gamma}\left(\mathbb{R}^{3}\right)\right)$ et $\gamma \in [0.1]$,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k u.\nabla u.\partial_k u dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u| \, |\nabla u \nabla u| \, dx \\
&\leq \|\nabla u \nabla u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla u\|_{\dot{H}^\gamma} \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Même estimation pour A_2

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b.\nabla b.\partial_k u dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla b| \, |\nabla b \nabla u| \, dx \\
&\leq \|\nabla b \nabla u\|_{L^2} \|\nabla b\|_{L^2} \\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Pour le terme A_3

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \partial_k u.\nabla b.\partial_k b dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u \nabla b| \, |\nabla b| \, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme A_4

$$\begin{aligned}
A_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k b.\nabla u.\partial_k b dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla b \nabla u| \, |\nabla b| \, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc

$$A_2 + A_3 + A_4 \leq 3 \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma} \|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma} \left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma}.$$

Alors 2.3.3 devient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}\|\nabla u\|_{L^2}^{2-\gamma}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{\gamma}+3\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}\|\nabla b\|_{L^2}^{2-\gamma}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^{\gamma} \\
\leq\ & \left(\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}+3\left(\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}.
\end{aligned}$$

Avec $\frac{2-\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=1$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{\beta}{2}\|\nabla u\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \beta_1\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\beta_2\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla b\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2 \\
\leq\ & \frac{\beta}{2}\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right]+\left\|\nabla^2 b\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\leq\beta\|\nabla u\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right). \quad (2.3.6)$$

On applique lemme (1.0.1) à 2.3.6

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right]\leq\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left(\beta\int_0^T\|\nabla u(.,t)\|_{\dot{X}_\gamma}^{\frac{2}{2-\gamma}}dt\right).$$

Puisque

$$\nabla u\in L^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(0,T;\dot{X}_\gamma\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

et

$$\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)<+\infty.$$

Alors

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left[\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2+\|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right]<+\infty.$$

Donc

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(.,t)\|_{H^1}^2<+\infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{0\leq t\leq T}\|b(.,t)\|_{H^1}^2<+\infty.$$

Ce qui implique

$$\|u(.,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2<+\infty \qquad \text{et} \qquad \|b(.,t)\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}^2<+\infty.$$

Donc

$$(u,b) \in L^{\infty}\left(0,T;H^{1}\left(\mathbb{R}^{3}\right)\right).$$

D'autre côté on intègre 2.3.6 par rapport à t avec $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
&\left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right] - \left[\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right] + \int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt \\
\leq\ & \beta \int_0^T \|\nabla u(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} \left(\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2\right) dt \\
\leq\ & \beta' \int_0^T \|\nabla u(.,t)\|_{\dot{X}_r}^{\frac{2}{1-r}} dt.
\end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\|u(.,t)\|_{H^1}^2 + \|b(.,t)\|_{H^1}^2\right] < \beta'' \\
\int_0^T \left[\left\|\nabla^2 b(.,t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|_{L^2}^2\right] dt &\leq \infty.
\end{aligned}$$

Implique

$$\int_0^T \|b(.,t)\|_{H^2}^2 dt \leq \infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^T \|u(.,t)\|_{H^2}^2 dt \leq \infty.$$

Donc la solution

$$(u,b) \in L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

d'où

$$(u,b) \in L^{\infty}\left(0,T;H^{1}\left(\mathbb{R}^{3}\right)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

ce qui donne que la solution faible (u,b) est régulière. □

C'est la fin de la preuve de théorème (2.2.1). Ce théorème reste vraie pour l'équation de Navier-Stokes avec $b \equiv 0$, alors on a donné une extension de critère de régularité (type de Serrin) de l'équation Navier-Stokes.

Chapitre 3

Critère de régularité des solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique en terme de champ rotationnel

L'espace de Morrey-Companato $\dot{M}_{p,q}$joue un rôle très important dans la régularité des solutions de l'équation aux dérivée partielle voir [5] et [14]

3.1 L'espace de Morrey-Companato $\dot{M}_{p,q}$

Nous rappelons dans cette partie la définition de l'espace de Morrey-Companato et quelques propriétés de cet espace.

Définition 3.1.1 *Pour $1 < p \leq q \leq +\infty$, l'espace de Morrey-Companato $\dot{M}_{p,q}$est définit par*

$$\dot{M}_{p,q} = \left\{ f \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right) : \|f\|_{\dot{M}_{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,R))} \right\}, \tag{3.1.1}$$

où $B(x,R)$ désigne la boule fermé du centre x et de rayon R.

Remarque 3.1.1 *L'espace $\dot{M}_{p,q}(\mathbb{R}^3)$ est un espace de Banach de norme $\|\|_{\dot{M}_{p,q}}$*

Lemme 3.1.1 *Pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\|f(\lambda.)\|_{\dot{M}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{M}_{p,q}}.$$

Preuve. Pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $f \in \dot{M}_{p,q}$ on a

$$\begin{aligned} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\| f(\lambda .)\right\|_{L^p(B(x,R))} &= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left(\int_{B(x,R)} \left| f(\lambda y)\right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left(\lambda^{-3} \int_{B(x,R)} \left| f(z)\right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{avec } z = \lambda y \\ &= R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{p}}} \left(\int_{B(x,R)} \left| f(z)\right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} \left\| f(\lambda .)\right\|_{\dot{M}_{p,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\| f(\lambda .)\right\|_{L^p(B(x,R))} \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\| f\right\|_{L^p(B(x,R))} \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \left\| f\right\|_{\dot{M}_{p,q}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| f(\lambda .)\right\|_{\dot{M}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \left\| f\right\|_{\dot{M}_{p,q}}.$$

$\square$

Remarque 3.1.2 *L'espace de Morrey-Companato peut être considérée comme un complément à l'espace L^p, on a le lemme suivant*

Lemme 3.1.2 *Pour $1 < p \leq q$ on a*

$$L^q = \dot{M}_{q,q} \subset \dot{M}_{p,q}.$$

Et on a le cas particulier $q = \frac{3}{r}$ avec $p \geq 2$,

$$L^{\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{M}_{p,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Preuve. On a pour toute $f \in \dot{M}_{q,q}$,

$$\begin{aligned} \left\| f\right\|_{\dot{M}_{q,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{q}} \left\| f\right\|_{L^q(B(x,R))} \\ &= \left\| f\right\|_{L^q(B(x,R))} \leq \left\| f\right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

D'autre côté

$$\left\| f\right\|_{\dot{M}_{q,q}} \geq \left\| f\right\|_{L^q(B(x,R))}.$$

Alors

$$L^q = \dot{M}_{q,q}.$$

Et on a

$$\|f\|_{\dot{M}_{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^q(B(x,R))}.$$

Puisque $p \leq q$ alors $R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \leq 1$

Donc

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{M}_{p,q}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^q(B(x,R))} \\ &\leq \|f\|_{L^q(B(x,R))}.\end{aligned}$$

D'où

$$L^q = \dot{M}_{q,q} \subset \dot{M}_{p,q}.$$

$\square$

En raison du lemme suivant données dans [7] :

Lemme 3.1.3 *Pour $0 \leq r < \frac{3}{2}$, l'espace $\dot{Z}_r$est défini comme l'espace de $f(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ tel que*

$$\|f\|_{\dot{Z}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{B}^r_{2,1}}\leq 1} \|fg\|_{L^2} < \infty.$$

Alors $f \in \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}$si et seulement si $f \in \dot{Z}_r$de norme équivalente.

Et le fait que

$$L^2 \cap \dot{H}^1 \subset \dot{B}^r_{2,1} \subset \dot{H}^r \qquad \text{pour } 0 < r < 1.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1.4 *Pour $0 < r \leq 1$ on a*

$$\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Preuve. Soit $f \in \dot{X}_r(\mathbb{R}^3)$ avec $0 < R \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$ tel que $\varphi \equiv 1$ sur$B\left(\frac{x_0}{R}, 1\right)$ on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}\left(\int_{|x-x_0|\leq R}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}\left(R^3\int_{\left|y-\frac{x_0}{R}\right|\leq 1}|f(Ry)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{avec } x = Ry \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r-\frac{3}{2}}R^{\frac{3}{2}}\left(\int_{\left|y-\frac{x_0}{R}\right|\leq 1}|f(Ry)\,\varphi(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|f(Ry)\,\varphi(y)|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} R^{r}\,\|f(Ry)\,\varphi(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} \|f\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sup_{0<R\leq 1} \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}\,\|\varphi\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}} \leq C\,\|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}.$$

D'où

$$\dot{X}_r \subset \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}.$$

□

On a le lemme suivant qui sera utilisé dans la preuve de notre résultat.

Lemme 3.1.5 *Pour $0 < r < 1$, on a*

$$\|f\|_{\dot{B}^r_{2,1}} \leq C\,\|f\|_{L^2}^{1-r}\,\|\nabla f\|_{L^2}^{r},$$

où C ne dépend que de r. L'idée de la preuve vient de [13].

Proposition 3.1.1 *Soit $w = \operatorname{curl} u$*

On a

$$\|\nabla u\|_{\dot{M}_{p,\frac{3}{r}}} \leq \|w\|_{\dot{M}_{p,\frac{3}{r}}}. \tag{3.1.2}$$

L'idée de la preuve vient de [19]

Remarque 3.1.3 *Par le prolongement $L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \subset \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ d'améliorer nos résultat dans [1] et [17] et [18]. En fait, on peut trouver que l'espace $\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ est très grand.*

3.2 Critère de régularité pour solution faible aux équations (MHD) de terme de champ rotationnel

Dans cette partie on a étudié le critère de régularité de solution faible de l'équation MHD en terme de champ rotationnel ; nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat.

Théorème 3.2.1 *Soit* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $b_0 \in L^4 \cap L^2(\mathbb{R}^3)$. *Supposons que* (u,b) *est une solution faible de l'équation MHD* 2.2.1 *dans* $]0,T)$ *avec* $0 < T \leq \infty$. *Si le champ rotationnel* $w = \nabla \times u$ *vérifier*

$$w \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right) \quad \text{pour } 0 < r \leq 1.$$

Alors la solution faible

$$(u,b) \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Donc la solution (u,b) *est régulière.*

Preuve. Pour démontrer le théorème (2.2.1) premièrement nous devons créer $b \in L^\infty(0,T;L^4)$ et $|b|\ \nabla b \in L^2(0,T;L^2)$, si $w \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$ pour $0 < r \leq 1$. D'abord, nous considérons le cas $0 < r < 1$. Nous multiplions les deux membres de la second équation de 2.2.1 par $b\,|b|^2$, l'intégration sur $\mathbb{R}^3$ pour obtenir, avec l'aide de l'intégration par parties.

$$\partial_t b - \Delta b + u.\nabla b - b.\nabla u = 0.$$

Devient

$$\left\langle \partial_t b, b\,|b|^2 \right\rangle - \left\langle \Delta b, b\,|b|^2 \right\rangle + \left\langle u.\nabla b, b\,|b|^2 \right\rangle - \left\langle b.\nabla u, b\,|b|^2 \right\rangle = 0.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t b.\,|b|^2\,bdx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla b.\nabla b\,|b|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} 2\,|b|^2.\left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla u)\,|b|^2\,bdx = 0.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |b|^2\,|\nabla b|^2 + 2\,|b|^2\left|\nabla\,|b|^2\right|^2 dx &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^3} (b.\nabla u)\,|b|^2\,bdx\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left||b|^2.\nabla u\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left|b^2\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\||b|^2\,\nabla u\right\|_{L^2}.\left\|b^2\right\|_{L^2} \\
&\leq C\,\|\nabla u\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}} \left\||b|^2\right\|_{\dot{B}^r_{2,1}} \left\|b^2\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.5)

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\int_{\mathbb{R}^3}|b|^2|\nabla b|^2+2|b|^2\left|\nabla|b|^2\right|^2dx\le C\|\nabla u\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}\left\||b|^2\right\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla|b|^2\right\|_{L^2}^{r}\|b\|_{L^4}^2.$$

D'après 3.1.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\int_{\mathbb{R}^3}|b|^2|\nabla b|^2+2|b|^2\left|\nabla|b|^2\right|^2dx &\le C\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}\|b\|_{L^4}^{2(2-r)}\||b|\nabla b\|_{L^2}^{r}\\ &\le C\left(\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4\right)^{\frac{2-r}{2}}\left(\||b|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^{\frac{r}{2}}.\end{aligned}$$

On applique Inégalité de Young,

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\||b|\nabla b\|_{L^2}^2\le\frac{2-r}{2}\left(\frac{C}{\xi}\right)^{\frac{2}{2-r}}\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4+\frac{r}{2}\xi^{\frac{2}{r}}\||b|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

On choisit ξ pour que $\frac{r}{2}\xi^{\frac{2}{r}}=\frac{1}{2}$. Alors

$$\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4+\||b|\nabla b\|_{L^2}^2\le C_r\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4. \tag{3.2.1}$$

Puisque $w\in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$, il résulte de l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\|b\|_{L^4}^4\le C_r\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b\|_{L^4}^4. \tag{3.2.2}$$

On applique le lemme (1.0.1) à 3.2.2

$$\|b(.,t)\|_{L^4}^4\le C_r\|b_0\|_{L^4}^4\exp\left(\int_0^T\|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt\right). \tag{3.2.3}$$

Donc

$$\sup_{0<t\le T}\|b(.,t)\|_{L^4}^4<\infty.$$

D'où $b\in L^\infty(0,T;L^4)$

Pour $0<t\le T$ on intègre 3.2.1, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|b\|_{L^4}^4-\|b_0\|_{L^4}^4+\int_0^T\||b|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2dt &\le C_r\int_0^T\|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\|b(.,t)\|_{L^4}^4dt\\ &\le C_r\int_0^T\|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\sup_{0<t\le T}\|b(.,t)\|_{L^4}^4dt\\ &\le C_r\|b\|_{L^\infty(0,T;L^4)}^4\int_0^T\|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}dt,\end{aligned}$$

On a utilisé 3.2.3

$$\begin{aligned}\int_0^T \||b|\,\nabla b\,(.,t)\|_{L^2}^2\,dt &\leq C_r\,\|b\|_{L^\infty(0,T;L^4)}^4 \int_0^T \|w\,(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\,dt + \|b_0\|_{L^4}^4 \\ &\leq C_r\,\|b_0\|_{L^4}^4 \exp\left(\int_0^T \|w\,(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\,dt\right)\int_0^T \|w\,(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\,dt + \|b_0\|_{L^4}^4\,.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Donc

$$\||b|\,\nabla b\,(.,t)\|_{L^2}^2 < \infty.$$

D'où $|b|\,\nabla b \in L^2\,(0,T;L^2)$. Maintenant on démontre que $u \in L^\infty\,(0,T;H^1\,(\mathbb{R}^3)) \cap L^2\,(0,T;H^2\,(\mathbb{R}^3))$.

On multiplier la première équation de 2.2.1 par Δu, et après on intègre par partie comme suit

$$\langle \partial_t u, \Delta u\rangle - \langle \Delta u, \Delta u\rangle + \langle (u.\nabla u)\,,\Delta u\rangle - \langle (b.\nabla b)\,,\Delta u\rangle + \langle \nabla p, \Delta u\rangle = 0.$$

Avec $\langle \nabla p, \Delta u\rangle = -\langle p, \Delta\,\mathrm{div}\,u\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle \nabla\partial_t u, \nabla u\rangle + \langle \Delta u, \Delta u\rangle &= \langle (u.\nabla)\,u, \Delta u\rangle - \langle (b.\nabla)\,b, \Delta u\rangle \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

On obtient I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle (u.\nabla)\,u, \Delta u\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\left((u_1,u_2,u_3)\,.\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right).\,(u_1,u_2,u_3)\,.\Delta u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right).\,(u_1,u_2,u_3)\,.\Delta u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3},u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3},u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right).\Delta u dx \\ &= \sum_{k,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_k.\partial_k u_j.\Delta u_j dx \\ &= -\sum_{k,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_i u_k.\partial_k u_j.\partial_i u_j dx.\end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= -\langle (b.\nabla)\,b, \Delta u\rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\left((b_1,b_2,b_3)\,.\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right).\,(b_1,b_2,b_3)\,.\Delta u dx \\ &= -\sum_{k,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} b_k.\partial_k b_j.\Delta u_j dx.\end{aligned}$$

Par l'intégration par partie

$$I_2 = -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i b_k b_j \partial_k \partial_i u_j dx - \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_k.\partial_i \partial_k u_j.\partial_i b_j dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^4}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 &= -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i u_k.\partial_k u_j.\partial_i u_j dx \\ &\quad -\sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i b_k b_j \partial_k \partial_i u_j dx - \sum_{k,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} b_k.\partial_i \partial_k u_j.\partial_i b_j dx \\ &= I + II + III. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On trouve

$$\begin{aligned} |I| &\leq \|\nabla u.\nabla u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{\dot{B}^{r}_{2,1}} \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}} \|\nabla u\|_{L^2}^{2-r} \|\Delta u\|_{L^2}^{r} \\ &\leq C\left(\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-r}{2}} \left(\|\Delta u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{r}{2}} \\ &\leq \frac{1}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 . \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De même, par l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} II + III &\leq C\|\Delta u\|_{L^2} \||b|\,\nabla b\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\||b|\,\nabla b\|_{L^2}^2 , \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^4}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C\|w\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C\||b|\,\nabla b\|_{L^2}^2 . \tag{3.2.8}$$

On applique le lemme (1.0.1) à 3.2.8

$$\begin{aligned} \|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 &\leq C\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right) + \\ &\quad \left(\int_0^T \||b|\,\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 dt\right) \exp\left(\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right). \end{aligned}$$

On utilise 3.2.4

$$\begin{aligned}\|\nabla u(.,t)\|_{L^2}^2 &\le C\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right) + \left\{C_r \|b_0\|_{L^4}^4 \exp\left(\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right)\right. \\ &\quad \left.\times \int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + C\|b_0\|_{L^4}^4\right\} \exp\left(\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt\right),\end{aligned}$$

puisque $w \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0,T;\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)\right)$. Alors

$$\sup_{0<t\le T} \|u(.,t)\|_{H^1}^2 < \infty.$$

Donc

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Ensuite, nous obtenons l'estimation de Δu, on intègre 3.2.8 par rapport à t

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\Delta u(.,t)\|_{L^2}^2 dt &\le C\int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 dt \\ &\le C\sup_{0<t\le T}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 dt \\ &\le C\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \int_0^T \|w(.,t)\|_{\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} dt + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T \||b|\nabla b(.,t)\|_{L^2}^2 dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^T \|u(.,t)\|_{H^2}^2 dt < \infty.$$

Alors $u \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$ par conséquent $u \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$, ce qui donne que (u,b) est régulière. $\square$

Pour le cas $r=1$, nous avons besoin de l'espace BMO [12]

Définition 3.2.1 *Une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ appartient à l'espace BMO s'il existe $A>0$ telle que :*

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int_{y\in B(x,R)} |f(y)-a|\,dy \le A < \infty.$$

Où $B = B(x,R)$ est une boule de $\mathbb{R}^3$, et $a = \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{y\in B(x,R)} f(y)\,dy$.
On note $\|f\|_{BMO} = \inf A$.

Exemple 3.2.1 *La fonction $\log|x| \in BMO$.*

Lemme 3.2.1 *Si* $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *et* $\nabla f \in \dot{M}_{2,3}$*, alors* $f \in BMO(\mathbb{R}^3)$*.*

Preuve. Par l'inégalité de poincaré, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \left| f(y) - m_{B(x,R)} f(y) \right|^2 dy &\leq CR^2 \int_{B(x,R)} \left| \nabla f(y) \right|^2 dy \\
&\leq CR^3 \left\| \nabla f \right\|^2_{\dot{M}_{2,3}}.
\end{aligned}$$

Avec $B(x,R)$ est une boule de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\left\| f \right\|_{BMO} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{R>0} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \left| f(y) - m_{B(x,R)} f(y) \right|^2 dy \\
&\leq C \left\| \nabla f \right\|^2_{\dot{M}_{2,3}}.
\end{aligned}$$

$\square$

D'après 3.1.2 et le lemme (3.2.1) et si $w \in L^2\left(0, T; \dot{M}_{2,3}\right)$, alors $u \in L^2(0, T; BMO)$. Et d'après le théorème (2.1) dans [15] la démonstration est complète.

CONCLUSION

Ce travail nous a permis de conclure que les espaces de Sobolev et les espaces de multiplicateur et les espaces de Morrey-Companato sont des outils très important et très adapté à l'étude des équations aux dérivées partielles par exemple l'équation magnétohydrodynamique.

En effet, les solutions faibles de l'équation magnétohydrodynamique (MHD) sont régulières sous les conditions suivantes :

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left(0, T; \dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

avec $r \in [0, 1[$ où le gradient de champ de vitesse vérifier

$$\nabla u \in L^{\frac{2}{1-\gamma}}\left(0, T; \dot{X}_\gamma\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

avec $\gamma \in [0, 1]$.

Ou bien le champ rotationnel

$$w = \nabla \times u \in L^{\frac{2}{2-r}}\left(0, T; \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \qquad \text{pour } 0 < r \leq 1,$$

avec $\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \dot{M}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)$,

Donc on a fait une extension de critère de régularité pour des solutions faibles aux équations magnétohydrodynamique (MHD) dans $\dot{X}_r\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\dot{M}_{2,\frac{3}{r}}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Et on peut améliorer ce critère de régularité au cas des espaces de Besov d'indices négatifs.

Bibliographie

[1] **C. He, Z. Xin,** On the regularity of solutions to the magneto-hydrodynamics equations, J. Differential Equations 213(2) (2005), 235–254.

[2] **G. P. Lemarité-Rieusset ;Gala, S,** Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation. J. Math. Anal. 322(2) (2006), 1030–1054.

[3] **H. Brézis,** Analyse fonctionelle. La première édition, Dunod Paris, 1999.

[4] **L. Triebel.** Theory of function spaces, Birkhauser,1992.

[5] **M. E.** Taylor, Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolutions equations, Comm. Partial Differential Equations 17 (1992)1407–1456.

[6] **M. Sermange, R. Temmam,** Some mathematical equations related to the MHD equations. Commun. Pure Appl. Math 36(5), (1983), 635–664

[7] **P. G.** Lemarié-Rieusset, the Navier-Stokes equations in the critical Morrey-Companato space, Rev. Mat, Iberoam. 23(3)(2007), 897–930.

[8] **P. G. Lemarié-Rieusset** : Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 431. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton(2002).

[9] **Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang. :** On the regularity criterion of weak solution for the 3D viscous magneto-hydrodynamics equations. Commum. Math. phys. 284(3)(2008), 919–930.

[10] **Q.Chen, C.Miao, Z.Zhang.** : The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magneto-hydrodynamics equations. Commum. Math. phys. 275(3)(2007), 861–872.

[11] **S. D.** Chatterji cours d'analyse 3 ; 1998.

[12] **S. Gala,** :Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations. 53(6)(2008)561–582.

[13] **S. Machihara, T, Ozawa.** : Interpolation inequalities in Besov spaces, Pro. Amer. Math. Soc,131 (2003), 1553–1556.

[14] **T. Kato**, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces, Bol.Soc. Bras. Mat. 22(2) (1992), 127–155.

[15] **Y. Wang .** : BMO and the regularity criterion for weak solutions to the magnetohydro-dynamic equations. J. Math. Anal. Appl. 328(2) (2007), 1082–1086.

[16] **Y. Zhou ;** Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations . Ann. Inst. H. Poincar Anal. Nonlinaire 24(3) (2007), 491–505.

[17] **Y. Zhou,** Remarks on regularities for the 3D MHD equations. Discrete Continuous Dyn. Syst. 12 (2005), 881–886.

[18] **Y. Zhou, S. Gala,** Regularity criteria for the solutions to the 3D MHD equations in the multiplier space, Z.Angew. Math. Phys. (2009), in press.

[19] **Y. Zhou, S. Gala,** A new Regularity criteria for weak solutions to the viscous MHD equations in terms of the vorticity field, Nonlinear Analysis 72(2010), 3643–3648.