MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Analyse Fonctionnelle**

THEME :

Surfaces de translation de courbures de Gauss nulle dans l'espace H^2xR

Etudiant : **DJAFFAR OUMHANI**

Président : FETTOUCH HOUARI, MCB, UMAB
Examinateur : MOHAMMEDI MUSTAPHA, MCB, UMAB
Encadrant : BELARBI LAKEHAL, MCA, UMAB

Année Universitaire 2020/2021

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mostaganem - Abdelhamid ibn Badis (UMAB)

◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité **:** Analyse Fonctionnelle

Thème :

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Surfaces de translation de courbures de Gauss nulle dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Présenté par :

⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎

DJAFFAR OUMHANI

⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎⁎

Soutenue le :

2019

devant le jury composé de **:**

Président	:	Mr FETTOUCH Houari
Examinateur	:	Mr MOHAMMEDI Mustapha
Encadreur	:	Mr BELARBI Lakehal

Année Universitaire 2020 -2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah le tout puissant pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur BELARBI Lakehal. Son encadrement a été exceptionnel. Je le remercie chaleureusement pour son écoute, sa patience pour ses conseils toujours avisés et ses remarques pertinentes, ainsi qu'a l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions.

Je voudrais aussi remercier chacun des membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce modeste travail.

J'exprime également toute ma profonde gratitude à Monsieur FETTOUCH Houari qui me fait l'honneur de bien vouloire présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur MOHAMMEDI Mustapha pour sa disponibilité.

J'adresse également mes remerciements à tous les enseignants qui nous ont donné les bases de la science.

Table des matières

1 Résumé

Dans le présent, nous étudions certains types de surfaces plates de translation paramétrisées par $X(x, y) = \alpha(x) * \beta(y)$ ou $X(x, y) = \beta(y) * \alpha(x)$, obtenues comme produit de deux courbes α et β lisses, qui ne sont pas orthogonales , où $*$ désigne l'opération interne dans le groupe $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche.

2 Introduction

L'objet de ce travail est la classification des surfaces plates de translation dans le groupe $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche.

Dans [15] S.Rahmani a classifié les métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois.

Dans [12] R.López et M.I.Munteanu donnent une classiffication de toutes les surfaces minimales de translation dans l'espace Sol_3.

Dans [7] J.Inoguchi, R.López et M.I.Munteanu ont définié six types des surfaces de translation dans le groupe de Heisenberg Nil_3 de dimention 3 obtenu sous la forme de deux courbes situées dans des planes qui ne sont pas orthogonales et ils ont étudié la condition de minimalité pour chaque type.

Dans [21], D.W.Yoon, C.W.Lee et M.K.Karacan ont étudié les surfaces minimales de translation dans l'espace $\mathbb{H}^3$ de dimention 3 muni d'une métrique Riemannienne.

Dans [22], D.W.Yoon, étudié les surfaces minimales de translation dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de dimention 3 muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche.

Dans [23], D.W.Yoon, étudié les surfaces plates de translation dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de dimention 3 muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche.

Dans [13] et [14], ils ont montrer que modulo d'un automorphisme de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg existent trois classes de métriques lorentziennes invariantes sur le groupe de Heisenberg dont l'un est plate.

M.Bekkar et Z.Hanifi ont montré dans leur document [1] que les surfaces planes, hélicoidales, paraboloides, hyperboliques et certaines surfaces de translation sont définies par des intégrales elliptiques vérifiant l'équation des surfaces minimales dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ doté d'une métrique lorentzienne invariante à gauche g_3 qui est donnée par :

$$g_3 = dx^2 + dy^2 - (dz + \xi(ydx - xdy))^2.$$

Dans notre travail précédent [23] nous avons classé DEUX types de surfaces plates de translation dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de dimension 3 muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche. Notre but dans ce travail est de classifier certains types de surfaces plates de translation de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche $g_{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2$.

Ce mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre est réservé aux rappelles et définitions des outiles mathématiques de géomètrie euclidienne, Riemannienne et semi-Riemannienne. On rappelle la définition d'une variété topologique, variété différentielle, l'espace tangent, variété Riemannienne, métrique Riemannienne. On donne la définition de la connexion linéaire, connexion de **Levi-Civita**, symboles de Christoffel (la formule de Koszul), et la courbure (tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et la courbure scalaire). On rappelle la définition de la première et la deuxième forme fondamentale, la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré à l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, on commence d'abord par la métrique Riemannienne invariante à gauche dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. On donne la base orthonormé de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et on calcule les crochets de Lie. On cacule la connexion linéaire et la connexion de Levi-Civita, le tenseur de Ricci, la courbure de Ricci et la courbure scalaire. On cherche l'équation des surfaces plates telles que, on calcule les coefficients de la première et deuxiéme formes fondamentales puis on remplace dans la relation de la courbure de Gauss qui l'on pose égale à zéro on obtient à la fin l'équation des surfaces plates.

Le derniér chapitre contient et concerne les surfaces plates de translation dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

L'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ peut être vu comme le produit de deux variétés le dmi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche $g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$, et l'espace $\mathbb{R}$ muini d'une métrique Euclidienne $g_{\mathbb{R}} = dz^2$. L'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ est muni d'une métrique Riemannienne invariante à gauche donné par :

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} &= \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2 \\ &= (dx, dy, dz)(g_{ij}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où (dx, dy, dz) est un champ de vecteurs et $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est la matrice donnée par :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous rappelons que la lois de composition interne dans le groupe $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ est donné par :

$$(x, y, z) \star (x', y', z') = (x'y + x, yy', z + z').$$

Où $*$ désigne l'opération de groupe dans le groupe $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ est un groupe de Lie tridimensionnel, connecté et simplement connecté.

3 Chapitre 1 : Variétés Riemanniennes

Ce chapitre est élémentaire , au sens où la plus part des concepts étudiés sont des outils nécessaires pour le reste de ce mémoire. On va rappeler quelques définitions fondamentales sur la théorie des variétés Riemanniennes on appuyant sur les courbures et on donnant quelques exemples pour comprendre les notions et pour manipuler les différents calculs.
Pour les détails voir ([6],[11],[9])

remarque : par fois on a utilisé logiciel Maple pour faire les calculs .

4 Espace Tangent

4.1 Vecteur tangent

Définition 4.1.
Soit M une variété différentiable et $x \in M$. Une application $A_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ est appelée une dérivation en x , si elle satisfait les règles suivantes : pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

1. $A_x(f+g) = A_x(f) + A_x(g)$.
2. $A_x(f.g) = A_x(f).g(x) + f(x).A_x(g)$.
3. *f est constante au voisinage de $x \Rightarrow A_x(f) = 0$.*

L'ensemble de toutes les dérivations en x , s'appelle l'espace tangent de M en x , il est noté T_xM.Par définition un vecteur tangent de M en x est un membre de T_xM.

Remarque 1.

1. *T_xM est un espace vectoriel de dimension n .*
2. *Soit $\{(U;\varphi)\}$ une carte locale en point $x \in M$.*
   i) $\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n)$ les coordonnées locales au voisinage de x.
   ii) une base de T_xM est donnée par les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$.
3. *$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ est appelé le fibré tangent a M.*
4. *T_x^*M l'espace cotangent a M en x . On sait que localement $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$ est une base de T_xM. On note par $(dx^i|_x)$ sa base dual , nous avons $\langle dx^i|_x; \frac{\partial}{\partial x^i}|_x\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ tel que δ_i^j est le delta Kröneker définit par $\begin{cases} \delta_i^j = 1 & si\ i = j \\ \delta_i^j = 0 & si\ i \neq j \end{cases}$.*
5. *$T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$ est appelé le fibré cotangent a M.*

4.2 Champ de vecteurs

Définition 4.2.
Soit M une variété différentiable.

- *$\pi : TM \to M$ la projection de TM sur M définie par $\pi(x, X) = x$ est une application surjective et de classe C^∞.*
- *Une section de TM est une application $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$.*
- *Une telle section de TM de classe C^∞ est appelée champ de vecteurs sur M. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté par $\mathfrak{X}(M)$.*

Définition 4.3.

Soit M une variété différentiable.
Le crochet de Lie noté $[,]$ est définie par $[X,Y] = XY - YX$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vérifiant les propriété suivantes :

1. $[,]$ *est bilinéaire et antisymétrique.*
2. $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$ *pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
3. $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ *pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $f, g \in C^\infty$.
4. $[X,Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$ *où* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

5 Tenseurs

5.1 Tenseur sur une variété

Définition 5.1.

- *Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{pfois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes \cdots \otimes T_x^*M}_{qfois}$$

- *Un élément $T \in T_x^{(p,q)}M$ est un tenseur de type (p,q) au-dessus de x .Dans une base associe à des coordonnées (x^i au voisinage de x) , il s'écrit*

$$T|_x = T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(x) \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x) \otimes dx^{j_1}|_x \otimes dx^{j_2}|_x \otimes \cdots dx^{j_q}|_x$$

  où, $T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}(x)$ sont des fonctions différentiables de classe C^∞ .

- *On note $T^{(p,q)}M = \bigcup\limits_{x \in M} T_x^{(p,q)}M$ l'espace vectoriel des tenseur de type (p,q) .*

Définition 5.2.

Un champ de tenseur de type (p,q) est une section de classe C^∞ de $T^{(p,q)}M$.L'ensemble des champs de tenseur de type (p,q) est noté par $\mathfrak{T}^{(p,q)}M$.

Exemple 5.1.

— *Une fonction de classe C^∞ sur une variété M est un tenseur de type $(0,0)$*
— *Un champ de vecteurs X est un tenseur de type $(1,0)$.*
— *Une 1-forme différentielle ω sur une variété M est un tenseur de type $(0,1)$*

5.2 Métriques Riemanniennes

Définition 5.3.

Soit M une variété différentiable. Une métrique Riemannienne g sur M est un Tenseur de type $(0,2)$; tel que pour tout $X \in M$ l'application $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire , symétrique , définie positive et non dégénéré.

M muni la métrique g est appelée varieté Riemannienne ,noté $(M;g)$.

Remarque 2.

Dans un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$. Les composantes de g sont $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, où $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est la matrice symétrique inversible associé à g .

Exemple 5.2.

1) $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est une varieté Riemannienne ; où* g_0 *est le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$ *i.e* $g_0(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_i^j$.
2) $D^{\mathrm{n}} = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| < 1\}$ *munie de la métrique hyperbolique* g *définie par* $g(X,Y) = \frac{4}{(1-\|x\|)^2} g_0(X,Y)$, $X,Y \in T_x\mathbb{R}^n$, $x \in D^{\mathrm{n}}$.
Est une varieté Riemannienne .

5.3 Tenseur sur une variété Riemannienne

Définition 5.4.

Un tenseur de type (o,r) *ou (d'ordre r)sur une variété Riemannienne* M *est une application multilinéaire*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r fois} \to C^\infty$$

pour $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M), T(Y_1, \cdots, Y_r)$ *est une fonction différentiable sur* M *linéaire pour chaque argument c'est à dire,*

$$T(Y_1, \cdots, fX + gY, \cdots, Y_r) = fT(Y_1, \cdots, X, \cdots, Y_r) + gT(Y_1, \cdots, Y, \cdots, Y_r)$$

avec $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $f, g \in C^\infty$.

6 Connexion Riemannienne

6.1 Connexion linéaire

Définition 6.1.

Une connexion linéaire sur une variété différentiable M *est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

telle que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $f, g \in C^\infty(M)$

1) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f\nabla_X(Y) + g\nabla_{X'}(Y)$.
2) $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Y')$.
3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$.

Le symbole ∇ est appelé nabla ou del. On dit aussi que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 6.2.

Soit (U, φ) *une carte sur une variété différentiable* M *de dimension n et* $\{x^i\}$ *les coordonnées assocoées pour les quelles on note* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Les symboles de Christoffel d'une connexion ∇ *relativement aux coordonnées* $\{x^i\}$ *sont les* n^3 *fonctions* $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ *définies par*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

où l'on a utilisé la convention d'Einstein pour la sommation sur k.

Lemme 6.3.

Localement, les symboles de Christoffel déterminent entiérement la connexion ∇ *. Plus précisement, pour* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$ *et* $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j \partial_i$*, alors*

$$\nabla_X Y = \big(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\big)\partial_k$$

Preuve :

On développe l'expression,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j \partial_j) \\
&= Y^j \nabla_X \partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \nabla_{\partial_i} \partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \Gamma_{ij}^k \partial_k + X(Y^k)\partial_k \\
&= \big(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\big)\partial_k
\end{aligned}$$

Exemple 6.1. *(Le cas de* $\mathbb{R}^n$ *).*

La connexion standard $\bar{\nabla}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est définie pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *par*

$$\bar{\nabla} := X(Y^j)\partial_j$$

Les composantes du champ résultant sont,

$$(\bar{\nabla}_X Y)^j = X(Y^j) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} = \langle X, gradY^j \rangle = \frac{\partial Y^j}{\partial \overrightarrow{X}}$$

6.2 Torsion d'une connexion

Définition 6.4.

La torsion d'une connexion est le tenseur de type (1 ;2) défini par l'expression

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

T(X, Y) est donc un champ de vecteurs. Par définition, nous remarquons que

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

.

La nullité du tenseur de torsion est équivalente à la relation $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ *pour tous* i, j, k*. En effet, il est facile de constater que ce tenseur est la partie antisymétrique des symboles de Christofel :* $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ *pour tous* i, j, k

Expression locale : *pour* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&- Y^j X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^i Y^j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

6.3 Connexion symétrique

Définition 6.5.
Une connexion linéaire ∇ *sur* M *est dite localement symétrique s'il existe une carte* (U, φ) *sur* M *telle que* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ *pour tous* i, j, k *.*

Proposition 6.1.
Une connexion linéaire ∇ *est symétrique sur* $U \subset M$ *si et seulement si* $T(X, Y) = 0$ *pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ *.*

Définition 6.6.
Une connexion linéaire est dite symétrique si elle est sans torsion i.e. $T = 0$ *.*

6.4 Connexion plate

Définition 6.7.
Une connexion linéaire ∇ *sur* M *est dite localement plate , s'il existe une carte* (U, φ) *sur* M *telle que* $\Gamma_{ij}^k = 0$ *pour tous* i, j, k *.*

Remarque 3.

1) *Toute connexion linéaire localement plate est localement symétrique .*
2) *Une connexion est plate si* $\Gamma_{ij}^k = 0$ *pour tous* i, j, k *sur* M *.*

Proposition 6.2.
Une connexion linéaire ∇ *est plate sur* $U \subset M$ *si et seulement si* $T = 0$ *et* $R = 0$ *sur* U *où* R *est le tenseur e Riemann (voir7.1) .*

6.5 La dérivée covariante d'un tenseur

Définition 6.8.
Soit T *un tenseur de type* (o, r) *ou (d'ordre* r *)sur une variété Riemannienne* M*. La dérivée covariante* ∇T *du tenseur* T *est un tenseur de type* $(0, r+1)$ *ou (d'ordre r+1)défini par*

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = XT(Y_1, ..., Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r)$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*
Pour les composantes $\nabla_m T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p}$ *on a,*

$$\begin{aligned}
\nabla_m T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p} &= \partial_m T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p} \\
&+ \Gamma_{ms}^{i_1} T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{s i_2 \cdots i_p} + \Gamma_{ms}^{i_2} T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 s \cdots i_p} + ... + \Gamma_{ms}^{i_p} T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots s} \\
&- \Gamma_{m j_1}^{s} T_{s j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p} - \Gamma_{m j_2}^{s} T_{j_1 s \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p} - ... - \Gamma_{m j_q}^{s} T_{j_1 j_2 \cdots s}^{i_1 i_2 \cdots i_p}.
\end{aligned}$$

Remarque 4.
Pour plusieurs raisons, il est convenablement d'identifier le champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ *par le tenseur* $X : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ *défini par :*

$$X(Y) = g(X, Y) \qquad \textit{pour tout } Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Exemple 6.2.

$$(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = Xg(Y_1, Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

Remarque 5. *Si le tenseur est de type* $(1,r)$ *alors,*

$$\nabla_X T(Y_1,...,Y_r) = \nabla_X T(Y_1,...,Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1,...,\nabla_X Y_i,...,Y_r)$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$

Définition 6.9. *On dit qu'un tenseur* T *de type* $(0,r)$ *(ou* $(1,r)$*) est parallèl par rapport à* ∇ *si est seulement si* $\nabla T = 0$ *i.é* $\nabla_X T = 0$ *pour tout* $X \in \mathfrak{X}(M)$

6.6 La contraction métrique

Définition 6.10.
La contraction métrique,

$$C_{ab} : Tens_k^l(M) \to Tens_{k-2}^l(M)$$

est définie (en coordonnées) sur les composantes par :

$$(C_{ab}T)_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_l} := g^{pq} T_{j_1,\dots,p,\dots,q,\dots j_{k-2}}^{i_1,\dots,i_l}$$

où p *et* q *sont à la* a *ième et* b*ième position.*

Une divergence d'un champ de tenseur T *est une contraction métrique de* ∇T *avec la dernière composante.*
Si $T \in Tens_2^0(M)$ *est symétrique, alors* T *n'admet qu'une seule divergence, notée* $divT$*.*
On peut dire que l'opération de sommation d'un tenseur d'ordre n *sur deux de ses indices est appelé contraction.*

6.7 Connexion Riemannienne

Définition 6.11.
On dit qu'une connexion linéaire sur une variété Riemannienne $(M;g)$ *est métrique ou Riemannienne si* g *est parallèle i.e.* $\nabla g = 0$*.*

Définition 6.12.
Soit M *une variété Riemannienne. Il existe une unique connexion* ∇ *sur le fibré tangent* TM *telle que :*

(•) *la torsion de* ∇ *est nulle ;*

(•) *la métrique Riemannienne est parallèle.*

On l'appelle la connexion de Levi-Civita de M*.*

Interprétation. L'existence, parmi les connexions métriques (i.e. telles que la métrique soit parallèle) d'une connexion sans torsion (i.e. dont la torsion est identiquement nulle), signifie qu'une métrique Riemannienne est Euclidienne.

Proposition 6.3.
Soit ∇ *une connexion Riemannienne sur* $(M;g)$ *alors,*

$$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M), \qquad Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1}$$

On peut dire aussi que la connexion est compatible avec la métrique g.

Démonstration.

A partir du relation précédente et comme $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ alors,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_Z X + [X,Z]) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) - Zg(Y,X) + g(\nabla_Z Y, X)) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) - Zg(Y,X) + g(\nabla_Y Z + [Z,Y], X) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) - Zg(Y,X) + g([Z,Y],X) + Yg(Z,X) - g(Z, \nabla_Y X) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) - Zg(Y,X) + g([Z,Y],X) + Yg(Z,X) \\
&- g(Z, \nabla_X Y - [X,Y]),
\end{aligned}$$

donc

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) - g(Y,[X,Z]) - Zg(Y,X) + g([Z,Y],X) + Yg(Z,X) + g(Z,[X,Y]) \quad (2)$$

Comme g est non dégénérée, cette relation detérmine complètement la connexion ∇ , ce qui donne l'unicité de ∇ .

- On permute X et Y dans l'égalité 2 et on soustrait membre à membre ce qui donne
  $2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_Y X, Z) = 2g([X,Y], Z)$
  c'est à dire $T(X,Y) = 0$.
- On permute Y et Z dans l'égalité 2 toujours et additionnant membre à membre
  $2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_X Z, Y) = 2Xg(Y,Z)$
  c'est à dire :
  $2(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$

□

Corollaire 1.

Dans un système de coordonnées locales ; les composantes Γ_{ij}^k d'une connexion Riemannienne sont données par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \quad (3)$$

Démonstration.

On a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}$
et sachons que

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\
&+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)
\end{aligned}$$

donc on trouve

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}) &= \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{li}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\\
2g(\Gamma_{ij}^m\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^l}) &= \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\\
\sum_{m=1}^n\Gamma_{ij}^m g_{ml} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij})\\
\sum_{l=1}^n(\sum_{m=1}^n\Gamma_{ij}^m g_{ml})g^{lk} &= \sum_{l=1}^n\frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij})\\
\sum_{m=1}^n\Gamma_{ij}^m(\sum_{l=1}^n g_{ml}g^{lk}) &= \sum_{l=1}^n\frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij})\\
\sum_{m=1}^n\Gamma_{ij}^m\delta_m^k &= \sum_{l=1}^n\frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij})\\
\Gamma_{ij}^m &= \sum_{l=1}^n\frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}).
\end{aligned}$$

□

Exemple 6.3.
soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. On dit qu'une métrique Riemannienne* g *sur* Ω *est conforme s'il existe une fonction positive* f *telle que*

$$g_{ij}=f^2(x)\delta_{ij},\qquad x\in\Omega$$

On utilise la formule 3 on trouve pour des indices i,j,k deux à deux distincts

$$\Gamma_{ij}^k=0\qquad \Gamma_{ii}^k=-\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^k}\qquad \textit{et}\qquad \Gamma_{ij}^j=\Gamma_{ij}^i=\Gamma_{ii}^i=\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Exemple 6.4.
Soit $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|<1\}$ *la boule ouverte de dimension* n*, munie de la métrique* g *donnée par*

$$g_{ij}(x)=\frac{4\delta_{ij}}{(1-\|x\|^2)^2},\qquad x\in\mathbb{D}$$

posant $f(x)=\frac{2}{1-\|x\|^2}$*,* $x\in\mathbb{D}$*. La fonction* f *est positive sur* $\mathbb{D}$ *, différentiable et*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{4x_i}{(1-\|x\|^2)^2}=f^2(x)x_i,\qquad x\in\mathbb{D}$$

Cela donne, en utilisant l'exemple précédent, :
$\Gamma_{ij}^k=0$ *pour i,j,k distincts deux a deux*
$\Gamma_{ij}^j=\Gamma_{ji}^j=-\Gamma_{jj}^i=\Gamma_{ii}^i=f(x)x_i$ *pour* $i\neq j$

7 Les courbures sur une variété Riemannienne

7.1 Courbure Riemannienne

L'espace euclidien R^n est plat. Cet énoncé banal nécessite des explications. On sait que les géodésiques de R^n sont des droites ou des segments de droites, elles ne sont pas courbées.

L'espace R^n est en ce sens plat. Dans ce numéro, nous allons introduire et développer la notion de courbure d'une variété Riemannienne. Comme pour les géodésiques de R^n, la courbure est souvent synonyme de dérivée du second ordre. Dans notre cadre, la connexion de Levi-Civita et la dérivée covariante jouent le rôle de dérivée du premier ordre. Nous allons donc étudier $\nabla_X \nabla_Y$. Par exemple, en coordonnée dans R^n, on a

$$\nabla_X \nabla_Y Z = XY(Z^i)\partial_i \qquad et \qquad \nabla_Y \nabla_X Z = YX(Z^i)\partial_i$$

dont on déduit

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = (XY - YX)(Z^i)\partial_i$$

Définition 7.1.

La courbure d'une variété Riemannienne $(M; g)$ est un tenseur de type $(1, 3)$, noté $\mathcal{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \qquad \mathcal{R}(X, Y)Z &:= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

Il y a plusieurs raisons pour la notation $\mathcal{R}(X, Y)Z$, notammment le fait qu'on considère souvent l'application $Z \mapsto \mathcal{R}(X; Y)Z$ qui est un champ d'endomorphismes.

Démonstration.

- $\mathcal{R}(X, Y)Z = -\mathcal{R}(Y, X)Z$.
- $\mathcal{R}(fX, gY)hZ = fgh\mathcal{R}(X, Y)Z$ pour tous $X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M), et f, g, h \in C^\infty$.

□

Grâce à la métrique g, nous avons les isomorphismes musicaux $\sharp$ et $\flat$, définis par

$$\sharp : Tens^s_r(M) \to Tens^{s+1}_{r-1} : T \mapsto T^\sharp,$$

$$\flat : Tens^s_r(M) \to Tens^{s-1}_{r+1} : T \mapsto T^\flat.$$

c'est à dire,

$$\sharp : T_pM \to T^*_pM : \omega^\sharp = g^{-1}(\omega, .),$$

$$\flat : T^*_pM \to T_pM : X^\flat = g(X, .).$$

avec $\omega \in T^*_pM$ et $X \in T_pM$.

Définition 7.2.

Le tenseur de courbure de Riemann est le tenseur $R = \mathcal{R}^\flat$ de type $(0, 4)$. Plus précisement

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

On parlera sans distinction de la courbure pour désigner R ou $\mathcal{R}$, ces deux tenseurs étant équivalents.

7.2 La courbure en coordonnées

Soit $p \in M$ et $x^1, ..., x^n$ des coordonnées autour de p . Le tenseur de courbure s'écrit localement,

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l$$

où les coefficients R^l_{ijk} sont définis par,

$$R^l_{ijk}\partial_l = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$$

Le tenseur de Riemann s'écrit a la forme,

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

et ses coefficients sont déterminés par la relation

$$R_{ijkl} = g\big(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\big)$$

Ces coefficients sont donc reliés par,

$$R_{ijkl} = R^m_{ijk} g_{ml},$$

$$R^l_{ijk} = g^{lm} R_{ijkm}.$$

Nous allons calculer les R^l_{ijk} en fonction des symboles de Christoffel Γ^k_{ij}. On rappelle que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ et donc $\nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \equiv 0$. On calcule

$$\begin{aligned}
R^l_{ijk}\partial_l &= R(\partial_i, \partial_j)\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\big(\Gamma^m_{jk}\partial_m\big) - \nabla_{\partial_j}\big(\Gamma^t_{ik}\partial_t\big) \\
&= \Big(\partial_i\big(\Gamma^m_{jk}\partial_m\big) + \Gamma^m_{jk}\Gamma^p_{im}\partial_p\Big) - \Big(\partial_j\big(\Gamma^t_{ik}\partial_t\big) + \Gamma^t_{ik}\Gamma^q_{jt}\partial_q\Big) \\
&= \Big[\big(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\big) + \big(\partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik}\big)\Big]\partial_l.
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu la formule explicite

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right),$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale des champs de vecteurs sur M. On remarque que le tenseur de courbure ne dépend que des coefficients de la métrique g et de leurs dérivées, les symboles de Christoffel ne dépendant eux-mêmes que de g.

Proposition 7.1.

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$.*
2. *$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.*
3. *$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.*
4. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

5. R vérifie l'identité de Bianchi différentielle

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

$\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$
Pour la preuve voir [6], $p90$

Exemple 7.1. *[?]*
Soit (x, y, z, t) *les coordonnées cartésiennes dans* $\mathbb{R}^4$ *.*
Posons $M = N \times (A, B) \subset \mathbb{R}^4$ *où* N *est un ouvert connexe de* R^3 *et* (A, B) *est un intervalle ouvert avec* $B > A > 0$*. Supposons que* $h : (A, B) \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable qui n'est pas nulle en tout* $t \in (A, B)$*.*
Soit (e_i) *une base des champs de vecteurs sur* M *défini par :*
$e_1 = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{t}(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z})$, $e_3 = \frac{1}{t^2 h}\frac{\partial}{\partial z}$, $e_4 = th\frac{\partial}{\partial t}$
Et soit (θ^i) *la base des 1-formes dans* $\mathbb{R}^4$ *données par*
$\theta^1 = tdx$, $\theta^2 = tdy$, $\theta^3 = t^2 h(-2xdy + dz)$, $\theta^4 = \frac{1}{theorem}dt$
Sachant que la métrique g *est définie par* $g = \sum \theta^i \otimes \theta^i$*,utilisant la connexion de Levi-Cevita correspondante à* g *les crochets de Lie non-nuls par rapport à* (e_i) *sont :*
$[e_1, e_2] = 2he_3$; $[e_1, e_4] = he_1$; $[e_2, e_4] = he_2$; $[e_3, e_4] = (2h + th')e_3$
Et suivant la relation

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \end{aligned}$$

i.e $\quad 2g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = g(e_k, [e_i, e_j]) - g(e_j, [e_k, e_i]) + g(e_i, [e_j, e_k])$
On a
$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = -he_4,$
$\nabla_{e_1} e_2 = -\nabla_{e_2} e_1 = he_3,$
$\nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_3} e_1 = -\nabla_{e_2} e_4 = -he_2,$
$\nabla_{e_1} e_4 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = he_1,$
$\nabla_{e_3} e_3 = -(2h + th')e_4,$
$\nabla_{e_3} e_4 = (2h + th')e_3.$
Soit $R_{hijk} = R^k_{hij}$ *les composantes du tenseur de courbure* R *par rapport à la base orthonormée* $\{e_i\}$, $R(e_h, e_i)e_j = \sum_k R_{hijk} e_k$*.donc les composantes non-nulles sont :*
$R_{1212} = 4h^2,$
$R_{1234} = 2h(h + th'),$
$R_{1313} = R_{1324} = R_{1414} = -R_{1423} = R_{2323} = R_{2424} = h(h + th'),$
$R_{3434} = 4h^2 + 7thh' + t^2(h'^2 + hh'').$

7.3 Interprétation géométrique

[11] Pour donner une interprétation géométrique de la courbure, nous devons définir ce qu'est un parallélogramme sur une variété munie d'une connexion. Soit $p \in M$ un point de cette variété, et x, y deux vecteurs tangents à M en p, non colinéaires. La donnée de p et $x \in T_pM$ détermine localement une courbe autoparallèle γ_x (géodésique)telle que $\gamma_x(0) = p$ et $\dot{\gamma}_0 = x$. De même, p et y déterminent une courbe autoparallèle γ_y . Parcourons la courbe γ_x jusqu'à un point $q = \gamma_y(\Delta_x)$ et la courbe γ_y jusqu'à un point $\bar{p} = \gamma_y(\Delta_y)$, pour (Δ_x) et (Δ_y) deux paramètres positifs petits. Ceci définit deux côtés de notre " parallélogramme " : $p \to q$ et $p \to \bar{p}$ (voir Figure (1.1)).
Pour construire les deux autres côtés, nous nous inspirons du cas euclidien : ils doivent être

parallèles aux côtés déjà construits. Pour cela, nous transportons parallèlement le vecteur y le long de γ_x jusqu'à $q = \gamma_y(\Delta_x)$. Nous notons $y' \in T_qM$ le vecteur obtenu. Ce vecteur définit à son tour une courbe autoparallèle δ_y telle que $\delta_y(0) = q$ et $\dot{\delta}_y(0) = y'$. En parcourant cette courbe jusqu'au point $\delta_y(\Delta_y)$, nous construisons le troisième côté, $q \to \delta_y(\Delta_y))$ " parallèle " au côté $p \to \bar{p}$. De la même façon, nous transportons parallèlement le long de γ_y le vecteur x jusqu'à $\bar{p}$: nous obtenons le vecteur x', qui définit à son tour une courbe autoparallèle δ_x, donnant le quatrième côté du parallélogramme, $\bar{p} \to \delta_x(\Delta_x)$, " parallèle " à $p \to q$. Alors,il faut remarquer que les points $\delta_x(\Delta_x)$ et $\delta_y(\Delta_y)$ n'ont aucune raison de coïncider ! Le " parallélogramme " ainsi construit n'est pas nécessairement fermé. Nous allons étudier ce défaut de fermeture pour δ_x et δ_y petits. Dans ce cas, des développements limités sont possibles pour les fonctions coordonnées des points considérés.

Figure 1 – Un parallélogramme dont les côtes sont constitués de courbes autoparallèles ne se referme pas nécéssairement. La courbure de la connexion est l'obstruction à cette fermeture.

En p, nous avons $\dot{\gamma}_x^i(0) = x^i$ et $\dot{\gamma}_y^i(0) = y^i$ Au premier ordre en Δ_x, nous avons donc

$$\gamma_x^i(\Delta_x) = \gamma_x^i(0) + \Delta_x x^i + ...$$

et au premier ordre en Δy

$$\gamma_y^i(\Delta_y) = \gamma_y^i(0) + \Delta_y y^i + ...$$

Le champ de vecteurs le long de γ_x, transporté parallèle de y, vérifie par définition

$$\dot{\gamma}_x^i(x)(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) = 0 \qquad \textit{avec} \qquad Y_{|p} = y$$

Si nous notons $\Delta_x \mapsto Y(\Delta_x)$ ce champ de vecteurs le long de γ_x alors

$$Y^k(\Delta_x) = Y^k(0) + \Delta_x \frac{dY^k}{d\Delta_x}(0) + ...$$

avec

$$\frac{dY^k}{d\Delta_x}(0) = \partial_i Y^k(p) \frac{d\gamma_x^i}{d\Delta_x}(0) = -\Gamma_{ij}^k(p) x^i y^j$$

compte-tenu de l'équation de la courbe autoparallèle. D'où la relation

$$Y^k(\Delta_x) = Y^k(0) - \Delta_x \Gamma_{ij}^k(p) x^i y^j + ...$$

De même, le transporté parallèle $X(\Delta_y)$ de x le long de γ_y vérifie

$$X^k(\Delta_y) = X^k(0) - \Delta_y \Gamma_{ij}^k(p) x^i y^j + ... \qquad \textit{avec} \qquad X_{|p} = x$$

La courbe autoparallèle δy est donc donnée, au premier ordre en Δ_x et Δ_y, par

$$\delta_y^k(\Delta_y) = \gamma_x^k(0) + \Delta_x x^k + \Delta_y y^k - \Delta_x \Delta_y \Gamma_{ij}^k(p) x^i y^j + ...$$

et de même

$$\delta_x^k(\Delta_x) = \gamma_y^k(0) + \Delta_y y^k + \Delta_x x^k - \Delta_x \Delta_y \Gamma_{ji}^k(p) x^i y^j + ...$$

La non fermeture du parallélogramme est mesurée par la différence

$$\delta_x^k(\Delta_x) - \delta_y^k(\Delta_y) = \Delta_x \Delta_y (\Gamma_{ij}^k(p) - \Gamma_{ji}^k(p)) x^i y^j + ...$$

où nous reconnaissons l'expression de la torsion. Ce calcul montre donc que la torsion est une obstruction à la fermeture de parallélogrammes (construits par la méthode précédente).

Considérons maintenant une connexion linéaire de torsion nulle. Le parallélogramme construit ci-dessus se referme donc en $\bar{q} = \delta_x(\Delta_x) = \delta_y(\Delta_y)$. Soit z un vecteur de T_pM. Nous pouvons transporter parallèlement z jusqu'en $\bar{q}$ selon deux chemins : $p \to q \to \bar{q}$ ou $p \to \bar{p} \to \bar{q}$ Examinons le transport selon le premier chemin. Notons z' le transporté parallèle de z le long de γ_x jusqu'à q, et considérons Δ_x petit. Alors nous avons

$$z' = z^k - \Delta_x \Gamma_{ij}^k(p) x^i z^j + ...$$

Notons z^* le transporté parallèle de z' le long de δ_y jusqu'à $\bar{q}$, et considérons Δ_y petit. Alors

$${z^*}^k = z'^k - \Delta_y \Gamma_{ij}^k(q) z'^i z'^j + ...$$

Notons $\quad \Gamma_{ij}^k(q) = (\Gamma_{ij}^k(\Delta_x) \qquad avec \qquad \Gamma_{ij}^k(0) = \Gamma_{ij}^k(p)$

Alors,

$$\Gamma_{ij}^k(\Delta_x = \Gamma_{ij}^k(0) + \Delta_x \partial_l \Gamma_{ij}^k(p) x^l + ...$$

En ne retenant que les termes en Δ_x, Δ_y, et $\Delta_x\Delta_y$, il reste

$$\begin{aligned} {z^*}^k &= z^k - \Delta_x \Gamma_{ij}^k(p) x^i z^i - \Delta_y \Gamma_{ij}^k(p) y^i z^i \\ &+ \Delta_x \Delta_y (\Gamma_{il}^k(p) \Gamma_{sj}^l(p) x^s y^i z^j - \partial_l \Gamma_{ji}^k(p) x^l y^i z^j + \Gamma_{is}^l(p) \Gamma_{lj}^k(p) x^i y^s z^j) + ... \end{aligned}$$

Si maintenant nous transportons parallèlement le vecteur z jusqu'en $\bar{q}$ par le second chemin, nous trouverions la même expression avec x et y intervertis et Δ_x et Δ_y intervertis. En utilisant alors le fait que Γ_{ij}^k est symétrique en i, j (torsion nulle), la différence entre ces deux vecteurs en $\bar{q}$ vaut

$$\Delta_x \Delta_y (\partial_i \Gamma_{jl}^k(p) - \partial_j \Gamma_{il}^k(p) + \Gamma_{is}^k(p) \Gamma_{jl}^s(p) - \Gamma_{js}^k(p) \Gamma_{il}^s(p)) x^i y^j z^l + ...$$

Nous reconnaissons dans ce terme l'expression de la courbure $R(x,y)z$ associée à x,y et z. Ce calcul montre que si l'on transporte parallèlement un vecteur selon un chemin fermé constitué de courbes autoparallèles, le vecteur transporté ne coïncident pas avec le vecteur de départ. La différence est mesurée, pour des chemins infinitésimaux, par la courbure de la connexion linéaire. Remarquons que dans le développement ci-dessus nous n'avons pas considéré les termes en Δ_x^2 et Δ_y^2. Un calcul simple montrerait que ces termes disparaissent dans la différence finale.

7.4 Courbure sectionnelle

Définition 7.3.

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 2$ et P un 2-plan de T_xM de base $\{X, Y\}$. On appelle courbure sectionnelle en x de P le réel K_x défini par,

$$K_x(P) = \frac{g(R(X,Y)Y, X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \neq 0$ et Y par $Y - g(X,Y)X$. On peut donc supposer que $\{X, Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas

$$K_x(P) = g(R(X,Y)Y, X)$$

On vérifie que $K_x(P)$ ne dépend pas de la base orthonormée de P : En effet, si $\{Z, T\}$ est une autre base orthonormale, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a^2 + b^2 = 1$ avec

$$Z = aX + bY \quad , \quad T = -bX + aY.$$

Une simple vérification montre que $g(R(X,Y)Y, X) = g(R(Z,T)T, Z)$.

Définition 7.4.

Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n. On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan P de T_xM, on a

$$K_x(P) = \kappa\,.$$

Exemple 7.2.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, du produit scalaire euclidien $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$, où $g_{ij} = \delta_{ij}$. On vérifie immédiatement que $\Gamma_{ij}^k = 0$, $R_{ijk}^l = 0$ donc $R = 0$. En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ est nulle.

Exemple 7.3.

Suivant l'exemple (6.3), pour $n = 2$ On a
$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{f'}{f}$ *et* $R_{121}^2 = -ff'' + f'^2$ *les autres composantes sont nulles.*
Pour une base orthonormée e_1, e_2 tel que $e_1 = \frac{1}{f}\partial x$ et $e_2 = \frac{1}{f}\partial y$ on a

$$\begin{aligned} K &= g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) \\ &= \frac{1}{f^4} g(R(\partial x, \partial y)\partial y, \partial x) \qquad \textit{avec} \qquad R(\partial x, \partial y)\partial y = (-ff'' + f'^2)\partial x \\ &= \frac{-ff'' + f'^2}{f^2} \qquad \textit{car} \qquad g(\partial x, \partial x) = f^2. \end{aligned}$$

La courbure sectionnelle n'est pas constante en général.

Définition 7.5. *(Liste des espaces à courbure sectionnelle constante)*([*6*], p162)
Pour chaque réel κ , et en chaque dimension $n \geq 2$, on définit une variété Riemannienne M^κ.
(i) : Si $\kappa > 0, M^\kappa$ est la sphère de rayon $\kappa^{-1/2}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$
(ii) : Si $\kappa = 0, M^\kappa$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$
(iii) : Si $\kappa < 0, M^\kappa$ est la pseudosphère de rayon $\sqrt{-1}(-\kappa^{-1/2})$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$

Remarque 6.

On peut montrer que la courbure sectionnelle des plans de T_pM d'etermine entièrement le tenseur de courbure de M au point p.
Voir la formule démente (14 termes) dans le livre de Cheeger et Ebin, page 16.

Proposition 7.2.

Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante c si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

pour tout X, Y et $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

7.5 Courbure de Ricci

Définition 7.6.

La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g) est un tenseur de type $(0, 2)$ défini par

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= trace(Z \longmapsto R(Z, X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(X, e_i)e_i, Y) \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, où* (e_i) *une base orthonormée locale sur M.*

La courbure de Ricci est symétrique, en effet

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= S(Y,X) \end{aligned}$$

Relativement à la base$(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..m}$, les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= trace(Z \longmapsto R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})Z) \\ &= g^{kl}g(R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}) \\ &= g^{kl}R^s_{ijk}g_{sl} \\ &= \delta_{ks}R^s_{ijk} \\ &= R^k_{ijk} \end{aligned}$$

Définition 7.7.

Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g)*, est un tenseur de type*$(1,1)$*, défini par*

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^{n} R(X,e_i)e_i$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$*, où* $(e_i)_{i=1..n}$ *est une base orthonormée locale sur M.*

Remarque 7.

Soit (M^n, g) *une variété Riemannienne, de dimension n. Pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *on a*

$$S(X,Y) = g(Ricci(X),Y)$$

Définition 7.8.

Une variété Riemannienne (M^n, g) *est dite variété d'Einstien si,*

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $\lambda \in C^\infty(M)$

7.6 Courbure Scalaire

Définition 7.9.

On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M^n, g) la fonction définie sur M par,

$$\begin{aligned} r &= tr_g S \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} S(e_j,e_j). \end{aligned}$$

où $(e_i)_{i=1..n}$ une base orthonormée locale sur M.

Résultat :

Soit (M,g) une variété Riemannienne, de dimension n, $x \in M$ et $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)_{i=1..n}$ une base (resp $(e_i)_{i=1..n}$ base orthonormée) de T_xM. Si $A : T_xM \longrightarrow T_xM$, $B : T_xM \longrightarrow T_x^*M$, sont des applications linéaire et $C : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, une application bilinéaire, alors

$\diamond$ $trace\, A = \sum_{i=1}^{n} g(A(e_i),e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g(A(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j})|_x$

$\diamond$ $trace\, B = \sum_{i=1}^{n} B(e_i)(e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} B(\frac{\partial}{\partial x^i})(\frac{\partial}{\partial x^j})|_x$

$\diamond$ $trace\, C = \sum_{i=1}^{n} C(e_i,e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} C(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})|_x$

Proposition 7.3.

Toute variété Riemannienne (M,g) de courbure sectionnelle constante c est une variété Einsteinnienne.

Démonstration.

Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $(e_i)_{i=1..n}$ une base orthonormée sur M .alors,

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X,e_i)e_i,Y)$$

Supposons que (M,g) est de courbure sectionnelle constante c. Alors, d'aprés la proposition précédente on a pour tout i fixé,
$R(X,e_i)e_i = c\big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\big)$
donc

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} g\Big(c\big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\big),Y\Big) \\ &= c\Big(g\big(\sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)X,Y\big) - g\big(\sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)e_i,Y\big)\Big). \end{aligned}$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i) = n$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{n} g(\sum_{j=1}^{n} X_j e_j, e_i)e_i \qquad avec \qquad X = \sum_{j=1}^{n} X_j e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_j g(e_j,e_i)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \delta_{ij} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i e_i = X. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= c\big(g(nX,Y) - g(X,Y)\big) \\ &= c(n-1)g(X,Y) \\ &= \lambda g(X,Y) \qquad avec \qquad \lambda = c(n-1) \end{aligned}$$

et donc la variété est Einsteinnienne. $\square$

Corollaire 2.

Si (M^m, g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante c, alors pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

1. *$Ricci(X) = (m-1)cX$,*
2. *$S(X,Y) = (m-1)cg(X,Y)$,*
3. *$r = m(m-1)c$.*

Exemple 7.4. *La courbure de la sphère*

Un exemple trés connus, est celui de la sphère S^2 munie de la métrique

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta \, d\phi^2)$$

où r est le rayon de la sphère . les coefficients non nuls de la connexion sont :
$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -sin\theta cos\theta$; $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = -\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = cot\theta$
Calculons une composante intéressante du tenseur de Riemann :

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\phi} \\ &= (sin^2\theta - cos^2\theta) - (0) + (0) - (-sin\theta cos\theta)(cot\theta) \\ &= sin^2\theta. \end{aligned}$$

La notation est un peu confuse, car la lettre grecque λ est un index de sommation alors que les lettres grecques θ et ϕ représentent des coordonnées spécifiques. En abaissant les index nous avons :

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta\phi} &= g_{\theta\lambda} R^{\lambda}_{\phi\theta\phi} \\ &= g_{\theta\theta} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} \\ &= r^2 sin^2\theta \end{aligned}$$

On peut vérifier que tous les autres composantes de tenseur de Riemann sont nulles ou égale à celle là par symétrie.
Continuons en calculant le tenseur de Ricci via $S_{mn} = g^{ab}R_{ambn}$, nous obtenons :

$$S_{\theta\theta} = g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} = 1$$

$$S_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0$$

$$S_{\phi\phi} = g^{\theta\theta} R_{\theta\phi\theta\phi} = sin^2\Phi$$

La courbure scalaire s'obtient aussi directement :

$$r = g^{\theta\theta} S_{\theta\theta} = \frac{2}{r^2}$$

Donc, sur une variété à deux dimensions, le scalaire de Ricci caractérise complètement la courbure qui est constante sur une sphère S^2.
Remarquons que la courbure scalaire est constante pour la sphère et de plus positif . Du point de vue d'un observateur vivant dans la Variété, incluse dans un espace Euclidien de dimensions supérieures, s'il est assis en un point d'un espace à courbure positive, il voit l'espace s'incurver de la même façon dans toutes les directions, alors qu'assis en un point d'un espace à courbure négatif il le voit s'incurver de façon opposée dans les différentes directions.

8 Chapitre 2 : L'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Let $\mathbb{H}^2$ be represented by the upper half-plane model $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ equipped with the metric $g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. The space $\mathbb{H}^2$, with the group structure derived by the composition of proper affine map, is a Lie group and the metric $g_{\mathbb{H}^2}$ is left invariant. Therefore the Riemannian product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is a Lie group with respect to the operation

$$(x, y, z) \star (x', y', z') = (x'y + x, yy', z + z')$$

and the left invariant product metric

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2. \tag{4}$$

With respect to the metric g an orthonormal basis of left invariant vector fields on $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is

$$E_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, E_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5}$$

From this, the Lie brackets are given by

$$[E_1, E_2] = -E_1, [E_2, E_3] = 0, [E_3, E_1] = 0.$$

Throughout the paper, we shall endow the three-dimensional Lie group $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with left-invariant Riemannian g.

We will denote by ∇ the Levi-Civita connection of $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, by R its curvature tensor, taken with the sign convention :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

and by Ric the Ricci tensor of $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, which is defined by

$$Ric\,(X, Y) = \sum_{k=1}^{3} g\,(E_k, E_k)\,g(R(E_k, X)Y, E_k),$$

où $\{E_k\}_{k=1,..,3}$ est une base orthonormée.

La connexion de Levi-Civita ∇ du groupe de Lie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ par rapport à (5) est

$$\begin{cases} \nabla_{E_1}E_1 = E_2, \nabla_{E_1}E_2 = -E_1, \nabla_{E_1}E_3 = 0 \\ \nabla_{E_2}E_1 = 0, \nabla_{E_2}E_2 = 0, \nabla_{E_2}E_3 = 0 \\ \nabla_{E_3}E_1 = 0, \nabla_{E_3}E_2 = 0, \nabla_{E_3}E_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Les composants non nulles du tenseur de courbure R sont calculés comme

$$R(E_1, E_2)E_1 = E_2, R(E_1, E_2)E_2 = -E_1. \tag{7}$$

Les composants de courbure de Ricci $\{Ric_{ij}\}$ sont calculés comme

$$Ric_{11} = Ric_{22} = -1,\ \ Ric_{12} = Ric_{13} = Ric_{23} = Ric_{33} = 0. \tag{8}$$

La courbure scalaire τ du groupe de Lie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ est constant et on a

$$\tau = trRic = \sum_{i=1}^{3} g(E_i, E_i)Ric(E_i, E_i) = -2. \tag{9}$$

9 Chapitre 3 : Surfaces de courbures de Gauss nulle dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Maintenant, nous classons toutes les types de surfaces de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3.

Obtenus comme produit de deux courbes génératrices non orthogonaux.

Type 1 : Considérons d'abord une surface de translation Σ paramétrisé par :

$$X(x,y) = (x, 0, g(x)) * (0, y, h(y)) = (x, y, g(x) + h(y) - xy)$$

Où g et h sont deux surfaces arbitraires. La condition de minimalité est donnée par le paramètre d'équation (**??**) devient

$$h''(y) + (-1 + 2h'(y))g''(x) + (g'(x) - y) = 0 \tag{10}$$

En prenant la dérivé par rapport à x de l'équation (10), on obtient :

$$(-1 + 2h'(y))g'''(x) + g''(x) = 0 \tag{11}$$

Nous remarquons que si g est affine, satisfaire l'équation (10).

Pour résoudre l'équation (10), on distingue deux cas :

Première cas :

Si $g''(x) = 0$, nous avons $g(x) = ax + x_0$ où a et x_0 sont deux constantes réelles.

En remplaçant g dans l'équation (10), on obtient $h(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{a}{2} + y_1 y + y_0$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

Deuxième cas :

Si $g''(x) \neq 0$, nous avons :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{1 - 2h'(y)} = \xi, \xi \in \mathbb{R}$$

et nous obtenons :

$$g(x) = \frac{k}{\xi^2} e^{\xi x} + c_1 x + c_2,$$

et

$$h(y) = \frac{\xi - 1}{2\xi} y + \delta,$$

Où $\delta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 9.1. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 1 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par : $X(x,y) = (x, y, g(x) + h(y) - xy)$ où $g(x)$ et $h(y)$ sont données par :*

$$g(x) = ax + x_0$$

et

$$h(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{a}{2}y^2 + y_1 y + y_0.$$

Où a, x_0, y_0, y_1 sont des constantes réelles.
Ou

$$g(x) = \frac{k}{\xi^2} e^{\xi x} + c_1 x + c_2,$$

et

$$h(y) = \frac{\xi - 1}{2\xi} y + \delta$$

où $\delta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}_+^*$.

Type 2 : Maintenant, la surface de translation Σ est paramétrisée par :

$$X(x, y) = (0, y, h(y)) * (x, 0, g(x)) = (x, y, g(x) + h(y) + xy)$$

Où g et h sont deux surfaces arbitraires.
La condition de minimalité donnée par l'équation (**??**) devient :

$$h''(y) + [2(h'(y) + 2x) - 1]g''(x) - 3(g'(x) + y) = 0 \tag{12}$$

Nous prenons la dérivé de l'équation (12) par rapport à x (à y) (respectivement), nous trouvons

$$2h''(y)g'''(x) = 0 \tag{13}$$

ce qui implique $h''(y) = 0$ ou $g'''(x) = 0$.
Si $h''(y) = 0$ alors $h(y) = ay + y_0$ où a et y_0 sont deux constantes réelles.
En remplaçant dans (12), on obtient :

$$[-1 + 2(a + 2x)]g''(x) - 3g'(x) = 3y. \tag{14}$$

Le côté droit de l'égalité (14) ne dépend que de x et le côté gauche de l'égalité ne dépend que de y c'est une contradiction, et l'équation (13) est satisfait si et seulement si : $g'''(x) = 0$.

Si $g'''(x) = 0$ alors $g(x) = ax^2 + bx + c$ telle que a, b et c sont trois constantes réelles.

En remplaçant cette résultat dans (12) on obtient :

$$h''(y) + 4ah'(y) - 3y = -2ax + 2a + 3b. \tag{15}$$

Cette derniére équation est vérifié si et seulement si $a = 0$, ce qui donne :

$$h(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}by^2 + y_1 y + y_0. \tag{16}$$

où y_1, y_0 sont des constantes réelles.
Donc nous établissons le résultat suivant :

Théorème 9.2. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 2 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par :*

$$X(x, y) = (0, y, h(y)) * (x, 0, g(x)) = (x, y, g(x) + h(y) + xy)$$

Où $g(x)$ et $h(y)$ sont données par :

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}by^2 + y_1 y + y_0$$

Où b, c, y_1 et y_0 sont des constantes réelles.

Type 3 : Nous supposons maintenant que la surface de translation Σ est donnée par le produit :

$$X(x,y) = (x, 0, g(x)) * (h(y), y, 0) = (x + h(y), y, g(x) - xy)$$

donc il est paramétrisé par :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}_3$$
$$(x,y) \mapsto (x + h(y), y, g(x) - xy)$$

où $X(x,y) = (x+h(y), y, g(x)-xy)$ est le vecteur de position et les composantes du vecteur tangent sont donnés par :

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (g'(x) - y)e_2 - (g'(x) - y)e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_1 + e_3. \end{cases}$$

Les coefficients du première forme fondamentale sont :
$E = g_3(X_x, X_x) = 1, F = g_3(X_x, X_y) = h'(y) + g'(x) - y, G = g_3(X_y, X_y) = (h'(y))^2 - 1.$
avec

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= g''(x)e_2 - g''(x)e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= 0 \\ \nabla_{X_y} X_y &= [h''(y) - 1]e_1 + h'(y)e_2 - h'(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de la surface Σ est donnée par :

$$N = \frac{1}{W}[(g'(x) - y)e_1 - (1 + h'(y)(g'(x) - y))e_2 + (h'(y)(g'(x) - y))e_3]$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x) - y]^2 + 2h'(y)(g'(x) - y) + 1}$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = -\frac{1}{W}g''(x), m = 0, n = \frac{1}{W}[(h''(y) - 1)(g'(x) - y) - h'(y)]$$

Nous suivons les mêmes étapes que les types précédents pour calculer la courbure principale de la surface de translation Σ, nous cédont :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(g'(x) - y)[h''(y) - 1] - h'(y) - g''(x)(h'^2(y) - 1)] \tag{17}$$

La condition de minimalité $H = 0$ implique l'équation :

$$(g'(x) - y)[h''(y) - 1] - h'(y) - g''(x)(h'^2(y) - 1) = 0 \tag{18}$$

On dérive par rapport à x et par rapport à y (respectivement), on obtient le système différentiel suivant :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h''(y)-1}{h'^2(y)-1} \tag{19}$$

le côté gauche de l'égalité (19) ne dépend que de y et le côté droit ne dépend que de x pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h''(y)-1}{h'^2(y)-1} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} g'''(x) &= \lambda g''(x) \\ h''(y)-1 &= \lambda[h'^2(y)-1] \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient d'abord dans le cas particulier $\lambda = 0$:
$g'''(x) = 0$, alors $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des constantes réelles.
En remplaçant g dans la condition de minimalité (18), on obtient :

$$(2ax + b – y)(h''(y) - 1) - h'(y) = 2a[(h'(y))^2 - 1] \tag{20}$$

L'équation (18) est satisfait si $h''(y) - 1 = 0$ ou $a = 0$.
De plus, si $h''(y) - 1 = 0$ alors on a $h'(y) = y + y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $2a[(h'(y))^2 - 1] + h'(y) = 0$, ce qui implique :

$$2a[(y + y_0)^2 - 1] + (y + y_0) = 0 \tag{21}$$

Cette dernière équation n'est pas vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc nous conclurons que $h''(y) - 1 \neq 0$.
Par conséquent, nous avons $a = 0$ et l'équation (20) devient :

$$(b - y)h''(y) - h'(y) = b - y,$$

qui a la solution :

$$h(y) = \frac{1}{4}(b - y)^2 - c_1 \ln|b - y| + c_0$$

où $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$ alors

$$g(x) = C(x + \frac{1}{\lambda}) + C_1 \exp(\lambda x) + C_0$$

Où $C_0, C_1, C \in \mathbb{R}$. En remplaçant g dans l'équation (18), on obtient :

$$(C - y)(h''(y) - 1) - h'(y) = C_1\lambda \exp(\lambda x)[1 - h''(y) + \lambda((h'(y))^2 - 1)]$$

Puisque le côté droit de cette égalité ne dépend que de y et que le côté gauche dépend de x et y alors la condition de minimalité est satisfait si et seulement si $C_1 = 0$ alors nous obtenons :

$$(C - y)h''(y) - h'(y) = C - y$$

qui est déjà résolu ci-dessus. Enfin, nous annonçons le théorème suivant résumant cette résultat.

Théorème 9.3. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 3 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x,y) = (x + h(y), y, g(x) - xy)$ Où g et h sont données par :*

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = \frac{1}{4}(b-y)^2 - c_1 \ln|b-y| + c_0,$$

où b, c, c_1 et c_0 sont des constantes réelles.

Type 4 : On suppose maintenant que la surface de translation Σ de type 4 est donnée par le produit

$$X(x,y) = (x, 0, g(x)) * (h(y), y, 0) = (x + h(y), y, g(x) + xy)$$

donc il est paramétrisé par :

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{H}_3 \\ (x,y) &\mapsto (x + h(y), y, g(x) + xy) \end{aligned}$$

où $X(x,y) = (x+h(y), y, g(x)+xy)$ est le vecteur de position et les composantes de vecteur tangent sont donnés par :

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (g'(x) - y)e_2 - (g'(x) + y)e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_1 + 2xe_2 + (1 - 2x)e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont :

$$\begin{aligned} E &= g_3(X_x, X_x) = 1, \\ F &= g_3(X_x, X_y) = h'(y) + g'(x) + y, \\ G &= g_3(X_y, X_y) = (h'(y))^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= g''(x)e_2 - g''(x)e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= 2e_2 - 2e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= [h''(y) - 1]e_1 + h'(y)e_2 - h'(y)e_3 \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}[-(g'(x) + y)e_1 + (1 - 2x + h'(y)(g'(x) + y))e_2 + (2x - h'(y)(g'(x) + y))e_3]$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x) + y]^2 + 2h'(y)(g'(x) + y) + 1 - 4x},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = \frac{1}{W} g''(x),$$

$$m = \frac{2}{W},$$

$$n = \frac{1}{W}[(1 - h''(y))(g'(x) + y) + h'(y)].$$

La courbure principale de la surface de translation Σ de type 4 :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(1 - h''(y)(g'(x) + y) + h'(y) + (h'^2(y) + 4x - 1)g''(x) - 4(h'(y) + g'(x) + y)] \quad (22)$$

avec

$$W = \sqrt{[g'(x) + y]^2 + 2h'(y)(g'(x) + y) + 1 - 4x}$$

<u>La condition de minimalité</u> $H = 0$ céde l'équation :

$$[1 - h''(y)](g'(x) + y) + (h'^2(y) + 4x - 1)g''(x) - 3h'(y) - 4(g'(x) + y) = 0. \quad (23)$$

En dérivant par rapport à x puis par rapport à y, on obtient :

$$\frac{-g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h'''(y)}{2h'(y)h''(y)} \quad (24)$$

Le côté gauche de l'égalité (24) ne dépend que de y et le côté droit ne dépend que de x pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{-g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h'''(y)}{2h''(y)h'(y)} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

ce qui implique le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} g'''(x) & = & -\lambda g''(x) \\ h'''(y) & = & 2\lambda h''(y)h'(y). \end{cases}$$

En résolvant ce système, on distingue deux cas :

1. $\lambda = 0$: on a

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c sont des constantes réelles.
En remplaçant g dans la condition de minimalité (23), on obtient :

$$[1 - h''(y)](b + y) + 2a(h'^2(y) - 1) - 3h'(y) - 4(b + y) = -2ax(1 - h''(y)).$$

cette équation est vérifié si $a = 0$ ou $(1 - h''(y)) = 0$.
De plus, si $(1 - h''(y)) = 0$ alors on a la fonction $h'(y) = y + y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ est la solution de l'équation $2a[(h'(y))^2 - 1] - 3h'(y) - 4(b + y) = 0$ n'est pas vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Si $a = 0$ alors

$$(b + y)h''(y) + 3h'(y) = -3(b + y),$$

qui a la solution

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b + y)^2 - \frac{c_0}{2}(b + y)^{-2} + c_1,$$

où c_1, c_0 sont des constantes réelles.

2. $\lambda \neq 0$: en résoudre l'équation

$$g(x) = \frac{1}{\lambda}(b_1 x + b_0) - \frac{b_1}{\lambda^2} + b_1 \exp(-\lambda x),$$

Où b_0, b_1 et b_2 sont des constantes réelles. En remplaçant cette résultat dans la condition de minimalité dans (23), on obtient :

$$[1-h''(y)](\frac{b_1}{\lambda}+y)-3h'(y)-4(\frac{b_1}{\lambda}+y) = \lambda b_2 \exp(-\lambda x)[1-h''(y)-\lambda((h'(y))^2+4x-1)-4] \tag{25}$$

et $b_2 = 0$, par conséquent, $g(x) = \frac{1}{\lambda}(b_1 x + b_0) - \frac{b_1}{\lambda^2} = bx + c$ où $b, c \in \mathbb{R}$. dans l'addition, l'équation (25) devient :

$$(b+y)h''(y) + 3h'(y) = -3(b+y),$$

qui a la solution

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b+y)^2 - \frac{c_0}{2}(b+y)^{-2} + c_1,$$

où c_0 et c_1 sont des constantes réelles.

Nous résumons par le théorème suivant :

Théorème 9.4. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 4 dans l'espaces de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x,y) = (x + h(y), y, g(x) + xy)$ Où g et h sont données par :*

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b+y)^2 - \frac{c_0}{2}(b+y)^{-2} + c_1,$$

où b, c, c_1 et c_0 sont des constantes réelles.

Type 5 :

Soit les courbes $\beta(y) = (0, y, h(y))$ et $\alpha(x) = (x, g(x), 0)$. La surface de translation Σ est donnée par le produit $\Sigma = \beta(y) * \alpha(x)$ est paramétrisé par :

$$X(x,y) = (0, y, h(y)) * (x, g(x), 0) = (x, y + g(x), h(y) + xy)$$

donc on a :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}_3$$
$$(x,y) \mapsto (x, y + g(x), h(y) + xy)$$

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (y + xg'(x))e_2 - (xg'(x) + y - g'(x))e_3 \\ X_y(x,y) &= (h'(y) + 2x)e_2 - [h'(y) + 2x - 1]e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont :

$$E = 1 + (g'(x))^2(2x-1) + 2yg'(x),$$

$$F = y + g'(x)[h'(y) + 3x - 1],$$
$$G = 2(h'(y) + 2x) - 1.$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= -(g'(x))^2 e_1 + (2g'(x) + xg''(x))e_2 - [2g'(x) + xg''(x) - g''(x)]e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= -g'(x)e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= -e_1 + h''(y)e_2 - h''(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}([g'(x)(h'(y) + x) - y]e_1 - [h'(y) + 2x - 1]e_2 + [h'(y) + 2x]e_3)$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x)(h'(y) + x) - y]^2 - 2(h'(y) + 2x) + 1},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = \frac{1}{W}[-(g'(x))^3(h'(y) + x) + y(g'(x))^2 + 2g'(x) - g''(x)(h'(y) + x)],$$
$$m = \frac{1}{W}[-(g'(x))^2(h'(y) + x) + yg'(x) + 2],$$
$$n = \frac{1}{W}[-g'(x)(h'(y) + x) + h''(y) + y]$$

La condition de minimalité donnée dans la définition (**??**) implique l'équation suivante :

$$(2x - 1)(g'(x))^2 h''(y) + (x + h'(y) + 2yh''(y))g'(x) + g''(x)[(x + h'(y))(1 - 2(2x + h'(y)))] = 3y - h''(y) \quad (26)$$

Le premier côté de l'égalité (26) ne dépend que de y et le dérnier côté droit ne dépend que de x et y alors pour toute surfaces minimales de translation de type 5, on a : $g''(x) = g'(x) = 0$.

Par conséquent, g est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{2}y^3 + y_1 y + y_0$, où y_0, y_1 sont des integrations constantes.

Théorème 9.5. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 5 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x, y) = (x, y + g(x), h(y) + xy)$ Où $g(x)$ est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{2}y^3 + y_1 y + y_0$, où $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

Type 6 :

Soit les courbes $\alpha(x) = (x, g(x), 0)$ et $\beta(y) = (0, y, h(y))$. La surface de translation Σ donnée par le produit $\Sigma = \alpha(y) * \beta(x)$ est paramétrisé par :

$$X(x, y) = ((x, g(x), 0) * (0, y, h(y)) = (x, y + g(x), h(y) - xy)$$

donc on a :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}_3$$
$$(x, y) \mapsto (x, y + g(x), h(y) - xy)$$

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (xg'(x) - y)e_2 - (xg'(x) - y - g'(x))e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_2 + [1 - h'(y)]e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont données par :

$$\begin{aligned} E &= 1 + (g'(x))^2(2x-1) - 2yg'(x), \\ F &= -y + g'(x)[h'(y) + x - 1], \\ G &= 2h'(y) - 1. \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= -(g'(x))^2 e_1 + (2g'(x) + xg''(x))e_2 - [2g'(x) + xg''(x) - g''(x)]e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= -g'(x)e_1 \\ \nabla_{X_y} X_y &= -e_1 + h''(y)e_2 - h''(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}([g'(x)(h'(y) - x) + y]e_1 + [1 - h'(y)]e_2 + h'(y)e_3)$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x)(h'(y) - x) + y]^2 - 2h'(y) + 1},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$\begin{aligned} l &= \tfrac{1}{W}[-(g'(x))^3(h'(y) - x) - y(g'(x))^2 + 2g'(x) + g''(x)(x - h'(y))], \\ m &= \tfrac{1}{W}[-(g'(x))^2(h'(y) - x)], \\ n &= \tfrac{1}{W}[-g'(x)(h'(y) - x) + h''(y) - y]. \end{aligned}$$

La courbure moyenne de la surface de translation Σ de type 6 est donné par :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(g'(x))^2((2x-1)h''(y) - 2y + (x + h'(y) - 1))$$
$$+g'(x)(-2yh''(y) + 3h'(y) + 2y^2 + x - 2) + g''(x)(x - h'(y))(2h'(y) - 1) - y + h''(y)]$$

la condition de minimalité céde :

$$\begin{aligned} (g'(x))^2((2x-1)h''(y) - 2y + (x + h'(y) - 1)) + g'(x)(-2yh''(y) + 3h'(y) \\ +2y^2 + x - 2) + g''(x)(x - h'(y))(2h'(y) - 1) = y - h''(y) \end{aligned} \tag{27}$$

Il est clair que le côté droit de l'égalité (27) dépend de x et de y, et le côté gauche ne dépend que de y. Donc, pour toute surfaces minimales de translation de type 6, on a : $g''(x) = g'(x) = 0$.

Par conséquent, g est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{6}y^3 + y_1 y + y_0$, où y_0, y_1 sont des integrations constantes.

Théorème 9.6. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 6 dans l'espaces de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x,y) = (x, y + g(x), h(y) - xy)$ Où $g(x)$ est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{6}y^3 + y_1 y + y_0$, où $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

10 Conclusion

Le but de ce travail est de classifier les surfaces minimales de translation, c'est à dire le produit de deux courbes dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$, de six types de surfaces qu'ont a classifier après López et Munteanu.

Références

[1] M. Bekkar, Z.Hanifi, Minimal surfaces of the 3-dimensional Lorentz-Heiesenberg space *Int.Journal of Math.Analysis* , **3** (2009), 473-482.

[2] L. Belarbi, Surfaces with constant extrinsically Guassian curvature in the Heisenberg group. *Ann. Math. Inform,* ***50****(2019), 5–17.*

[3] M.Belkhelfa, Paralell and minimal surfaces in Heisenberg. *Proceedings of the Summer Scool on Differential Geometry, University of Coimbra, (1999), 67-76.*

[4] D.Bensikaddour, L.Belarbi, Minimal translation surfaces in Lorentz-Heiesenberg three-space, Nonlinear Studies ***24****(4)(2017), 859-867.*

[5] D.Bensikaddour, L.Belarbi, Minimal translation surfaces in Lorentz-Heiesenberg 3- *space with flat metric, Differential Geometry-Dynamical Systems* ***20*** *(2018), 1-14.*

[6] M.P. do Carmo, Riemannian Geometry, Boston , (1993).

[7] J.Inoguchi, R.López and M.I.Munteanu, Minimal translation surfaces in the Heisenberg Group Nil_3. *Geom.Dedicata,* ***161****(1)(2012), 221-231.*

[8] J.Inoguchi, Flat translation surfaces in the 3-*dimensional Heisenberg group, J. Geom.****82****(1-2)(2005), 83-90.*

[9] S.Kobayashi and K.Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience and Wiley, New York, 1963.

[10] A.Ferrandez, P.Lucas, On surfaces in the 3-*dimensional Lorentz-Minkowski space, Pacific Journal of Mathematics,* ***152****(1)(1992), 93-100.*

[11] T.MASSON . Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie , fibrés et connexions . Version du 19 décembre 2001.

[12] R.López, M.I.Munteanu, Minimal translation surfaces in Sol_3, *J.Math.Soc. Japan,* ***64****(3)(2012), 985-1003.*

[13] N.Rahmani, S.Rahmani, Lorentzian geometry of the Heisenberg group, Geom. Dedicata, ***118*** *(2006), 133-140.*

[14] N.Rahmani, S.Rahmani, Structures Homognes Lorentziennes sur le Groupe de Heisenberg, J.Geom.Phys, ***13*** *(1994), 254-258.*

[15] S.Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, J.Geom.Phys, ***9*** *(1992), 295-302.*

[16] H.Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J.Math. 46 (2002), 1177-1195.*

[17] P.Scott, The geometries of 3-manifolds, Bull.London Math. Soc. ***15*** *(1983), 401-487.*

[18] R.Souam and E.Toubiana, On the classification and regularity of umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds, Mat.Contemp. ***30*** *(2006), 201-215.*

[19] R.Souam and E.Toubiana, Totally umbic surfaces in homogeneous 3-manifolds, Comm. Math. Helv, ***84*** *(2009), 673-704.*

[20] R.Souam, On stable constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Trans. Amer. Math .Soc,* ***362****(6)(2010), 2845-2857.*

[21] D.W.Yoon, C.W.Lee, M.K.Karacan, Some translation in the 3-*dimensional Heisenberg group, Bull.Korean Math. Soc.* ***50*** *(2013), 1329-1343.*

[22] D.W.Yoon, Minimal translation surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Taiwanese J. Math., 17 (2013), 1545–1556.*

[23] D.W.Yoon, ON TRANSLATION SURFACES WITH ZERO GAUSSIAN CURVATURE IN $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *, Int. J. Pure Appl. Math.* ***99****(3)(2015), 289-297.*