

Filière : Mathématiques  
MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

**Master Académique**

**Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par**

**Université de Mostaganem**

**Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"**

*présenté par :*

**Keddar DJAMEL**

**Contribution aux équations integro différentielles fractionnaires**

**Soutenu le : 21 juin 2021**

**Devant le jury composé de :**

<b>Bendoukha Berrabah</b>	PROF	Université de Mostaganem	Président
<b>Andasmas Maamar</b>	MCA	Université de Mostaganem	Examineur
<b>Dahmani Zoubir</b>	PROF	Université de Mostaganem	Encadreur

---

**Résumé :**

Dans ce mémoire, une étude analytique pour un problème différentiel fractionnaire de type Duffing est présentée. Un premier critère d'existence et d'unicité des solutions pour le problème introduit est discuté. Ensuite, un exemple est présenté. Puis, n proposant un nouveau système différentiel équivalent à notre problème, une approximation des dérivés de Caputo de trois ordres est prouvée. Une analyse et quelques simulations numériques intéressantes de notre nouveau système sont établies par la méthode Runge-Kutta4 appliquée aux dérivées de Caputo. Plusieurs solutions périodiques sont montrées quand la non-linéarité  $f$  du système est changée et le paramètre  $\gamma$  du système est dans un voisinage droit de la valeur 2.

**Mots-Clés :** Équation de Duffing, dérivée de Caputo, méthode de Runge Kutta. Approximation de dérivée de Caputo, solution périodique.

---

**Abstract :**

In this work, an analytic study for a  $\gamma$ -fractional differential problem of Duffing type is presented. A new existence and uniqueness criterion of solutions for the introduced problem is discussed. Then, an example is presented. By proposing an equivalent three-fractional differential system, a three order Caputo derivatives approximation is proved. An analysis and some interesting numerical simulations of the fractional equivalent system are established by the fourth-order Runge-Kutta applied to Caputo derivatives. Several periodic solutions are showed when the nonlinearity  $f$  of the system is changed and the parameter  $\gamma$  is in a right neighborhood of the value 2.

**Key words :** Duffing equation, Caputo derivative, Runge Kutta method. Caputo derivative approximation, periodic solution.

## *Dédicaces*

À  
mon  
cher père  
et à ma chère  
mère aucune dé-  
dicace ne saurait être  
assez éloquente pour ex-  
primer le degré d'amour et  
d'affection que j'éprouve pour  
vous. Vous avez su m'inculquer le  
sens de la responsabilité et la confiance  
en soi, vos conseils ont toujours guidé mes  
pas vers la réussite. Je vous dois ce que je suis  
aujourd'hui, ce que je serai demain et je ferai tou-  
jours mon mieux pour rester votre fierté. Que Dieu  
tout le puissant vous accorde santé, bonheur et vous  
protège de tout ma. Je présente également ce travail à mes  
frères et soeurs merci beaucoup et tout mon amour et mes amis.

## *Remerciements*

« Notre Seigneur nous réunira puis jugera entre nous, par la vérité, et c'est Lui le Juge Suprême, l'Omniscient. »

Mes plus sincères remerciements à mon encadreur, le professeur Zoubir Dahmani, pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour ses encouragements, sa franchise et sa sympathie, et pour tous ses précieux conseils. Je salue sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité. C'est certes avec joie et fierté que je dépose ce mémoire aujourd'hui.

Je tiens à remercier cordialement Mr B. Bendoukha et Mr M. Andasmas, qui m'ont fait l'honneur de juger ce modeste travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présent lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père et ma mère .

Enfin, je remerciais toutes les personnes qui ont participé et m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

## *Table des figures*

3.1	trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.5) . . . . .	29
3.2	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.5) . . . . .	29
3.3	trajectoire de phase et solution du système (3.4) dans le cas : (3.5) . . . . .	29
3.4	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.6) . . . . .	30
3.5	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.6) . . . . .	30
3.6	trajectoire de phase et solution du système (3.4) utilisant (3.6) . . . . .	30
3.7	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.7) . . . . .	31
3.8	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.7) . . . . .	31
3.9	trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.7) . . . . .	31
3.10	trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.8) . . . . .	32
3.11	trajectoire de phase et solution du système(3.4) utilisant (3.8) . . . . .	32
3.12	trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.8) . . . . .	32

# *Table des matières*

<b>TABLE DES FIGURES</b>	<b>iv</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
<b>1 PRÉLIMINAIRES</b>	<b>3</b>
1 INTRODUCTION . . . . .	3
2 DÉFINITIONS & PROPRIÉTÉS . . . . .	3
3 LEMMES AUXILIAIRES . . . . .	8
4 AUTOUR DES POINTS FIXES . . . . .	9
<b>2 ETUDE D'PROBLEME INTEGRO-DIFFERENTIEL FRACTIONNAIRE</b>	<b>12</b>
1 INTRODUCTION . . . . .	12
2 REPRÉSENTATION INTÉGRALE . . . . .	13
3 RESULTATS ANALYTIQUES . . . . .	14
4 STABILITÉ AU SENS DE ULAM-HYERS . . . . .	21
5 EXEMPLES . . . . .	23
6 CONCLUSION . . . . .	24
<b>3 APPLICATIONS NUMERIQUES</b>	<b>25</b>
1 INTRODUCTION . . . . .	25
2 METHODE DE RUNG KUTTA . . . . .	25
3 APPROCHES NUMÉRIQUES . . . . .	26
4 SYSTÈME ASSOCIÉ . . . . .	28
5 SOLUTIONS PÉRIODIQUES . . . . .	28
6 CONCLUSION . . . . .	32
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>33</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>33</b>

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

**L**e calcul fractionnaire a acquis une popularité au cours des trois dernières décennies, grâce à ses applications dans de nombreux domaines des sciences appliquées.

Le concept de calcul fractionnaire découle d'une question posée par L'hôpital (1661-1704) à Leibniz (1646-1716), qui cherchait à comprendre le sens de la dérivée d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Dans sa réponse, Leibniz écrivit que : "... C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, des conséquences utiles seront tirées. "

D'autres idées concernant ces dérivées fractionnaires ont été discutées par Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Holmgren en 1865, Grunwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en , Laurent en 1884, Krug en 1890 et aussi par Weyl en 1917.

L'objectif de ce mémoire est de s'intéresser à certains types d'équations intégral-différentielles fractionnaires qui nous amènent à découvrir et à comprendre "un peu" le phénomène de la périodicité des solutions dans le cas fractionnaire. On va donc s'intéresser d'abord à la question d'existence et d'unicité des solutions pour un problème intégral-différentiel un peu particulier, "il est dit de type Duffing". On abordera ensuite la question d'existence d'une solution au moins. la question de la stabilité au sens de Ulam Hyers est aussi présentée dans ce mémoire. L'aspect applicatif, en quelque sorte, est aussi présent dans ce mémoire. En effet, on utilisera la méthode de Rung-kutta pour présenter certains résultats liés aux solutions périodiques dans certains cas particuliers après avoir "approximé" la dérivée de Caputo par une formule inspirée de certains résultats existants dans la littérature.

Ce manuscrit se compose d'une introduction générale et de trois chapitres.

Le **premier chapitre** est consacré aux définitions élémentaires et aux notions de base relatives au calcul fractionnaire. D'autres résultats dont on aura besoin dans la suite de notre travail (comme les théorèmes de point fixe de Banach et de Schaefer) seront aussi présentés.

Dans le **second chapitre**, on va faire appel, à la théorie des points fixes. Elle pourra en effet s'appliquer pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions du notre problème fractionnaire proposé. On présentera aussi des conditions suffisantes pour assurer la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et celle d'Ulam-Hyers généralisée de notre problème. On donnera des exemples pour illustrer les résultats d'existence obtenus à la fin de ce chapitre.

Enfin, dans le **chapitre 3**, on donnera une petite contribution, à notre connaissance, un peu efficace pour le traitement numérique dans calcul fractionnaire, puis on proposera trois applications périodiques distinctes, on terminera par des simulations MAT7

LAB pour illustrer tous les résultats de cette partie.

En toute modestie, les résultats des deux derniers chapitres sont soumis à une Revue Mathématique pour une évaluation scientifique [15].



# Chapitre 1

## PRÉLIMINAIRES

### 1 INTRODUCTION

Ce chapitre sera consacré aux définitions de base de l'analyse fonctionnelle et autres concepts fondamentaux dont on aura besoin dans la suite de nos travaux. Les premières sections de ce chapitre sont destinées aux différents outils du calcul fractionnaire, comme les fonctions spéciales, l'intégrale au sens de Riemann-Liouville et les deux approches des dérivées fractionnaires au sens de Caputo et au sens de Riemann Liouville (R-L for short).

### 2 DÉFINITIONS & PROPRIÉTÉS

Dans cette section, on s'inspire de [16, 24] pour introduire les notions suivantes :

#### 2.1 Fonctions spéciales

##### 2.1.1 Fonction Gamma d'Euler

**Définition 1.1** [21] Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction Gamma d'Euler est donnée par la forme intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du.$$

**Propriétés 1.1** la fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\triangleright \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

En effet, par une intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= [-e^{-t} t^{\alpha}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= 0 + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

$$\triangleright \Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha).$$

▷  $\Gamma(n+1) = (n)!$   
 en effet,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)\cdots\Gamma(1) \\ &= n!.\end{aligned}$$

Et plus particulièrement, on a

▷  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

▷  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}.$   
 En effet,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(1)}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots(2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

**Propriétés 1.2** Le prolongement de la fonction Gamma d'Euler pour  $\alpha \in \mathbb{R}_-, n \in \mathbb{N}^*$  et  $-n < i < -n+1$ , est défini par la quantité :

$$\frac{\Gamma(\alpha+i)}{\prod_{k=0}^i(\alpha-k)}, k \in \mathbb{N}.$$

**Propriétés 1.3** On a :

\* Pour  $z = -n, n \in \mathbb{N}$ , la fonction Gamma admet des pôles simples en  $z$ , c'est à dire :

$$\cdots = \frac{1}{\Gamma(-2)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

\* Pour  $-1 < z < 0$ , on peut définir  $\Gamma(z)$  par la relation :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

\* Ainsi, pour :  $-(n+1) < z < -n, n \in \mathbb{N}^*$ , on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

### 2.1.2 Fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta d'Euler, notée  $B(., .)$ , joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

**Définition 1.2** [21] Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction Bêta d'Euler est donnée par la formule intégrale suivante :

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du.$$

On peut aussi proposer l'équivalence suivante :

**Définition 1.3** [21] Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction Bêta est donnée aussi par la formule :

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^{2\alpha-1} (\cos \vartheta)^{2\beta-1} d\vartheta.$$

**Propriétés 1.4** Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ , on a :

\* La fonction Bêta est une fonction symétrique :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

\*  $B(u, v+1) = \frac{v}{u} B(u+1, v)$ ,

\*  $B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$ ,

\*  $B(u, n+1) = \frac{n}{u(u+1)\dots(u+n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

\* La fonction Bêta est connectée avec la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

## 2.2 Intégrales & Dérivées Fractionnaires

Selon l'approche de Riemann-Liouville, l'intégrale d'ordre  $\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ), est définie comme suit :

### 2.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

**Définition 1.4** [9] L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \geq 0$  pour une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, est définie par

$$J_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, & \alpha > 0, \quad a < t \leq b, \\ f(t), & \alpha = 0, \quad a < t \leq b, \end{cases}$$

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0, b]$ , alors

$$J_0^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-T)^{\alpha-1} f(T) dT, \alpha > 0, 0 < t \leq b$$

**Exemple 1.1** Considérons la fonction  $f(t) = (t-a)^\beta$  où ( $\beta > -1$ ). Alors :

$$J_a^\alpha \left[ (t-a)^\beta \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-T)^{\alpha-1} (T-a)^\beta dT.$$

Pour évaluer cette quantité, on pose :  $\tau = a + (t-a)s$ . Donc, on a

$$\begin{aligned} J_a^\alpha \left[ (t-a)^\beta \right] &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

On voit que c'est une généralisation du cas  $\alpha = 1$ , c'est à dire

$$\begin{aligned} J_a^1 \left[ (t-a)^\beta \right] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{\beta+1} (t-a)^{\beta+1}. \end{aligned}$$

**Propriétés 1.5** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors :

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] = J_a^\beta [J_a^\alpha f(t)]$
2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] = J_a^{\alpha+\beta} [f(t)]$ .

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-x)^{\beta-1} f(x) dx \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \int_a^s (s-x)^{\beta-1} f(x) dx \right] ds. \end{aligned}$$

Or  $a \leq x \leq s \leq t$ , donc, on a :

$$J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(x) \left[ \int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds \right] dx.$$

Pour calculer l'intégrale  $\int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds$ , on fait le changement de variables  $t = \frac{s-x}{t-x}$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds &= \int_0^1 (t-\tau(t-x)-x)^{\alpha-1} (\tau(t-x)+x-x)^{\beta-1} (t-x) d\tau \\ &= \int_0^1 (t-x)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} (t-x)^{\beta-1} (t-x) d\tau \\ &= (t-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= (t-x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(x) (t-x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) dx \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(x) (t-x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) dx \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x) dx \\ &= J_a^{\alpha+\beta} [f(t)] \\ &= J_a^\beta [J_a^\alpha f(t)]. \end{aligned}$$

■

### 2.2.2 Dérivée au Sens de Riemann-Liouville

Il existe d'autres définitions des dérivées fractionnaires. Dans cette section on va présenter deux approches. Pour plus de détails, on se réfère à ([16, 18, 21]).

**Définition 1.5** Soient  $\alpha \geq 0$ ,  $m-1 < \alpha < m$ , et  $f \in C([a, b])$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville d'ordre  $\alpha$  de  $f$ , notée  $RLD_a^\alpha f(x)$ , est donnée par :

$$D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt, & m-1 < \alpha < m \\ D^m f(x), & \alpha = m \end{cases}$$

$$= D^m J_a^{m-\alpha} [f(x)],$$

où  $m = [\alpha] + 1$ , avec  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$ .

**Propriétés 1.6** Soient  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha, \beta > 0$ . Alors :

- \*  ${}^{RL}D_a^\alpha J_a^\alpha f(t) = f(t)$ .
- \*  $J_a^\alpha {}^{RL}D_a^\alpha f(t) \neq f(t)$
- \*  ${}^{RL}D_a^\alpha J_a^\beta f(t) = {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(t)$ ,  $\alpha > \beta$ .
- \*  ${}^{RL}D_a^\alpha {}^{RL}D_a^\beta f(t) \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(t) \neq {}^{RL}D_a^\beta {}^{RL}D_a^\alpha f(t)$
- \*  ${}^{RL}D_a^\alpha C \neq 0$ ,  $\forall C \in \mathbb{R}^*$ .
- \* Pour  $f(t) = (t-a)^\beta$  sur  $[a, b]$ , on a :

$${}^{RL}D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

### 2.2.3 Dérivée au Sens de Caputo

En 1967, Caputo introduit une nouvelle approche de dérivée d'ordre arbitraire . Elle est la suivante :

**Définition 1.6** Soient  $\alpha \geq 0$ ,  $m-1 < \alpha < m$ , et  $f \in C^m([a, b])$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . On définit la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo par :

$$D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt, & m-1 < \alpha < m \\ D^m f(x), & \alpha = m \end{cases}$$

$$= J_a^{m-\alpha} [f^{(m)}(x)],$$

où  $m = [\alpha] + 1$ , avec  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$ .

**Remarque 1.1** La dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle. En effet  $\forall C \in \mathbb{R}$

$$D_a^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} D^{(m)} C dt = 0.$$

Par contre,

$${}^{RL}D_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{C}{\Gamma(m-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

**Propriétés 1.7** Soient  $f \in C^m([a, b])$ , et  $m-1 < \alpha < m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors, on :

1.  $D_a^\alpha$  est un opérateur linéaire.
2. On a :

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x).$$

3. En général, la propriété :

$$J_a^\alpha [D_a^\alpha f](x) = f(x)$$

n'est pas vérifiée.

- 4.

$$4^* : J_a^\alpha [D_a^\alpha f(x)] = J^m [D^m f(x)] = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

**Exemple 1.2** Soit la fonction  $f(t) = (x-a)^\beta$  où  $(\beta > -1)$ . On a :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}$$

où on a appliqué la définition de Caputo, suivie de la formule :

$$\begin{aligned} D^m (x-a)^\lambda &= \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)} (x-a)^{\lambda-m}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.2** \* Soient  $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ,  $n = [\alpha] + 1$ , et  $\alpha > 0$ . La connexion entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}_a D^\alpha f(t) = {}_a D_{RL}^\alpha \left( f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(0) \right).$$

Cette formule est obtenue grâce au développement en série de Taylor de la fonction  $f$  au voisinage de  $x = a$ , ensuite l'application de l'opérateur de dérivation  ${}^{RL}D_a^\alpha$  sur  $f$ .

- \* Pour  $\alpha > 0$ , on déduit que si  $f^{(i)}(a) = 0$  pour  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , ( $m = [\alpha] + 1$ ), on aura

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t).$$

### 3 LEMMES AUXILIAIRES

**Lemme 1.1** Soient  $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . L'équation  $D^\alpha y(t) = 0$ , admet une solution intégrale donnée sous la forme :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i,$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Lemme 1.2** Soit  $\alpha > 0$ ;  $n = [\alpha] + 1$ . Alors on a

$$J_a^\alpha D^\alpha y(t) = y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i, \quad t \in [a, b],$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Lemme 1.3** Soit  $q_1 > q_2 > 0$ ,  $f \in L^1(I)$ . Alors, on a

$$D^{q_2} J^{q_1} [f(t)] = J^{q_1 - q_2} [f(t)].$$

## 4 AUTOUR DES POINTS FIXES

Les théorèmes de points fixe nous fournissent des conditions pour que l'équation  $x = \Phi(x)$  admette une solution. Ces théorèmes reposent sur les définitions suivantes, ( voir [4, 6, 8, 23]) :

### 4.1 Normes

Dans ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne soit le corps des réels, soit le corps des complexes. Ce corps est muni de la topologie usuelle.

**Définition 1.7** Un  $K$ -espace vectoriel  $E$  est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme : i.e. d'une application

$$\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- \* *séparation* :  $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$  ;
- \* *homogénéité* :  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$  ;
- \* *sous-additivité (inégalité triangulaire)* :  $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ .

### 4.2 Espaces vectoriels normés

**Définition 1.8** Soit  $\|\cdot\|_X$  une norme associée à un espace vectoriel  $X$ . Le couple  $(X, \|\cdot\|_X)$  est appelé un espace vectoriel normé.

### 4.3 Suites convergentes

**Définition 1.9** Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On dit que  $(u_n)$  est convergente s'il existe un réel  $l$  tel que  $(u_n)$  converge vers  $l$ . Sinon  $(u_n)$  est divergente.

Une suite convergente est donc caractérisée par la proposition :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon).$$

### 4.4 Suites de Cauchy

**Définition 1.10** Une suite  $(r_n)$  de réels ou de complexes est dite de Cauchy, lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens suivant :

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} |r_p - r_q| = 0.$$

Cette dernière condition se réécrit :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \forall q \geq N \quad |r_p - r_q| < \epsilon$$

ou encore :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad |r_{n+k} - r_n| < \epsilon.$$

**Théorème 1.1** (Critère de Cauchy)

Une suite de réels est convergente dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si, c'est une suite de Cauchy.

### 4.5 Espaces complets

**Définition 1.11** On dit que  $X$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_X$  si toute suite de Cauchy dans  $X$  est convergente dans cet espace.

### 4.6 Espaces de Banach

**Définition 1.12** On appelle espace de Banach tout e.v.n. dont l'espace métrique associé est complet.

### 4.7 Applications contractantes

**Définition 1.13** Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace vectoriel normé. Une application  $\Phi$  de  $X$  dans  $X$  est dite contractante s'il existe un nombre positif  $k \in [0, 1[$ , tel que pour tout  $x, y \in X$ , on a :

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_X \leq k\|x - y\|_X.$$

### 4.8 Équicontinuité

**Définition 1.14** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels normés et  $\mathcal{C}(X, Y)$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$ . On dit qu'une partie  $\Omega \subset \mathcal{C}(X, Y)$  est équicontinue en un point  $x \in X$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall y \in X$ , on a

$$\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_Y < \epsilon, \quad \forall \Phi \in \Omega.$$

### 4.9 Continuité

**Théorème 1.2** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  des e.v.n., et soit  $f : E \rightarrow F$ .

$f$  est continue sur  $E$  si et seulement si l'image  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $(E, \|\cdot\|_E)$  est convergente dans  $(F, \|\cdot\|_F)$ .

### 4.10 Ensemble Borné

**Définition 1.15** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  des e.v.n., et soit  $f : E \rightarrow F$ . On dit qu'un ensemble d'image  $f(x), x \in E$  est borné s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall C > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C.$$

### 4.11 Compacité

**Théorème 1.3** Un e.v.n.  $(E, \|\cdot\|_E)$  est compact si et seulement s'il vérifie l'assertion suivante : Toute suite d'éléments de  $(E, \|\cdot\|_E)$  admet une valeur d'adhérence.

**Définition 1.16** (Opérateur compact) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $\Psi : E \rightarrow F$  un opérateur. On note  $B_E$  la boule unité de  $E$ . On dit que  $\Psi$  est compact si  $\Psi(B_E)$  est une partie compacte de  $F$ .

**Définition 1.17** Soient  $E$  et  $F$  deux e.v.n. Un opérateur  $\Psi : E \rightarrow F$  est dit compact, s'il transforme toute partie bornée de  $E$  en une partie relativement compacte de  $F$ .

**Définition 1.18** (Opérateur complètement continu) Soient  $E$  et  $F$  deux e.v.n. Un opérateur  $\psi : E \rightarrow F$  est dit complètement continu, s'il transforme toute suite faiblement convergente de  $E$  en une suite fortement convergente de  $F$ .



### 4.12 Propriété d'Arzela Ascoli

**Théorème 1.4** (Arzelà-Ascoli) [10] Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques tels que  $E$  est compacte. On munit l'espace  $\mathcal{C}(E, F)$  des fonctions continues de  $(E, d_E)$  dans  $(F, d_F)$  de la métrique de convergence uniforme :

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in E} d_F(f(x), g(x))$$

Une famille  $H \subset \mathcal{C}(E, F)$  est relativement compacte si :

(1)  $H$  est équicontinue;

(2)  $\forall k \in E$ , l'ensemble  $H_k$  est d'adhérence compacte dans  $F$

$$H_k = \{f(k) : f \in H\}.$$

### 4.13 Théorème de point fixe de Banach

**Théorème 1.5** Soient  $X$  un espace de Banach et  $\Phi : X \rightarrow X$ . Si  $\Phi$  est une application contractante, alors  $\Phi$  admet un point fixe unique.

### 4.14 Théorème de Schaefer

**Théorème 1.6** Soient  $E$  un espace de Banach et  $\psi$  un opérateur complètement continu sur  $E$ . Si l'ensemble

$$\Omega = \{x \in E, \quad x = \lambda \psi x, \quad 0 < \lambda < 1\}$$

est borné, alors  $\psi$  admet au moins un point fixe dans  $E$ .

## Chapitre 2

# ETUDE D'PROBLEME INTEGRO-DIFFERENTIEL FRACTIONNAIRE

### 1 INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires non linéaires sont parmi les outils les plus puissants des mathématiques modernes, car la plupart des phénomènes dans le monde réel ont une nature non linéaire. Certaines des dernières études sur les équations différentielles fractionnaires non linéaires sont présentées dans [2, 3, 12, 13]. De plus, il existe un grand nombre de phénomènes physiques modélisés par différentes équations à dérivées d'ordre fractionnaire. L'une de ces équations est celle de type Duffing. Le modèle type de Duffing est donné par la forme suivante :

$$r''(t) + ar'(t) + f(t, r(t)) = h(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad a > 0$$

avec les conditions :

$$r(0) = A \in \mathbb{R}, \quad r'(0) = B \in \mathbb{R}$$

où  $f, h$  sont des fonctions continues à valeurs réelles.

Le lecteur intéressé par "le phénomène Duffing" peut trouver de nombreux articles de recherche [5, 7, 11, 19, 20] qui sont articulés autour de certains problèmes de type Duffing. Pour citer quelques-uns, on commence par la référence [7], où les auteurs ont discuté l'application d'une méthode numérique à l'équation de Duffing avec deux types de dérivés fractionnaires. Leur problème est le suivant :

$$\begin{cases} D^\beta r(t) + \delta D^\alpha r(t) + \rho r(t) + \mu r^3(t) = \lambda \sin(\omega t). \\ r(0) = A^* \in \mathbb{R}, \quad D^\alpha r(0) = B^* \in \mathbb{R} \\ 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 2, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

où  $D^\alpha, D^\beta$  sont les dérivés au sens Caputo,  $\delta, \rho, \mu, \lambda > 0$ .

Et dans [20], les auteurs ont étudié le problème de type Duffing suivant :

$$\begin{cases} D^\beta r(t) + aD^\alpha r(t) + f(t, r(t)) = h(t) \\ r(r_0) = r_0, \quad r'(y_0) = r_1 \\ 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 2. \end{cases}$$

Motivé par les articles ci-dessus, le présent travail traite un problème fractionnaire non linéaire de type Duffing. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\gamma r(t) + k_1 f_1(t, r(t), \mathcal{D}^\alpha r(t)) + k_2 f_2(t, r(t), \mathcal{D}^p r(t)) + k_3 f_3(t, r(t), \mathcal{J}^q(r(t))) = f_4(t) \\ r(0) = A_1 \in \mathbb{R}, r'(0) = A_2 \in \mathbb{R}, \mathcal{J}^\alpha r(1) = A_3 \in \mathbb{R} \\ 0 \leq p, q, \alpha \leq 1, 2 \leq \gamma \leq 3, p < \alpha, t \in I, \end{cases} \quad (2.1)$$

tel que  $I := [0, 1]$ , les dérivés du problème sont au sens de Caputo,  $\mathcal{J}^q$  désigne l'intégrale d'ordre de Riemann-Liouville  $q$  et  $f_i : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1...3$ , et  $f_4 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont quatre fonctions données.

## 2 REPRÉSENTATION INTÉGRALE

On consacre cette section pour trouver la solution intégrale du problème 2.1.

On a :

**Lemme 2.1** Soient  $G \in C([0, 1])$ ,  $t \in I = [0, 1]$ ,  $2 \leq \gamma \leq 3$  et  $0 < \alpha \leq 1$ . Alors, la solution intégrale du problème (2.2) :

$$\begin{cases} D^\gamma r(t) = G(t). \\ r(0) = A_1, r'(0) = A_2, \mathcal{J}^\alpha r(1) = A_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

est représentée par la formule :

$$\left[ \begin{array}{l} r(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} G(v) dv \\ -B_1 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} G(v) dv \right] t^2 \\ - [B_2 A_2 + B_3 A_1 - B_1 A_3] t^2 + A_2 t + A_1, \end{array} \right] \quad (2.3)$$

$$\text{où, } \begin{array}{lll} B_1 = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{2} & B_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} & B_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \\ B_4 = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(3-\alpha)} & B_5 = \frac{2}{\Gamma(3-p)} & B_6 = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)} \\ B_7 = \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(3-\alpha)} & B_8 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} & B_9 = \frac{1}{\Gamma(2-p)}. \end{array}$$

**Preuve.** Les lemmes (1.1) et (1.2) permettent d'écrire la solution générale comme suit :

$$r(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} G(v) dv - c_0 t^2 - c_1 t - c_2. \quad (2.4)$$

Pour déterminer les constantes  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , on utilise les conditions de problème (2.1).

$$\begin{cases} c_0 = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(3)} \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} G(v) dv \\ + \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(3)} \left( \frac{A_2}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{A_1}{\Gamma(\alpha+1)} - A_3 \right) \\ c_1 = -A_2 \\ c_2 = -A_1. \end{cases}$$

Finalement, en substituant les valeurs de  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  dans (2.4), on obtient (2.3).

D'où le résultat. ■

### 3 RESULTATS ANALYTIQUES

Tout d'abord, on commence par introduire l'espace de Banach suivant :

$$\mathbb{R} := \{r \in C(I, \mathbb{R}), D^\alpha r \in C(I, \mathbb{R}), D^p r \in C(I, \mathbb{R})\},$$

muni de la norme

$$\|r\|_{\mathbb{R}} = \max\{\|r\|_{\infty}, \|D^\alpha r\|_{\infty}, \|D^p r\|_{\infty}\},$$

où,

$$\|r\|_{\infty} = \sup_{t \in I} |r(t)|, \quad \|D^\alpha r\|_{\infty} = \sup_{t \in I} |D^\alpha r(t)|, \quad \|D^p r\|_{\infty} = \sup_{t \in I} |D^p r(t)|.$$

Maintenant, on transforme le problème (2.1) en un problème du point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$\left[ \begin{array}{l} \Phi r(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, r(v), D^\alpha r(v)) - \\ k_2 f_2(v, r(v), D^p r(v)) - k_3 f_3(v, z(v), J^q(r(v))) \end{array} \right] dv \\ -B_1 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, z(v), D^\alpha z(v)) - \\ k_2 f_2(v, r(v), D^p r(v)) - k_3 f_3(v, r(v), J^q(r(v))) \end{array} \right] dv \right] t^2 \\ - [B_2 A_2 + B_3 A_1 - B_1 A_3] t^2 + A_2 t + A_1. \end{array} \right] \quad (2.5)$$

Pour la suite, on a également besoin des hypothèses suivantes :

(H1) : Il existe des constantes positives  $M_i, i = 1..6$ , telles que pour tout  $t \in I$  et  $e_1, e_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

- $|f_1(t, e_1, e_2) - f_1(t, s_1, s_2)| \leq M_1 |e_1 - s_1| + M_2 |e_2 - s_2|$ ,
- $|f_2(t, e_1, e_2) - f_2(t, s_1, s_2)| \leq M_3 |e_1 - s_1| + M_4 |e_2 - s_2|$ ,
- $|f_3(t, e_1, e_2) - f_3(t, s_1, s_2)| \leq M_5 |e_1 - s_1| + M_6 |e_2 - s_2|$ .

(H2) : Les fonctions  $f_i : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, i = 1..3, h : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_4 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues.

(H3) : Il existe des constantes positives  $N_{f_1}, N_{f_2}, N_{f_3}$  et  $N_{f_4}$ , telles que pour chaque  $t \in I, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$|f_1(t, e_1, e_2)| \leq N_{f_1}, \quad |f_2(t, e_1, e_2)| \leq N_{f_2}, \quad |f_3(t, e_1, e_2)| \leq N_{f_3}, \quad |f_4(t)| \leq N_{f_4}.$$

Ensuite, on introduit les quantités suivantes dont on aura aussi besoin par la suite :

$$L_1 : = (|k_1|(M_1 + M_2) + |k_2|(M_3 + M_4) + |k_3|M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \\ + |k_3|M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+q+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right],$$

$$L_2 : = (|k_1|(M_1 + M_2) + |k_2|(M_3 + M_4) + |k_3|M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + \frac{|B_4|}{\Gamma(\gamma+3)} \right] \\ + |k_3|M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+q+1)} + |B_4| \frac{1}{\Gamma(\gamma+q+3)} \right],$$

et

$$L_3 : = (|k_1|(M_1 + M_2) + |k_2|(M_3 + M_4) + |k_3|M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-p+1)} + \frac{|B_1 B_5|}{\Gamma(\gamma+1)} \right] \\ + |k_3|M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+q-p+1)} + \frac{|B_1 B_5|}{\Gamma(\gamma+q+1)} \right].$$

### 3.1 UNICITÉ DE SOLUTIONS

**Théorème 2.1** *Supposons que (H1) vérifiée. Alors le problème (2.1) a une solution unique pourvu que  $0 < L < 1$ ,  $L := \max(L_1, L_2, L_3)$ .*

**Preuve.** On va montrer que l'opérateur  $\Phi$  possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que  $\Phi$  est un opérateur contractant.

On remarque au passage que l'opérateur est bien défini de l'espace  $R$  dans  $R$  : la stabilité est donc assurée.

**A :** Soient  $x, y \in R$ . Donc pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\left[ \begin{aligned} |\Phi y(t) - \Phi x(t)| &\leq |k_1| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - f_1(v, x(v), D^\alpha x(v))| dv \\ &+ |k_1| |B_1| t^2 \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_1(v, x(v), D^\alpha y(v)) - f_1(v, y(v), D^\alpha x(v))| dv \\ &+ |k_2| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_2(v, y(v), D^p y(v)) - f_2(v, x(v), D^p x(v))| dv \\ &+ |k_2| |B_1| t^2 \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_2(v, y(v), D^p y(v)) - f_2(v, x(v), D^p x(v))| dv \\ &+ |k_3| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_3(v, y(v), J^q y(v)) - f_3(v, x(v), J^q x(v))| dv \\ &+ |k_3| |B_1| t^2 \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_3(v, y(v), J^q y(v)) - f_3(v, x(v), J^q x(v))| dv \end{aligned} \right] dv ds.$$

En vertu des nos hypothèses, on peut écrire :

$$\left[ \begin{aligned} |\Phi y(t) - \Phi x(t)| &\leq |k_1| (M_1 \|y - x\|_\infty + M_2 D^\alpha \|y - x\|_\infty) \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ &+ |k_1| (M_1 \|y - x\|_\infty + M_2 D^\alpha \|y - x\|_\infty) |B_1| t^2 \int_0^1 \frac{(t-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \\ &+ |k_2| (M_3 \|y - x\|_\infty + M_4 D^p \|y - x\|_\infty) \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ &+ |k_2| (M_3 \|y - x\|_\infty + M_4 D^p \|y - x\|_\infty) |B_1| t^2 \int_0^1 \frac{(t-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \\ &+ |k_3| (M_5 \|y - x\|_\infty + M_6 J^q \|y - x\|_\infty) \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ &+ |k_3| (M_5 \|y - x\|_\infty + M_6 J^q \|y - x\|_\infty) |B_1| t^2 \left( \int_0^1 \frac{(t-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \right). \end{aligned} \right]$$

Ainsi,

$$\left[ \begin{aligned} \sup_{t \in I} |\Phi y(t) - \Phi x(t)| &\leq |k_1| (M_1 + M_2) \|D^\alpha y - D^\alpha x\|_\infty \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t \in I} \frac{t^{\alpha+\gamma+2}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \\ &+ |k_2| (M_3 + M_4) \|y - x\|_\infty \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t \in I} \frac{t^{\alpha+\gamma+2}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] + \\ &|k_3| M_5 \|y - x\|_\infty \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t \in I} \frac{t^{\alpha+\gamma+2}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] + \\ &|k_3| M_6 \|y - x\|_\infty \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+q}}{\Gamma(\gamma+q+1)} + |B_1| \sup_{t \in I} \frac{t^{\alpha+\gamma+q+2}}{\Gamma(\alpha+\gamma+q+1)} \right]. \end{aligned} \right]$$

Donc,

$$\sup_{t \in I} |\Phi y(t) - \Phi x(t)| \leq \left[ \begin{aligned} &(|k_1| (M_1 + M_2) + |k_2| (M_3 + M_4) + |k_3| M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \\ &+ |k_3| M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+q+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+q+1)} \right] \end{aligned} \right] \|y - x\|_R.$$

Par conséquent,

$$\|\Phi y - \Phi x\|_\infty \leq L_1 \|y - x\|_{\mathbb{R}}.$$

**B:** Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\left[ \begin{aligned} \|D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x\|_\infty &\leq (|k_1| (M_1 \|y - x\|_\infty + M_2 \|D^\alpha y - D^\alpha x\|_\infty) \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+2}}{\Gamma(\gamma+3)} \right] \right. \\ &\quad + |k_2| (M_3 \|y - x\|_\infty + M_4 \|D^p y - D^p x\|_\infty) \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+2}}{\Gamma(\gamma+3)} \right] \\ &\quad \left. + |k_3| (M_5 \|y - x\|_\infty + M_6 \|J^q y - J^q x\|_\infty) \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+2}}{\Gamma(\gamma+3)} \right] \right] \end{aligned} \right]$$

Cela implique que

$$\left[ \|D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x\|_\infty \leq \left( \begin{aligned} &(|k_1| (M_1 + M_2) + |k_2| (M_3 + M_4) + |k_3| M_5) \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \right] \\ &\quad + |B_4| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+2}}{\Gamma(\gamma+3)} \\ &|k_3| M_6 \left[ \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-\alpha+q}}{\Gamma(\gamma-\alpha+q+1)} + |B_4| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma+q+2}}{\Gamma(\gamma+q+3)} \right] \end{aligned} \right) \|y - x\|_\infty. \right]$$

Donc,

$$\|D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x\|_\infty \leq \left( \begin{aligned} &(|k_1| (M_1 + M_2) + |k_2| (M_3 + M_4) + |k_3| M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + \frac{|B_4|}{\Gamma(\gamma+3)} \right] \\ &\quad + |k_3| M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+q+1)} + |B_4| \frac{1}{\Gamma(\gamma+q+3)} \right] \end{aligned} \right) \|y - x\|_{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\|D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x\|_\infty \leq L_2 \|y - x\|_{\mathbb{R}}.$$

**C:** Pour  $x, y \in X$  et  $t \in I$ , on a :

$$\left[ \begin{aligned} \|D^p \Phi y - D^p \Phi x\|_\infty &\leq |k_1| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_1(v, D^\alpha y(v)) - f_1(v, D^\alpha x(v))| dv \\ &\quad + |k_1| |B_1 B_5| \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_1(v, D^\alpha y(v)) - f_1(v, D^\alpha x(v))| dv \right] t^{2-p} \\ &\quad + |k_2| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_2(v, y(v), D^p y(v)) - f_2(v, x(v), D^p x(v))| dv \\ &\quad + |k_2| |B_1 B_5| \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_2 g(v, y(v), D^p y(v)) - f_2 g(v, x(v), D^p x(v))| dv \right] t^{2-p} \\ &\quad + |k_3| \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_3(v, y(v), J^q y(v)) - f_3(v, x(v), J^q x(v))| dv \\ &\quad + |k_3| |B_1 B_5| \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} |f_3(v, y(v), J^q y(v)) - f_3(v, x(v), J^q x(v))| dv \right] t^{2-p} \end{aligned} \right]$$

et

$$\left[ \begin{aligned} \|D^p \Phi y - D^p \Phi x\|_\infty &\leq (|k_1| M_1 \|y - x\|_\infty + M_2 \|D^\alpha y - D^\alpha x\|_\infty) \left( \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p}}{\Gamma(\gamma-p+1)} + |B_1 B_5| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p+2}}{\Gamma(\gamma+1)} \right) \\ &+ |k_2| (M_3 \|y - x\|_\infty + M_4 \|D^p y - D^p x\|_\infty) \left( \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p}}{\Gamma(\gamma-p+1)} + |B_1 B_5| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p+2}}{\Gamma(\gamma+1)} \right) \\ &+ |k_3| (M_5 \|y - x\|_\infty + M_6 \|J^q y - J^q x\|_\infty) \left( \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p}}{\Gamma(\gamma-p+1)} + |B_1 B_5| \sup_{t \in I} \frac{t^{\gamma-p+2}}{\Gamma(\gamma+1)} \right). \end{aligned} \right]$$

On obtient

$$\left[ \|D^p \Phi y - D^p \Phi x\|_\infty \leq \left( (|k_1| (M_1 + M_2) + |k_2| (M_3 + M_4) + |k_3| M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-p+1)} + \frac{|B_1 B_5|}{\Gamma(\gamma+1)} \right] + |k_3| M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+q-p+1)} + \frac{|B_1 B_5|}{\Gamma(\gamma+q+1)} \right] \right) \|y - x\|_{\mathbb{R}} \right].$$

Par conséquent ,

$$\|D^Y \Phi y - D^Y \Phi x\|_\infty \leq L_3 \|y - x\|_{\mathbb{Z}}.$$

On conclut que :

$$\|\Phi x - \Phi y\|_{\mathbb{R}} \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}}.$$

Comme  $0 < L < 1$ , alors  $\Phi$  est contractant.

Le théorème du point fixe de Banach nous permet donc de conclure que l'opérateur  $\Phi$  admet un point fixe unique  $x \in \mathbb{R}$  qui est la solution du problème (2.1). ■

### 3.2 EXISTENCE D'UNE SOLUTION

**Théorème 2.2** *Supposons que (H2) et (H3) sont valides. Alors le problème (2.1) possède au moins une solution sur  $[0, 1]$ .*

**Preuve.** On utilise, par exemple, le théorème de Schaefer pour prouver ce théorème. On procède comme suit :

**Étape1** Nous montrons que  $\Phi$  est un opérateur continu sur  $\mathbb{R}$  :

Cette étape est triviale.

**Étape2** Maintenant, on prouve que l'opérateur  $\Phi$  transforme les ensembles bornés en des ensembles bornés dans  $\mathbb{R}$ . On prend  $r > 0$ , et  $B_r := \{c \in \mathbb{R}; \|c\|_{\mathbb{R}} \leq r\}$ .

Par (H3), pour chaque  $y \in B_r$ , on retrouve :

$$\left[ \begin{aligned} & \|\Phi y\|_\infty \leq N_{f_4} \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ & + |B_1| N_{f_4} \sup_{t \in I} \left( \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \right) t^2 \\ & + |k_1| N_{f_1} \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ & + |B_1| |k_1| N_{f_1} \sup_{t \in I} \left( \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \right) t^2 \\ & + |k_2| N_{f_2} \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ & + |k_2| |B_1| N_{f_2} \sup_{t \in I} \left( \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \right) t^2 \\ & + |k_3| N_{f_3} \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ & + |k_3| |B_1| N_{f_3} \sup_{t \in I} \left( \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} dv \right) t^2 \\ & \|\Phi y\|_\infty \leq [N_{f_4} + |k_1| N_{f_1} + |k_2| N_{f_2} + |k_3| N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] < +\infty. \end{aligned} \right]$$

Par conséquent, on a :

$$\|\Phi y\|_\infty \leq \left( [N_{f_4} + |k_1| N_{f_1} + |k_2| N_{f_2} + |k_3| N_{f_3}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \\ + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \end{bmatrix} \right) < +\infty. \quad (2.6)$$

Et aussi, on a

$$\left[ \begin{aligned} & \|D^\alpha \Phi y\|_\infty = \sup_{t \in I} |D^\alpha \Phi y(t)| \leq \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} |f_4(u)| du \\ & + |k_1| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} |f_1(u, y(u), D^\alpha y(u))| du \\ & + |k_2| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} |f_2(u, y(u), D^p y(u))| du \\ & + |k_3| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} |f_3(u, y(u), J^q(y(u)))| du ds \\ & + |B_4| \sup_{t \in I} t^{2-\alpha} \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_4(u)| du \\ + |k_1| \int_0^1 \frac{(1-u)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_1(u, y(u), D^\alpha y(u))| du \\ + |k_2| \int_0^1 \frac{(1-u)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_2(u, y(u), D^p y(u))| du \\ + |k_3| \int_0^1 \frac{(1-u)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_3(u, y(u), J^q(y(u)))| du \end{pmatrix} \\ & + |B_7 A_2 + B_6 A_1 - B_4 A_3| + |B_8 A_2|. \end{aligned} \right]$$

Alors,



$$\|D^\alpha \Phi y\|_\infty \leq \left( \begin{array}{c} [N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \\ + |B_7A_2 + B_6A_1 - B_4A_3| + |B_8A_2| \end{array} \right) < +\infty. \quad (2.7)$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on peut écrire :

$$\left[ \begin{array}{l} \|D^p \Phi y\|_\infty = \sup_{t \in I} |D^p \Phi y(t)| \leq \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_4(v)| dv \\ + |k_1| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_1(v, y(v), D^\alpha y(v))| dv \\ + |k_2| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_2(v, y(v), D^p y(v))| dv \\ + |k_3| \sup_{t \in I} \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} |f_3(v, y(v), J^q(y(v)))| dv \\ + |B_1 B_5| \sup_{t \in I} t^{2-p} \left( \begin{array}{l} \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_4(v)| dv \\ + |k_1| \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_1(v, y(v), D^\alpha y(v))| dv \\ + |k_2| \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_2(v, y(v), D^p y(v))| dv \\ + |k_3| \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} |f_3(v, y(v), J^q(y(v)))| dv \\ + |B_7A_2 + B_6A_1 - B_5A_3| + |B_9A_2|. \end{array} \right) \end{array} \right]$$

Donc,

$$\|D^p \Phi y\|_\infty \leq \left( \begin{array}{c} [N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-p+1)} \right] \\ + |B_1 B_5| \frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} \\ + |B_7A_2 + B_6A_1 - B_5A_3| + |B_9A_2| \end{array} \right) < +\infty. \quad (2.8)$$

Par conséquent,  $\Phi$  est uniformément borné sur  $B_c$ .

**Étape3** Maintenant, on montre que  $\phi$  est équicontinu.

Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 < t_2$ . Alors, on a :

$$\left[ \begin{array}{l} \Phi y(t_1) - \Phi y(t_2) \leq (N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}) \left( \begin{array}{l} \int_0^{t_1} \frac{(t_1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ - B_1 t_1^2 \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ - (B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3) t_1^2 + A_2 t_1 + A_1 \\ - \int_0^{t_2} \frac{(t_2-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ + B_1 t_2^2 \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \\ + (B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3) t_2^2 - A_2 t_2 + A_1. \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (2.9)$$

$$\left[ \begin{array}{l} |\Phi y(t_1) - \Phi y(t_2)| \leq (N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}) \left( \int_0^{t_1} \frac{(t_1-v)^{\gamma-1} - (t_2-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dv \right) \\ \left. + \left( \frac{|B_1|}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} + |B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3| \right) |t_1^2 - t_2^2| + |A_2| |t_1 - t_2|. \right] \quad (2.10)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} D^\alpha \Phi y(t_1) - D^\alpha \Phi y(t_2) = & \left( \int_0^{t_1} \frac{(t_1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \begin{bmatrix} f_4(u) - k_1 f_1(u, y(u), D^\alpha y(u)) \\ -k_2 f_2(u, y(u), D^p y(u)) \\ -k_3 f_3(u, y(u), J^q(y(u))) \end{bmatrix} du \right. \\ & \left. - B_4 t_1^{2-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \begin{bmatrix} f_4(u) - k_1 f_1(v, y(u), D^\alpha y(u)) \\ -k_2 f_2(u, y(u), D^p y(u)) \\ -k_3 f_3(u, y(u), J^q(y(u))) \end{bmatrix} du \right. \\ & \left. + (B_7A_2 + B_6A_1 - B_4A_3) t_1^{2-\alpha} + B_8A_2 t_1^{1-\alpha} \right) \\ & - \left( \int_0^{t_2} \frac{(t_2-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \begin{bmatrix} f_4(u) - k_1 f_1(u, y(u), D^\alpha y(u)) \\ -k_2 f_2(u, y(u), D^p y(u)) \\ -k_3 f_3(u, y(u), J^q(y(u))) \end{bmatrix} du \right. \\ & \left. - B_4 t_2^{2-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \begin{bmatrix} f_4(u) - k_1 f_1(v, y(u), D^\alpha y(u)) \\ -k_2 f_2(u, y(u), D^p y(u)) \\ -k_3 f_3(u, y(u), J^q(y(u))) \end{bmatrix} du \right. \\ & \left. + (B_7A_2 + B_6A_1 - B_4A_3) t_2^{2-\alpha} + B_8A_2 t_2^{1-\alpha} \right) \\ & \left[ \begin{array}{l} |D^\alpha \Phi y(t_1) - D^\alpha \Phi y(t_2)| = (N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}) \left( \int_0^{t_1} \frac{(t_1-u)^{\gamma-\alpha-1} - (t_2-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} du \right) \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-u)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} du \right) \\ \left. + \left( (N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}) |B_4| \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\gamma)} du \right) |t_1^{2-\alpha} - t_2^{2-\alpha}| + B_8A_2 |t_1^{1-\alpha} - t_2^{1-\alpha}|. \right. \\ \left. + |B_7A_2 + B_6A_1 - B_4A_3| \right) \end{array} \right] \quad (2.11) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} D^p \Phi y(t_1) - D^p \Phi y(t_2) = & \int_0^{t_1} \frac{(t_1-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} \begin{bmatrix} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{bmatrix} dv \\ & - \int_0^{t_2} \frac{(t_2-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} \begin{bmatrix} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{bmatrix} dv \\ & - \left( B_1 B_5 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \begin{bmatrix} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{bmatrix} dv \right] t_1^{2-p} \right) \\ & - \left( -B_1 B_5 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \begin{bmatrix} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{bmatrix} dv \right] t_2^{2-p} \right) \\ & - \left( [B_7A_2 + B_6A_1 - B_5A_3] B_5 t_1^{2-p} - [B_7A_2 + B_6A_1 - B_5A_3] B_5 t_2^{2-p} \right) \\ & + \left( B_9A_2 t_1^{1-p} - B_9A_2 t_2^{1-p} \right). \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3} \right) \left( \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-v)^{\gamma-p-1} - (t_2-v)^{\gamma-p-1}|}{\Gamma(\gamma-p)} dv \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} dv \right) \\ & + \left( (N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}) |B_1 B_5| \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\gamma)} dv \right] \right. \\ & \quad \left. + |B_7 A_2 + B_6 A_1 - B_5 A_3| |B_5| \right) |t_1^{2-p} - t_2^{2-p}| \\ & \quad + |B_9 A_2| |t_1^{1-p} - t_2^{1-p}|. \end{aligned} \right] \quad (2.12)$$

Les second membres des (2.10), (2.11) et (2.12) tendent vers zéro quand  $t_1 \rightarrow t_2$ . Cela signifie que l'opérateur  $\Phi$  est équicontinu.

En conséquence de ces trois étapes et grâce au théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que  $\Phi$  est complètement continu.

**Étape4 :** Finalement, on considère  $W(\Phi) := \{y \in R; y = \eta\Phi(y), \quad 0 < \eta < 1\}$  pour lequel on doit démontrer la "bornitude".

Soit  $y \in R$ , on prouve que  $W$  est un ensemble borné.

Pour chaque  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\|y\|_\infty \leq \eta \left( [N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] + |B_7 A_2 + B_6 A_1 - B_4 A_3| + |B_8 A_2| \right)$$

De la même manière, on peut prouver que

$$\|D^\alpha \Phi y\|_\infty \leq \eta \left( [N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} + |B_4| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] + |B_7 A_2 + B_6 A_1 - B_4 A_3| + |B_8 A_2| \right)$$

Aussi, on a

$$\|D^p \Phi y\|_\infty \leq \eta \left( [N_{f_4} + |k_1|N_{f_1} + |k_2|N_{f_2} + |k_3|N_{f_3}] \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)} + |B_1 B_8| \frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)} \right] + |B_7 A_2 + B_6 A_1 - B_5 A_3| + |B_9 A_2| \right)$$

Grâce à (2.6), (2.7) et (2.8), on peut déduire que  $\|y\|_R < \infty$ .

Par conséquent,  $W$  est borné. On conclut par le théorème du point fixe de Schaefer 1.6 que l'opérateur  $\Phi$  admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.1).

■

## 4 STABILITÉ AU SENS DE ULAM-HYERS

A présent, on donne des définitions et des critères qui concernent la stabilité de l'Ulam-Hyers pour le problème (2.1).

Soit  $\epsilon > 0$ . On considère les inégalités suivantes :

$$|\mathcal{D}^\gamma y(t) + k_1 f_1(t, y(t), \mathcal{D}^\alpha y(t) + k_2 f_2(t, y(t), \mathcal{D}^p y(t) + k_3 f_3(t, y(t), \mathcal{I}^q(y(t))) - f_4(t)| \leq \epsilon, \quad t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

**Définition 2.1** Le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel  $M > 0$  tel que pour chaque  $\epsilon > 0$  et pour tout solution  $y \in \mathbb{R}$  de l'inégalité (2.13), il existe une solution  $x \in \mathbb{R}$  du problème (2.1) avec

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}} \leq M\epsilon$$

**Théorème 2.3** Supposons que les hypothèses du Théorème 2.1 et aussi (H3) sont vérifiées. Alors le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

**Preuve.** Soient  $\epsilon > 0, 0 < q < p < \alpha < 1, 2 < \gamma < 3$ . Si  $y$  est la solution de l'inégalité (2.5), alors  $y$  est une solution de l'inégalité intégrale suivante :

$$\left[ \begin{array}{l} | - y(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha y(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array} \right] dv \\ -B_1 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, y(v), D^\alpha z(v)) - \\ k_2 f_2(v, y(v), D^p y(v)) - k_3 f_3(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array} \right] dv \right] t^2 \end{array} \right] \leq \epsilon \times \frac{t^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)},$$

et comme on a déjà prouvé que  $x$  est la solution unique du problème (2.1), donc :

$$\left[ \begin{array}{l} x(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, x(v), D^\alpha x(v)) - \\ k_2 f_2(v, x(v), D^p x(v)) - k_3 f_3(v, x(v), J^q(x(v))) \end{array} \right] dv \\ -B_1 \left[ \int_0^1 \frac{(1-v)^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \left[ \begin{array}{l} f_4(v) - k_1 f_1(v, x(v), D^\alpha x(v)) - \\ k_2 f_2(v, x(v), D^p x(v)) - k_3 f_3(v, x(v), J^q(x(v))) \end{array} \right] dv \right] t^2 \\ - [B_2 A_2 + B_3 A_1 - B_1 A_3] t^2 + A_2 t + A_1 \end{array} \right]$$

Par l'hypothèse (H3), on trouve :

$$\|x - y\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + \left[ \begin{array}{l} (|k_1| (M_1 + M_2) + |k_2| (M_3 + M_4) + |k_3| M_5) \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \\ + |k_3| M_6 \left[ \frac{1}{\Gamma(\gamma+q+1)} + |B_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+q+1)} \right] \end{array} \right] \|x - y\|_{\mathbb{R}}$$

Ce qui implique que

$$\|x - y\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + L_1 \|x - y\|_{\mathbb{R}}.$$

Par le même raisonnement, on trouve

$$\|D^\alpha y - D^\alpha x\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + 1)} + L_2 \|x - y\|_{\mathbb{R}}$$

et

$$\|D^p x - D^p y\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma - p + 1)} + L_3 \|x - y\|_{\mathbb{R}}$$

donc

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}} \leq \left[ \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + 1)} + \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma - p + 1)} \right] + L \|x - y\|_{\mathbb{R}}.$$

Finalement, on obtient

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}} \leq \left[ \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma + 1)} + \frac{\epsilon}{\Gamma(\gamma - p + 1)} \right] \frac{1}{1 - L} = M\epsilon$$

Par conséquent, le problème est stable au sens d'Ulam-Hyers. Ceci complète la preuve de ce théorème. ■

## 5 EXEMPLES

**Exemple 2.1** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{2.1}r(t) + k_1 f_1(t, r(t), D^{0.80}r(t)) + k_2 f_2(t, r(t), D^{0.70}r(t)) + k_3 f_3(t, r(t), J^{0.40}(r(t))) = f_4(t) \\ r(0) = pi, r'(0) = -3/2, J^{0.81}r(1) = 3/17 \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.80, \quad \gamma = 2.1, \quad p = 0.70 \quad q = 0.40, \\ k_1 &= 0.08, \quad k_2 = 0.06, \quad k_3 = 0.05, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1(t, a_1, a_2) &= \frac{\cos(8 + t^4)}{\sqrt{3 + t^5}} + \frac{5}{8}a_1 + \frac{3}{7}a_2, \\ f_2(t, a_1, a_2) &= \frac{\sin(1 + t^2)}{\sqrt{7 + t^3}} + \frac{2}{9}a_1 + \frac{4}{849}a_2, \\ f_3(t, a_1, a_2) &= \frac{1}{100 + t^2} + \frac{2\pi - 4}{3}a_1 + \frac{4}{51}a_2. \\ f_4(t) &= \frac{2t + 3}{7}. \end{aligned}$$

Pour chaque  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} |f_1(t, a_1, a_2) - f_1(t, b_1, b_2)| &\leq \frac{5}{8}|a_1 - b_1| + \frac{3}{7}|a_2 - b_2|, \\ |f_2(t, a_1, a_2) - f_2(t, b_1, b_2)| &\leq \frac{2}{9}|a_1 - b_1| + \frac{4}{849}|a_2 - b_2|, \\ |f_3(t, a_1, a_2) - f_3(t, b_1, b_2)| &\leq \frac{2\pi - 4}{3}|a_1 - b_1| + \frac{4}{51}|a_2 - b_2|. \end{aligned}$$

D'où,

$$M_1 = \frac{5}{8}, \quad M_2 = \frac{3}{7}, \quad M_3 = \frac{2}{9}, \quad M_4 = \frac{4}{849}, \quad M_5 = \frac{2\pi - 4}{3}, \quad M_6 = \frac{4}{51}.$$

et alors,

$$L_1 = 0.1250, \quad L_2 = 0.1400, \quad L_3 = 0.3654.$$

Par conséquent, on a :

$$L = \max(L_1, L_2, L_3) = 0.3654.$$

Par le théorème 2.1, on confirme que (2.14) a une solution unique sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 2.2** On prend maintenant un autre exemple. Il est le suivant :

$$\begin{cases} D^{2.01}r(t) + k_1 f_1(t, r(t), D^{0.63}r(t)) + k_2 f_2(t, r(t), D^{0.4}r(t)) + k_3 f_3(t, r(t), J^{0.33}(r(t))) = f_4(t) \\ r(0) = pi + \sqrt{3}, r'(0) = -5/3, J^\alpha r(1) = 4/19 \end{cases} \quad (2.15)$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t, a_1, a_2) = \frac{e^{-5t}}{1+2t(a_1^2+a_2^2)} \\ f_2(t, a_1, a_2) = \frac{\sin(a_1 a_2)}{7+t^4(a_2+a_1)} \\ f_3(t, a_1, a_2) = \frac{\cos(a_2+a_1)}{3+t^4(a_2+a_1)} \\ f_4(t) = \frac{t+5}{10} \\ \alpha = 0.63, \quad \gamma = 2.01, \quad p = 0.4 \quad q = 0.33, \\ k_1 = 0.11, \quad k_2 = 0.10, \quad k_3 = 0.20. \end{array} \right.$$

Clairement, on a

$$\begin{aligned} |f_1(t, a_1, a_2)| &\leq 1 = N_{f_1}, & |f_2(t, a_1, a_2)| &\leq \frac{1}{7} = N_{f_2}, \\ |f_3(t, a_1, a_2)| &\leq \frac{1}{3} = N_{f_3} & \|f_4\|_\infty &= \frac{3}{5} = N_{f_4}. \end{aligned}$$

Par le théorème 2.2, notre exemple (2.15) a au moins une solution on  $[0, 1]$ .

## 6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a établi des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solution pour le problème (2.1). Pour cette raison, on est passé par l'application du théorème du point fixe de Banach. D'autres résultats assurant l'existence au moins d'une solution sont aussi traités en utilisant le théorème du point fixe de Schaefer. Une étude de stabilité au sens de Ulam-Hyers est aussi faite dans ce chapitre.

# Chapitre 3

## APPLICATIONS NUMERIQUES

### 1 INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre suivante, on présente une approche numérique pour la dérivé Caputo. Ensuite, afin d'étudier la dynamique du problème fractionnaire du chapitre précédent, on présente un système différentiel fractionnel réduit qui est équivalent à notre problème. La simulation numérique du système fractionnaire est effectuée par Runge-Kutta4. Pour plus d'information, le lecteur peut consulter les travaux suivants : [1, 14, 22].

### 2 METHODE DE RUNG KUTTA

On sait que pour résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} r'(t) = f(t, r) \\ r(t_0) = r_0, \end{cases}$$

le schéma numérique suivant est proposé

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ r_{i+1} = r_i + h\Psi(t_i, r_i, h), \end{cases}$$

où la fonction d'incrément  $\phi$  est une approximation de  $f(t, r)$  sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , et  $h$  est la longueur de l'intervalle. On identifie la méthode Rung Kutta du quatrième ordre (RK4) qui est donnée par le schéma explicite :

$$\begin{cases} P_1 = f_n \\ P_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, r_n + \frac{h P_1}{2}\right) \\ P_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, r_n + \frac{h P_2}{2}\right) \\ P_4 = f\left(t_n + h, r_n + h P_3\right) \\ r_{i+1} = r_i + h\Psi(t_i, r_i, h) \end{cases}$$

où,

$$\Psi(t_i, r_i, h) := \frac{P_1 + 2 P_2 + 2 P_3 + P_4}{6}.$$

### 3 APPROCHES NUMÉRIQUES

En suivant le théorème "intégral" de [17], on présente des approximations pour la dérivé de Caputo dans deux cas différents.

On commence par diviser l'intervalle donné  $[0, T]$  (pour notre cas,  $T = 1$ ) comme suit :

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

et  $t_i = ih$ , dans lequel  $h = \frac{t}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Puis, on rappelle le théorème suivant [????] :

Tout d'abord, on utilise la fonction d'interpolation linéaire par morceaux pour  $y$ ,

$$y_n(t) = \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} y(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} y(t_{i+1}),$$

où  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Donc la substitution donne

$$\begin{aligned} J_{0,t}^\alpha y(t) &\approx \sum_{i=0}^{n-1} J_{0,t_n}^\alpha y_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_n - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y_n(\tau) d\tau \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_n - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\tau - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} dt \right) y(t_i) + \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_n - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} dt \right) y(t_{i+1}) \right\} \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{i=0}^n K_{1,j} y(t_i), \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} K_{1,0} &= n^\alpha(\alpha + 1 - n) + (n - 1)^{\alpha+1} \\ K_{1,i} &= (n - i - 1)^{\alpha+1} + (n - i + 1)^{\alpha+1} - 2(n - i)^{\alpha+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ K_{1,n} &= 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

on obtient l'approche numérique suivante pour l'intégrale fractionnaire.

**Théorème 3.1** Supposer que  $y(t) \in C[0, b]$ , l'intégrale fractionnaire a l'approche numérique suivante :

$$J_{0,t_n}^\alpha y(t) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{i=0}^n K_{1,j}(t_i) + O(h^2),$$

telle que  $K_{1,i}$  est donnée par (3.1).

**Preuve.**

Soit

$$E(t) = y(t) - y_n(t) = \frac{y^{(2)}(t)}{2!} (t - t_i)(t - t_{i+1})$$

où  $t \in (t_i, t_{i+1})$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \left\| J_{0,t_0}^\alpha y_n(t) - J_{0,t_n}^\alpha y(t) \right\|_\infty &= \left\| J_{0,t_n}^\alpha (y_n(t) - y(t)) \right\|_\infty \leq \|y_n(t) - y(t)\|_\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{t_n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_n(t) - y(t)\|_\infty = \frac{t_n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_n(t) - y(t)\|_\infty = \frac{b^\alpha \|y^{(2)}\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

■

**Théorème 3.2** Suppose que  $y \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ . L'approche numérique pour l'intégrale fractionnaire est donnée par :

$$J^\gamma y(t_i) \approx \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma + 2)} \sum_{j=0}^i K_j y_j, \quad i = 0, \dots, n + 1,$$



$y_0$  condition initiale,

où

$$K_j := \sigma_j(\gamma) = \begin{cases} (n)^{(\gamma+1)} - (n-\gamma)(n+1)^\gamma, & j=0, \\ (n+2-j)^{(\gamma+1)} + (n-j)^{(\gamma+1)} - 2(n-j+1)^{(\gamma+1)}, & j=1 \dots i-1, \\ 1, & j=i. \end{cases}$$

Sur la base du théorème 3.2, on propose l'approximation suivante pour la dérivée de Caputo :

**Théorème 3.3** Suppose que  $y \in \mathcal{C}^3([0, T], \mathbb{R})$  and  $2 < \gamma \leq 3$ . Ensuite on a :

$$D^\gamma y(t_i) \simeq \frac{h^{3-\gamma}}{\Gamma(3-\alpha+2)} \sum_{j=0}^i L_j y^{(j)}(t_j), \quad i=0, \dots, n,$$

tel que,

$$L_j := \sigma_j(2-\gamma) = \begin{cases} -(n-2+\gamma-3)(n+1)^{(3-\gamma)} + (n)^{(3-\gamma+1)}, & j=0, \\ (n-j+2)^{(3-\gamma+1)} + (n-j)^{(3-\gamma+1)} - 2(n-j+1)^{(3-\gamma+1)}, & j=1 \dots i-1, \\ 1, & j=i. \end{cases}$$

et

$$y^{(j)} = \begin{cases} \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3}, & j=0, \\ \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3}, & j=1 \dots i-1, \\ \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{h^3}, & j=i. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit  $y \in \mathcal{C}^3([0, T], \mathbb{R})$ ,  $2 < \gamma \leq 3$ ,  $0 \leq t \leq T$  et prenons  $h := \frac{T}{n}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Puis, par le théorème (3.2), on obtient :

$$D^\gamma y(t_n) = J^{3-\gamma} D^3 y(t_n) \approx \frac{h^{3-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma+2)} \sum_{j=0}^n L_j D^3 y(t_j).$$

Par système de différences finies, au lieu d'utiliser "différence centrale schème" pour  $j = 0, \dots, n$ , on utilise "schéma de différence avant" pour  $j = 0$ , "schéma de différence en arrière" pour  $j = n$ , et "différence centrale schème" pour  $j = 1, \dots, n-1$ .

Par substitution dans la formule ci-dessus, on obtient :

$$D^\alpha y(t_n) \approx \frac{h^{3-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma+2)} \left( \sum_{j=1}^{n-1} L_j \left( \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{h^3} \right) + L_0 \left( \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3} \right) + L_n \left( \frac{y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}}{h^3} \right) \right).$$

Ceci termine la preuve. ■

**Théorème 3.4** Suppose que  $y \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$  et  $0 < \alpha \leq 1$ . on a :

$$D^\alpha y(t_i) \simeq \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+2)} \sum_{j=0}^i L_j y^{(j)}(t_j), \quad i = 0, \dots, n,$$

où,

$$L_j := \sigma_j(1-\alpha) = \begin{cases} -(n-1+\alpha)(n+1)^{(1-\alpha)} + (n)^{(2-\alpha)}, & j=0, \\ (n-j+2)^{(2-\alpha)} + (n-j)^{(2-\alpha)} - 2(n-j+1)^{(2-\alpha)}, & j=1 \dots i-1, \\ 1, & j=i. \end{cases}$$

et

$$y^{(j)} = \begin{cases} \frac{y_1 - y_0}{h}, & j=0, \\ \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}, & j=1 \dots i-1, \\ \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, & j=i. \end{cases}$$

## 4 SYSTÈME ASSOCIÉ

On rappelle que le problème (2.1) peut se réduire au système suivant :

$$\begin{cases} D^p r(t) = y(t) \\ D^{2-p} y(t) = z(t) \\ D^{\gamma-2} z(t) = -k_1 f_1(t, r(t), D^{\alpha-p} y(t)) - k_2 f_2(t, r(t), y(t)) - k_3 f_3(t, r(t), J^q r(t)) + f_4(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

autrement dit

$$\begin{cases} D^p r(t) = y(t) \\ D^{1-p} y(t) = z(t) \\ D^{\gamma-1} z(t) = -k_1 f_1(t, r(t), D^{\alpha-p} y(t)) - k_2 f_2(t, r(t), y(t)) - k_3 f_3(t, r(t), J^q r(t)) + f_4(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc, on a

$$\begin{cases} Dr(t) = D^{1-p} y(t) \\ D^2 y(t) = D^p z(t) \\ Dz(t) = -k_1 D^{3-\gamma} f_1(t, r(t), D^{\alpha-p} y(t)) - k_2 D^{3-\gamma} f_2(t, r(t), y(t)) - k_3 D^{3-\gamma} f_3(t, r(t), J^q r(t)) + D^{3-\gamma} f_4(t). \end{cases}$$

## 5 SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Premièrement, il est facile de prouver que le problème (2.1) peut être réduit au système suivant :

$$\begin{cases} D^p r(t) = y(t) \\ D^{2-p} y(t) = z(t) \\ D^{\gamma-2} z(t) = -k_1 f_1(t, r(t), D^{\alpha-p} y(t)) - k_2 f_2(t, r(t), y(t)) - k_3 f_3(t, r(t), J^q r(t)) + f_4(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Ensuite, sur la base du système équivalent, on passe à présenter quelques simulations utilisant la méthode RK4 et les approximations proposées ci-dessus sur les dérivés de Caputo.

(a:) Comme première simulation, on considère le cas où  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1(t, r(t), \mathcal{D}^\alpha r(t)) &= 1/10(\mathcal{D}^\alpha r(t))^2 + 10r(t), \\ f_2(t, r(t), \mathcal{D}^p r(t)) &= 1/15(\mathcal{D}^p r(t))^2 + 15r(t), \\ f_3(t, r(t), \mathcal{I}^q r(t)) &= (\mathcal{I}^q r(t))^2, \\ f_4(t) &= 5\cos(0.1t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec conditions initiales  $(0.09, 0.08, 0)$ ,  $k_1 = 10, k_2 = 15, k_3 = 1$  et  $h = 0.005$ . L'intégration du système (3.4) est effectuée par RK4 et "le rapprochement" ci-dessus des dérivées de Caputo.

— Pour ordre proportionnel  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.06, 0.80, 0.70, 0.60)$ , on a

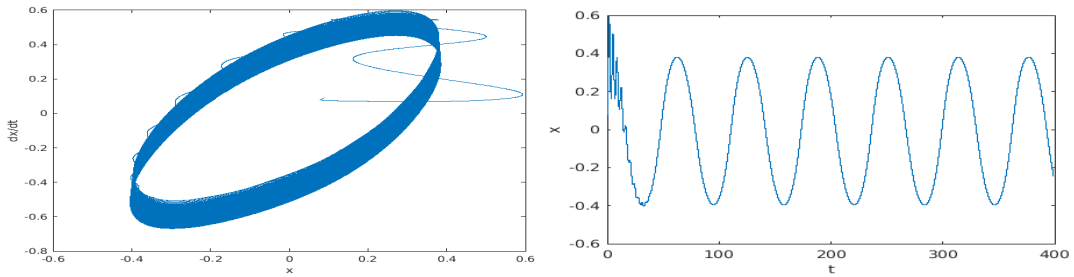


FIGURE 3.1 – trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.5)

— Pour ordre proportionnel  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.09, 0.95, 0.57, 0.56)$ , donc avec les mêmes données que ci-dessus, on a

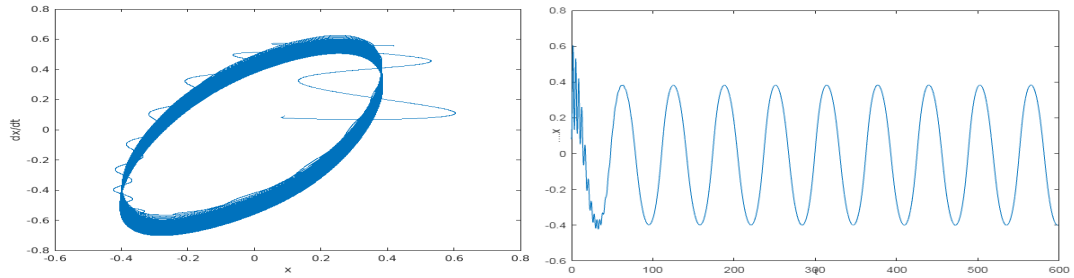


FIGURE 3.2 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.5)

— Pour  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.1, 0.6, 0.56, 0.55)$ , l'incorporation du système 3.4 est réalisée par RK4, on obtient

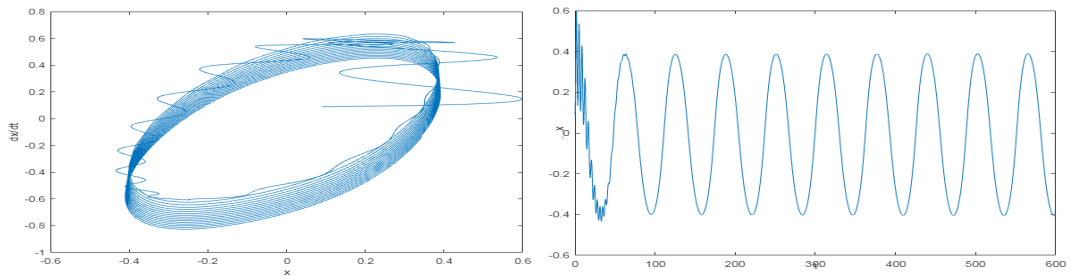


FIGURE 3.3 – trajectoire de phase et solution du système (3.4) dans le cas : (3.5)

(b) Une autre simulation peut être envisagée dans le cas suivant :

$$\begin{aligned}
 f_1(t, r(t), \mathcal{D}^\alpha r(t)) &= \frac{e^{-5t}}{1+2t(r(t)^2+(\mathcal{D}^\alpha r(t))^2)} + r(t)^3, \\
 f_2(t, r(t), \mathcal{D}^p r(t)) &= \frac{\sin(r(t)\mathcal{D}^p r(t))}{7+t^4(r(t)+\mathcal{D}^p r(t))} + r(t), \\
 f_3(t, r(t), \mathcal{I}^q r(t)) &= \frac{\cos(r(t)+\mathcal{I}^q r(t))}{3+t^4(r(t)+\mathcal{I}^q r(t))}, \\
 f_4(t) &= 5\cos(0.1t),
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

avec conditions (0.42, 0.008, 0),  $k_1 = 0.11, k_2 = 0.10, k_3 = 0.20$  et  $h = 0.005$ .

On a alors

— Pour ordre proportionnel  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.2, 0.60, 0.40, 0.22)$ , on a

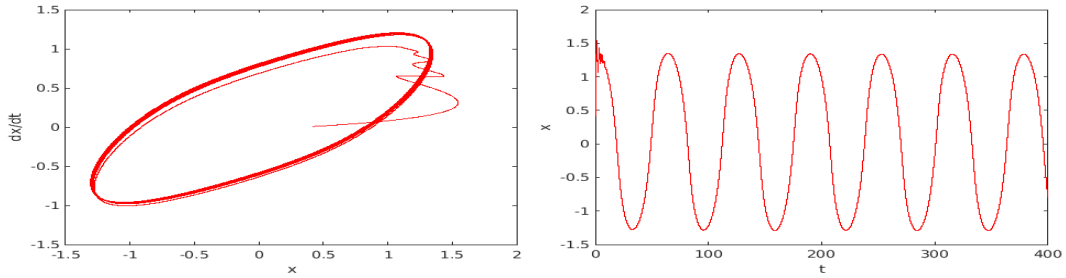


FIGURE 3.4 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.6)

— Pour ordre proportionnel  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.01, 0.7, 0.5, 0.33)$ , on obtient

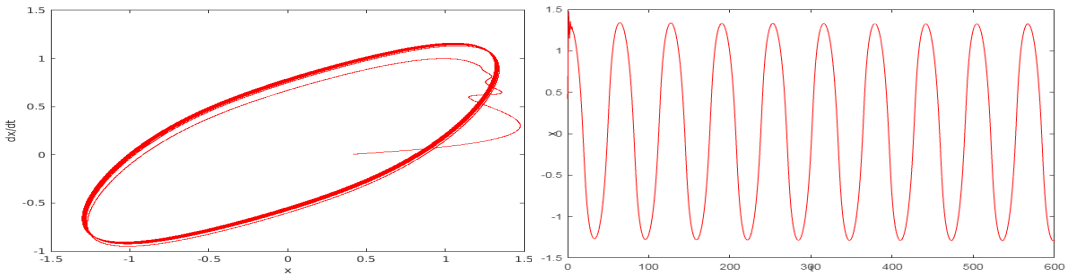


FIGURE 3.5 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.6)

— pour  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.1, 0.7, 0.6, 0.50)$ , on obtient

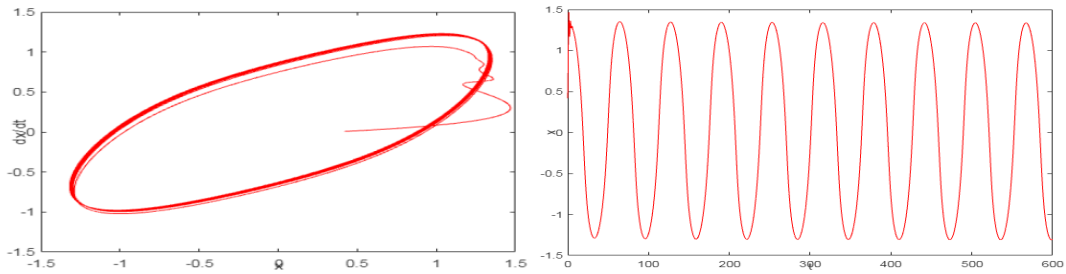


FIGURE 3.6 – trajectoire de phase et solution du système (3.4) utilisant (3.6)

(c) On considère également le troisième cas suivant :

$$\begin{aligned}
 f_1(t, r(t), \mathcal{D}^\alpha r(t)) &= r(t)(\mathcal{D}^\alpha r(t))^3 + (r(t))^3, \\
 f_2(t, r(t), \mathcal{D}^p r(t)) &= 2r(t)(\mathcal{D}^p r(t))^3 + (r(t))^3, \\
 f_3(t, r(t), \mathcal{I}^q r(t)) &= r(t)(\mathcal{I}^q r(t))^3, \\
 f_4(t) &= 0.6\sin(t),
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

avec conditions initiales  $(0.09, 0, -0.09)$ ,  $k_1 = 1, k_2 = 0.5, k_3 = 1$  et  $h = 0.005$ . L'intégration du système (3.4) est effectuée par RK4.

- Pour commande incommensurable  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.2, 0.7, 0.50, 0.40)$ , on a

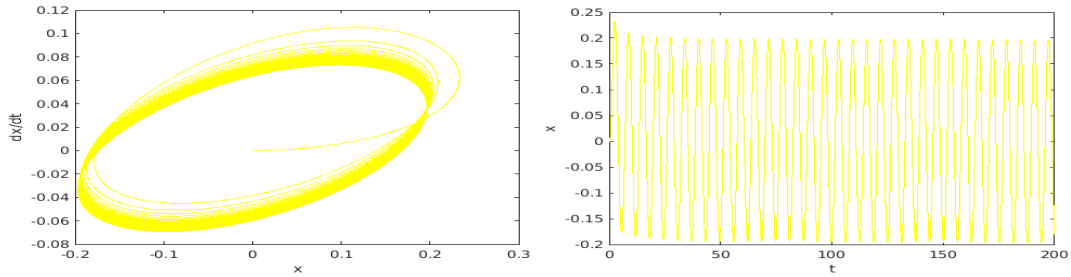


FIGURE 3.7 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.7)

- Pour ordre proportionnel  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.10, 0.80, 0.66, 0.50)$ , on peut écrire

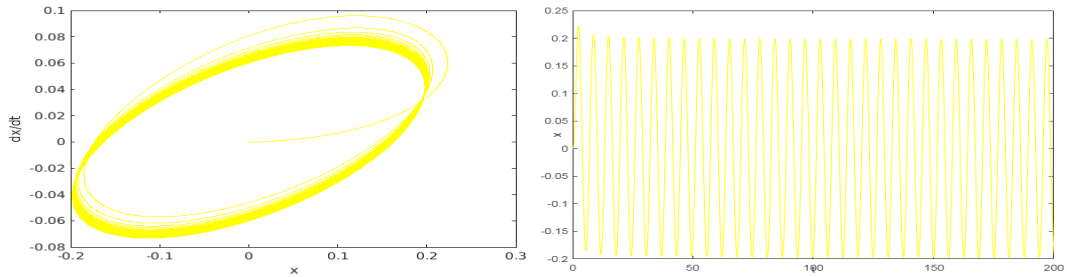


FIGURE 3.8 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.7)

- Pour  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.01, 0.90, 0.70, 0.50)$ , l'incorporation du système 3.4 est aussi effectuée par RK4, on obtient :

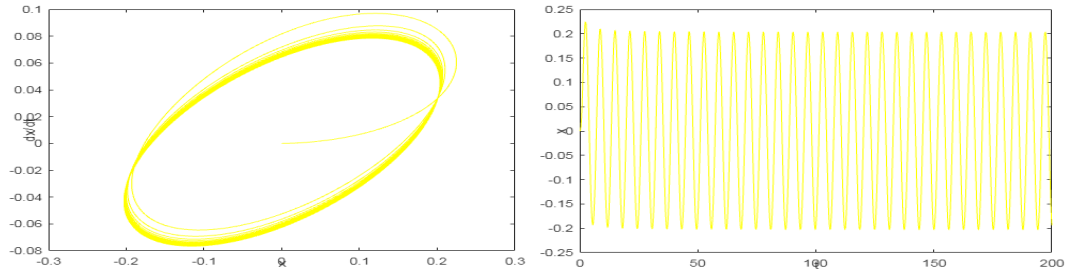


FIGURE 3.9 – trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.7)

( d : ) Aussi, on peut considérer le quatrième cas suivant :

$$\begin{aligned}
 f_1(t, r(t), \mathcal{D}^\alpha r(t)) &= r(t)(\mathcal{D}^\alpha r(t)) + (r(t)), \\
 f_2(t, r(t), \mathcal{D}^p r(t)) &= r(t)(\mathcal{D}^p r(t)) + (r(t))^3, \\
 f_3(t, r(t), \mathcal{I}^q r(t)) &= r(t)(\mathcal{I}^q r(t)), \\
 f_4(t) &= 0.2\cos(0.25t),
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

avec conditions initiales  $(0.03, 0.005, 0)$ ,  $k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 1$  et  $h = 0.005$ . Alors, cela nous donne

- Pour commande incommensurable  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.2, 0.40, 0.20, 0.10)$ , on a
- Pour une commande proportionnée  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.06, 0.3, 0.2, 0.10)$ , on a
- pour  $(\gamma, \alpha, p, q) = (2.1, 0.20, 0.10, 0.01)$ , l'incorporation de l'équation 3.4 est effectuée en utilisant la même méthode que précédemment. on a

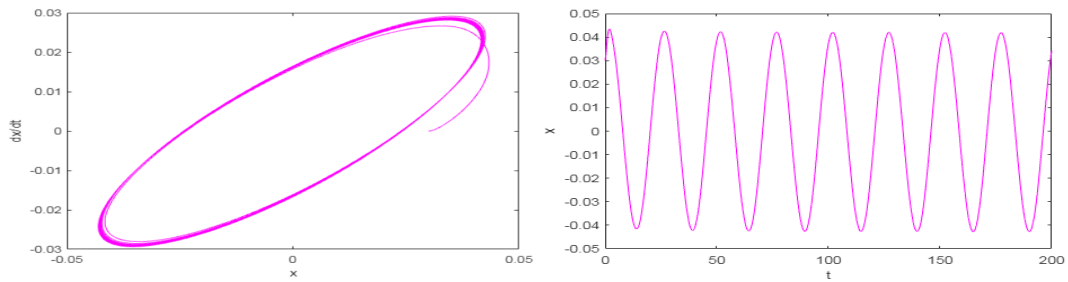


FIGURE 3.10 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) pour (3.8)

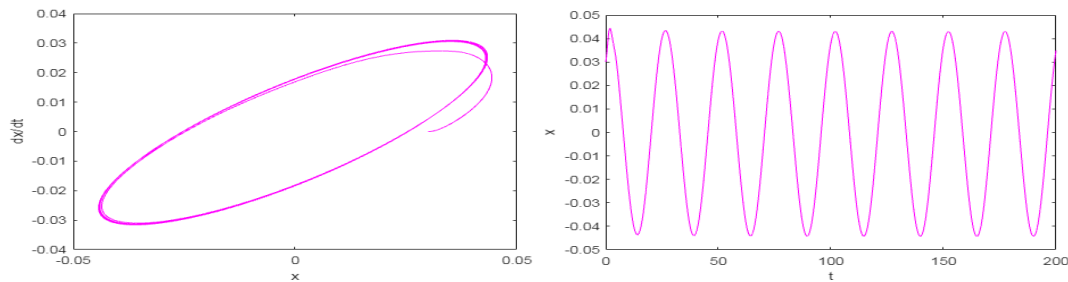


FIGURE 3.11 – trajectoire de phase et solution du système(3.4) utilisant (3.8)

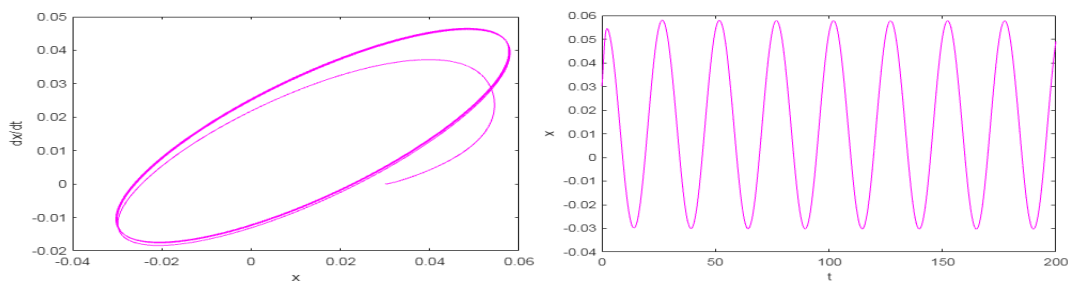


FIGURE 3.12 – trajectoire de phase et solution du système (3.4) pour (3.8)

## 6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a démontré un résultat d'approximation sur la dérivée de Caputo. On a aussi présenté un système équivalent au problème "Duffing" du chapitre précédent. Cette représentation nous a permis de prouver la présence de certaines trajectoires périodiques pour le système obtenu. Il est à noter que dans cette étude, on n'a pas trouvé de résultats sur les phénomènes du chaos : Ce sont des travaux en progression, in chaa ALLAH.

## ***CONCLUSION GÉNÉRALE***

Dans ce travail, on a apporté une contribution théorique ainsi que certaines petites applications au domaine du calcul fractionnaire. En effet, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité sur une nouvelle classe d'équations différentielles fractionnaires. Nous avons appliqué les concepts de calcul fractionnaire ainsi que des théorèmes de points fixes pour établir des critères sur l'existence et aussi sur l'existence et l'unicité des solutions. Pour cette démarche, nous avons fait appel au principe de contraction de Banach et au théorème du point fixe de Shaefer. D'autre part, nous avons établi la stabilité d'Ulam Hyers pour notre problème. On a aussi proposé, avec démonstrations, une approximation originale des dérivées fractionnaires par des différences finies. En conséquence, des simulations numériques ont été réalisées pour montrer que le problème introduit a un comportement oscillatoire. Pour des paramètres bien spécifiques, nous avons constaté qu'il peut coexister des trajectoires périodiques [5, 20, 25]. Par l'utilisation de Rung Kutta 4 combinée aux approximations obtenues, on a montré l'existence de certaines solutions périodiques pour certains cas particuliers de la fonction  $f$ . Ce travail nous a ouvert quelques perspectives qu'on va continuer à développer...

## Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005. [25](#)
- [2] Y. Bahous and Z. Dahmani. A lane emden type problem involving caputo derivative and riemann-liouville integral. *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 10(1) :60–75, 2019. [12](#)
- [3] Y. Bahous, Z. Dahmani, and Z. Bekkouche. A two-parameter singular fractional differential equation of lane emden type. *Turkish J. Ineq*, 3(1) :35–53, 2019. [12](#)
- [4] B. Barthe and Y. Queindec. Terminologie et perspectives d’analyse du travail collectif en ergonomie. *L’Année psychologique*, 99(4) :663–686, 1999. [9](#)
- [5] J. Cao, C. Ma, H. Xie, and Z. Jiang. Nonlinear dynamics of duffing system with fractional order damping. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 5(4), 2010. [12](#), [33](#)
- [6] L. Corry. Writing the ultimate mathematical textbook : Nicolas bourbaki’s éléments de mathématique. *The Oxford handbook of the history of mathematics*, pages 565–88, 2009. [9](#)
- [7] C. Ejikeme, M. Oyesanya, D. Agbebaku, and M. Okofu. Solution to nonlinear duffing oscillator with fractional derivatives using homotopy analysis method (ham). *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 14(10) :1363–1388, 2018. [12](#)
- [8] H. Gispert, J.-P. Kahane, R. Laurent, H. Nocton, and R. Taton. Pierre dugac. *Revue d’histoire des mathématiques*, 5 :303–315, 1999. [9](#)
- [9] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, pages 223–276. Springer, 1997. [5](#)
- [10] J. K. Hale and S. M. V. Lunel. *Introduction to functional differential equations*, volume 99. Springer Science & Business Media, 2013. [11](#)
- [11] G.-t. He and M.-k. Luo. Dynamic behavior of fractional order duffing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Applied Mathematics and Mechanics*, 33(5) :567–582, 2012. [12](#)
- [12] R. W. Ibrahim. Existence of nonlinear lane-emden equation of fractional order. *Miskolc Mathematical Notes*, 13(1) :39–52, 2012. [12](#)
- [13] R. W. Ibrahim. Stability of fractional differential equation. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 7(3) :487 – 492, 2013. [12](#)



- [14] F. Jędrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer Science & Business Media, 2005. [25](#)
- [15] D. Keddar and Z. Dahmani. New periodic solutions for a differential problem of duffing type involving caputo derivative. (*submitted*). [2](#)
- [16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, 2006. [3](#), [7](#)
- [17] C. Li, A. Chen, and J. Ye. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. *Journal of Computational Physics*, 230(9) :3352–3368, 2011. [26](#)
- [18] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1993. [7](#)
- [19] J. Niu, R. Liu, Y. Shen, and S. Yang. Chaos detection of duffing system with fractional-order derivative by melnikov method. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(12) :123106, 2019. [12](#)
- [20] P. Pirmohabbati, A. R. Sheikhan, H. S. Najafi, and A. A. Ziabari. Numerical solution of full fractional duffing equations with cubic-quintic-heptic nonlinearities. *AIMS Mathematics*, 5(2) :1621–1641, 2020. [12](#), [33](#)
- [21] I. Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998. [3](#), [4](#), [5](#), [7](#)
- [22] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer Science & Business Media, 2008. [25](#)
- [23] B. Rynne and M. A. Youngson. *Linear functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2013. [9](#)
- [24] S. G. Samko. Fractional integrals and derivatives, theory and applications. *Minsk; Nauka I Tekhnika*, 1987. [3](#)
- [25] V. K. Tamba, S. T. Kingni, G. F. Kuate, H. B. Fotsin, and P. K. Talla. Coexistence of attractors in autonomous van der pol–duffing jerk oscillator : Analysis, chaos control and synchronisation in its fractional-order form. *Pramana*, 91(1) :1–11, 2018. [33](#)