UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD

Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

Thème :

Observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu

Etudiante :

‹‹ M^{elle} **Benhalima Nacéra** ››
Soutenu le .

Devant les membres du jury

Président	‹‹ **M^{eme} Hammou Amouria** ››	M C B	**U.de Mostaganem**
Examinateur	‹‹ **M^{eme} Diala Horiya** ››	M A A	**U. de Mostaganem**
Encadreur	‹‹ **M^{eme} Bechaoui Khadidja** ››	M A A	**U. de Mostaganem**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude a toute ma famille, notamment les parents qui m'ont toujours conseillés et pensés à moi, et qui m'ant efait au bonne éducation.

Je dédie ce travail à celle qui ma soutenue avec toute sa tendresse et son affection pour ma mère

je dédié aussi à tout mes amis ainsi que le chef de département de mathématiques.

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2020 et 2021.

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu tout puissant de m'avoir accorder la puissance et la volonté pour réaliser ce travail. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur "Bechaoui Khadidja" pour tous ces mots d'encouragements, ces précieux conseils, ces critiques et aussi je la remercie de m'avoir encadrer, orinter, aider.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils m' ont fait en acceptant d'évaluer mon travail, tout particulièrement : "Hammou Amouria" et " Diala Horiya ", ainsi tous les professeurs que j'ai recontré à mes côtés durant tout mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Je remercie beaucoup ma grande mère pour tous ses efforts et sa motivation tout au long de mon parcours universitaire.

Je remercie ma mère, les mots et les pages ne suffisent pas pour la remerciemier.

Je remercie mon père et ma soeur et tous mes frères et ma famille et mes amies .

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé durant mon travail.

Résumé :
Le but de notre travail est l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu. Dans un premier temps nous avons fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité de cette classe de systèmes. Dans un second temps, nous présentons des critères qui aides à tester l'observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu, et tout au long de cette étude des exemples numériques détaillés sont inclus pour illustrer le travail.

Table des matières

Notations

Dans cette section, nous définissons les notations principales utilisées dans ce mémoire.

$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à entiers réels.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	L'espace des matrices carrées de dimension n à entrées dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles de dimension $n \times m$.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espace des matrices à entrées réelles positives.
$\underline{n}$	:	L'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls.
A^T	:	Transposée de la matrice A.
I_n	:	Matrice identité d'ordre n.
$tr(A)$	:	Trace d'une matrice carrée A.
$\det A$	:	Déterminant de A.
$\ker(A)$	:	Noyau de A.
A^{-1}	:	Matrice inverse de A.
$\dot{x}(t)$	:	Dérivée temporelle.
$P_\lambda(A)$	:	Le polynôme caractéristique de A.
$\|x\|$	:	La norme de x.
$\langle , \rangle$	:	Produit scalaire.

INTRODUCTION

En mathématiques, la théorie du contrôle fournit à plusieurs domaines scientifiques : la physique, électronique, biologie, les sciences de l'ingénieur, chimie,...etc de comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser.
L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'obsevabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu.
La théorie de I'observabilité est parfaitement établie depuis plusieurs années dans le cadre des systèmes linéaires à temps continu ou discret et beaucoup de questions sont encore ouvertes.
L'observalité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.
L'observabilité comprend ainsi des métriques, logs et traces directement extraits ou envoyés depuis une charge de travail ou une application, afin d'être analyser à la volée. A partir de ces sorties externes et données, il devient possible de déduire l'état actuel d'un système et de disposer d'un contexte pour comprendre son état.

Notre travail est structuré en trois chapitres comme suit :
Le premier chapitre est consacré essentiellement à une présentation de quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. On donne de courtes définitions des matrices particulières, après nous rappolons quelques notions algèbriques, et on termine par l'étude en détail des systèmes linéaires à temps continu.
Dans le deuxième chapitre nous présentons les systèmes linéaires positifs à temps continu en utilisant le théorème de Metzler pour la positivité.
Dans le troisième chapitre, nous interessons à l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires positifs, en citons des conditions necessaires et suffisantes pour l'observabilité de cette classe de systèmes.
Tout au long de ce mémoire, notre travail est illustré par des exelmpes numériques.
Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion qui couvre tous les éléments du mémoire.

.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base

Dans ce chapitre, nous proposons quelques notions de base qui sont trés utiles dans notre travail.
Pour ce faire nous nous sommes basées sur les références suivantes *:[2], [3], [4],[8], [11],[12]et [17].*

1.1 Matrices Particulières

Dans cette section, nous rappolons quelques définitions et caractérisations des matrices non-négatives, positives et de Metzler.

Définition 1.1.1 *Soit la matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

A *est une matrice non-négative si* $\forall\ i \in \underline{n}, \forall\ j \in \underline{m} : a_{ij} \geq 0$, *autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par :* $A \geq 0$ *ou encore,* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.

Exemple 1.1.1 *Considérons la matrice* A *suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

A *est une matrice non-négative.*

Définition 1.1.2 *Soit la matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

A *est une matrice positive si* A *est non-négative et* $\exists\ k \in \underline{n}, \exists\ l \in \underline{m} : a_{kl} \geq 0$, *c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par* $A > 0$.

Exemple 1.1.2 *Considérons la matrice A suivante*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

A est une matrice positive.

Définition 1.1.3 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*

A est une matrice strictement positive si $\forall\ i \in \underline{n}, \forall\ j \in \underline{m} : a_{ij} > 0$, i.e toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par $A >> 0$.

Définition 1.1.4 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*

A est une matrice de Metzler si $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m},\ i \neq j : a_{ij} \geq 0$ i.e. toutes ses entrées hors diagonales sont négatives.

Exemple 1.1.3 *Soit la matrice B suivante :*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

B est une matrice de Metzler.

Proposition 1.1.1 *[8] A est une matrice de Metzler si et seulement si*

$$\forall t \geq 0,\ e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Ou de manière équivalente, $\forall t \geq 0$, l'orthant positif $\mathbb{R}_+^n$ est e^{At} invariant, c'est à dire :

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^n,\ e^{At}x \in \mathbb{R}_+^n. \tag{1.1.1}$$

Preuve :
Nécessité
Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$, tel que

$$(A + \lambda I_n) > 0.$$

Où

$$(A + \lambda I_n) + (-\lambda I_n) = (-\lambda I_n) + (A + \lambda I_n)$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I_n)t+(-\lambda I_n)t} \\ &= e^{(A+\lambda I_n)t}e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}. \end{aligned}$$

Du fait que

$$e^{(A+\lambda I_n)t},\ e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Suffisance
Supposons que $t \geq 0$, $e^{At} \geq 0$. Ainsi, puisque :

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{At}-I_n}{t}\right).$$

Prenons comme e_j le j^{eme} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{At}e_j - e_j, e_i >}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{< e^{At}e_j, e_i >}{t} - \frac{\langle e_j, e_i\rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{At}e_j, e_i >}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque $< e_j, e_i >= 0$, on a, alors $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est une matrice de Metzler, alors $e^{At}x \in \mathbb{R}_+^n$.

Définition 1.1.5 *(Matrice symétrique) Une matrice A est dite symétrique si*

$$A^T = A$$

Définition 1.1.6 *(Matrices définies positives) Une matrice symétrique A dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive, si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, non nul on a :*

$$x \neq 0 \Rightarrow x^T A x > 0$$

Exemple 1.1.4 *Soit la matrice A :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A est définie positive. En effet :
Pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$, tel que $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, on a :

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

1.2 *Polynôme caractéristique et valeurs propres*

Définition 1.2.1 *Soit A une matrice réelle de dimension n et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur propre de la matrice A, s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$AX = \lambda X.$$

Et on dit aussi que X est le vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Définition 1.2.2 *On définit le polynôme caractéristique de la matrice carrée réelle A de dimension n par :*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A), \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Exemple 1.2.1 *Soit la matrice A suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$

le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

Théorème 1.2.1 ***(Cayley-Hamilton)*** *Toute matrice carrée A satisfait son équation caractéréstique :*

$$P_A(\lambda) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n = 0,$$

avec a_i, $i = 1, .., n$ des constantes réelles.
On déduit du théorème la relation suivante :

$$\begin{aligned} A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - ... - a_1 A - a_0 I_n \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.2 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 1. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= A^2 - 3A - I \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.3 *Exponentielle d'une matrice carrée :*

Nous rappolons dans cette section quelques définitions, propriétés et techniques existent pour calculer l'exponentielle d'une matrice carrée.

Définition 1.3.1 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. L'exponentielle de A notée $\exp(A)$ ou e^A est la matrice définie par :*

$$\exp(A) = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... + ... \tag{1.3.1}$$

Propriétés : *Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

- $e^{A+B} = e^A e^B$ *si* $AB = BA$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e^A *est inversible et* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

1.4 Calcul e^A pour des matrices particulières :

1.4.1 Le cas d'une matrice diagonale :

Si D est une matrice diagonale, c'est à dire :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & d_n \end{bmatrix}.$$

Alors, son exponenntielle est définie par :

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & e^{d_2} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

Exemple 1.4.1 *Considérons la matrice A suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$e^A = \begin{bmatrix} e^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

1.4.2 Le cas d'une matrice diagonalisable :

Soit A est une matrice diagonalisable, c'est à dire, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D, telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Alors

$$e^A = Pe^DP^{-1}$$

Exemple 1.4.2 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Au d'abord, on doit calculer les valeurs propres de A,

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 2)$$

Après calcul, on obtient la matrice de passage et son inverse :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^D P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e - e^2 & -e + e^2 \\ 2e - 2e^2 & 2e^2 - e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.4.3 Le cas d'une matrice niplotente :

Si A une matrice carrée nilpotente d'indice α ($A^\beta = 0$ pour tout $\beta \geq \alpha$), alors :

$$e^A = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{1}{i!} A^i = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + ... + \frac{1}{(\alpha - 1)!} A^{\alpha-1}$$

Exemple 1.4.3 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent :

$$A^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \; \forall \alpha \geq 2.$$

D'où

$$\begin{aligned} e^A &= I_2 + A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.4.4 Par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I. \tag{1.4.1}$$

Où les scalaires $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + ... + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1} \\ .. \\ .. \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + ... + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n} \end{array}\right. ,$$

avec λ_i, $i = 1, .., n$ les valeurs propres de A.

Exemple 1.4.4 *Soit la matrice A suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.
On a donc

$$e^A = \alpha_1 A + \alpha_0 I,$$

où α_0 et α_1 sont les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 = 1 \\ e = \alpha_0 + \alpha_1 \end{array}\right. ,$$

ce qui donne :

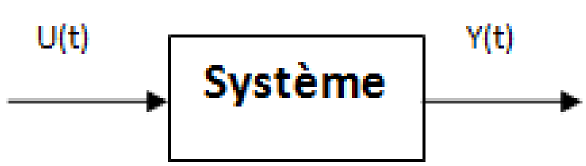
$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = e - 1 \end{array}\right. .$$

D'où

$$\begin{aligned} e^A &= (e-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & 0 \\ e-1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.5 Notion de système

Définition 1.5.1 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalisent une opération spécifique, il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extérieure.*



Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

1.6 Systèmes linéaires en temps continu :

Dans cette partie, nous présentons la description d'un système linéaire en temps continu. La représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être linéaire ou non-linéaire.
Dans notre cas, nous intéressons à la classe des systèmes linéaires en temps continu.

Définition 1.6.1 *On appelle système linéaire invariant, un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \tag{1.1}$$

avec $x(0) = x_0$, où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle (la commande) du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système,
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimension appropriées telles que :
A : matrice d'état,
B : matrice de commande (d'entrée),
C : matrice de mesure (sortie),
D : matrice de transfert directe,
$x(t)$: vecteur d'état,
$u(t)$: vecteur d'entée,
$y(t)$: vecteur de sortie.

Théorème 1.6.1 *La solution du système (1.1) est donnée par :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{1.6.1}$$

Et la sortie est définie par :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \tag{1.6.2}$$

Preuve :
Trajectoire d'état : *Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général :*

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire.

L'équation homogène associée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = Ax(t).$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{1}{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} Adt.$$

Sa solution est :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0),$$

où $t = t_0$ est l'instant initial.
La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Ceci implique que

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t).$$

D'où

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t) \\ &\Rightarrow \quad e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

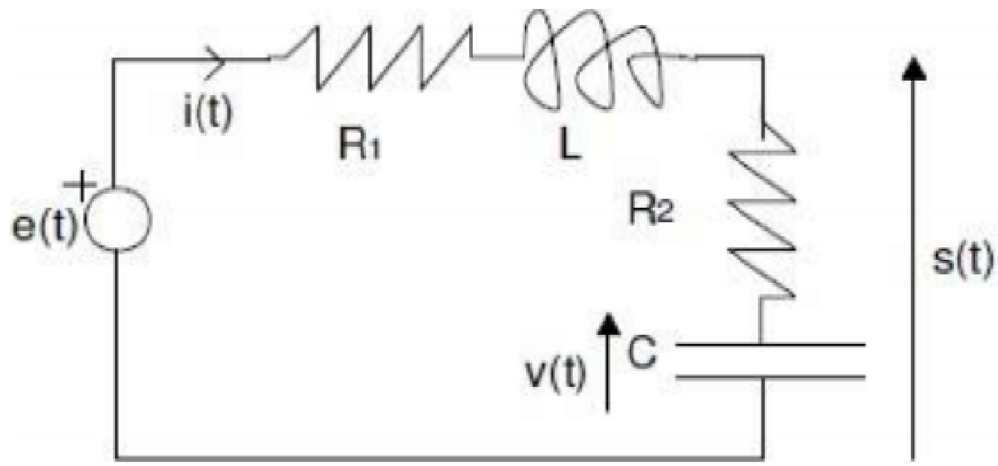
Donc

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Réponse du système est

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Exemple 1.6.1 *On considère le système RCL suivant :*



Les équations physiques de ce système électronique est comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = c\frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{array}\right. ,$$

avec $R_1, R_2 > 0$ *et* $L,\ c > 0$.
Suite à l'application des lois physiques notamment lois de Kirchhoff, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x}(t) = -\frac{R_1+R_2}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}x_2(t) \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{c}x_1(t) \end{array}\right.$$

On pose : $x_1(t) = i(t)$ *et* $x_2(t) = v(t)$. *Et aprés modélisation, il s'écrit le modèle :*

$$\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -\frac{R_1+R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ c & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{L} \\ 0 \end{array}\right] u \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc} R_2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right]. \end{array}\right. . \tag{1.2}$$

Ceci est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array}\right. ,$$

avec

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array}\right],\ A = \left[\begin{array}{cc} -\frac{R_1+R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ c & 0 \end{array}\right], \\ B &= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{L} \\ 0 \end{array}\right],\ C = \left[\begin{array}{cc} R_2 & 1 \end{array}\right]\ et\ D = [0] \end{aligned}$$

Chapitre 2

Chapitre2 : Systèmes linéaires positifs à temps continu

Dans ce chapitre, nous diffinissons les systèmes linéaires positifs en temps continu. Ainsi nous présentons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système linéaire soit positif. Pour ce faire nous nous sommes basées sur les références suivantes : [3], [6],[8],[13].
Considérons le système linéaire en temps continu décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \tag{2.1}$$

avec $x(0) = x_0$, où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle (la commande) du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système,
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimension appropriées telles que :
A : matrice d'état,
B : matrice de commande (d'entrée),
C : matrice de mesure (sortie),
$x(t)$: vecteur d'état,
$u(t)$: vecteur d'entée,
$y(t)$: vecteur de sortie.

Définition 2.0.2 *le système (2.1) est dit positif si à toute entrée positive et condition initiale positive, correspond un état positif et une sortie positive, alors le système (2.1) est par définition est dit positif, si selement si,*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall u \in \mathbb{R}_+, x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+.$$

2.1 Propriétés principales

• Si l'états initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoire se situe entièrement dans l'orthant non- négatif.

• Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires.
Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

2.1.1 Positivité externe :

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité des systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 2.1.1 *Un système linéaire standard est dit externement positif si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non négative, i.e pour* $x_0 = x(0) = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$*, on a* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$*, pour* $t \geq 0$.

2.1.2 Positivité interne :

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui est appelée positivité interne.

Définition 2.1.2 *Un système linéaire est dit internement positif si pour* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$*, pour* $t \geq 0$*, on a* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq 0$.

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanants de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ (frontière incluse) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, sont obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 2.1.1 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverce n'est pas vrai.*

2.1.3 Quelques applications

Les applications sont nombreuses, on cite quelques exemples :
• Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits, problèmes de bacs......) .
• Sciences de la communication et de l'information.
• Modèles de dynamiques de population.
• Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques.
• Circuits RLC.
• Modèles à compartiments : applications en médecine, cinétique, chimique,.....
• Modèles économiques (Leontieff, ...)

Théorème 2.1.1 *Le système est internement positif, si et seulement si, A est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$*,* $C \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$

Preuve :
Nécessité
Si le système est internement positif, alors

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^p,$$

pour

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u(t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

tel que,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tag{2.1.1}$$

et

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \tag{2.1.2}$$

L'idée est de considérer la i^{eme} composante de la matrice A, B et C respectivement et faire étendre pour toutes les composantes. Pour cela, on se refère à [5] et [8], d'où le résultat.
Sufisance :
Si on suppose que la matrice A est de Metzler et les matrices B, C et D sont positives, alors $\exp(At)$ est positive, d'après la proposition (1.1.1), cela montre que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, $\forall t \geq 0$.
Nous proposons dans ce qui suit deux exemples d'application.

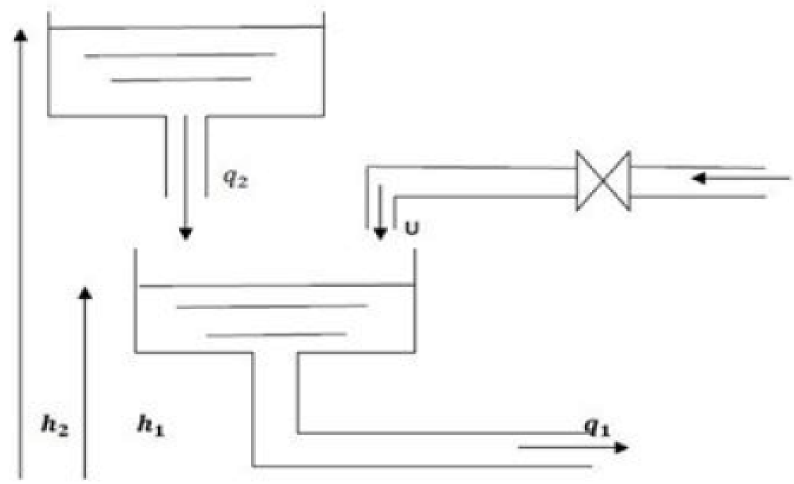
Exemple 2.1.1 *On considère le système RCL représenté par l'exemple (1.6.1).*
Le système (1.2) est positif car la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de Metzler, et

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0, \; C = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Exemple 2.1.2 *Problème de bacs*



Dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

avec $x_1(t) = h_1(t),$ *et* $x_2(t) = h_2(t)$.
Comme la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *est de Metzler et la matrice* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *est non négative, alors le système est posistif.*

Chapitre 3

Chapitre3 : Observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu

Dans ce chapitre nous étudions l'observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu. Pour ce faire nous nous sommes basées sur les références suivantes : [1], [5], [7], [8], [10], [11], [14], [15], [16].

3.0.4 Observabilité des systèmes linéaires positifs

Considérons le système dynamique linéaire positif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \tag{3.1}$$

où
$x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, A est de Metzler et les matrices B, C et D sont positives de dimensions appropriées.

Définition 3.0.3 *Le système (3.1) est dit observable s'il existe un temps $t_f \geq t_0$ tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$ suffit pour déterminer de manière unique la condition initiale x_0.*

Définition 3.0.4 *Le système (3.1) est complètement observable si quelque soit l'instant initial t_0, l'état initial x_0 à t_0, et l'instant final t_f différent de t_0, la seule connaissance de sa sortie $y(t)$ et de son entrée $u(t)$ sur l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_f$ permet de connaître l'état initial x_0.*

3.1 Tests d'observabilité des sysèmes linéaires positifs :

3.1.1 1.Test par la matrice de Kalman :

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman :

Théorème 3.1.1 *[9] Le système linéaire (3.1) est observable (en temps t_f quelconque) si et seulement si, la matrice d'observabilité de Kalman :*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

est de rang n.
On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Preuve : Dérivons y et utilisons l'équation d'état. Une première dérivation donne :

$$Cx = y$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{y} &= C\dot{x} \\ &= CAx + CBu. \end{aligned}$$

Donc

$$CAx = \dot{y} - CBu$$

A ce niveau, tout se passe comme si la quantité

$$\overline{y}_1 = \dot{y} - CBu$$

était une nouvelle sortie. En la dérivant de nouveau, nous obtenons :

$$CA^2x = \dot{\overline{y}}_1 - CABu.$$

Maintenant, x est néccessairement solution du système étendu

$$\begin{aligned} Cx &= \overline{y}_0 = y \\ CAx &= \overline{y}_1 = \dot{y} - CBu \\ CA^2x &= \overline{y}_2 = \dot{\overline{y}}_1 - CABu. \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que x sera nécessairement solution des équations :

$$CA^kx = \overline{y}_k.$$

Où les quantités connues

$$CA^kx = \overline{y}_k,$$

sont définies par la récurrence

$$\overline{y}_k = \dot{\overline{y}}_{k-1} - CA^{k-1}Bu,$$

pour

$$k \geq 1 \text{ et } \overline{y}_0 = y.$$

Si le rang de la matrice d'observabilité est maximal et égal à n, alors elle admet un inverse à gauche (non nécessairement unique) P matrice $n \times pn$ vérifiant :

$$P \begin{pmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = I_n,$$

ainsi

$$x = P \begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{y}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La condition de rang est donc suffisante.
Réciproquement, si le rang de cette matrice est strictement inferieur à n alors, il existe $x_0 \neq 0$, tel que :

$$Cx_0 = CAx_0 = ... = CA^{n-1}x_0 = 0,$$

et donc par le théorème de Cayley–Hamilton :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; Ce^{At}x_0 = 0.$$

Par conséquent le système n'est pas observable.

Exemple 3.1.1 *Considérons le système linéaire positif suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu \\ y(t) = Cx(t) \end{cases},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \text{et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice d'observabilité de Kalman est :

$$\begin{aligned} O &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le rang de O est plein, alors le système est observable.

Exemple 3.1.2 *Considérons le système linéaire positif (3) défini par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; et\; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant le critère de Kalman, on a :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $rang(O) = 1 < 2$, alors le système n'est pas observable.

1. Pour un système linéaire, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps t_f.
2. La notion d'observabilité pour un système linéaire ne dépend pas de la matrice B.
3. On a

$$rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow rang \begin{pmatrix} C^T & A^TC^T & . & . & (A^{n-1})^TC^T \end{pmatrix} = n$$

Remarque 3.1.1 *L'observabilité d'un système de matrices caractéristiques (A, C) sera appelée observabilité de la paire (A, C).*

Proposition 3.1.1 *La paire (C, A) du système (3) est observable, si et seulement si,*

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\} \tag{3.1.2}$$

Proposition 3.1.2 *La paire (C, A) du système (3.1) est observable, si et seulement si,*

$$\bigcap_{t \in [0,\tau]} \ker Ce^{At} = \{0\} \tag{3.1.3}$$

Proposition 3.1.3 *La paire (C, A) du système (3.1)st observable, si et seulement si,*

$$\bigcap_{t \geq 0} \ker Ce^{At} = \{0\} \tag{3.1.4}$$

Théorème 3.1.2 *La paire (C, A) du système (3.1) est observable, si et seulement si,*

$$\ker O = \{0\}$$

Preuve : *On démontre ce résultat par l'absurde.*
Supposons que (C, A) est observable, selon la proposition (3.1.3) on a :

$$\bigcap_{t\geq 0} \ker Ce^{At} = \{0\}$$

Supposons aussi que

$$\ker O \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists x \neq 0/Ox = 0. \tag{3.1.5}$$

On sait que

$$Ce^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} CA^i \frac{t^i}{i!}.$$

Soit

$$x \in \bigcap_{t\geq 0} \ker Ce^{At},$$

alors

$$x \in \ker CA^i \frac{t^i}{i!} = \{0\}, \forall t \geq 0, \forall i = 0, .., n-1.$$

D'après la proposition (3.1.1) on a :

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\}.$$

Soit

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i,$$

alors

$$x \in \bigcap_{t\geq 0} \ker Ce^{At} = \{0\},$$

implique $x = 0$, donc la contradiction avec l'équation (3.1.5)
Inversement, supposons que

$$\ker O = \{0\}$$

D'où

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\}.$$

Alors

$$\bigcap_{t\geq 0} \ker Ce^{At} = \{0\}\,.$$

Donc la paire (C, A) est observable.

3.1.2 2. Test par le grammien d'observabilité :

les propriétés d'observabilité peuvent être analysées à l'aide d'une matrice définissant le grammien d'observabilité.

Définition 3.1.1 *Le grammien d'observabilité est la matrice symétrique définie positive, notée $W_o \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par :*

$$W_o = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau. \tag{3.1.6}$$

Proposition 3.1.4 *La paire (A, C) du système (3.1) est observable, si et seulement si, le grammien d'observabilité W_o est une matrice inversible.*

Preuve : On montre d'abord que W_0 est symétrique.

$$\begin{aligned}
W_0^T &= (\int_{i=0}^{n-1} Ce^{At}e^{A^Tt}C^T)^T d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} (Ce^{At}e^{A^Tt}C^T)^T d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} (e^{A^Tt}C^T)^T (Ce^{At})^T d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} (C^T)^T (e^{A^Tt})^T (e^{At})^T C^T d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} Ce^{At}e^{A^Tt}C^T d\tau.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$W_0^T = W_0.$$

Et donc W_0 est symétrique.
En suite, pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
< W_0x, x > &= < \int_{i=0}^{n-1} Ce^{At}e^{A^Tt}C^T d\tau x, x > \\
&= \int_{i=0}^{n-1} < Ce^{At}e^{A^Tt}C^T x, x > d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} Ce^{At}x, (e^{A^Tt}C^T)^T x d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} < Ce^{At}x, Ce^{At}x > d\tau \\
&= \int_{i=0}^{n-1} \left\| Ce^{At}x \right\|^2 d\tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc est semi définie positive.

• Montrons que W_0 est inversible

Supposons que le système est observable, d'après la proposition (3.1.2), on a

$$\bigcap_{t\in[0,\tau]} \ker Ce^{At} = \{0\}.$$

Supposons aussi que W_0 n'est pas inversible, i.e :

$$\exists x \neq 0 \;/\; Ox = 0.$$

Soit $x \in \ker W_0$, cela veut dire que :

$$W_0 x = 0.$$

Et on a

$$\begin{aligned}
x^T W_0 x &= < W_0 x, x > \\
&= \int_{i=0}^{t} < Ce^{A\tau}e^{A^T\tau}C^T x, x > d\tau \\
&= \int_{i=0}^{t} < Ce^{A\tau}x, C^T e^{A\tau}x > d\tau \\
&= \int_{i=0}^{t} \left\| CA^{A\tau}x \right\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

qui est égale à 0, implique que :

$$\left\| CA^{A\tau}x \right\| = 0$$

La fonction $CA^{A\tau}x$ est continue, donc

$$CA^{A\tau}x = 0, \; \forall \; t \in [0, \tau].$$

Alors

$$x \in \bigcap_{t\in[0,\tau]} \ker Ce^{At} \Rightarrow x = 0,$$

on a une contradiction.
Inversement, supposons que W_0 est inversible, i.e :

$$\forall x, W_0 x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Et supposons aussi que le système n'est pas observable, selon la proposition (3.1.2), on a

$$\bigcap_{t\in[0,\tau]} \ker Ce^{At} \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } x \in \ker Ce^{At},\ \forall t \in [0,\tau].$$

Contradition.

Exemple 3.1.3 *Considérons le système (3.1), avec*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = (1,1,1)$$

A est nilpotente d'indice 2*, alors on a :*

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= I + A\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1+2\tau & \tau & \tau \\ 0 & 1+2\tau & \tau \\ 0 & 0 & 1+2\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{A^T\tau} &= I + A^T\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1+2\tau & 0 & 0 \\ \tau & 1+2\tau & 0 \\ \tau & \tau & 1+2\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$W_o = \int_0^T \begin{pmatrix} 1+2\tau & 0 & 0 \\ \tau & 1+2\tau & 0 \\ \tau & \tau & 1+2\tau \end{pmatrix} (1,1,1)^T(1,1,1) \begin{pmatrix} 1+2\tau & \tau & \tau \\ 0 & 1+2\tau & \tau \\ 0 & 0 & 1+2\tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} 1+4\tau+4\tau^2 & 1+5\tau+6\tau^2 & 2+8\tau+8\tau^2 \\ 1+5\tau+6\tau^2 & 1+6\tau+9\tau^2 & 2+10\tau+12\tau^2 \\ 1+6\tau+8\tau^2 & 1+7\tau+12\tau^2 & 2+12\tau+12\tau^2 \end{pmatrix} d\tau$$

après intégration, on obtient la matrice suivante :

$$W_0 = \begin{pmatrix} T + 2T^2 + \frac{4}{3}T^3 & T + \frac{5}{2}T^2 + 2T^3 & 2T + 4T^2 + \frac{8}{3}T^3 \\ T + \frac{5}{2}T^2 + 2T^3 & T + 3T^2 + 3T^3 & 2T + 5T^2 + 4T^3 \\ T + 3T^2 + \frac{8}{3}T^3 & 1 + \frac{7}{2}T^2 + 4T^3 & 2T + 6T^2 + 4T^3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det W_0 = -\frac{1}{9}T^7 \neq 0$, $\forall T > 0$, *alors* W_0 *est inversible et donc le système est observable.*

3.1.3 3. Test par les valeurs propres :

Proposition 3.1.5 *[7] Le système (3.1) est complètement observable si :*

$$rang \begin{bmatrix} I_n s - A \\ C \end{bmatrix} = n, \tag{3.1.7}$$

pour toute valeur propre s de A.

Exemple 3.1.4 *Considérons le système (3.1), avec*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
• Pour la valeur propre $-\sqrt{2}$, on a :

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}I_2 - A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 2.
• Pour la valeur propre $\sqrt{2}$, on a :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}I_2 - A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 2.
On déduit donc que le système est observable.

Exemple 3.1.5 *Considérons le système (3.1), avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A *sont* -3 *et* 3.
Pour la valeur propre 3, *on a :*

$$\begin{pmatrix} 3I_2 - A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme elle est de rang $1 < 2$, *on déduit donc que le système est non observable.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion d'observabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu, en fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité et nous nous sommes basées sur trois tests d'observabilité, le premier est le critère de Kalman et le deuxième est la matrice grammiene et le troisième par des valeurs propres.
Le travail est illustré par des exemples d'applications numériques.

Bibliographie

[1] Antsaklis and Anthony N. Michel."A Linear Systems Primer ", Birkhãuser - Boston, Basel, Berlin 2007.

[2] Bachelier,O.(28 juin 2017), cours d'automatique représentation d'état linéaire des système monovariables 11

[3] Bouagada,D.(2007), système Différentiels singulièrs Positif et LMIs,Université d'Oran.2

[4] Broxom, B And Rghavan, T. (2006), Nonnégative Matrice and application, XX-SPETIO, 33–41.2

[5] D. Bouagada : Cours de théorie de contrôle, année 2016-2017.

[6] Hespanha, J and XU,Y (2007) A survey of recent result in networked control systems Proceedings of the IEEE, 95(1) ;138-162 (2007)

[7] J. O'Reilly, Observer for linear system, Richard Bellman, Mathematics in Science and Engineering,Vol. 140, Academic Press, New York, 1983.

[8] Kaczorek,T. (1997), positive linéaire système and thierrelationship with electricial circuits, XX-SPETO,33-41.2,3,18.

[9] Kaczorek,T. (1998) "vestors and matrices in Automatique and Electrochimics", Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.22

[10] E. Trélat et T. Haberkorn, Cours d'automatique, Master de Mathématiques, Université d'Oréans, Premier trimestre

[11] E. Trétat, Contrôle optimal : théorie et application, Vuibert, collection " Mathématiques concrètes " (2005).

[12] Hermès : Larminat, Philippe (de) Automatique : Commande des systèmes linéaires.

[13] Kaczorek, T (2002), Positive 1D and 2D système, springer verlag, Berlin, Academy, 431-431. 18

[14] Mink, H. (1986), Non negative matricess, Wiley Interxience Series in Dixrete Time Mathematices and Optimisation, John wiley and Sons,,206-206. 2,5

[15] R. E Kalman and E. Evangelisti : Controlability and Observability. 2011

[16] Y. Granjon. Automatique : Système linéaire, non linéaire, à temps continu, à temps discret, représentation d'étet. -2eéditio :Cours et exercices corrigés. -Paris, 2003(ISBN

2 10 0071181).-2e édition, -Paris : Hermès, 1996, -(Collection automatique, ISSN 0989-3571)

[17] Yves,G (2001), AUTOMATIQUE Système linéaire, non linéaireà temps continu à temps discret remrésentation d'état, 2^{eme} édication, Paris.11