MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation
Présenté par :

BESSAAD MAHDJOUBA

THEME :

Étude l'équation différentielle fractionnaire de Langevin

Soutenue : Juin 2021
Devant le jury composé de :

Mr. Sidi Mohammed BAHRI	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Président**
Mr. Oussama BOUANNANI	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mr. Mohammed KAID	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Encadreur**

Table des matières

Remerciements

Avant tout, louange à *ALLAH* le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de mémoire, Monsieur Mohammed KAID, pour ses conseils précieux, ainsi que pour sa patience tout au long de mon encadrement en master.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Monsieur le professeur **Sidi Mohammed BAHRI**, de m' avoire fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire .

Je remercie vivement Monsieur **Oussama BOUANNANI,** d'avoir eu l'amabilité d'examiner ce mémoire.

Je souhaite tout particulièrement exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents mes soeurs et frères et tous les membres de ma grande famille. Merci à tous et à toutes à mes souhaits et d'atteindre mes objectifs.

0.1 Résumé :

Dans ce mémoire, on s'intéresse à résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard, pour cela nous présentons quelques résultats d'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites concernant les équations différentielles de Langevin qui sont engendrées par les dérivées de Hadamard. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe en particulier on a utilisé le théorème de points fixe de Banach ainsi que Schaefer.

0.1.1 Mots clés :

Equations Différentielles Fractionnaire, Points fixe, Problème aux limites de Langevin.

0.2 Introduction :

Le calcul fractionnaire est un domaine de l'analyse mathématique qui traite la notion d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire et ses applications. Le terme fractionnaire est un terme impropre, mais il est conservé à la suite de l'usage courant. Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans la séance fondamentales qu'en ingénieries sont très diverses. Ils s'apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches.

Les auteurs Z. Dahmani et M. Houas (voir [27]) se sont intéressés à system d'équation différentielle fractionnaire :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}x(t) = f_1(t, y(t), D^{\alpha_2}y(t), D^{\alpha_3}y(t), ..., D^{\alpha_n}y(t)), \quad t \in [0,T], \\ D^{\beta_1}x(t) = f_1(t, y(t), D^{\beta_2}y(t), D^{\beta_3}y(t), ..., D^{\beta_n}y(t)), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x^*, \; x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0, \\ y(0) = y^*, \; y'(0) = y''(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0, \\ D^p x(1) = \lambda_1 D^p x(\eta), \qquad D^q y(1) = \lambda_2 D^q y(\xi), \end{cases}$$

où D^{α_i}, D^{β_i}, $i = 1, .., n$ représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α_i, β_i respectevement.

En 2016 et 2017, les auteurs C. Kiataramkul et al (voir [20], [26]) ont étudié l'existence et l'unicité de solution pour le problème différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta}([p(t)D^{\alpha} + r(t)]x(t)) = g(t, x(t)), \quad t \in [1,T], \\ x(1) = -x(T), \qquad D^{\alpha}x(1) = -D^{\alpha}x(T). \end{cases}$$

Cette mémoire s'organise en trois chapitres. **Chapitre un** fournit une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour la bonne compréhension et le développement d'autre chapitres qui suivant. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire il ya sont répertoriés.

Dans le **chapitre deux**, nous utilisons le type Hadamard de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire avec conditions aux limites de Langevin, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha} + g(t))x(t) = f(t, x(t), D^{\delta_1}x(t), D^{\delta_2}x(t), ..., D^{\delta_n}x(t)\right), \quad 1 < t < T, \\ x(1) + x(T) = 0, \qquad D^{\alpha}x(1) + D^{\alpha}x(T) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où D^{γ} est la dérivée fractionnaire d'ordre $\gamma \in \{\alpha, \beta, \delta_i\}$ tel que $i = 1, .., n$ au sens d'Hadamard avec $0 < \gamma < 1$ et $\delta_i < \alpha$. En plus $f : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continues donnée et aussi g est une fonction continues sur $[1,T]$.

Dans **dernièr chapitre**, on donne quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus et ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cette mémoire telles que, la fonction spéciale comme fonction Gamma, intégration fractionnaire au sens de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sens de Hadamard. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

1.1 Espace des fonctions Absolument Continues :

Définition 1.1 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables i.e. :*

$$.f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]),$$

Tel que

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions à valeurs complexe $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, c'est -à-dire :*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \ \mathbb{C} \ et \ f^{\ (n-1)}(x) \in AC[a,b] \right\}.$$

En particulier on a $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.3 *L'espace noté $AC^n_\delta[a,b]$ défini par :*

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{C} \quad et \ \delta^{(n-1)} f(x) \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\},$$

Est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale1.

1.2 Intégration fractionnaire au sens de Hadamard :

Définition 1.4 *Soit f une fonction continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a < b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. Alors, l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f définie par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt; \qquad a < x < b,$$

où Γ est une fonction Gamma d'Euler.

Définition 1.5 *: Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle fonction Gamma d'Euler la fonction par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Propriété : On a

1. $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$
2. $$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$
3. $$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.2.1 Fonction Bêta

Définition 1.6 *soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle fonction bêta d'Euler la fonction donner par :*

$$B(x,y) = \int_0^\infty u^{x-1}(1-u)^{y-1} dt.$$

Propriété : Nous avons

–
$$B(x,y) = B(y,x).$$

et

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exemple 1.1 *Considérons la fonction*

$$f(t) = (\log \frac{t}{a})^{\beta-1},$$

où $\beta > 0$ et $a > t > 0$. Alors

$$J_a^\alpha (\log \frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\log \frac{x}{t})^{\alpha+\beta-1}. \tag{1.1}$$

On a

$$\begin{aligned} J_a^\alpha f(x) &= J_a^\alpha (\log\frac{t}{a})^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1}\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$y = \frac{\log t/a}{\log x/t},$$

on obtient

$$J_a^\alpha (\log\frac{x}{t})^{\beta-1} = \frac{(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{^{\alpha-1}} y^{^{\beta-1}},$$

Et d'après la définition de fonction Béta, il vient

$$\begin{aligned} J_a^\alpha f(x) &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(\log\frac{x}{t})^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\frac{x}{t})^{^{\alpha+\beta-1}}, \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.2.2 Quelques propriétés :

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall\alpha > 0$ on a :

$$J_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 J_a^\alpha f(x) + \lambda_2 J_a^\alpha g(x).$$

Propriété : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\log\frac{x}{t})$ une fonctions continues ,$f \in L^P([a,b]).\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$J_a^\alpha J_a^\beta fx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^t (\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{s})^{\beta-1} f(s)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t},$$

Proposition 1.1 *Telle que $a \leq t \leq x; a \leq s \leq t$.*

Propriété : (propriétés de semi groupe) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continues,$f \in L^P([a,b])$, $\forall$ α , $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta fx) J_a^\beta fx) &= J_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= J_a^\beta J_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard :

Définition 1.7 *La dérivée fractionnaire au sens Hadamard de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^H D_a^\alpha f(x) &= \delta^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .(x\frac{d}{dx})^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(x\frac{d}{dx})^n \int_a^x (\log\frac{x}{t})^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

où $n-1<\alpha<n, \;\; n=[\alpha]+1$.

Proposition 1.2 *Pour $\alpha>0$ et $f\in C[a,b]$,on a :*

$${}^H D_a^\alpha J^\alpha f(t) = f(t),$$

Mais

$$J^{\alpha H} D_a^\alpha f(t) \neq f(t).$$

Exemple 1.2 *Soient f une fonction définie comme suite :*

$$f(t) = (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} \quad avec \;\; \beta>0.$$

Alors

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\;\log(\frac{t}{a}))^{\beta-\alpha-1} \quad avec \quad \alpha>0\;.$$

.

Preuve. On a

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \delta^n (J_a^{n-\alpha}(\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1}),$$

D'après (1.1), on trouve

$$J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(\log(\frac{t}{a}))^{n-\alpha+\beta-1},$$

D'où le résultat. ■

Remarque 1.1 *En particulier, si*

$$\beta=1 \quad et \;\; \alpha>0.$$

Alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une fonction constante est en général non nulle, c'est-à-dire

$${}^H D_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\log(\frac{t}{a}))^{-\alpha}.$$

1.4 Lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard

Pour tout $y \in AC_\delta^n[a,b]$, Nous avons :

$$^{c}D_a^\alpha y(x) = D_a^\alpha \left\{ y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i y(a)}{i!} (\log \frac{x}{a}) \right\},$$

où $n = [\alpha] + 1$.

1.5 Lemmes auxiliaires :

Lemme 1.1 *Soient $f \in AC_\delta^n([a,b], \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$, on a :*

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (\log x)^k.$$

où $C_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2 .... n - 1$ et $n - 1 < \alpha < n$, $n = [\alpha] + 1$.

1.6 Quelques théorèmes de point fixe :

Pour l'application ultérieure, nous avons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Définition 1.8 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et φ une application d'un élément de X dans lui même. On appelle point fixe de φ tout point $x \in X$ tel que :*

$$\varphi x = x.$$

Définition 1.9 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une application f de X dans X dite Lipchitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie :*

$$\forall x,\ y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|_X.$$

Définition 1.10 *L'application Lipchitzienne f est dite une contraction si $L \in]0, 1[$.*

Définition 1.11 *Soit Ω un sous ensemble de $X = C([a,b], E)$. On dit que Ω est équi-continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ Tel que :*

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Longrightarrow |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall t_1,\ t_2 \in [a,b],\ \psi \in \Omega.$$

Définition 1.12 *soient A et B deux espaces de Banach .un opérateur $\varphi : A \longrightarrow B$ est complètement continues s'il transforme tout borné de A en une partie relativement compact de B .*

Définition 1.13 *on dit que l'opérateur φ est complètement continues s'il est continues et compact .*

Définition 1.14 *un espace de Banach est un espace vectoriel normé et compact*

Théorème 1.1 *(Banach) Soit* $(U; d)$ *un espace métrique non vide complet et* $T : U \to U$ *une application contractante. Alors, il existe un point unique* $u \in U$ *tel que* $T(u) = u$.

Théorème 1.2 *soient* X *un espace de Banach et* $A : X \longrightarrow X$ *un opérateur complètement continues*

Si l'ensemble

$$\Delta = \{x \in X : x = \lambda(Ax), \text{pour un certain } \lambda \in [0, 1]\}$$

Est borné ,A alors possède au moins un point fixe dans X.

Théorème 1.3 *(Ascoli-Arzel) Soit* $A \subset C(J; E)$, A *est compact dans* $C(J; E)$ *si et seulement si :*

1. A est fermé.
2. A est borné.
3. A est équi-continue.

Chapitre 2

Equations Différentielles Fractionnaire avec Conditions aux Limites de type Langevin

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons le type Hadamard de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire avec conditions aux limites de Langevin, c'est-à-dire le problème suivante :

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha}+g(t)\right)x(t) = f\left(t, x(t), D^{\delta_1}x(t), D^{\delta_2}x(t), ..., D^{\delta_n}x(t)\right), \quad 1 < t < T, \\ x(1) + x(T) = 0, \qquad D^{\alpha}x(1) + D^{\alpha}x(T) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où D^{γ} est la dérivé fractionnaire d'ordre $\gamma \in \{\alpha, \beta, \delta_i\}$ tel que $i = 1, .., n$ au sens d'Hadamard avec $0 < \gamma < 1$ et $\delta_i < \alpha$. Ainsi que $f : [1, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continues donnée et aussi g est une fonction continues sur $[1, T]$.

2.2 Problème intégrale :

Lemme 2.1 *Soient $0 < \alpha, \beta < 1$. La représentation intégrale du problème aux limite fractionnaire (2.1) est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) \quad = \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\ & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s} \\ & -\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\ & +\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve. *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$D^{\beta}\left(D^{\alpha}+g(t)\right)x(t) = f\left(t, x(t), D^{\delta_1}x(t), D^{\delta_2}x(t), ..., D^{\delta_n}x(t)\right). \tag{2.3}$$

Posons

$$\varphi(t) = f(t, x(t), D^{\delta_1}x(t), D^{\delta_2}x(t), ..., D^{\delta_n}x(t)).$$

En appliquant l'opérateur J^β *à l'équation (2.3), on trouve*

$$J^\beta D^\beta (D^\alpha + g(t))x(t) = J^\beta \varphi(t),$$

Et on utilise le Lemme 1.1, il vient

$$(D^\alpha + g(t))x(t) = J^\beta \varphi(t) + c_0, \qquad (n = [\beta] + 1 = 1).$$

Où c_0 *est une constante. Alors*

$$D^\alpha x(t) = J^\beta \varphi(t) - g(t)x(t) + c_0. \tag{2.4}$$

Maintenant, en utilisant la condition $D^\alpha x(1) + D^\alpha x(T) = 0$, *on obtient*

$$\begin{cases} D^\alpha x(1) = J^\beta \varphi(1) - g(1)x(1) + c_0, \\ D^\alpha x(T) = J^\beta \varphi(T) - g(T)x(T) + c_0, \end{cases}$$

Par addition, on trouve

$$J^\beta \varphi(1) - g(1)x(1) + 2c_0 = -J^\beta \varphi(T) + g(T)x(T),$$

On sait que $x(1) + x(T) = 0$, *nous avons*

$$J^\beta \varphi(1) + g(1)x(T) + 2c_0 = -J^\beta \varphi(T) + g(T)x(T),$$

Et puisque $J^\beta \varphi(1) = 0$, *on a*

$$2C_0 = -J^\beta \varphi(T) + g(T)x(T) - g(1)x(T),$$

Enfin

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{1}{2}[J^\beta \varphi(T) + (g(T) - g(1))x(T)] \\ &= -\frac{1}{2}J^\beta \varphi(T) - \frac{1}{2}(g(T) - g(1))x(T). \end{aligned}$$

En remplaçant C_0 *par leur expression dans l'équation (2.4), on obtient*

$$D^\alpha x(t) = J^\beta \varphi(t) - g(t)x(t) - \frac{1}{2}J^\beta \varphi(T) - \frac{1}{2}(g(T) - g(1))x(T). \tag{2.5}$$

Maintenant, En appliquant l'opérateur J^α *à l'équation (2.5), on trouve*

$$\begin{aligned} J^\alpha D^\alpha x(t) &= J^\alpha J^\beta \varphi(t) - J^\alpha g(t)x(t) - \frac{1}{2}J^\alpha J^\beta \varphi(T) - \frac{1}{2}J^\alpha(g(T) - g(1))x(T) + C_1 \\ &= J^{\alpha+\beta}\varphi(t) - J^\alpha g(t)x(t) - \frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T) - \frac{1}{2}J^\alpha(g(T) - g(1))x(T) + C_1, \end{aligned}$$

Où C_1 *est une constante, c'est-à-dire*

$$x(t) = J^{\alpha+\beta}\varphi(t) - J^\alpha g(t)x(t) - \frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T) - \frac{1}{2}J^\alpha(g(T) - g(1))x(T) + C_1. \tag{2.6}$$

Pour déterminer le constante C_1*, on utilise encore une fois la condition initiale* $x(1)+x(T)=0$*, il vient*

$$\begin{cases} x(1)=J^{\alpha+\beta}\varphi(1)-J^{\alpha}g(1)x(1)-\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T)+C_1, \\ x(T)=\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-J^{\alpha}g(T)x(T)-\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T)+C_1, \end{cases}$$

Ou bien

$$\begin{cases} x(1)=-\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T)+C_1, \\ x(T)=\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-J^{\alpha}g(T)x(T)-\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T)+C_1, \end{cases}$$

Et par additionner les deux équations précédentes, on obtient

$$2C_1=J^{\alpha}g(T)x(T)+J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T),$$

Or

$$C_1=\frac{1}{2}J^{\alpha}g(T)x(T)+\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T).$$

En remplaçant C_1 *par leur formule dans l'équation (2.6), on a*

$$\begin{aligned} x(t) &= J^{\alpha+\beta}\varphi(t)-J^{\alpha}g(t)x(t)-\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T)-\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T) \\ &\quad +\frac{1}{2}J^{\alpha}g(T)x(T)+\frac{1}{2}J^{\alpha}(g(T)-g(1))x(T). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} x(t) &= J^{\alpha+\beta}\varphi(t)-J^{\alpha}g(t)x(t)-\frac{1}{2}\ J^{\alpha+\beta}\varphi(T) \\ &\quad +\frac{1}{2}J^{\alpha}g(T)x(T), \end{aligned}$$

Et d'après la définition 1.4, il vient

$$\begin{aligned} & x(t) \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s} \\ & -\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

■

2.3 Problème de point fixe :

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème (2.1) sera prouvée.

On introduit l'espace de Banach X défini par :

$$X=\left\{x/x\in C([1,T],\mathbb{R});\ D^{\delta_1}x,D^{\delta_2}x,...,D^{\delta_n}x\in\in C([1,T],\mathbb{R})\right\},$$

Muni de la norme :

$$\|x\|_X = \|x\|_\infty + \left\|D^{\delta_1}x\right\|_\infty + \left\|D^{\delta_2}x\right\|_\infty + ... + \left\|D^{\delta_n}x\right\|_\infty, \tag{2.7}$$

Où

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \sup_{x\in[1,T]} |x(t)|, \ \left\|D^{\delta_1}x\right\|_\infty = \sup_{x\in[1,T]} \left|D^{\delta_1}x(t)\right|, \\ \left\|D^{\delta_2}x\right\|_\infty &= \sup_{x\in[1,T]} \left|D^{\delta_2}x(t)\right|, ..., \left\|D^{\delta_n}x\right\|_\infty = \sup_{x\in[1,T]} \left|D^{\delta_n}x(t)\right|. \end{aligned}$$

On considère l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \ X &\to X \\ x &\to \mathcal{H}x \end{aligned}$$

tel que, pour tout $t \in [1, T]$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s} \\ & \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

2.4 Existence et unicité :

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2), on considère les hypothèses suivantes :

- (H_1) : La fonction $f : [1, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continues.
- (H_2) : Pour tout $t \in [1, T]$ et $x_1, x_2, ..., x_n,\ y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t, x_1, x_2, ..., x_n) - f(t, y_1, y_2, ..., y_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} L_i |x_i - x_i|,$$

Et

$$L = \max(L_i),\ i = 1, .., n.$$

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse H_2, le problème (2.1) possède une solution unique si*

$$0 < \Omega < 1,$$

Tel que $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ *et*

$$\Omega_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{L}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(\log T)^\alpha + \frac{g^*}{\Gamma(1+\alpha)}\right)(\log T)^\alpha.$$

Et

$$\Omega_2=\left(\frac{L}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)}(\log T)^{\beta}+\frac{g^*}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}\right)(\log T)^{\alpha-\delta_i},\qquad i=1,...,n.$$

Ainsi

$$g^*=\sup_{t\in[1,T]}|g(s)|.$$

<u>Etape 1 :</u> Soient $x,\, y\in X$. Pour tout $t\in[1,T]$, on a

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)|\\
=\ &\Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)y(s)\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)y(s)\frac{ds}{s}\Big|,
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)|\\
\leq\ &\sup_{t\in[1,T]}\Big\{\Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)y(s)\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)y(s)\frac{ds}{s}\Big|\Big\},
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\sup_{s\in[1,T]}\left|\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s)) \end{array}\right|\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\sup_{s\in[1,T]}|g(s)|\,|x(s)-y(s)|\,\frac{ds}{s}+ \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\sup_{s\in[1,T]}\left|\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s)) \end{array}\right|\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\sup_{t\in[1,T]}|g(s)|\,|x(s)-y(s)|\,\frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\sup_{s\in[1,T]}\left|\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s)) \end{array}\right|\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\left(\sup_{s\in[1,T]}|g(s)|\sup_{t\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\right)\frac{ds}{s}+ \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\sup_{s\in[1,T]}\left|\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s)) \end{array}\right|\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\left(\sup_{s\in[1,T]}|g(s)|\sup_{s\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\right)\frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

Posons :

$$g^*=\sup_{t\in[1,T]}|g(s)|\,.$$

Alors, d'après l'hypothèse (H_2), on obtient

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\left(L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{g^*}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\sup_{s\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\,\frac{ds}{s}+ \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\left(L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\sup_{s\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\,\frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\left(L_1\,|x-y|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{3g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\sup_{s\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\,\frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\sup_{s\in[1,T]}\left(L_1\,|x-y|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{3g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\|x-y\|_\infty\,\frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3\left(L_1\,\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}L_i\left\|D^{\delta_i}x-D^{\delta_i}y\right\|_\infty\right)}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{3g^*\,\|x-y\|_\infty}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right),
\end{aligned}
$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3\left(L_1\,\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}L_i\left\|D^{\delta_i}x-D^{\delta_i}y\right\|_\infty\right)}{2}I^{\alpha+\beta}(1)(T) \\
& +\frac{3g^*\,\|x-y\|_\infty}{2}I^{\alpha}(1)(T),
\end{aligned}
$$

D'après l'exemple 1.1, nous avons

$$I^{\alpha}(1)(T)=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)}(\log\frac{T}{1})^{\alpha}=\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Aussi

$$I^{\alpha+\beta}(1)(T)=\frac{(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3L\left(\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}\left\|D^{\delta_i}x-D^{\delta_i}y\right\|_\infty\right)}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta} \\
&+\frac{3g^*\|x-y\|_\infty}{2\Gamma(1+\alpha)}(\log T)^{\alpha},
\end{aligned}$$

On utilise (2.7), nous avons

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3L\|x-y\|_X}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{3g^*\|x-y\|_\infty}{2\Gamma(1+\alpha)}(\log T)^{\alpha} \\
\leq\ & \frac{3}{2}\left(\frac{L}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{g^*}{\Gamma(1+\alpha)}(\log T)^{\alpha}\right)\|x-y\|_X \\
\leq\ & \Omega_1\|x-y\|_X\,,
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)|\leq\Omega_1\|x-y\|_X\,,$$

Ou bien

$$\|\mathcal{H}x-\mathcal{H}y\|_\infty\leq\Omega_1\|x-y\|_X\,. \tag{2.8}$$

Etape 2 : Maintenant, On va calculer $D^{\delta_i}\mathcal{H}x$, $i=1,...,n$. Pour tout $t\in[1,e]$ on a

$$\begin{aligned}
&D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \\
=\ & D^{\delta_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\
&\left.+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \\
=\ & D^{\delta_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\right) \\
&-D^{\delta_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}\right),
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t)\\
=\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques d'étape un, il vient

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t)-D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right|\\
\leq\ &\sup_{t\in[1,T]}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}\left\{\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\end{array}\right\}\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1}g(s)\left[x(s)-y(s)\right]\frac{ds}{s}\right|,
\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t)-D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right|\\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}\sup_{s\in[1,T]}\left|\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\\ -f(s,y(s),D^{\delta_1}y(s),D^{\delta_2}y(s),...,D^{\delta_n}y(s))\end{array}\right|\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1}\left(\sup_{s\in[1,T]}g(s)\sup_{s\in[1,T]}|x(s)-y(s)|\right)\frac{ds}{s},
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t)-D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right|\\
\leq\ &\left(L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\
&+g^*\left\|x-y\right\|_\infty\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1}\frac{ds}{s}\right),
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t)-D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right|\\
\leq\ &L\left(|x-y|+\sum_{i=2}^n\left|D^{\delta_i}x(s)-D^{\delta_i}y(s)\right|\right)I^{\alpha+\beta-\delta_i}(T)(1)\\
&+g^*\left\|x-y\right\|_\infty I^{\alpha-\delta_i}(T)(1).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$I^{\alpha+\beta-\delta_i}(T)(1)=\frac{(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)},$$

Et

$$I^{\alpha-\delta_i}(T)(1)=\frac{(\log T)^{\alpha-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
& \left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{L\left(\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^{n}\left\|D^{\delta_i}x(s) - D^{\delta_i}y(s)\right\|_\infty\right)}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)}(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i} + \frac{g^*\|x-y\|_\infty}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}(\log T)^{\alpha-\delta_i} \\
\leq\ & \frac{L\|x-y\|_X}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)}(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i} + \frac{g^*\|x-y\|_\infty}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}(\log T)^{\alpha-\delta_i} \\
\leq\ & \left(\frac{L}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)}(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i} + \frac{g^*}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}(\log T)^{\alpha-\delta_i}\right)\|x-y\|_X \\
\leq\ & \left(\frac{L}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)}(\log T)^{\beta} + \frac{g^*}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)}\right)(\log T)^{\alpha-\delta_i}\|x-y\|_X \\
\leq\ & \Omega_2\|x-y\|_X,
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\sup_{t\in[1,T]}\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \leq \Omega_2\|x-y\|_X,$$

Or

$$\left\|\left(D^{\delta_i}\mathcal{H}x\right) - \left(D^{\delta_i}\mathcal{H}y\right)\right\|_\infty \leq \Omega_2\|x-y\|_X. \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9), on trouve

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}x - \mathcal{H}y\|_\infty + \left\|\left(D^{\delta_i}\mathcal{H}x\right) - \left(D^{\delta_i}\mathcal{H}y\right)\right\|_\infty &\leq (\Omega_1+\Omega_2)\|x-y\|_X \\
&\leq \Omega\|x-y\|_X,
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.5 Existence sans unicité :

Notre deuxième résultat de l'existence des solutions du problème (2.1) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 2.2 *On suppose que l'hypothèse* (H_1) *est vérifie et l'hypothèse suivante :*
(H_3) : *Il existe une constante* $N > 0$ *tel que la fonction* f *est borné par* N*.*
Donc, notre problème admet au moins une solution sur $[1,T]$

Preuve. Tout d'abord, on montre que $\mathcal{H}$ est continues. Alors, soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite de X tel que cette suite converge vers $x \in X$. On a pour tout $t \in [1,T]$ ona :

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t)| \\
= &\Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x_n(s) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x_n(s) \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \Bigg|,
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t)| \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \sup_{s\in[1,T]} \left| \begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \\ -f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \end{array} \right| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \left(\sup_{s\in[1,T]} |g(s)| \sup_{t\in[1,T]} |x_n(s) - x(s)| \right) \frac{ds}{s} + \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \sup_{s\in[1,T]} \left| \begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \\ -f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \end{array} \right| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \left(\sup_{s\in[1,T]} |g(s)| \sup_{s\in[1,T]} |x_n(s) - x(s)| \right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

D'après notre hypothèse, la fonction f est continues, donc comme est une fonction continues ,alors

$$\| \mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t) \|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

En plus, nous avons

$$
\begin{aligned}
& \mid \quad D^{\delta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \mid \\
= \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s))\frac{ds}{s} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)x_n(s)\frac{ds}{s}. \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s}
\end{aligned}
$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& \left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \\
\leq \quad & \sup_{t\in[1,T]} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \left\{ \begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \\ -f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \end{array} \right\} \frac{ds}{s} \right. \\
& \left. -\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)\left[x_n(s) - x(s)\right]\frac{ds}{s} \right|,
\end{aligned}
$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
& \left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \\
\leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \sup_{s\in[1,T]} \left| \begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\delta_1}x_n(s), D^{\delta_2}x_n(s), ..., D^{\delta_n}x_n(s)) \\ -f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \end{array} \right| \frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1} \left(\sup_{s\in[1,T]} g(s) \sup_{s\in[1,T]} |x_n(s) - x(s)| \right) \frac{ds}{s},
\end{aligned}
$$

Encore fois, puisque f est une fonction continues, on trouve

$$
\| D^{\delta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow 0. \tag{2.11}
$$

D'autre part, on a

$$
\| \mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t) \|_X = \| \mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t) \|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \| D^{\delta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \|_\infty,
$$

De les formules (2.10) et (2.11), il vient

$$
\| \mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t) \|_X \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow 0,
$$

D'où le résultat. Maintenant , on montre que l'opérateur $\mathcal{H}$ est borné. Alors, on définit l'ensemble

$$
B_\xi = \{x \in X, \quad \|x\|_X \leq \xi, \quad \xi > 0 \}.
$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\mid \ \mathcal{H}x(t) \mid = \mid \ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s}\\
&-\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s} \mid,
\end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mid \ \mathcal{H}x(t) \mid \le \ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \sup_{s\in[1,T]} \mid f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \mid \frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} (\sup_{s\in[1,t]} \mid g(s) \mid \sup_{s\in[1,T]} \mid x(s) \mid)\frac{ds}{s})\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \sup_{s\in[1,T]} \mid f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \mid \frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} (\sup_{s\in[1,T]} \mid g(s) \mid \sup_{s\in[1,T]} \mid x(s) \mid)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

D'après notre hypothèse (H_3), il vient

$$\begin{aligned}
&\mid \ \mathcal{H}x(t) \mid\\
\le\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} + \frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s} + \frac{N}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\\
&+\frac{\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\\
\le\ & \frac{3N}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} + \frac{3\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

D'après des simplifications, on a

$$\begin{aligned}
&\mid \ \mathcal{H}x(t) \mid\\
\le\ & \frac{3N(\log T)^{\alpha+\beta}}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)} + \frac{3\xi g^*(\log T)^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)},
\end{aligned}$$

Enfin

$$\|\mathcal{H}x\|_\infty \le NM_1 + M_2,$$

Où

$$M_1 = \frac{3(\log T)^{\alpha+\beta}}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{3\xi g^*(\log T)^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$

En utilisant les même techniques pour l'opérateur (D^{δ_i}, $i = 1, .., n$) on trouve

$$\begin{aligned}
& | \quad D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \mid \\
= & \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \mid,
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \\
\leq & \sup_{t\in[1,T]} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \right|
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
& \left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \sup_{s\in[1,T]} \left| f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \right| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1} \left(\sup_{s\in[1,T]} g(s) \sup_{s\in[1,T]} |x(s)| \right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Encore une fois d'après l'hypothèse (H_3),il vient

$$\left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \frac{ds}{s} + \frac{g^*\xi}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1} \frac{ds}{s},$$

Ou bien

$$\left| D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \leq \frac{N(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)} + \frac{g^*\xi(\log T)^{\alpha-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)},$$

Finalement

$$\left\| D^{\delta_i}\mathcal{H}x \right\|_\infty \leq NM_3 + M_4,$$

Où

$$M_3 = \frac{(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)} \quad \text{et} \quad M_4 = \frac{g^*\xi(\log T)^{\alpha-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)} \ .$$

On conclure

$$\| \mathcal{H}x \|_X \| \mathcal{H}x \|_\infty + \| D^{\delta_i}\mathcal{H}x \|_\infty \leq \xi',$$

Tel que

$$\begin{aligned}
\xi' &= NM_3 + M_4, + NM_1 + M_2, \\
&= N(M_1 + M_3) + M_2 + M_3.
\end{aligned}$$

Concernant l'équin-continues. Soient $t_1, t_2 \in [1,T]$ tel que $t_1 < t_2$, alors

$$
\begin{aligned}
\mid \mathcal{H}x(t_2) - \mathcal{H}x(t_1) \mid =\mid & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} (\log \frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} (\log \frac{t_1}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{T} (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^{T} (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \mid .
\end{aligned}
$$

L'hypothèse (H_3) donne

$$
\begin{aligned}
\mid \mathcal{H}x(t_2) - \mathcal{H}x(t_1) \mid \leqslant & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)} \mid \int_1^{t_1} [(\log \frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} - (\log \frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}] \frac{ds}{s} \mid \\
&+ \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)} \mid \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \mid \\
&+ \frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_1^{t_1} [(\log \frac{t_1}{s})^{\alpha-1} - (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1}] \frac{ds}{s} \mid + \frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \mid \\
&+ \frac{N}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \mid \int_1^{T} (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \mid \\
&+ \frac{\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)} \mid \int_1^{T} (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \mid .
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
& \mid \mathcal{H}x(t_2) - \mathcal{H}x(t_1) \mid \\
\leq \; & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)} \mid \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} + \frac{N}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \\
& + \frac{\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \\
\leq \; & \frac{3N}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{T} (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{3\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&|\quad \mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)\ | \\
\leq\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}[(\log t_1)^{\alpha+\beta}-(\log t_2)^{^{\alpha+\beta}}+(\log t_2-\log t_1)^{\alpha+\beta}+\frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{N}{2\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\ +\frac{\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Quand $t_1\longrightarrow t_2$, il vient

$$\|\ \mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)\ \|_\infty\longrightarrow 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&|\quad D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\ | \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}. \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha-\delta_i-1}g(s)x(s)\frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \\
\leq\ & \sup_{t\in[1,T]}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\
&\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1}g(s)x_n(s)\frac{ds}{s}\right|,
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1}\sup_{t\in[1,T]}\ |\ f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))\frac{ds}{s} \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)}\int_1^T(\log\frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1}(\sup_{t\in[1,T]}g(s)\sup_{t\in[1,T]}\ |\ x(s)\ |)\frac{ds}{s}\right|,
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \\
\leq\ & \left|\int_1^{t_2}\frac{f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)}{S}ds\right. \\
&\left.-\int_1^{t_1}\frac{f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))}{S}ds\right|,
\end{aligned}$$

Ou bien

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \\
\leq \ & \left|\int_1^{t_1} \frac{f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)}{S} ds \right. \\
& -\int_1^{t_1} \frac{f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s))}{S} ds \\
& \left. +\int_1^{t_2} \frac{f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)}{S} ds\right|.
\end{aligned}
$$

On trouve

$$\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \leq \mid \int_{t_1}^{t_2} \frac{N}{S} ds \mid$$

C'est-à-dire

$$\left|D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \leq \mid N(\log t_2 - \log t_1) \mid$$

Aussi. Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, on a

$$\parallel D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1) \parallel_\infty \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, quand $t_1 \longrightarrow t_2$

$$\parallel \mathcal{H}x(t_2) - \mathcal{H}x(t_1) \parallel_\infty + \parallel D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\delta_i}\mathcal{H}x(t_1) \parallel_\infty \longrightarrow 0,$$

Or

$$\parallel \mathcal{H}x(t_2) - \mathcal{H}x(t_1) \parallel_X \longrightarrow 0,$$

D'où le résultat. Maintenant, soit l'ensemble suivant :

$$\Omega := \{x \in X; \quad x = \theta\mathcal{H}x, \quad 0 < \theta < 1\}.$$

Pour $x \in \Delta$, on a Alors

$$x \ = \theta\mathcal{H}x \ , \qquad 0 < \theta < 1,$$

Aussi, pour tout $t \in [1,T]$, nous avons

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad = \quad & \theta[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s} \\
& \frac{1}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s),D^{\delta_1}x(s),D^{\delta_2}x(s),...,D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log\frac{T}{s})^{\alpha-1} g(s)x(s)\frac{ds}{s}].
\end{aligned}
$$

L'hypothèse (H_3), donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \quad | \quad x(t) \mid \\
&\leq \quad \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{\xi g^*}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} + \frac{N}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \\
&\quad + \frac{\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \\
&\leq \quad \frac{3N}{2\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{3\xi g^*}{2\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{\theta} \mid x(t) \mid \leq \frac{3N(\log T)^{\alpha+\beta}}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)} + \frac{3\xi g^*(\log T)^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)},$$

Or

$$\mid x(t) \mid \leq \theta(NM_1 + M_2),$$

Tel que

$$M_1 = \frac{3(\log T)^{\alpha+\beta}}{2\Gamma(1+\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{3\xi g^*(\log T)^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$

En plus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \left| D^{\delta_i} x(t) \right| \\
&\leq \sup_{t\in[1,T]} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \frac{ds}{s} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-\delta_i-1} g(s)x(s) \frac{ds}{s} \right|,
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \left| D^{\delta_i} x(t) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \sup_{s\in[1,T]} \left| f(s, x(s), D^{\delta_1}x(s), D^{\delta_2}x(s), ..., D^{\delta_n}x(s)) \right| \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1} \left(\sup_{s\in[1,T]} g(s) \sup_{s\in[1,T]} |x(s)| \right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{1}{\theta} \left| D^{\delta_i} x(t) \right| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta_i)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha+\beta-\delta_i-1} \frac{ds}{s} + \frac{g^*\xi}{\Gamma(\alpha-\delta_i)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-\delta_i-1} \frac{ds}{s},$$

Ou bien

$$\frac{1}{\theta} \left| D^{\delta_i} x(t) \right| \leq \frac{N(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)} + \frac{g^*\xi(\log T)^{\alpha-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)},$$

Par conséquent

$$\left| D^{\delta_i} x(t) \right| \leq \theta(NM_3 + M_4),$$

Où
$$M_3 = \frac{(\log T)^{\alpha+\beta-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta_i)} \quad \text{et} \quad M_4 = \frac{g^*\xi(\log T)^{\alpha-\delta_i}}{\Gamma(1+\alpha-\delta_i)} \ .$$
Enfin
$$\| x \|_\infty + \| D^{\delta_i} x \|_\infty \leq \theta[N(M_1+M_3)+M_2+M_4],$$
C'est-à-dire
$$\| x \|_X \leq \theta[N(M_1+M_3)+M_2+M_4],$$
On conclure
$$\| x \|_X \leq \infty.$$
D'après le théorème des points fixes de Schaefer, on déduit que $\mathcal{H}$ admet un point fixe. ■

Chapitre 3

Exemple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{3/4}(D^{1/2}+g(t))x(t)) \\ = \frac{1}{t^2+5}\left(\frac{x^2(t)}{4(1+|x(t)|+\left|D^{1/3}x(t)\right|+\left|D^{1/4}x(t)\right|+\left|D^{1/5}x(t)\right|+...+\left|D^{1/n}x(t)\right|)}+\frac{3}{8}\right), \qquad 1<t<e, \\ x(1)=-x(e), \qquad D^{1/2}x(1)=-D^{1/2}x(e). \end{cases}$$

Ici

$$\alpha=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta=\frac{3}{4},$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & f(t,x(t),D^{\delta_1}x(t),D^{\delta_2}x(t),...,D^{\delta_n}x(t) \\ = \; & \frac{1}{t^2+5}\left(\frac{x^2(t)}{4(1+|x(t)|+|D^{1/3}x(t)|+|D^{1/4}x(t)|+|D^{1/5}x(t)|+...+|D^{1/n}x(t)|)}+\frac{3}{8}\right), \end{aligned}$$

où $\delta_i = 1,...,n$ tel que $n \geq 3$ et $T=e$, on a aussi

$$g(t)=\frac{3}{4}\left(\frac{t^2+|t|}{|t|+1}\right)\cos^2 \pi t+\frac{1}{2}.$$

Conclusion

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse aux d'équations différentielles fractionnaires. Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats élémentaires qui sont utiles pour notre étude. Ensuite, dans le deuxième chapitre on utilise le type Hadamard de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire avec conditions aux limites de Langevin, l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence et l'unicité de la solution.

Bibliographie

[1] B. Ahmad and A. Alsaedi, K. Ntouyas, W. Shammakh, P. Agarwal : Existence theory for fractional differential equations with non-separated type nonlocal multi-point and multi-strip boundary, Adv. Diff. Equations, (2018). 14

[2] B. Ahmad and S.K Ntouyas :On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14

[3] B. Ahmad and S.K. Ntouyas :Initial Value Problem for Hybrid Hadamard fractional integro-differential equations , EJDE, PIER 47, pp 110-120, (2015). 14

[4] B. Ahmad and J. Nieto :Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions , Comput. Math. Appl,PIER 58, pp 1838-1843, (2009). 14

[5] A. Alsaedi, S. K. Ntouyas,A. Bashir and A. Hobiny : Nonlinear Hadamard fractional differential equations with Hadamard type nonlocal non-conserved conditions, Adv.Diffe. Equat, (2015). 14.

[6] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. World Scientific,PIER 33, Boston (2012). 14

[7] M. Benchohra, S. Hamani, S.K Ntouyas : Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear. Anal. tma, PIER 71, pp 2391–2396, (2009). 14

[8] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8

[9] P.L. Butzer A.A. Kilbas, J.J Trujillo : Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, Math. Anal. Appl, PIER 269, pp 387–400, (2002). 14

[10] G. Christopher : Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions, Comput. Math. Appl, PIER 61, pp 191–202,(2011). 14

[11] Z. Dahmani and L. Tabharit : Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative, Comput. Math. Appl, PIER 4, pp 40–55, (2014).

[12] F. Dugundji and A. Granas : Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003). 12, 13

[13] J. Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor , Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[14] S. Hamani, M. Benchohra and John R. Graef, Existence results for boundary-value problems with nonlinear fractional differential inclusions and integral conditions,Electron. J. Diff . Equ., Vol. 10(2010), 20, p. 1-16.

[15] N. Heymans and I. Podlubny, Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, Rheolog- ica Acta, 45(2006), no. 5, 765-772.

[16] M. Houas and Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions. Lobachevskii Journal of Math- ematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[17] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[18] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993). 3, 8, 10, 11

[19] A.A. Kilbas, H.M Srivastava, J.J Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V, PIER 204, (2006). 11

[20] C. KIATARAMKUL, SK. NTOUYAS, J. TARIBOON AND A. KIJJATHANAKORN : Generalized Sturm-Liouville and Langevin equations via Hadamard fractional derivatives with anti-periodic boundary conditions. BOUNDARY VALUE PROBLEMS. DOI 10.1186/S13661-016-0725-1

[21] M. Matar, Boundary value problem for some fractional integrodifferential equations with nonlocal conditions, International J. Nonlinear Sciences 11 (2011), 3-9.

[22] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,John Wiley, New York, 1993.

[23] S. M. Momani, S. B. Hadid and Z. M. Alawenh, Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order, Int. J. Math. Math. Sci. 2004(2004), 697{701

[24] H. Monch, Boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Anal. 75, No. 5 (1980), 985-999

[25] U. Mosco and J. l. Joly, A propos de l'existence et de la régularité des solutions de certaines inéquations quasi-variationnelles, J. Funct. Anal. 34, 107-137 (1979).

[26] T. MUENSAWAT, SK. NTOUYAS AND J. TRIBOON : Systems of Generalized Sturm-Liouville and Langevin Fractional differential Equations. Adv. Differ. Equ. 2017, 63.

[27] M. HOUAS et Z. DAHMANI : New resultats for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives. Kragujevac Journal of Mathematics. Pages 283-301.

[28] D. O'Regan and R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. AnaL. Appl. 245 (2000), 594-612.

[29] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[30] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fract. Calculus Appl. Anal. 5 (2002), 367-386.

[31] I. Podlubny, I. Petra s, B. M. Vinagre, P. O'Leary and L. Dorcak, Analogue realizations of fractional-order controllers. Fractional order calculus and its applications,Nonlinear Dynam. 29 (2002), 281-296.

[32] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[33] M. Sowmya and A.S. Vatsala, Generalized Iterative Methods for Caputo Fractional Differential Equations via Coupled Lower and Upper Solutions with Superlinear Convergence, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 15 (2) (2015) 198208.

[34] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems, Rendiconti del Seminaro Mathematico Della Universita di Padova 75 (1986), 1-14.

[35] P. Thiramanus, S. K. Ntouyas and J. Tariboon, Existence and uniqueness results for Hadamard- type fractional differential equations with nonlocal fractional integral boundary conditions, Abstr. Appl. Anal. (2014), Art. ID 902054, 9 pp.

[36] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional différential equations,'Electron. J. Diff . Equ. (2006), No. 36, pp, 1-12.

[37] A. Oualid, Z. Dahmani : Differential Equation Via Hadamard Approach , Some Existence Uniqueness Results, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 5, 16, 21

[38] R. P. Agarwal,M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, Acta. Appl. Math.109 (2010), 973-1033.

[39] S. Agarwal, D. Bahuguna, Existence and uniqueness of strong solutions to nonlinear nonlocal functional differential equations, EJDE, Vol 2004 N°. 52 2004, pp. 1-9.

[40] B. Ahmad and S.K Ntouyas :On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14.