MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

**Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique**

**Département de Mathématiques et Informatique**

**Filière : Mathématiques**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par :

**KERROUM Lamia**

THEME :

# Systèmes d'Ordre Fractionnaire dans le Domaine de l'Astrophysique

Soutenu Juin 2021

Devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| TABHARIT Louiza | M.C.B | Université de Mostaganem | Présidente |
| FETTOUCH Houari | M.C.B | Université de Mostaganem | Examinateur |
| TAÏEB Amele | M.C.A | Université de Mostaganem | Encadrante |
| DIALA Horiya | M.A.A | Université de Mostaganem | Co-Encadrante |

Année Universitaire : 2020-2021

# Systèmes d'Ordre Fractionnaire dans le Domaine de l'Astrophysique

## Résumé

Les équations différentielles fractionnaires jouent un rôle important dans la résolution de problèmes concrets, en particulier ceux relatifs à l'astrophysique et la physique. Les différents modèles de Lane-Emden sont importants en mathématiques appliquées, en physique mathématique et en astrophysique.

Dans ce manuscrit :

1- On a étudié une classe d'équations fractionnaires non linéaires de Lane-Emden .On a donc présenté une étude sur l'existence et l'unicité de la solution du système considéré. La démonstration du résultat obtenu est basée sur le Théorème du point fixe de Banach. Pour illustrer le résultat obtenu, on a présenté une application.

2- On a présenté d'autre résultat qui porte sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré. Une application démonstrative a été présentée pour illustrer le résultat.

Mots-clés: Dérivée au sens de Caputo, point fixe, équation de Lane-Emden, existence et unicité, existence d'une solution au moins.

# Fractional Order Systems in the Field of Astrophysics


**Abstract**

The arbitrary order of the derivatives provides an additional degree of freedom to fit a specific behavior. It provides several potentially useful tools for solving differential and integral equations and various other problems. The different Lane-Emden models are important in applied mathematics, mathematical physics and astrophysics.

In this paper:

1- We consider a fractional Lane-Emden system with nonlinear. Using Banach fixed point theorem, we obtain the existence and uniqueness of solution. An example is provided to illustrate the application of the result.

2- We also study the existence of at least one solution, using Shauder fixed point theorem. An application is presented to illustrate the result.



Key words and phrases. Caputo derivative, fixed point, existence and uniqueness, existence of at least one solution.


# حول المعادلات التفاضلية برتب كسرية في مجال الفيزياء الفلكية


شهدت العقود القليلة الماضية تطورا في الأنشطة البحثية حول تطبيق المعادلات التفاضلية الجزئية في مجالات علمية متنوعة.

تم استخدام معادلة لناإمدن لوصف تطور الظواهر في مجال الفيزياء الفلكية.

في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة نظرية لنموذج من الأنظمة ذات معادلات تفاضلية كسرية من نوع لنإمدن. توصلت الدراسة إلى نتيجة حول وجدانية ووحدانية الحلول لهذه الأنظمة مدعمة بتطبيق.

كما قمنا بدراسة وجود حل واحد على الأقل لهذا النظام.



الكلمات المفتاحية، المعادلة التفاضلية الكسرية، وجود الحل، وجود حل واحد على الأقل.

# Dédicaces

Je dédie ce travail
A ceux m'ont donné le sens de la vie
Mes trés chèrs parents, source de vie, d'amour et d'affectation.
A mes chèrs frères (Mohamed Réda et Ahmed) et ma chère soeur (Rania El Houaria),
source de joie et de bonheur.
A Toute ma famille, source d'espoir et de motivation.
A mon meilleure amie AMEL et tous mes camarades de la promotion 2021.
A vous chers lecteurs.

# Remerciements

On remercie **Dieu** le tout puissant de nous avoir donnée la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont coopéré à l'élaboration de ce travail et particulièrement :

Mon encadrante Madame **T**AÏEB Amele, Maître de Conférence à l'Université de mostaganem, qui m'a guidé à concrétiser ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été trés précieux.

Je tiens à remercier Madame **DIALA Horiya** , Maître d'Assistant à l'Université de mostaganem, de m'avoir donné des conseils et de m'encourager à terminer le travail.

A tous les enseignants de la faculté des sciences exactes et de l'informatique surtout les enseignants de département de mathématiques .

Mes remerciements vont également à Monsieur **FETTOUCH Houari**, Maître de Conférence à l'Université de mostaganem, d'avoir accepté de juger ce travail.

J'adresse aussi mes remerciements à Madame **TABHARIT Louiza**, Maître de Conférence à l'Université de mostaganem, de l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je n'oublie pas de remercier tous mes camarades de la promotion 2020-2021.

Enfin, je remercie mes parents pour m'avoir facilité la vie et donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

# Table des matières

# Index des notations

$\mathbb{N}$ : Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ : Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$ : Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+$ : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$ : Ensemble des nombres réels positifs et non nuls.
$[a,b]$ : Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$.
$(a,b]$ : Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$.
$(a,b)$ : Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$.
$\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ : Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\|.\|_\infty$ : Norme infinie.
$\|.\|_\mathrm{X}$ : Norme de l'espace X.
$\Gamma(.)$ : Fonction Gamma d'Euler.
$\mathrm{B}(.,.)$ : Fonction Béta d'Euleur.
$\mathrm{D}^m$(ou $\frac{d^m}{dt}$) : Dérivée d'ordre m.
$f^{(m)}$ : Dérivée m-ième de $f$.
$\mathrm{I}_a^\alpha$ : Intégrale fractionnaire de Riemann-Lioville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^\alpha$ : Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Lioville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^\alpha$ : Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

# Introduction

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire (fractionnaire) réel ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent, conserve de nombreuses propriétés de base. Voir [2]
Il y a un grand nombre de mathématiciens qui ont contribué au développement du calcul fractionnaire, dont on peut citer : J.Liouville (1832-1837), B.Riemann (1847), H.Laurent (1884), M.Caputo (1967), Hadamard (1892) et M.Riesz (1949).

Les équations différentielles fractionnaires jouent un rôle important dans la résolution de problèmes concrets, en particulier ceux relatifs à la mécanique, l'astrophysique et l'économie.

La théorie des dérivées de l'ordre non-entier ne soit pas nouveau, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ sciècle, le moument où Newton et Leibniz ont développé les fondements du différentiel calcule intégral. Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction $f$. Quand il a signalé cela dans une lettre a l'Hôpital, qui posa la question si $n=\frac{1}{2}$? Leibniz réponds qu'il s'agit là d'un pardoxe, mais qu'un jour. Voir [1]
Les avantages des dérivés fractionnaires deviennent apparents dans la modélisation des propriétés mécaniques et éléctriques des matériaux réels et dans de nombreux autres domaines. Voir [1]

D'autre part, l'astrophysique (du grec astêr : étoile, astre et physis : science de la nature, physique) est une branche interdisciplinaire de l'astronomie qui concerne principalement la physique et l'étude des propriétés des objets de l'Univers (étoiles, planètes, galaxies, milieu interstellaire...), comme leur luminosité, leur densité, leur température et leur composition chimique. Voir [9]

Au XXI$^e$ siècle, les astronomes ont une formation en astrophysique et leurs observations sont généralement étudiées dans un contexte astrophysique, de sorte qu'il y a moins de distinction entre ces deux disciplines qu'auparavant. Voir [9]

Ce mémoire se base sur trois chapitres de la manière suivante :

**Chapitre 01 : Préliminaires**

Ce chapitre fournit quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans la théorie du calcul fractionnaire et quelques théorèmes des points fixe.

**Chapitre 02 : Existence et Unicité**

Dans ce chapitre, on traiter une classe de systèmes fractionnaires de type Lane-Emden, utilisée en astrophysique. D'abord, on va chercher la solution intégrale de système proposé, pour établir ensuite un résultat de l'existence et l'unicité de la solution. Enfin, on donne une application pour illustrer ce résultat.

**Chapitre 03 : Existence d'au moins une solution**

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence d'une solution au moins. Pour illustrer le résultat obtenu, on donne une application.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques notions et des rappels de la théorie du calcul fractionnaire et les théorèmes des points fixes. Voir [8, 22]

## 1 Définitions et notions de base

Dans cette partie, on va s'intéresser à quelques fonctions utiles trés utilisées en calcul fractionnaire.

### 1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ est une fonction spéciale, considérée également comme l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire, elle prolonge le factoriel aux valeurs non entières. En effet, la fonction Gamma est la généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle définie pour les nombres entiers positifs .

Elle définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$, pour $0 < x \leq 1$, $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante.

**Proposition 1.1** *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*

1. $\forall x > 0$, *on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.3}$$

**Preuve.**

1. On peut démontrer par intégration par partie

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= \left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned} \tag{1.4}$$

La relation de récurrence (2.2) permet de définir $x \longmapsto \Gamma(x)$ pour les valeurs négatives de $x$, tel que $-1 < x < 0$, aura $0 < x+1 < 1$. Alors, $\Gamma(x+1)$ est bien définie par la formule (2.1), mais pas $\Gamma(x)$. On peut définir $\Gamma(x)$ par la relation

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{1.5}$$

Dans le cas, $-(n+1) < x < -n, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1).....(x+n)}. \tag{1.6}$$

■

## 1.2 Fonction Béta

**Définition 1.1** *On appelle fonction Béta d'Euler la fonction donnée par :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, x>0, y>0. \tag{1.7}$$

**Proposition 1.2**

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x). \tag{1.8}$$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.9}$$

Maintenant, on présente l'unique définition de l'intégrale d'ordre arbitraire (fractionnaire) au sens de Riemann-Liouville, cette approche sera basée sur la fonction Gamma d'Euler.

## 1.3 Définition de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f \in C((a,b];\mathbb{R})$, on appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ au sens de Riemann-Liouville de $f$ la fonction suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \alpha > 0, \tag{1.10}$$

où $x \geq 0$, et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

**Proposition 1.3** *Soient* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f \in C([a,b];\mathbb{R})$*, on a :*

1.

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.11}$$

2.

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \tag{1.12}$$

**Preuve.** Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, on a :

Pour démontre (2.11) en utilisant la fonction Béta. En effet,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,d\tau\right)dt, \end{aligned}$$

comme $a \leq t \leq x$, $a \leq \tau \leq t$,

donc on prend $a \leq \tau \leq t, \tau \leq t \leq x$,

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\left(\int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dt\right)d\tau. \tag{1.13}$$

Si on prend

$$u = \frac{t-\tau}{x-\tau}. \tag{1.14}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dt &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du \\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

En remplaçant (2.15) dans (2.13), on aura :

$$\mathrm{I}_a^\alpha(\mathrm{I}_a^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma\big(\alpha+\beta\big)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\,d\tau = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.16}$$

D'où le résultat.
Pour démontrer (2.12), en utilisant la propriété précédente (2.11). Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_a^\alpha \mathrm{I}_a^\beta f(x) &= \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= \mathrm{I}_a^{\beta+\alpha} f(x) \\ &= \mathrm{I}_a^\alpha \mathrm{I}_a^\beta f(x). \end{aligned} \tag{1.17}$$

■

**Lemme 1.1** *Soient* $f \in \mathrm{C}([a,b];\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$. *Alors,*

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \mathrm{I}_a^\alpha f(x) = 0. \tag{1.18}$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{I}_a^\alpha f(x)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left|f(t)\right| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha. \end{aligned} \tag{1.19}$$

■

Comme le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque $t$ tend vers $a$. On déduire que :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \mathrm{I}_a^\alpha f(x) = 0.$$

Soit la fonction suivante :

$$f(t) = (t-a)^\beta, t \geq a, \beta \in \mathbb{N}^*. \tag{1.20}$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville s'écrit comme suit :

$$\mathrm{I}_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{1.21}$$

On pose :

$$v = \frac{t-a}{x-a}. \tag{1.22}$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(x-a)^\beta v^\beta (x-a)\,dv \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}v^\beta\,dv \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(\alpha,\beta+1).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

En utilise l'expression donnée par (2.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\big(\beta+1\big)}{\Gamma\big(\alpha+\beta+1\big)}\right) \\
&= \frac{\Gamma\big(\beta+1\big)}{\Gamma\big(\alpha+\beta+1\big)}(x-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pour $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{3}{2}$,la relation (3.1) devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^2(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}+1\big)}{\Gamma\big(2+\frac{3}{2}+1\big)}(x-a)^{2+\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\frac{7}{2}\Gamma\big(\frac{7}{2}\big)}(x-a)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\big(\frac{5}{2}\big)}(x-a)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}(x-a)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}(x-a)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{4}{35}(x-a)^{\frac{7}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

## 1.4 Dérivation Fractionnaire

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, et quelques propriétés de ces notions.

## 1.5 Dérivée au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.2** *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, m \in \mathbb{N}^*, m-1<\alpha<m, a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, *on appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha$ *de* $f$ *la quantité :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) &= D^m I_a^{m-\alpha} f(x) \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right), m-1<\alpha<m. \end{aligned} \tag{1.26}$$

On rappeler l'expression de dérivation classique :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{\gamma} &= \gamma(\gamma-1)......(\gamma-m+1)(t-a)^{\gamma-m} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-m)}(t-a)^{\gamma-m}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

**Exemple 1.1** *On prend la fonction suivante :*

$$f(x) = x^{\beta}, x \geq 0, \beta > 0. \tag{1.28}$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{\alpha} x^{\beta} &= D^m I_0^{m-\alpha} x^{\beta} \\ &= D^m\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} x^{\beta+m-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{1.29}$$

En utilisant la relation de dérivation classique (3.4), on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{\alpha} x^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1-m)} x^{\beta+m-\alpha-m}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

On pose $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 2$. Alors,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{3}{2}+1)} x^{2-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\sqrt{x} \\ &= \frac{2\Gamma(2)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{x} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

**Remarque 1.1** *La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle.*

En effet, dans la formule (3.7) pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{\alpha} x^0 &= {}^{RL}D_0^{\alpha}(1) \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0, x > 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

**Proposition 1.4** *Soient $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ possède les propriétés suivantes :*

1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, {}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) + \lambda_2({}^{RL}D_a^{\alpha} g)(x)$,
2. $\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x)$,
3. Si $\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(x) = 0$, alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1-m)} (x-a)^{i+\alpha-m},$$

où $(C_i)_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

**Preuve.** Soient $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*$.

1. Elle est évidente.
2. En utilisant la propriété classique

$$D^m(I_a^m f)(x) = f(x), \tag{1.33}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) &= D^m(I_a^{m-\alpha})\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) \\ &= D^m(I_a^{m-\alpha+\alpha} f)(x) \\ &= D^m(I_a^m f)(x) \\ &= f(x). \end{aligned} \tag{1.34}$$

3. Comme $({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = 0$, alors par définition, on a :

$$({}^{RL}D_a^{\alpha}) f(x) = D^m(I_a^{m-\alpha} f)(x) = 0. \tag{1.35}$$

Alors la dérivée d'ordre $m$ de $(I_a^{m-\alpha} f)$ est nulle. Donc,

$$(I_a^{m-\alpha} f)(x) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i (x-a)^i, (C_i)_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Par application $\mathrm{I}_a^\alpha$ à (1.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^\alpha(\mathrm{I}_a^{m-\alpha}f)(x) &= (\mathrm{I}_a^{m+\alpha-\alpha}f)(x) \\
&= (\mathrm{I}_a^m f)(x) \\
&= \mathrm{I}_a^\alpha\left(\sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i(x-a)^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\mathrm{I}_a^\alpha(x-a)^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha)}\right)(x-a)^{i+\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Puis, on applique $\mathrm{D}^m$ à (1.37), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^m(\mathrm{I}_a^m f)(x) &= \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha)}\right)\mathrm{D}^m(x-a)^{i+\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha)}\right)\left(\frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha+1-m)}(x-a)^{i+\alpha-m}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1-m)}(x-a)^{i+\alpha-m}\right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

D'où,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{C}_i\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1-m)}(x-a)^{i+\alpha-m}\right). \tag{1.39}$$

■

## 1.6 Dérivée au sens de Caputo

L'approche des dérivées au sens de Riemann-Liouville. On l'avait définit comme étant une intégrale fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivie d'une dérivation classique d'ordre $m$ . Tandis que la dérivée au sens de Caputo est l'inverse de ces deux opérations.

**Définition 1.3** *Soient $m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*, a\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathrm{C}^m([a,+\infty[)$, La dérivée d'ordre $\alpha$ au sens de Caputo de $f$ est donnée par :*

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^\alpha f(x) = \mathrm{I}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1}\frac{d^m}{ds^m}f(\tau)d\tau,\ m-1<\alpha<m. \tag{1.40}$$

**Exemple 1.2** *On prend la fonction $f(x) = x^{\beta}$ avec $\beta = \frac{7}{2}$, et on calcule ${}^{C}D_0^{\frac{3}{2}} f(x)$. Alors,*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{7}{2}}) &= \left(I_0^{2-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}x^{\frac{7}{2}}\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}x^{\frac{7}{2}}\right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

D'aprés la relation (3.4), on aura :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{7}{2}}) &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1-2\right)}x^{\frac{7}{2}-2}\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{35}{2}\left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{35}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{35}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)}x^2 \\ &= \frac{105\sqrt{\pi}}{4}x^2. \end{aligned} \tag{1.42}$$

La dérivée au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.
En effet, dans la formule (1.41) pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}}(x^0) &= \left(I_0^{2-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}(1)\right) \\ &= \left(I_0^{\frac{1}{2}}\right)(0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.43}$$

## 1.7 La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Pour $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$ et $f\in C^m([a,+\infty[)$, la relation entre Riemann-Liouville et Caputo est :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(x) \;=\; \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(x)+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}f^{(i)}(a). \tag{1.44}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(x) \;=\; \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f(x)-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{i}}{\Gamma(i+1)}f^{(i)}(a)\right). \tag{1.45}$$

A partir de (1.44) et (1.45), si $a$ est un point zéro d'ordre $m$ de $f$ alors, on déduit que la dérivée au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo.

Donc, on a :

$$\left(f^{(i)}(a)=0,\; i=0,1,\dots,m-1\right) \;\Longrightarrow\; \left(\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(x)=\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(x)\right). \tag{1.46}$$

**Preuve.** On sait que :

$$f(x) \;=\; \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{i}}{\Gamma(i+1)}f^{(i)}(a)+I_a^mD^mf(x). \tag{1.47}$$

Par application de $I_a^{m-\alpha}$, on trouve :

$$\begin{aligned}I_a^{m-\alpha}f(x) &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1)}\left(I_a^{m-\alpha}(x-a)^i\right)+I_a^{m-\alpha}I_a^mD^mf(x)\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1+m-\alpha)}(x-a)^{i+m-\alpha}+I_a^{2m-\alpha}D^mf(x).\end{aligned} \tag{1.48}$$

Puis, on applique $D^m$ à la formule obtenue, on obtient :

$$\begin{aligned}D^mI_a^{m-\alpha}f(x) &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1+m-\alpha)}D^m(x-a)^{i+m-\alpha}+D^mI_a^{2m-\alpha}D^mf(x)\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(i+m-\alpha+1)}{\Gamma(i+m-\alpha+1-m)}(x-a)^{i+m-\alpha-m}+D^mI^mI_a^{m-\alpha}D^mf(x)\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(x-a)^{i-\alpha}+I_a^{m-\alpha}D^mf(x).\end{aligned} \tag{1.49}$$

En utilisant le fait que :

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right) f(x) = \mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^{m-\alpha} f(x), \;\; \left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right) f(x) = \mathrm{I}_a^{m-\alpha} \mathrm{D}^m f(x),$$

on trouve :

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right) f(x) \;\; = \;\; \left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right) f(x) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)} (x-a)^{i-\alpha}. \tag{1.50}$$

■

**Proposition 1.5** *Soient $m-1<\alpha<m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathrm{C}^m([a,b])$, avec ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}$ l'opérateur de dérivation de Caputo :*

1. $({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha})$ est un opérateur linéaire.
2. $({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha})(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)(x) = f(x)$.
3. Si $({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f)(x) = 0$, alors $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i (x-a)^i$, $(c_i)_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.
4. $\mathrm{I}_a^{\alpha}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f)(x) = f(x) + \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i (x-a)^i$, $(c_i)_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

**Preuve.** Soient $m-1<\alpha<m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathrm{C}^m([a,b])$ :

1. La linéarité est évidente.
2. D'aprés la relation (1.45) on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha})(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)(x) &= \left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} \left(\left(\frac{d^i}{dt^i}(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)\right)(a)\right)\right) \\
&= f(x) - \left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-\alpha)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1)}\right)\left(\left(\frac{d^i}{dt^i}(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)\right)(a)\right) \\
&= f(x) - \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)}\right)\left(\left(\frac{d^i}{dt^i}(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)\right)(a)\right).
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Et comme $i \le m-1 < \alpha$, pour $i = 0, \ldots, m-1$, alors, les dérivées $\left(\frac{d^i}{dt^i}(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)\right)(a) = 0$.

On obtient :$({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha})(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)(x) = f(x)$.

3. Par définition, on a :

$$({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f)(x) \;\; = \;\; 0 \Longrightarrow \mathrm{I}_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = 0. \tag{1.52}$$

On applique $({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{m-\alpha})$, on obtient :

$$({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{m-\alpha})\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x) \;\; = \;\; 0. \tag{1.53}$$

D'aprés la propriété précédente (b), on obtient :

$$({}^{C}D_a^{m-\alpha})(I_a^{m-\alpha})f^{(m)}(x) \quad = \quad f^{(m)}(x) = 0, \tag{1.54}$$

donc,

$$f(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{m-1} c_i (x-a)^i, \tag{1.55}$$

où $(c_i)_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

■

# 2 Quelques théorèmes du Points Fixes

Les théorèmes du points fixes sont les outils mathématiques de base dans la résolution des équations différentielles. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, aussi nous assurent l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

## 2.1 Principe de Contraction de Banach

**Théorème 1.1** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique complet et soit* $f : E \to E$ *une contraction. Alors,* $f$ *admet un point fixe unique.*

**Définition 1.4** *Soient* $B_1$ *et* $B_2$ *deux espaces de Banach. L'opérateur continue* $T : B_1 \to B_2$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* $B_1$ *en une partie relativement compact dans* $B_2$.

## 2.2 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le Théorème du point fixe de Schaefer.

**Théorème 1.2** *Soient* $B$ *un espace de Banach et* $T : B \to B$ *un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega \quad : \quad = \{u \in B : u = \mu T u,\ \mu \in ]0,1[\}, \tag{1.56}$$

*est borné, alors* $T$ *possède au moins un point fixe.*

## 2.3 Théorème du pont fixe de Schauder

Notre troisième résultat du point fixe est le Théorème du point fixe de Schauder.

**Théorème 1.3** *Soient* $B$ *un espace de Banach,* $U$ *un fermé, borné, convexe et non vide de* $B$ *et* $T : U \to U$ *une application telle que l'ensemble* $\{Tu : u \in U\}$ *est relativement compact dans* $B$. *Alors,* $T$ *possède au moins un point fixe dans* $U$.

## 2.4 Théorème de Arzela-Ascoli

**Théorème 1.4** *Soit* $F \subseteq C([a,b])$, *supposons que l'ensemble* $F$ *est équipé de norme* $\|.\|_\infty$. *Alors,* $F$ *est relativement compact dans* $C([a,b])$ *si* $F$ *est equicontinu (c'est-à-dire pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $f \in F$ *et pour tous* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *avec* $|x_1 - x_2| < \delta$ *on a* : $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \epsilon$) *et uniformément borné* (*c'est-à-dire il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\left\|f\right\|_\infty \leq C$,*pour tout* $f \in F$).

# Chapitre 2

# Existence et Unicité

## 1 Représentation intégrale

Des travaux considérables on traité l'existence et l'unicité de la solution des EDFs, voir [3, 4, 5, 10, 11, 12, 14, 18]. Dans ce chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du système de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{D}^{\beta_1}\left(\mathrm{D}^{\alpha_1}+b_1 g_1(t)\right) x_1(t)+f_1^1\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right) \\ =\lambda_1 f_1^2\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right), \\ \\ \mathrm{D}^{\beta_2}\left(\mathrm{D}^{\alpha_2}+b_2 g_2(t)\right) x_2(t)+f_2^1\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right) \\ =\lambda_2 f_2^2\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right), \\ \\ x_k(0)=a_k^0,\ x_k(1)=a_k^1,\ t \in \mathrm{J}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où on considère $\mathrm{J}=[0,1]$, $0<\alpha_k, \beta_k<1$, $0<\delta_k<\alpha_k<1$, $b_k \geq 0$, $0 \leq \lambda_k<\infty$, $k=1,2$. Les fonctions $f_k^j:[0,1] \times \mathbb{R}^4$, $j, k=1,2$, sont continues, $g_k:(0,1] \rightarrow[0,+\infty)$ sont des fonctions continues, singulières à $t=0$, et $\lim\limits_{t \rightarrow 0^{+}} g_k(t)=\infty$. Les opérateurs $\mathrm{D}^{\beta_k}$, $\mathrm{D}^{\alpha_k}$ et $\mathrm{D}^{\delta_k}$, $k=1,2$, sont les dérivés au sens de Caputo, définis par :

$$\mathrm{D}^\gamma x(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t(t-s)^{m-\gamma-1} x^{(m)}(s) d s=\mathrm{J}^{m-\gamma} x^{(m)}(t), \tag{2.2}$$

avec $m-1<\gamma<m$, $m \in \mathbb{N}-\{0\}$. On rappelle que l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathrm{J}^\alpha$ d'ordre $\alpha \geq 0$ pour une fonction continue $f$ sur $[0,+\infty)$ est défini par :

$$\mathrm{J}^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t(t-s)^{\alpha-1} f(s) d s,\ \alpha>0,\ t \geq 0, \tag{2.3}$$

où $\Gamma(\alpha):=\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} d x$.

En outre, on énuméré quelques propriétés bien connues de la théorie du calcul fractionnaire qui peut être trouvé dans [9, 11].

$(i)$ : Pour $\alpha, \beta>0$; $n-1<\alpha<n$, on a $\mathrm{D}^\alpha t^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}$, $\beta>n$, et $\mathrm{D}^\alpha t^j=0$, $j=0,1, \ldots, n-1$,

$(ii)$ : $\mathrm{D}^p \mathrm{J}^q f(t)=\mathrm{J}^{q-p} f(t)$, où $q>p>0$ et $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$,

$(iii)$ : Soit $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $n-1<\alpha<n$, et $\mathrm{D}^\alpha x(t)=0$. Ensuite, $x(t)=\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j t^j$, et $\mathrm{J}^\alpha \mathrm{D}^\alpha x(t)= x(t)+\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j t^j$, $\left(c_j\right)_{j=0,1, \ldots, n-1} \in \mathbb{R}$.

Les lemmes suivants sont fondamentaux pour prouver nos résultats d'existence :

**Lemme 2.1** *[9, 11] (Théorème du point fixe de Schauder) Soit* $U$ *un sous-ensemble convexe borné fermé d'un espace de Banach* $B$. *Si* $T : U \to U$ *est complètement continu, alors* $T$ *a un point fixe dans* $U$.

Pour donner la représentation intégrale de (2.1),on devez prouver le résultat auxiliaire suivant :

**Lemme 2.2** *Pour* $0 < \alpha_k, \beta_k < 1$, *et* $\Psi_k \in C([0,1];\mathbb{R})$, $k = 1,2$, *le problème de Lane-Emden suivant*

$$D^{\beta_k}\left(D^{\alpha_k} + b_k g_k(t)\right) x_k(t) = \Psi_k(t), \ t \in [0,1], \tag{2.4}$$

*associé aux conditions*

$$x_k(0) = a_k^0, \ x_k(1) = a_k^1, \tag{2.5}$$

*a une solution unique* $(x_k)_{k=1,2}$ *donné par :*

$$\begin{aligned} x_k(t) &= J^{\alpha_k+\beta_k}\Psi_k(t) - b_k J^{\alpha_k} g_k(t)\, x_k(t) \\ &\quad - \left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(J^{\beta_k}\Psi_k(\tau) - b_k g_k(\tau)\, x_k(\tau)\right) d\tau + a_k^0 - a_k^1\right] t^{\alpha_k} + a_k^0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

**Preuve.** Utilisation de la propriété $(iii)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}\Psi_k(s)\, ds - b_k g_k(\tau)\, x_k(\tau)\right) d\tau \\ &\quad - c_0^k J^{\alpha_k}(1) - c_0^{*k}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $c_0^k, c_0^{*k} \in \mathbb{R}$.

Par (2.5), on obtient :

$$\begin{cases} c_0^{*k} = -a_k^0, \\ c_0^k = \Gamma(\alpha_k+1)\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(J^{\beta_k}\Psi_k(\tau) - b_k g_k(\tau)\, x_k(\tau)\right) d\tau + a_k^0 - a_k^1\right]. \end{cases} \tag{2.8}$$

En remplaçant (2.8) dans (2.7), on recevez (2.6). Ceci complète la preuve. ∎

On présenté l'espace de Banach

$$B := \left\{(x_k)_{k=1,2} : x_k \in C([0,1],\mathbb{R}),\ D^{\delta_k} x_k \in C([0,1],\mathbb{R})\right\},$$

noté de la norme :

$$\|(x_1, x_2)\|_B = \max_{1\le k\le 2}\left(\|x_k\|_\infty, \left\|D^{\delta_k} x_k\right\|_\infty\right);$$

$\|x_k\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x_k|$, $\left\|D^{\delta_k} x_k\right\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left|D^{\delta_k} x_k\right|$.

## 2 Conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution

Dans cette section, on établir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution en plus de l'existence d'une solution au moins à système (2.1).

**Théorème 2.1** *Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites :*

$(\mathrm{H}_1)$ : $g_k : (0,1] \to [0,\infty)$, $k=1,2$, *sont continus,* $\lim_{t\to 0^+} g_k(t)=\infty$, *il existe* $0<\mu_k<1$; $t \longmapsto t^{\mu_k} g_k(t)$ *sont continus* $[0,1]$, *et* $\mathrm{M}_k = \max_{t\in[0,1]} \left| t^{\mu_k} g_k(t) \right|$.

$(\mathrm{H}_2)$ : *Il existe des constantes non négatives* $\left(\mathrm{L}_k^j\right)_i$, $j,k=1,2$, $i=1,2,3,4$, *satisfaisant*

$$\left| f_k^j(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - f_k^j(t,v_1,v_2,v_3,v_4) \right| \le \sum_{i=1}^{4} \left(\mathrm{L}_k^j\right)_i |u_i - v_i|, \tag{2.9}$$

*pour tous* $t\in[0,1]$ *et tout* $(u_1,u_2,u_3,u_4),(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$.

*Ensuite, système (2.1) a une solution unique sur* $[0,1]$, *à condition que :*

$(\mathrm{C}_d)$ :

$$\Theta =: \max_{1\le k\le 2} \left(\mathrm{A}_k \Sigma_k + 2\mathrm{B}_k, \mathrm{A}_k^* \Sigma_k + \mathrm{B}_k^*\right) < 1, \tag{2.10}$$

*où*

$$\begin{aligned}
\Sigma_k &= \sum_{i=1}^{4} \left(\lambda_k \left(\mathrm{L}_k^2\right)_i + \left(\mathrm{L}_k^1\right)_i\right), \\
\mathrm{A}_k &= \frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}, \\
\mathrm{B}_k &= \frac{b_k \mathrm{M}_k \Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)}, \\
\mathrm{A}_k^* &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1)} + \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)\,\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}, \\
\mathrm{B}_k^* &= \frac{b_k \mathrm{M}_k \Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k)} + \frac{b_k \mathrm{M}_k \Gamma(1-\mu_k)\,\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)\,\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

**Preuve.** Tout d'abord, on définie l'opérateur non linéaire $\mathrm{T} : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ par :

$$\mathrm{T}(x_1,x_2)(t) := \left(\mathrm{T}_1(x_1,x_2)(t), \mathrm{T}_2(x_1,x_2)(t)\right),$$

tel que

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_k(x_1,x_2)(t) \quad : \quad &= \lambda_k \mathrm{J}^{\alpha_k+\beta_k} f_k^2\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right) \\
&\quad - \mathrm{J}^{\alpha_k+\beta_k} f_k^1\left(t, x_1(t), x_2(t), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(t), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(t)\right) - b_k \mathrm{J}^{\alpha_k} g_k(t) x_k(t) \\
&\quad - t^{\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left( \begin{array}{l} \mathrm{J}^{\beta_k} \lambda_k f_k^2\left(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(\tau), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(\tau)\right) \\ - f_k^1\left(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \mathrm{D}^{\delta_1} x_1(\tau), \mathrm{D}^{\delta_2} x_2(\tau)\right) \\ - b_k g_k(\tau) x_k(\tau) d\tau \end{array} \right) d\tau \\
&\quad - \left(a_k^0 - a_k^1\right) t^{\alpha_k} + a_k^0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

pour tous $t\in[0,1]$ et $k=1,2$.

On devait prouver que T est contractive sur B. Soit $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathrm{B}$ et $t\in[0,1]$. Ensuite,

$$\left\| \mathrm{T}(x_1,x_2) - \mathrm{T}(y_1,y_2) \right\|_{\mathrm{B}} = \max_{1\le k\le 2} \left( \begin{array}{l} \left\| \mathrm{T}_k(x_1,x_2) - \mathrm{T}_k(y_1,y_2) \right\|_\infty, \\ \left\| \mathrm{D}^{\delta_k}\left(\mathrm{T}_k(x_1,x_2) - \mathrm{T}_k(y_1,y_2)\right) \right\|_\infty \end{array} \right). \tag{2.13}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)-\mathrm{T}_k(y_1,y_2)\right\|_\infty \\
\leq\;& \max_{t\in[0,1]}\lambda_k\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left|\begin{array}{l} f_k^2\left(s,x_1(s),x_2(s),\mathrm{D}^{\delta_1}x_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(s)\right)\\ -f_k^2\left(s,y_1(s),y_2(s),\mathrm{D}^{\delta_1}y_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right|ds \\
&+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left|\begin{array}{l} f_k^1\left(s,x_1(s),x_2(s),\mathrm{D}^{\mathrm{D}^{\delta_1}}x_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(s)\right)\\ -f_k^1\left(s,y_1(s),y_2(s),\mathrm{D}^{\delta_1}y_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right|ds \\
&+b_k\max_{t\in[0,1]}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\left|s^{\mu_k}g_k(s)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right|ds \\
&+\lambda_k\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_0^\tau\frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}\left|\begin{array}{l} f_k^2\left(\begin{array}{l}s,x_1(s),x_2(s),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}x_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(s)\end{array}\right)\\ -f_k^2\left(\begin{array}{l}s,y_1(s),y_2(s),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}y_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}y_2(s)\end{array}\right)\end{array}\right|ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k} \\
&+\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_0^\tau\frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_k)}\left|\begin{array}{l} f_k^1\left(\begin{array}{l}s,x_1(s),x_2(s),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}x_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(s)\end{array}\right)\\ -f_k^1\left(\begin{array}{l}s,y_1(s),y_2(s),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}y_1(s),\mathrm{D}^{\delta_2}y_2(s)\end{array}\right)\end{array}\right|ds\right)d\tau \\
&\times\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k}+b_k\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\left|\tau^{\mu_k}g_k(\tau)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right|\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k}.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)$, le $3^{ème}$ terme du côté droit de Inéquation (2.14) implique

$$\begin{aligned}
&b_k\max_{t\in[0,1]}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\left|s^{\mu_k}g_k(s)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right|ds \\
\leq\;& \frac{b_k\mathrm{M}_k}{\Gamma(\alpha_k)}\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k-\mu_k}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty\int_0^1(1-\omega)^{\alpha_k-1}\omega^{-\mu_k}d\omega \\
\leq\;& \frac{b_k\mathrm{M}_k\mathrm{B}e\left(\alpha_k,1-\mu_k\right)}{\Gamma(\alpha_k)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty \\
\leq\;& \frac{b_k\mathrm{M}_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty,
\end{aligned}\tag{2.15}$$

où $\mathrm{B}e(.,.)$ désigne la fonction Béta.

De même, le $6^{ème}$ terme du côté droit de Inéquation (2.14) implique

$$\begin{aligned}
&b_k\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)}\left|\tau^{\mu_k}g_k(\tau)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right|\max_{t\in[0,1]}t^{\alpha_k} \\
\leq\;& \frac{b_k\mathrm{M}_k\Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Grâce à Inéquation (2.9) donnée dans $(\mathrm{H}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)-\mathrm{T}_k(y_1,y_2)\right\|_\infty\\
\leq\;& \frac{2\lambda_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(\begin{array}{l}(\mathrm{L}_k^2)_1\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+(\mathrm{L}_k^2)_2\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\\ +(\mathrm{L}_k^2)_3\left\|\mathrm{D}^{\delta_1}(x_1-y_1)\right\|_\infty+(\mathrm{L}_k^2)_4\left\|\mathrm{D}^{\delta_2}(x_2-y_2)\right\|_\infty\end{array}\right)\\
&+\frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&\times\left(\begin{array}{l}(\mathrm{L}_k^1)_1\left\|x_1-y_1\right\|_\infty+(\mathrm{L}_k^1)_2\left\|x_2-y_2\right\|_\infty\\ +(\mathrm{L}_k^1)_3\left\|\mathrm{D}^{\delta_1}(x_1-y_1)\right\|_\infty+(\mathrm{L}_k^1)_4\left\|\mathrm{D}^{\delta_2}(x_2-y_2)\right\|_\infty\end{array}\right)\\
&+\frac{2b_k\mathrm{M}_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)}\left\|x_k-y_k\right\|_\infty.
\end{aligned}\tag{2.17}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)-\mathrm{T}_k(y_1,y_2)\right\|_\infty\\
\leq\;&\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\lambda_k(\mathrm{L}_k^2)_i+(\mathrm{L}_k^1)_i\right)\frac{2}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}+\frac{2b_k\mathrm{M}_k\Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)}\right]\\
&\times\left\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\right\|_{\mathrm{B}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)-\mathrm{T}_k(y_1,y_2)\right\|_\infty\leq(\mathrm{A}_k\Sigma_k+2\mathrm{B}_k)\left\|(x_1-y_1,x_2-y_2)\right\|_{\mathrm{B}}.\tag{2.18}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\delta_k}\mathrm{T}_k(x_1,x_2)(t)\;:\;&=\lambda_k\mathrm{J}^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}f_k^2\left(t,x_1(t),x_2(t),\mathrm{D}^{\delta_1}x_1(t),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(t)\right)\\
&-\mathrm{J}^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}f_k^1\left(t,x_1(t),x_2(t),\mathrm{D}^{\delta_1}x_1(t),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(t)\right)\\
&-b_k\mathrm{J}^{\alpha_k-\delta_k}g_k(t)\,x_k(t)-\frac{\Gamma(\alpha_k+1)\,t^{\alpha_k-\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\\
&\times\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\begin{array}{l}\lambda_k\mathrm{J}^{\beta_k}f_k^2\left(\begin{array}{l}\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}x_1(\tau),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(\tau)\end{array}\right)\\ -\mathrm{J}^{\beta_k}f_k^1\left(\begin{array}{l}\tau,x_1(\tau),x_2(t),\\ \mathrm{D}^{\delta_1}x_1(\tau),\mathrm{D}^{\delta_2}x_2(\tau)\end{array}\right)\\ -b_kg_k(\tau)\,x_k(\tau)\end{array}\right)d\tau\\
&-\frac{\left(a_k^0-a_k^1\right)\Gamma(\alpha_k+1)\,t^{\alpha_k-\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
&\left\| D^{\delta_k}\left(T_k(x_1,x_2)-T_k\left(y_1,y_2\right)\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \max_{t\in[0,1]} \lambda_k \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)} \left| \begin{array}{l} f_k^2\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right) \\ -f_k^2\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right| ds \\
&+\max_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k\right)} \left| \begin{array}{l} f_k^1\left(s,x_1(s),x_2(s),D^{D^{\delta_1}}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\right) \\ -f_k^1\left(s,y_1(s),y_2(s),D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\right)\end{array}\right| ds \\
&+b_k \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-\delta_k-1}s^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k)} \left|s^{\mu_k}g_k(s)\right|\left|x_k(s)-y_k(s)\right| ds \\
&+\lambda_k \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)} \left| \begin{array}{l} f_k^2\left(\begin{array}{l} s,x_1(s),x_2(s), \\ D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\end{array}\right) \\ -f_k^2\left(\begin{array}{l} s,y_1(s),y_2(s), \\ D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\end{array}\right)\end{array}\right| ds\right) d\tau \\
&\times \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \max_{t\in[0,1]} t^{\alpha_k-\delta_k} \\
&+\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \left(\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\beta_k-1}}{\Gamma\left(\beta_k\right)} \left| \begin{array}{l} f_k^1\left(\begin{array}{l} s,x_1(s),x_2(s), \\ D^{\delta_1}x_1(s),D^{\delta_2}x_2(s)\end{array}\right) \\ -f_k^1\left(\begin{array}{l} s,y_1(s),y_2(s), \\ D^{\delta_1}y_1(s),D^{\delta_2}y_2(s)\end{array}\right)\end{array}\right| ds\right) d\tau \\
&\times \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \max_{t\in[0,1]} t^{\alpha_k-\delta_k} \\
&+b_k \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha_k-1}\tau^{-\mu_k}}{\Gamma(\alpha_k)} \left|\tau^{\mu_k}g_k(\tau)\right|\left|x_k(\tau)-y_k(\tau)\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \max_{t\in[0,1]} t^{\alpha_k-\delta_k}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on peut montrer que

$$
\begin{aligned}
&\left\| D^{\delta_k}\left(T_k(x_1,x_2)-T_k\left(y_1,y_2\right)\right)\right\|_\infty \\
\leq\ & \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{4}\left(\left(L_k^1\right)_i+\lambda_k\left(L_k^2\right)_i\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1)}+\frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\right) \\ +\frac{b_k M_k \Gamma(1-\mu_k)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k)}+\frac{b_k M_k \Gamma(1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k+1-\mu_k)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}\end{array}\right] \\
&\times \left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Par conséquent,

$$
\left\| D^{\delta_k}\left(T_k(x_1,x_2)-T_k\left(y_1,y_2\right)\right)\right\|_\infty \leq \left(A_k^*\Sigma_k+B_k^*\right)\left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B. \tag{2.22}
$$

Il s'ensuit (2.13), (2.18) et (2.22), que

$$
\begin{aligned}
&\left\|T(x_1,x_2)-T\left(y_1,y_2\right)\right\|_B \\
\leq\ & \max_{1\leq k\leq 2}\left(A_k\Sigma_k+2B_k, A_k^*\Sigma_k+B_k^*\right)\left\|\left(x_1-y_1,x_2-y_2\right)\right\|_B.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

En utilisant (2.10), on en déduire que T est contractive. Par le théorème du point fixe de Banach, on affirme T a un point fixe qui est l'unique solution de système (2.1). Ceci complète la preuve. ∎

**Théorème 2.2** *Soient* $\alpha_k - \delta_k - \mu_k > 0$. *Supposons que les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)$ *et* $(\mathrm{H}_3)$ *sont satisfait :*

$(\mathrm{H}_1)$ : $g_k : (0,1] \to [0,\infty)$, $k = 1,2$, *sont continues,* $\lim\limits_{t\to 0^+} g_k(t) = \infty$ *et il existe* $0 < \mu_k < 1$; $t \longmapsto t^{\mu_k} g_k(t)$ *sont continues sur* $[0,1]$,

$(\mathrm{H}_3)$ : *Suppose que* $f_k^j : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *sont continues et il existe des constantes non négatives* $\mathrm{D}_k^j$, $j,k = 1,2$, *tel que :*

$$f_k^j(t,u_1,u_2,u_3,u_4) \le \mathrm{D}_k^j, \tag{2.24}$$

*pour chaque* $t \in [0,1]$ *et tout* $(u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4$. *Alors système (2.1) a au moins une solution sur* $[0,1]$.

**Preuve.** Tout d'abord, on montre que l'opérateur T est complètement continu.

La continuité des fonctions $t^{\mu_k} g_k$ et $f_k^j$, $j,k = 1,2$, implique que T est continu sur B.

**Étape 1 :** L'opérateur T mappe les ensembles bornés en ensembles bornés dans B. On définie l'ensemble $\Omega_r := \{(x_1,x_2) \in \mathrm{B},\ \|(x_1,x_2)\|_{\mathrm{B}} \le r\}$, où $r > 0$. Pour $(x_1,x_2) \in \Omega_r$, par Inéquation (3.1)donné dans l'hypothèse $(\mathrm{H}_3)$, on obtient :

$$\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)\|_\infty \le \mathrm{A}_k\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + 2r\mathrm{B}_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|, \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{D}^{\delta_k}\mathrm{T}_k(x_1,x_2)\|_\infty \\ \le\ & \mathrm{A}_k^*\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + r\mathrm{B}_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Utilisant (3.2) et (3.3), on a

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{T}(x_1,x_2)\|_{\mathrm{B}} \\ \le\ & \max_{1\le k\le 2}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_k\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + 2r\mathrm{B}_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|, \\ \mathrm{A}_k^*\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + r\mathrm{B}_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Par conséquent, l'opérateur T mappe les ensembles bornés en ensembles bornés dans B.

**Étape 2 :** Équi-continuité de $\mathrm{T}(\Omega_r)$ :

Pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ ; $t_1 < t_2$, et $(x_1,x_2) \in \Omega_r$, on a

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{T}_k(x_1,x_2)(t_2) - \mathrm{T}_k(x_1,x_2)(t_1)\|_\infty \\ \le\ & \frac{\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k}\right) + \frac{\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right) \\ & + \frac{r b_k \mathrm{M}_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k-\mu_k} - t_1^{\alpha_k-\mu_k}\right) + \frac{r b_k \mathrm{M}_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right), \end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{D}^{\delta_k}\left(\mathrm{T}_k(x_1,x_2)(t_2) - \mathrm{T}_k\left(y_1,y_2\right)(t_1)\right)\|_\infty \\ \le\ & \frac{\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right)\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)} + \frac{\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right)\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \\ & + \frac{r b_k \mathrm{M}_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k\right)} \\ & + \frac{r b_k \mathrm{M}_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Les côtés droits des inégalités (3.5) et (3.6) sont indépendants de $x_1$, $x_2$ et tendent vers zéro lorsque $t_1$ tend vers $t_2$. D'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli, on voit que T est complètement continu.

Deuxièmement, on considère l'ensemble $\Delta \subset \mathrm{B}$ défini par :

$$\Delta := \left\{(x_1, x_2) \in \mathrm{B} : \|(x_1, x_2)\|_{\mathrm{B}} \leq \mathrm{R}\right\}, \tag{2.30}$$

où

$$\mathrm{R} = \max_{1\leq k\leq 2} \left( \begin{array}{c} \frac{\mathrm{A}_k\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|}{1-2\mathrm{B}_k}, \\ \frac{\mathrm{A}_k^*\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}}{1-\mathrm{B}_k^*} \end{array} \right), \tag{2.31}$$

$\mathrm{B}_k \neq \frac{1}{2}$ et $\mathrm{B}_k^* \neq 1$.

On vont prouver que $\mathrm{T} : \Delta \to \Delta$. Soit $(x_1, x_2) \in \Delta$ et $t \in [0, 1]$, par Ineq. (3.1), on a :

$$\begin{aligned} \|\mathrm{T}_k(x_1, x_2)\|_\infty &\leq \mathrm{A}_k\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + 2\mathrm{R}\mathrm{B}_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right| \\ &\leq (1 - 2\mathrm{B}_k)\mathrm{R} + 2\mathrm{R}\mathrm{B}_k \\ &\leq \mathrm{R}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

et

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{D}^{\delta_k}\mathrm{T}_k(x_1, x_2)\|_\infty \\ \leq\ & \mathrm{A}_k^*\left(\lambda_k \mathrm{D}_k^2 + \mathrm{D}_k^1\right) + \mathrm{R}\mathrm{B}_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k + 1)}{\Gamma(\alpha_k - \delta_k + 1)} \\ \leq\ & \left(1 - \mathrm{B}_k^*\right)\mathrm{R} + \mathrm{R}\mathrm{B}_k^* \\ \leq\ & \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

En utilisant (3.9) et (3.10), on obtient : $\|\mathrm{T}(x_1, x_2)\|_{\mathrm{B}} \leq \mathrm{R}$. Par $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_3)$, les fonctions $t^{\mu_k} g_k$ et $f_k^j$, $j, k = 1, 2$, sont continues, ce qui implique que T est continu sur B. De plus, pour $(x_1, x_2) \in \Delta$, on a $\mathrm{T}(x_1, x_2) \in \Delta$.

D'où $\mathrm{T}(\Delta) \subset \Delta$, c'est-à-dire $\mathrm{T} : \Delta \to \Delta$.

D'aprés le lemme 1.1, système (2.1) a au moins une solution sur $[0, 1]$. Le théorème 2.2 est ainsi prouvé. ■

# 3 Application

**Exemple 2.1** *On considère le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}^{\frac{3}{4}}\left(\mathrm{D}^{\frac{7}{8}} + \frac{t^{-\frac{2}{9}}}{10}\right) x_1(t) + \frac{\left|x_1(t) + x_2(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right|}{40\pi^2 e^t \left(1 + \left|x_1(t) + x_2(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right|\right)} \\ = \frac{1}{20\pi^2 e} \frac{\cos(x_1(t)) + \cos(x_2(t)) + \cos\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t)\right) + \cos\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right)}{t^2 + 1}, \\ \mathrm{D}^{\frac{2}{3}}\left(\mathrm{D}^{\frac{4}{5}} + \frac{t^{-\frac{2}{5}}}{20}\right) x_2(t) + \frac{1}{80 e^{t^2+1}} \left( \sin x_1(t) + \sin x_2(t) + \frac{\left|\mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right|}{\left(1 + \left|\mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right|\right)} \right) \\ = \frac{1}{40} \frac{\sin(x_1(t)) + \sin(x_2(t)) + \cos\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}} x_1(t)\right) + \sin\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{3}} x_2(t)\right)}{(9t+1) e^{t+1}}, \\ t \in [0, 1], \ x_1(0) = -1, \ x_1(1) = \sqrt{\pi}, \ x_2(0) = 1, \ x_2(1) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}. \end{array} \right. \tag{2.34}$$

*Ici, on peut prendre :* $\mu_1 = \frac{1}{3}$ *et* $\mu_2 = \frac{3}{5}$*. Alors, pour tout* $t \in [0,1]$ *et* $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , $\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) \in \mathbb{R}^4$*, on obtient :*

$$\left(\mathrm{L}_1^1\right)_i = \frac{1}{40\pi^2 e}, \left(\mathrm{L}_1^2\right)_i = \frac{1}{2}, \ \left(\mathrm{L}_2^1\right)_i = \frac{1}{80e^2}, \ \left(\mathrm{L}_2^2\right)_i = \frac{1}{10e^2}, \ i = 1,2,3,4,$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \frac{1}{5\pi^2 e} = 0.0074, \ \Sigma_2 = \frac{6}{100e^2} = 0.0081, \\
\mathrm{A}_1 &= 1.3781, \ \mathrm{A}_2 = 1.5362, \ \mathrm{B}_1 = 0.1518, \ \mathrm{B}_2 = 0.1208, \\
\mathrm{A}_1^* &= 1.6868, \ \mathrm{A}_2^* = 1.7491, \ \mathrm{B}_1^* = 0.3009, \ \mathrm{B}_2^* = 0.2046.
\end{aligned}$$

*En effet,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1\Sigma_1 + 2\mathrm{B}_1 &= 0.3138, \ \mathrm{A}_2\Sigma_2 + 2\mathrm{B}_2 = 0.2540, \\
\mathrm{A}_1^*\Sigma_1 + \mathrm{B}_1^* &= 0.3134, \ \mathrm{A}_2^*\Sigma_2 + \mathrm{B}_2^* = 0.2187.
\end{aligned}$$

*Par conséquent, on obtient* $\Theta < 1$*. Alors, d'aprés le Théorème 2.1, le système (2.34) a une solution unique sur* $[0,1]$ .

# Chapitre 3

# Existence d'une solution au moins

## 1 Théorème

Dans ce chapitre, on va étudier de l'existence d'une solution au moins. Lecteur intéressé peut consulter les références suivantes : [6, 7, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23]

**Théorème 3.1** *Soit* $\alpha_k - \delta_k - \mu_k > 0$. *Supposons que les hypothèses* $(H_1)$ *et* $(H_3)$ *sont satisfait :*

$(H_1)$ : $g_k : (0,1] \to [0,\infty)$, $k = 1,2$, *sont continues,* $\lim\limits_{t\to 0^+} g_k(t) = \infty$ *et il existe* $0 < \mu_k < 1$; $t \longmapsto t^{\mu_k} g_k(t)$ *sont continues sur* $[0,1]$,

$(H_3)$ : *Supposons que* $f_k^j : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *sont continues et il existe des constantes non non négative* $D_k^j$, $j,k = 1,2$, *tel que :*

$$f_k^j(t,u_1,u_2,u_3,u_4) \le D_k^j, \tag{3.1}$$

*pour chaque* $t \in [0,1]$ *et tout* $(u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4$. *Alors système (2.1) a au moins une solution sur* $[0,1]$.

**Preuve.** Tout d'abord, on montre que l'opérateur T est complètement continu.

**Étape 1 :** La continuité des fonctions $t^{\mu_k} g_k$ et $f_k^j$, $j,k = 1,2$, implique que T est continu sur B.

**Étape 2 :** L'opérateur T mappe les ensembles bornés en ensembles bornés dans B. On définit l'ensemble $\Omega_r := \left\{(x_1,x_2) \in B,\ \|(x_1,x_2)\|_B \le r\right\}$, où $r > 0$. Pour $(x_1,x_2) \in \Omega_r$, par Inéquation (3.1) donné dans l'hypothèse $(H_3)$, on obtient :

$$\|T_k(x_1,x_2)\|_\infty \le A_k\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + 2rB_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|, \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned} &\|D^{\delta_k} T_k(x_1,x_2)\|_\infty \\ \le\ & A_k^*\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + rB_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant (3.2) et (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} &\|T(x_1,x_2)\|_B \\ \le\ & \max_{1\le k\le 2}\left(\begin{array}{l} A_k\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + 2rB_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|, \\ A_k^*\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + rB_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \end{array}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Par conséquent, l'opérateur T mappe les ensembles bornés en ensembles bornés dans B.

**Étape 3 :** Équi-continuité de $T(\Omega_r)$ :

Pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ ; $t_1 < t_2$, et $(x_1, x_2) \in \Omega_r$, on a

$$\begin{aligned}
&\|T_k(x_1,x_2)(t_2) - T_k(x_1,x_2)(t_1)\|_\infty \\
\leq\ & \frac{\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k}\right) + \frac{\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)}\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right) \\
&+ \frac{r b_k M_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k-\mu_k} - t_1^{\alpha_k-\mu_k}\right) + \frac{r b_k M_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)}\left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha_k}\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|D^{\delta_k}\left(T_k(x_1,x_2)(t_2) - T_k(y_1,y_2)(t_1)\right)\|_\infty \\
\leq\ & \frac{\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right)\left(t_2^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k+\beta_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k-\delta_k+1\right)} + \frac{\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right)\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \\
&+ \frac{r b_k M_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k-\mu_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k-\delta_k+1-\mu_k\right)} \\
&+ \frac{r b_k M_k \Gamma\left(1-\mu_k\right)\Gamma(\alpha_k+1)\left(t_2^{\alpha_k-\delta_k} - t_1^{\alpha_k-\delta_k}\right)}{\Gamma\left(\alpha_k+1-\mu_k\right)\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Les côtés droits des inégalités (3.5) et (3.6) sont indépendants de $x_1$, $x_2$ et tendent vers zéro lorsque $t_1$ tend vers $t_2$.
D'apré le théorème d'Arzela-Ascoli, on voit que T est complètement continu.

Deuxièmement, on considére l'ensemble $\Delta \subset B$ défini par :

$$\Delta := \left\{(x_1,x_2) \in B : \|(x_1,x_2)\|_B \leq R\right\}, \tag{3.7}$$

où

$$R = \max_{1\leq k\leq 2}\left(\begin{array}{c} \dfrac{A_k\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right|}{1-2B_k}, \\ \dfrac{A_k^*\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \dfrac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)}}{1-B_k^*} \end{array}\right), \tag{3.8}$$

et $B_k \neq \frac{1}{2}$ et $B_k^* \neq 1$.

On vont montrer que $T : \Delta \to \Delta$. Soit $(x_1,x_2) \in \Delta$ et $t \in [0,1]$, par Inéquation (3.1) donné dans l'hypothèse $(H_3)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T_k(x_1,x_2)\|_\infty &\leq A_k\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + 2RB_k + \left|a_k^0 - a_k^1\right| + \left|a_k^0\right| \\
&\leq (1-2B_k)R + 2RB_k \\
&\leq R,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|D^{\delta_k}T_k(x_1,x_2)\|_\infty \\
\leq\ & A_k^*\left(\lambda_k D_k^2 + D_k^1\right) + RB_k^* + \left|a_k^0 - a_k^1\right| \frac{\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_k-\delta_k+1)} \\
\leq\ & \left(1-B_k^*\right)R + RB_k^* \\
\leq\ & R.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant (3.9) et (3.10), on obtient

$$\|\mathrm{T}(x_1, x_2)\|_{\mathrm{B}} \leq \mathrm{R}.$$

Par $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_3)$, les fonctions $t^{\mu_k} g_k$ et $f_k^j$, $j, k = 1, 2$, sont continues, ce qui implique que T est continu sur B. De plus, pour $(x_1, x_2) \in \Delta$, on a $\mathrm{T}(x_1, x_2) \in \Delta$.

D'où $\mathrm{T}(\Delta) \subset \Delta$, c'est-á-dire $\mathrm{T} : \Delta \to \Delta$.

D'aprés Le lemme 1.1, système (2.1) a au moins une solution sur $[0, 1]$. Le théorème 2.2 est ainsi prouvé. ■

# 2 Application

**Exemple 3.1** *On considère le système fractionnaire de Lane-Emden suivant :*

$$\begin{cases} \mathrm{D}^{\frac{4}{7}}\left(\mathrm{D}^{\frac{5}{6}} + \frac{t^{-\frac{1}{9}}}{2\pi e}\right) x_1(t) + \cos(t x_1(t) + t x_2(t)) \sin\left(\begin{array}{c} \mathrm{D}^{\frac{1}{6}} x_1(t) \\ +\mathrm{D}^{\frac{1}{8}} x_2(t) \end{array}\right) \\ = \frac{1}{2} \frac{t \sin(x_1(t)) + \sin(x_2(t))}{e^t + \cos\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{6}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{8}} x_2(t)\right)}, \ t \in [0, 1], \\ \mathrm{D}^{\frac{7}{9}}\left(\mathrm{D}^{\frac{4}{5}} + \frac{t^{-\frac{3}{10}}}{\pi^2 + 4}\right) x_2(t) + \frac{t^2}{e^{t^2+1}} \left(\begin{array}{c} \sin(x_1(t)\, x_2(t)) \\ +\cos\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{6}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{8}} x_2(t)\right) \end{array}\right) \\ = \frac{1}{32} \frac{\cos(x_1(t) + x_2(t)) + \sin\left(\mathrm{D}^{\frac{1}{6}} x_1(t) + \mathrm{D}^{\frac{1}{8}} x_2(t)\right)}{t^2 + 1}, \ t \in [0, 1], \\ x_1(0) = 1, \ x_1(1) = -\pi, \ x_2(0) = \sqrt{2}, \ x_2(1) = 5. \end{cases} \tag{3.11}$$

*Dans cet exemple, pour* $\mu_1 = \frac{2}{9}$ *et* $\mu_2 = \frac{2}{5}$*, toutes les hypothèses du Théorème 2.2 seront satisfaites. Par conséquent, le système (3.11) a au moins une solution sur* $[0, 1]$.

# Conclusion

Dans le premier chapitre on a présenté des notions et des rappels de la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, on a donné quelques théorèmes des points fixes.
Dans le deuxième chapitre, on a considéré un système fractionnaire. On a présenté la solution intégrale puis on passe à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution. Une application est construite pour illustrer le résultat obtenu.
Enfin, dans le triosième chapitre, on a discuté l'existence d'une solution au moins. La démonstration du résultat est basée sur le théorème du point fixe de Schauder. On a présenté aussi une application, pour illustrer le résultat.

# Bibliographie


[1] A.Bekka, CALCUL NUMÉRIQUE DES DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES. MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE (MASTER), 2017-2018, Université Mohamed Boudiaf de M'sila. 1

[2] A.Benaissa, QUELQUES PROPRIÉTÉS ET APPLICATIONS DE L'OPÉRATEUR FRACTIONNAIRE DE CAPUTO. Master Académique, Mai 2017, Université Dr Tahar Moulay Saïda. 1

[3] Z. Dahmani and A. Taïeb, *New Existence and Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Differential Systems,* Facta Nis Ser. Math. Inform, **30**, 3(2015), 281-293. 15

[4] Z. Dahmani and A. Taïeb, *Solvability For High Dimensional Fractional Differential Systems With High Arbitrary Orders,* Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems, **7**, 4(2015), pp. 51-64. 15

[5] Z. Dahmani and A. Taïeb, *A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders,* ROMAI Journal, **11**, 2(2015), 141-177. 15

[6] Z. Dahmani and A. Taïeb, *Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions,* PALM Letters, 5(2015), pp. 29-36. 24

[7] Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui, *Solvability and Stability for Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of High Fractional Orders,* Facta Nis Ser. Math. Inform., **31**, 3(2016), 629-644. 24

[8] Z. Dahmani, (2010). New inequalities in fractional integrals. Int. J. Nonlinear Sci, 9(4), 493-497. 2

[9] Frontiers of Astrophysics : Workshop Summary (http ://www.arxiv.org/abs/astroph/9711066), H.Falcke, P.L.Biermann 1, 15, 16

[10] R.W. Ibrahim, *Existence of Nonlinear Lane-Emden Equation of Fractional Order,* Miskolc Mathematical Notes, **13**, (2012), 39–52. 15

[11] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006). 15, 16, 24

[12] S.M. Mechee and N. Senu : *Numerical Study of Fractional Differential Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation,* Applied Mathematics., 3(2012), 851-856. 15

[13] K.S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,* Wiley, New York, (1993). 24

[14] J. Serrin and H. Zou, *Existence of Positive Solutions of Lane-Emden Systems Atti Del Sem,* Mat. Fis. Univ. Modena, **46**, Suppl(1998), 369-380. 15

[15] A. Taïeb and Z. Dahmani, *A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involing m Nonlinear Terms,* Georjian Math. Journal, **23**, 3(2016), 447–458. 24

[16] A. Taïeb and Z. Dahmani, *A New Problem of Singular Fractional Differential Equations,* Journal of Dynamical Systems and Geometric Theory, **14**, 2(2016), 161-183. 24

[17] A. Taïeb and Z. Dahmani, *On Singular Fractional Differential Systems and Ulam-hyers Stabilities,* International Journal of Modern Mathematical Sciences., **14**, 3(2016), 262-282. 24

[18] A. Taïeb and Z. Dahmani, *The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities,* Kragujevac Journal of Mathematics, **40**, 2(2016), 238–259. 15, 24

[19] A. Taïeb and Z. Dahmani, Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations, Journal of Fractional Calculus and Applications, **10**, 1 Jan. (2019), 55-67. 24

[20] A. Taïeb and Z. Dahmani, *Triangular System of Higher Order Singular Fractional Differential Equations*, Kragujevac Journal of Math., Accepted 2018. 24

[21] A. Taïeb, *Several Results for High Dimensional Singular Fractional Systems Involving $n^2$-Caputo Derivatives,* Malaya Journal of Matematik, **6**, 3(2018), 569-581. 24

[22] A. Taïeb, ÉTUDE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES ET APPLICATIONS. THÉ'SE DE DOCTORAT LMD, Juin 2016, Université de Mostaganem e-biblio.univ-mosta.dz. 2

[23] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou, *Ulam Stability and Data Dependence for Fractional Differential Equations with Caputo Derivative*, Electronic J Quali TH Diff Equat., 63(2011), 1-10. 24