Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Fatima Zohra Ghellal

Une étude comparative sur la résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride

soutenu le 17 Juin 2021 *devant le jury composé de :*

Président :	Djillali Bouagada	Prof.	UMAB
Examinateur :	Mohammed Amine Ghezzar	MCA	UMAB
Encadreuse :	Zineb Kaisserli	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2020 / 2021

MASTER

Nom et Prénoms de l'étudiante : GHELLAL Fatima Zohra

Date : 17/06/2021

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Titre : Une étude comparative sur la résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride

Résume : Ce travail porte essentiellement sur la solvabilité d'un système dynamique bidimensionnel hybride vu son importante utilisation dans de nombreux domaines.

Nous avons, tout d'abord, étudié la résolution du système en question par la transformation de Laplace et celle en Z.

Ensuite, la transformation de Sumudu continue et discrète a été utilisée pour la résolution de notre système.

En dernier, une étude comparative a été faite sur les transformations utilisées afin de motionner leurs avantages et limites.

Mots-Clés : Solvabilité, Système dynamique linéaire bidimensionnel hybride, Transformation de Laplace, Transformée en Z, Transformées de Sumudu continue et discrète.

Dédicaces

Avec l'aide et la grâce de Dieu est achevée ce modeste travail

que je le dédie a

mes parents pour leur sacrifices et amours durant toutes mes années d'études,

toutes ma famille,

tous ceux qui m'ont encouragé pendant la durée de la réalisation de ce travail projet de fin d'étude,

tout le personnel et tous mes collègues qui me soutenu au long de mes études, au niveau de l'Université ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM.

Remerciements

Ce projet n'aurait pas abouti sans la bénédiction du Bon Dieu, qui m'a donné le courage et la volonté pour réaliser ce travail et qui a entendu mes prières.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de manière directe ou indirecte à l'aboutissement de ce travail.

Tout d'abord, J'adresse mes respectueuses remerciements M. DJILLALI BOUAGADA, professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir accepter de présider ce jury.

J'exprime mes profondes remerciements à M. MOHAMMED AMINE GHEZZAR, MCA à l'université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner ce travail et de participer à ce jury.

J'adresse mes remerciements également à Mme ZINEB KAISSERLI, MCA à l'université de Mostaganem, mon encadreuse pour son soutien et ses encouragements.

En dernier, mes remerciements vont également à tous les enseignants pour leurs efforts tout au long de mes années d'étude.

Table des matières

Index des notations iv

Introduction 1

1 Notions préliminaires 2

- 1 Introduction 2
- 2 Définitions et notions fondamentales 2
- 3 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels 4
- 4 Conclusion 6

2 Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride par les transformations de Laplace et de Z 7

- 1 Introduction 7
- 2 Transformation de Laplace 7
- 3 Transformation en Z 9
- 4 Solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride 11
- 5 Conclusion 16

3 Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride par les transformations de Sumudu continue et discrète 17

- 1 Introduction 17
- 2 Transformation de Sumudu continue 17
- 3 Transformation de Sumudu discrète 19
- 4 Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride 20
- 5 Conclusion 26

4 Comparaison et discussion 27

- 1 Introduction 27
- 2 Conditions d'existence 27
- 3 Multiplication par un scalaire 28
- 4 Propriétés des limites 28
- 5 Autres propriétés 29
- 6 Discussion et conclusion 29

Conclusion 30

Bibliographie 31

Index des notations

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{Z}_+$	:	Corps des nombres entiers relatifs positifs.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}_+^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles non négatifs.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles non négatives de taille $n \times m$.
i	:	Entier relatif positif (variable discrète).
t	:	Variable temporelle réelle.
s, z, v, w	:	Variables complexes.
x^h, x^v, x_1, x_2, x	:	Vecteurs d'états .
$\mathrm{X}(v, w)$	:	Transformées de Sumudu continues et discrètes de la fonction $x(t,i)$.
$\mathrm{X}(s, z)$	:	Transformées de Laplace et en Z de la fonction $x(t,i)$.
$u(t, i)$	:	Vecteur d'entrée.
$\mathrm{U}(v, w)$	:	Transformée de Sumudu continue et discrète de la fonction $u(t, i)$.
$\mathrm{U}(s, z)$	:	Transformées de Laplace et en Z de la fonction $u(t,i)$.
$y(t, i)$	:	Vecteur de sortie.
$\mathrm{Y}(v, w)$	:	Transformée de Sumudu continue et discrète de la fonction $y(t, i)$.
$\mathrm{Y}(s, z)$	:	Transformées de Laplace et en Z de la fonction $y(t,i)$.
$\mathit{\Gamma}$	:	Fonction Gamma d'Euler.
δ	:	Impulsion de Dirac.
$\mathrm{I}_{n\times n}$	:	Matrice identité de dimension $n \times n$.
G^{-1}	:	Inverse d'une matrice G de taille $n \times n$.
T_{pq}	:	Matrice transition.
$\mathscr{L}$	:	Transformée de Laplace.
Z	:	Transformée en Z.
$\mathscr{S}$	:	Transformée de Sumudu continue.
$\mathscr{S}_d$	:	Transformée de Sumudu discrète.
$\star$	:	Produit de convolution.

Introduction

Les systèmes dynamiques apparaissent dans plusieurs disciplines scientifiques, comme par exemple dans la physique, la biologie, la chimie, l'électronique, l'informatique, la cryptographie et $\cdots$.

Une classe importante des systèmes dynamiques bidimensionnels est représentée par des modèles hybrides, dites aussi modèle à temps continu-discret, leur comportement dépend de deux variables, une variable continue et l'autre variable discrète. Ces systèmes permettent de modéliser les systèmes discrets qui évoluent dans un évènement continu.

L'objectif principale de ce mémoire est de, dans un premier temps, traité la solvabilité d'un système dynamique linéaire à temps continu-discret via deux transformations continues et leurs homologues en termes discrets, l'une très connue et largement utilisé et l'autre récemment découverte. Et puis, faire une étude comparative sur les deux transformations choisie.

Le travail est organisé comme suit :

- Le premier chapitre regroupe les différentes notions préliminaires utiles pour la réalisation et la compréhension de ce document. Nous commencerons par présenter des définitions et des notions fondamentales suivies par les différents modèles de systèmes dynamiques bidimensionnels.

- Dans le deuxième chapitre, nous traitons la solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride par les transformations de Laplace et celle en Z ou les deux transformations seront étayées.

- Quant au troisième chapitre, nous présenterons les définitions et les différentes propriétés, existantes et d'autres que nous avons développé, de la transformation de Sumudu continue et discrète. Ensuite, la solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride sera établie.

- Au dernier chapitre une étude comparative est faite sur les différentes propriétés des deux transformations Laplace et Sumudu tout en soulignant la transformation la plus efficace.

Une conclusion générale suivie par les différents ouvrages et articles utilisés pour l'élaboration de ce travail clôturent ce manuscrit.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les outils de base utilisés pour la réalisation de ce travail. En effet, la première partie sera dédiée à quelques notions et définitions lesquelles vont être utilisée. Ensuite, quelques modèles de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels seront proposés.

2 Définitions et notions fondamentales

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats fondamentaux. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, des fonctions d'ordre exponentiel, des fonctions causales et de l'impulsion de Dirac.

Définition 2.1 [14] *La fonction Gamma d'Euler, notée par Γ, est définie par l'équation suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \tag{1.1}$$

où $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Proposition 2.2 [10] *sous certains conditions, nous avons*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *pour des valeurs non entiéres* $z > 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) = n!$.

Preuve.

1. Pour démontrer la première propriété, il suffit de passer par une intégration par partie. En effet,

$$\begin{aligned} \forall z > 0 : \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \\ &= \left[-e^{-t}\, t^{z}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. En remplaçant z par $n \in \mathbb{N}^*$ dans la propriété précédente, nous aurons

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1), \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1), \\ &= n!, \end{aligned}$$

vu que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^0\, dt = 1.$

■

Exemple 2.3 *Nous avons*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En effet, en posant $t = u^2$ *dans l'équation* (1.1)*, nous obtenons*

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1}\, du.$$

Ainsi, une valeur spéciale de la fonction Gamma d'Euler peut être obtenue lorsque

$$2z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du, \\ &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

vu que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Définition 2.4 [12] *On dit que la fonction* f *est d'ordre exponentiel, s'il existe* $\mathrm{M} > 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2}$$

Exemple 2.5 *La fonction*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est d'ordre exponentiel.

En effet, pour $\mathrm{M} = 1$*,* $t_0 = 0$ *et* $b = 0$*, nous aurons*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-0t}|f(t)| = 1.$$

Cependant, b *ne peut être négatif, car*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-bt}|f(t)| = +\infty.$$

Définition 2.6 [12] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction continue par morceaux s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que, pour tout $i = 0, \cdots, n-1$, si on pose $g_i = f_{i[x_i, x_{i+1}]}$, alors, g_i se prolonge en une fonction continue à tout l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.*

Exemple 2.7 *La fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ e^x & \text{si} \quad x \in]0,1[, \\ x+1 & \text{si} \quad x \in [1,2], \end{cases}$$

est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0,2]$.

Définition 2.8 [12] *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si $f(t) = 0$ dés que $t < 0$.*

Exemple 2.9 *La fonction de* Heaviside *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

est une fonction causale.

Définition 2.10 [14] *On appelle impulsion de Dirac la fonction δ définie par*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq 0, \\ +\infty & \text{si} \quad t = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dans un cas discret, l'impulsion de Dirac est donnée par la formule suivante

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases} \tag{1.4}$$

3 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels

Dans cette section nous rappelons quelques types de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels.

3.1 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps continu

3.1.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu du type Rosser

La représentation d'état d'un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu du type Rosset a la forme [8]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial t_1}(t_1,t_2) \\ \dfrac{\partial x^v}{\partial t_2}(t_1,t_2) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u(t_1,t_2), \\ y(t_1,t_2) &= \mathrm{C} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{D}\, u(t_1,t_2), \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $x^h(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie. A, B, C et D sont des matrices de dimension appropriées.

Les conditions initiales associées au système dynamique (1.5) sont

$$\begin{array}{lll} x^h(0,t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{pour} & t_2 \in \mathbb{R}_+, \\ x^v(t_1,0) \in \mathbb{R}^{n_2} & \text{pour} & t_1 \in \mathbb{R}_+. \end{array}$$

3.1.2 Système dynamique linéaire bidimensionnel de type Fornasini-Marchesini

Le système dynamique linéaire bidimensionnel décrit par le modèle de Fornasini-Marchesini est [8, 10]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x(t_1,t_2) &= \mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial t_1} x(t_1,t_2) + \mathrm{A}_2 \frac{\partial}{\partial t_2} x(t_1,t_2) + \mathrm{B}_1 \frac{\partial}{\partial t_1} u(t_1,t_2) + \mathrm{B}_2 \frac{\partial}{\partial t_2} u(t_1,t_2),\\ y(t_1,t_2) &= \mathrm{C}x(t_1,t_2) + \mathrm{D}u(t_1,t_2),\end{aligned}$$

où $x(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système dynamique décrit précédemment sont

$$x^h(0,t_2) = \left[\ \frac{\partial x^h}{\partial t_1}(t_1,t_2)\ \right]_{t_1=0} = x_0^h(t_2),$$

et

$$x^v(t_1,0) = \left[\ \frac{\partial x^v}{\partial t_2}(t_1,t_2)\ \right]_{t_2=0} = x_0^v(t_1).$$

3.2 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps discret

3.2.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser est décrit par le modèle suivant [8]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} &= \mathrm{A}\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \mathrm{B}\,u_{i,j}, \\ y_{i,j} &= \mathrm{C}\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \mathrm{D}\,u_{i,j},\end{aligned} \tag{1.6}$$

où $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_1}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie, avec $i, j \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.6) sont

$$\begin{aligned} x^h_{0,j} \in \mathbb{R}^{n_1} \quad &\text{pour} \quad j \in \mathbb{N},\\ x^v_{i,0} \in \mathbb{R}^{n_2} \quad &\text{pour} \quad i \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

3.2.2 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret généralisé

Une généralisation des systèmes dynamiques linéaires à temps discret du type Rosser est décrite l'équation suivante [8]

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= \mathrm{A}_0 x_{i,j} + \mathrm{A}_1 x_{i+1,j} + \mathrm{A}_2 x_{i,j+1} + \mathrm{B}_0 u_{i,j} + \mathrm{B}_1 u_{i+1,j} + \mathrm{B}_2 u_{i,j+1}, \\ y_{i,j} &= \mathrm{C}x_{i,j} + \mathrm{D}u_{i,j}\end{aligned} \tag{1.7}$$

où $x_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et sortie respectivement. $\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B}_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pour $k = 0,1,2$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées à l'équation (1.7) sont

$$x_{0,j} \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_{i,0} \quad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{N}.$$

3.3 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels hybrides

3.3.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Rosser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Rosser est défini par les équations suivantes [8, 10]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t,i) \\ x^v(t,i+1) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t,i) \\ x^v(t,i) \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u(t,i), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i), \end{aligned} \tag{1.8}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}$ avec $\dot{x}^h(t,i) = \dfrac{\partial x^h}{\partial t}(t,i)$. $x^h(t,i) \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x^v(t,i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, avec $n = n_1 + n_2$, sont les vecteurs d'état horizontal et vertical respectivement. $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.8) sont

$$\begin{aligned} x^h(0,i) &\in \mathbb{R}^{n_1} \quad \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}, \\ x^v(t,0) &\in \mathbb{R}^{n_2} \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

3.3.2 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret généralisé

Une généralisation d'un système dynamique bidimensionnel hybride est décrite par les équations suivantes [9]

$$\dot{x}(t,i+1) = \mathrm{A}_0 x(t,i) + \mathrm{A}_1 \dot{x}(t,i) + \mathrm{A}_2 x(t,i+1) + \mathrm{B}_0 u(t,i) + \mathrm{B}_1 \dot{u}(t,i) + \mathrm{B}_2 u(t,i+1) \tag{1.9}$$

$$y(t,i) = \mathrm{C}x(t,i) + \mathrm{D}u(t,i), \tag{1.10}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t,i) = \dfrac{\partial x(t,\, i)}{\partial t}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. A_k, B_k, C, et D sont des matrices réelles de dimension appropriées avec $k = 0, 1, 2$.

Les conditions initiales associées à l'équation (1.9) sont

$$\begin{aligned} x(t_0,\, i) &= x(0,\, i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \\ x(t,\, i_0) &= x(t,\, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \dot{x}(t,\, i_0) &= \dot{x}(t,\, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques définitions et notions fondamentales sur certaines fonctions spéciales et d'autres générales. Puis, nous avons exposé les différents types des systèmes dynamiques bidimensionnels. Une étude de solvabilité sera faite sur l'un des systèmes proposé dans les chapitres qui suivant.

Chapitre 2

Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride par les transformations de Laplace et de Z

1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques définitions et propriétés essentielles sur la transformation de Laplace aussi celle en Z. Ces deux transformations seront utilisées pour la solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride.

2 Transformation de Laplace

La définition de la transformée de Laplace à la fois directe et inverse ainsi que leurs propriétés sont présentées dans cette section.

2.1 Transformation de Laplace directe

Définition 2.1 [5] *Soit f une fonction de la variable réelle t. La transformée de Laplace la fonction f lorsqu'elle existe est la fonction $\mathrm{F} = \mathscr{L}[f]$ de la variable complexe s donnée par*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)](s) &= \mathrm{F}(s), \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \end{aligned}$$

Théorème 2.2 [3, 5] *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et d'ordre exponentiel. Alors, f admet la transformée de Laplace*

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Exemple 2.3 *Considérons la fonction*

$$f(t) = t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)](s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,\\ &= \int_0^\infty te^{-st}dt,\\ &= \frac{1}{s^2}, \quad pour \quad \operatorname{Re}(s)>0.\end{aligned}$$

Proposition 2.4 [3, 5] *Pour toutes fonctions f et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ admettent des transformées de Laplace avec $f\in\mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$, nous avons les propriétés suivantes*

1. **Linéarité :**
$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)](s)=\mathscr{L}[f(t)](s)+\mathscr{L}[g(t)](s),$$
et
$$\mathscr{L}[kf(t)](s)=k\mathscr{L}[f(t)](s), \qquad k\in\mathbb{R}.$$
2. **Dérivation :**
$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\mathscr{L}[f(t)](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}.$$
En particulier, si $n=1$, nous aurons
$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](s)=s\mathscr{L}[f(t)](s)-f(0). \tag{2.1}$$
3. **Convolution :**
$$\mathscr{L}\left[(f\star g)(t)\right](s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\,\mathscr{L}\left[f(t)\right](s),$$
où
$$(f\star g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau.$$

Proposition 2.5 [5, 10] *Soit $t\in\mathbb{R}_+$ et soit δ l'impulsion de Dirac. Alors,*

1. $\mathscr{L}\left[\dfrac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s)=s^{-(a+1)}, \quad a>1.$
2. $\mathscr{L}[\delta(t)](s)=1.$

Preuve.

1. Nous avons
$$\mathscr{L}\left[\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s)=\int_0^\infty \frac{t^a}{\Gamma(a+1)}e^{-st}dt.$$
Posons
$$\begin{aligned} u&=t^a &&\Rightarrow\quad du=at^{a-1}dt,\\ v&=-\tfrac{1}{s}e^{-st} &&\Leftarrow\quad dv=e^{-st}dt.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s) &= \int_0^\infty \frac{t^a}{\Gamma(a+1)}e^{-st}dt,\\ &= -\frac{t^a}{s\Gamma(a+1)}e^{-st}\bigg|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{a}{s\Gamma(a+1)}t^{a-1}e^{-st}dt,\\ &= \int_0^\infty \frac{a}{s\Gamma(a)}t^{a-1}e^{-st}dt,\end{aligned}$$
par une intégration par partie $a-$fois, il découle
$$\mathscr{L}\left[\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s)=s^{-(a+1)}, \quad a>1.$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[\delta(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt, \\ &= \left. e^{-st} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\mathscr{L}[\delta(t)](s) = 1.$$

■

2.2 Transformation de Laplace inverse

Définition 2.6 [5, 10] *La transformée de Laplace inverse de l'image* $\mathrm{F}(s)$ *est la fonction* $f(t)$ *définie par*

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right](t), \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} \mathrm{F}(s) e^{st} ds. \end{aligned}$$

Exemple 2.7 *Soit la fonction* $\mathrm{F}(s)$ *définie par*

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s}.$$

Cherchons la fonction f *transformée de Laplace inverse de la fonction* F. *Nous avons,*

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)](t), \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} \mathrm{F}(s) e^{st} ds, \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds. \end{aligned}$$

De [17], *il découle*

$$f(t) = 1, \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

3 Transformation en Z

Dans cette section, la définition de la transformée en Z directe et inverse ainsi que leurs propriétés sont rappelées.

3.1 Transformation en Z directe

Définition 3.1 [10, 13] *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite. On appelle transformée en* Z *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la fonction, notée* $\mathrm{Z}[x_n]$, *de la variable complexe* z *définie, lorsqu'il y a convergence, par*

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(z) &= \mathrm{Z}[x_n](z), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2 *Soit la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout entier* n, $x_n = 1$. *Alors,*

$$\begin{aligned} Z[1](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} 1z^{-n}, \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$Z[1](z) = \frac{z}{z-1}.$$

Remarque 3.3 [13] *Vu les résultats sur le rayon de convergence d'une série entière, trois cas peuvent se présenter*

- *Soit la transformée en* Z *est définie quel que soit le nombre complexe* z, *non nul.*
- *Soit il existe un nombre réel positif ou nul* R *tel que pour* z : $|z| > R$ *la transformée en* Z *est définie, et pour* z *tel que* $|z| < R$ *la transformée en* Z *n'est pas définie.*
- *Soit la transformée en* Z *n'est pas définie pour aucun nombre complexe* z.

Proposition 3.4 [10, 13] *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites admettent des transformées en* Z *et soient* a *et* b *deux réels. Ainsi, nous avons les propriétés suivantes*

1. **Linéarité :**
$$Z[au_n + bw_n](z) = aZ[u_n](z) + bZ[w_n](z).$$
2. **Retard :**
$$Z[x_{n-k}](z) = z^{-k} Z[x_n](z), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n < k.$$
3. **Avance :**
$$Z[x_{n+k}](z) = z^k Z[x_n](z) - x_0 z^k - x_1 z^{k-1} - \cdots - x_{k-1} z, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$
4. **Convolution :**
$$Z[(u \star w)_n](z) = Z[u_n](z) Z[w_n](z),$$
où
$$(u \star w)_n = \sum_{k=0}^{\infty} n_{n-k} w_k.$$

Proposition 3.5 [13] *La transformée en Z de la suite de Dirac retardée de* k, $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad n = k, \end{cases} \tag{2.3}$$

est

$$Z[\delta_{n-k}](z) = z^{-k}.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} Z[\delta_{n-k}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-k} z^{-n}, \\ &= 0 + \cdots + 0 + z^{-k} + 0 + \cdots, \end{aligned}$$

D'où

$$Z[\delta_{n-k}](z) = z^{-k}.$$

■

3.2 Transformation en Z inverse

Définition 3.6 [10, 13] *La transformée en Z inverse est donnée par la formule*

$$\begin{aligned} x_n &= Z^{-1}[X(z)], \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

Remarque 3.7 *En pratique, le calcul de l'intégrale exprimée par l'équation* (2.4) *s'effectue souvent à l'aide du théorème des résidus* [17].

4 Solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride

La résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride est présentée dans cette section en utilisant la transformation de Laplace et la transformée en Z ainsi que leurs propriétés.

4.1 Préliminaires

Soit le système dynamique linaire bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes [9]

$$\dot{x}(t, i+1) = A_0 x(t,i) + A_1 \dot{x}(t,i) + A_2 x(t, i+1) + B_0 u(t,i) + B_1 \dot{u}(t,i) + B_2 u(t, i+1) \tag{2.5}$$

$$y(t,i) = Cx(t,i) + Du(t,i), \tag{2.6}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t,i) = \dfrac{\partial x(t,i)}{\partial t}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. A_k, B_k, C, et D sont des matrices réelles de dimension appropriées avec $k = 0, 1, 2$.

Les conditions initiales associées à l'équation (2.5) sont

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), & i \in \mathbb{Z}_+, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), & t \in \mathbb{R}_+, \\ \dot{x}(t, i_0) &= \dot{x}(t, 0), & t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Définition 4.1 [9] *Le système décrit par l'équation* (2.5) *est dit régulier si et seulement si*

$$\det\left[I_{n\times n} - A_0 s^{-1} z^{-1} - z^{-1} A_1 - s^{-1} A_2\right] \neq 0, \tag{2.7}$$

pour un certain $s, z \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 4.2 [9] *Soit g une matrice définie par*

$$G(s,z) = I_{n\times n} - A_0 s^{-1} z^{-1} - z^{-1} A_1 - s^{-1} A_2.$$

Si $\det G(s,z) \neq 0$, *alors,*

$$G(s,z)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} s^{-p} z^{-q},$$

où

$$T_{pq} = \begin{cases} I_{n\times n} & \text{si} \quad p = q = 0, \\ A_0 T_{p-1,q-1} + A_1 T_{p,q-1} + A_2 T_{p-1,q} & \text{si} \quad p+q > 0, \\ 0 & \text{si} \quad p, q < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

4.2 Résultat

Considérons le système dynamique bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes [9]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t,i+1) &= \mathrm{A}_0 x(t,i)+\mathrm{A}_1\dot{x}(t,i)+\mathrm{A}_2 x(t,i+1)+\mathrm{B}_0 u(t,i)+\mathrm{B}_1\dot{u}(t,i)+\mathrm{B}_2 u(t,i+1)\qquad (2.9)\\ y(t,i) &= \mathrm{C}x(t,i)+\mathrm{D}u(t,i),\qquad (2.10)\end{aligned}$$

où $t\in\mathbb{R}_+$ et $i\in\mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t,i)=\dfrac{\partial x(t,i)}{\partial t}$. $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ et $y\in\mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. A_k, B_k, C, et D sont des matrices réelles de dimension appropriées avec $k=0,1,2$.

Les conditions initiales associées à l'équation (2.9) sont

$$\begin{aligned}x(t_0,i) &= x(0,i), & i\in\mathbb{Z}_+,\\ x(t,i_0) &= x(t,0), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dot{x}(t,i_0) &= \dot{x}(t,0), & t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Supposons que le système dynamique décrit par l'équation (2.9) est régulier, i.e. ;

$$\det\left[\mathrm{I}_{n\times n}-\mathrm{A}_0 s^{-1}z^{-1}-z^{-1}\mathrm{A}_1-s^{-1}\mathrm{A}_2\right]\neq 0,\qquad (2.11)$$

pour un certain $s\in\mathbb{C}^*$ et un certain $z\in\mathbb{C}^*$.

Ainsi, le théorème suivant décrit la trajectoire du système dynamique décrit par l'équation (2.9) par l'utilisation de la transformation de Laplace et la transformée en Z.

Théorème 4.3 [9] *Le système dynamique linéaire bidimensionnel hybride décrit par l'équation (2.9) admet comme trajectoire*

$$\begin{aligned}x(t,i) = &\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{pi}}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}x(\tau,0)d\tau-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{pi}\mathrm{A}_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^{p}x(\tau,0)d\tau\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(p+1)}t^p x(0,q)-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{A}_1}{\Gamma(p+1)}t^p x(0,q)-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(p+1)}t^p x(0,0)\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{B}_0}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^{p}u(\tau,q)\,d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{B}_1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}u(\tau,q)\,d\tau\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}\mathrm{B}_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^{p}u(\tau,q)\,d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{B}_1}{\Gamma(p+1)}t^p u(0,q)\\ &-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}\mathrm{B}_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^{p}u(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler et T_{pq} est la matrice de transition définie par la formule (2.8).

Preuve. Considérons le système dynamique bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes

$$\dot{x}(t,i+1)=\mathrm{A}_0 x(t,i)+\mathrm{A}_1\dot{x}(t,i)+\mathrm{A}_2 x(t,i+1)+\mathrm{B}_0 u(t,i)+\mathrm{B}_1\dot{u}(t,i)+\mathrm{B}_2 u(t,i+1).\qquad (2.12)$$

Supposons que $X(s,z)$ et $U(s,z)$ sont, respectivement, les transformées de Laplace et en Z des fonctions $x(t,i)$ et $u(t,i)$. Ainsi, l'application de la transformée de Laplace et la transformée en Z (formules (2.1) et (2.2)) à l'équation (2.12) donne

$$\begin{aligned} szX(s,z) - szX(s,0) - zX(0,z) + zx(0,0) =& A_0X(s,z) + A_1sX(s,z) - A_1X(0,z) \\ &+ A_2zX(s,z) - A_2zX(s,0) + B_0U(s,z) \\ &+ B_1sU(s,z) - B_1U(0,z) + B_2zU(s,z) \\ &- B_2zU(s,0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left(I_{n\times n} - A_0s^{-1}z^{-1} - z^{-1}A_1 - s^{-1}A_2\right)X(s,z) =& X(s,0) - s^{-1}A_2X(s,0) + s^{-1}X(0,z) \\ &- s^{-1}z^{-1}A_1X(0,z) - s^{-1}x(0,0) \\ &+ s^{-1}z^{-1}B_0U(s,z) + z^{-1}B_1U(s,z) \\ &+ s^{-1}B_2U(s,z) + s^{-1}z^{-1}B_1U(0,z) \\ &- s^{-1}B_2U(s,0). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Comme le système décrit par l'équation (2.12) est régulier (formule (2.11)), alors, l'expression (2.14) devient

$$\begin{aligned} X(s,z) =& G^{-1}(s,z)\Big(X(s,0) - s^{-1}A_2X(s,0) + s^{-1}X(0,z) - s^{-1}z^{-1}A_1X(0,z) \\ &- s^{-1}x(0,0) + s^{-1}z^{-1}B_0U(s,z) + z^{-1}B_1U(s,z) + s^{-1}B_2U(s,z) \\ &+ s^{-1}z^{-1}B_1U(0,z) - s^{-1}B_2U(s,0)\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned} G^{-1}(s,z) &= \left(I_{n\times n} - A_0s^{-1}z^{-1} - z^{-1}A_1 - s^{-1}A_2\right)^{-1}, \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}s^{-p}z^{-q} \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $G^{-1}(s,z)$ par son expression dans l'équation (2.15), il découle

$$\begin{aligned} X(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}s^{-p}z^{-q}\Big(& X(s,0) - s^{-1}A_2X(s,0) + s^{-1}X(0,z) - s^{-1}z^{-1}A_1X(0,z) \\ &- s^{-1}x(0,0) + s^{-1}z^{-1}B_0U(s,z) + z^{-1}B_1U(s,z) + s^{-1}B_2U(s,z) \\ &+ s^{-1}z^{-1}B_1U(0,z) - s^{-1}B_2U(s,0)\Big) \end{aligned}$$

A fin de retrouver l'expression de $x(t,i)$, il suffit d'appliquer les transformations de Laplace et en Z inverses. Pour ce faire, nous nous basons sur les expressions présenter dans les propositions 2.4, 2.5, 3.4 et en dernier la proposition 3.5.

En effet,

- Posons

$$I_1(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}s^{-p}z^{-q}X(s,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_1(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}Z^{-1}\left[z^{-q}\right](i)\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-p}X(s,0)\right](t), \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{pi}}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}x(\tau,0)d\tau. \end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_2(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}s^{-(p+1)}z^{-q}\mathrm{A}_2\mathrm{X}(s,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_2(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{A}_2\mathrm{Z}^{-1}\left[z^{-q}\right](i)\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\mathrm{X}(s,0)\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{pi}\mathrm{A}_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^p\,x(\tau,0)\,d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_3(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}s^{-(p+1)}z^{-q}\mathrm{X}(0,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_3(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{Z}^{-1}\left[z^{-q}\mathrm{X}(0,z)\right](i)\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(p+1)}\,t^p\,x(0,\,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_4(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}s^{-(p+1)}z^{-(q+1)}\mathrm{A}_1\mathrm{X}(0,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_4(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{A}_1\mathrm{Z}^{-1}\left[z^{-(q+1)}\mathrm{X}(0,z)\right](i)\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(p+1)}\,t^p\,x(0,\,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_5(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}s^{-(p+1)}z^{-q}x(0,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_5(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{Z}^{-1}\left[z^{-q}\right](i)\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\right](t)\,x(0,0),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(p+1)}\,t^p\,x(0,\,0).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_6(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}s^{-(p+1)}z^{-(q+1)}\mathrm{B}_0\mathrm{U}(s,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_6(s,z)](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\,\mathrm{B}_0 z^{-(q+1)}\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\mathrm{U}(s,z)\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\,\mathrm{B}_0 z^{-(q+1)}\int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)}\mathrm{U}(\tau,z)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_6(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_0 \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)} Z^{-1}\left[z^{-(q+1)}U(\tau,z)\right](i)\, d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1}\, B_0}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^p u(\tau,q)\, d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_7(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} s^{-p} z^{-(q+1)} B_1 U(s,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[I_7(s,z)](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_1 z^{-(q+1)}\, \mathscr{L}^{-1}\left[s^{-p}U(s,z)\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_1 z^{-(q+1)} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} U(\tau,z)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_7(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_1 \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} Z^{-1}\left[z^{-(q+1)}U(\tau,z)\right](i)\, d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1}\, B_1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} u(\tau,q)\, d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_8(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} s^{-(p+1)} z^{-q} B_2 U(s,z)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[I_8(s,z)](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_2 z^{-q}\, \mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1}U(s,z)\right](t),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_2 z^{-q} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)} U(\tau,z)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_8(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_2 \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)} Z^{-1}\left[z^{-q}U(\tau,z)\right](i)\, d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} \frac{T_{p,i-q}\, B_2}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{p} u(\tau,q)\, d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_9(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} s^{-(p+1)} z^{-(q+1)} B_1 U(0,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_9(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}\, B_1\, \mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}\right](t)\, Z^{-1}\left[z^{-(q+1)}U(0,z)\right](i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1}\, B_1}{\Gamma(p+1)} t^p\, u(0,q).
\end{aligned}$$

- Posons
$$I_{10}(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}T_{pq}s^{-(p+1)}z^{-q}B_2U(s,0).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}Z^{-1}\left[\mathscr{L}^{-1}[I_{10}(s,z)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}T_{pq}B_2\,\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-(p+1)}U(s,0)\right](t)\,Z^{-1}\left[z^{-q}\right](i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{p,i}\,B_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^p\,u(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

En dernier, la solution du système dynamique décrit par l'équation (2.12) est

$$\begin{aligned}x(t,i)=&\sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{pi}}{\Gamma(p)}\int_0^t(t-\tau)^{p-1}\,x(\tau,0)d\tau-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{pi}A_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t(t-\tau)^p\,x(\tau,0)d\tau\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{T_{p,i-q}}{\Gamma(p+1)}t^p\,x(0,q)-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{T_{p,i-q-1}\,A_1}{\Gamma(p+1)}t^p\,x(0,q)-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{p,i}}{\Gamma(p+1)}t^p\,x(0,0)\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{T_{p,i-q-1}\,B_0}{\Gamma(p+1)}\int_0^t(t-\tau)^p u(\tau,q)\,d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{T_{p,i-q-1}\,B_1}{\Gamma(p)}\int_0^t(t-\tau)^{p-1}u(\tau,q)\,d\tau\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{T_{p,i-q}\,B_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t(t-\tau)^p u(\tau,q)\,d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{T_{p,i-q-1}\,B_1}{\Gamma(p+1)}t^p\,u(0,q)\\ &-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{p,i}\,B_2}{\Gamma(p+1)}\int_0^t(t-\tau)^p\,u(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

■

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions et propriétés de la transformation de Laplace et transformation en Z a fin de les utilisées par la suite pour la résolution de notre système dynamique linéaire bidimensionnel hybride.

Chapitre 3

Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride par les transformations de Sumudu continue et discrète

1 Introduction

La transformée de Sumudu, récemment découverte, est un outil très prometteur vu qu'elle permette la résolution de diverses problèmes et dans différents domaines, comme par exemple, la résolution des systèmes dynamiques de tous types. Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques définitions et propriétés de la transformée de Sumudu discrète et continue, et nous les utiliserons par la suite pour la solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride.

2 Transformation de Sumudu continue

Une nouvelle transformation, dite transformée de Sumudu, est présentée dans cette section dans un cas continu ainsi que ces différentes propriétés.

Considérons l'ensemble de fonctions $\mathscr{A}$ défini par

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t) \mid \exists \mathrm{M},\, \tau_1,\, \tau_2 > 0,\, |x(t)| < \mathrm{M}e^{|t|\tau_j} \;\text{ si }\; t \in (-1)^j \times [0, \infty[\right\}.$$

2.1 Transformation de Sumudu continue directe

Définition 2.1 [1, 2, 16] *La transformation de Sumudu* X *d'une fonction $x \in \mathscr{A}$ est donnée par la formule*

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}[x(t)](v) &= \mathrm{X}(v), \\
&= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v}} x(t)\,dt, \qquad v \in (-\tau_1, \tau_2),\; \mathrm{Re}(v) > 0.
\end{aligned}$$

Théorème 2.2 [1, 2, 16] *Toute fonction continue x définie sur l'ensemble $\mathscr{A}$ admet une transformée de Sumudu* X *de la forme*

$$\mathscr{S}[x(t)](v) = \int_0^{\infty} e^{-t} x(vt)\,dt, \qquad v \in (-\tau_1, \tau_2).$$

Exemple 2.3 *Soit la fonction de Heaviside définie par*

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}[\mathrm{H}(t)](v) &= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} \mathrm{H}(t)e^{-\frac{t}{v}}\,dt, \\ &= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v}}\,dt. \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathscr{S}[\mathrm{H}(t)](v) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons conclure que la transformée de Sumudu de la fonction Heaviside est la fonction de Heaviside elle-même. Autrement dit, la fonction de Heaviside et sa transformée de Sumudu sont égales dans le demi plan positif.

Proposition 2.4 [1, 2, 16] *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^*$ et pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{A}$ de sorte que f soit n fois différentiable, nous avons les propriétés suivantes*

1. **linéarité :**
$$\mathscr{S}\left[af(t) + bg(t)\right](v) = a\mathscr{S}\left[f(t)\right](v) + b\mathscr{S}\left[g(t)\right](v).$$

2. **Dérivation :**
$$\mathscr{S}\left[f^{(n)}\right](v) = \frac{\mathscr{S}\left[f(t)\right](v)}{v^n} - \frac{f(0)}{v^n} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{v}.$$

En particulier, pour $n = 1$, nous aurons

$$\mathscr{S}\left[f'(t)\right](v) = \frac{\mathscr{S}\left[f(t)\right](v)}{v} - \frac{f(0)}{v}. \tag{3.1}$$

3. **Convolution :**
$$\mathscr{S}\left[(f \star g)(t)\right](v) = v\mathscr{S}\left[f(t)\right](v)\mathscr{S}\left[g(t)\right](v),$$

où

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau - t)\,g(\tau)\,d\tau.$$

Proposition 2.5 [1, 2] *Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit δ l'impulsion de Dirac. Alors,*

1. $\mathscr{S}\left[\dfrac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right](v) = v^{a-1}$, *pour tout $a > 0$.*
2. $\mathscr{S}\left[\delta(t)\right](v) = \dfrac{1}{v}$.

2.2 Transformation de Sumudu continue inverse

Définition 2.6 [1, 2] *La transformée de Sumudu inverse de l'image $\mathrm{X}(v)$ est la fonction $x(t)$ définie par*

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{S}^{-1}[\mathrm{X}(v)](t), \\ &= -\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \frac{1}{v}e^{vt}\mathrm{X}(v)\,dv. \end{aligned}$$

3 Transformation de Sumudu discrète

Cette section est dédiée à la transformation de Sumudu discrète. La définition de cette nouvelle transformation est présentée, dans un premier lieu, suivie par ses différentes propriétés déjà établit et d'autres que nous développons.

Définition 3.1 [6, 7] *Soit $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction. La transformée de Sumudu discrète, notée par $\mathscr{S}_d$, de la fonction x est définie par*

$$\mathscr{S}_d[x_k](w) = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1}, \quad w \neq -1. \tag{3.2}$$

Exemple 3.2 *Soit δ la suite de Dirac définie par*

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, sa transformée de Sumudu discrète est donnée l'expression suivante

$$\mathscr{S}_d[\delta_k](w) = \frac{1}{w+1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_d[\delta_k](w) &= \frac{1}{w}\sum_{i=0}^{\infty} \delta_k \left(\frac{w}{w+1}\right)^{i+1}, \\ &= \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{0+1}\delta_0 + \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{1+1}\delta_1 + \cdots, \\ &= \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{1}\delta_0, \\ &= \frac{1}{w+1}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3 [6, 7] *Vu les résultats sur le rayon de convergence de la série (3.2), trois cas peuvent se présenter*

- *Si $0 < R < \infty$. Alors, la série (3.2) est convergente pour $\left|\frac{w+1}{w}\right| > R$, autrement, elle diverge.*
- *Si $R = 0$. Alors, la série (3.2) est convergente pour tout w sauf possiblement pour $w = -1$.*
- *Si $R = \infty$. Alors, la série (3.2) diverge partout.*

Proposition 3.4 [6, 7] *pour toutes fonctions x et $y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ admettent des transformées de Sumudu discrètes, et pour tout réel a, nous avons les propriétés suivantes*

1. **Linéarité :**

$$\mathscr{S}_d[(x+y)_k](w) = \mathscr{S}_d[x_k](w) + \mathscr{S}_d[y_k](w),$$

et

$$\mathscr{S}_d[ax_k](w) = a\mathscr{S}_d[x_k](w).$$

2. **Avance :**

$$\mathscr{S}_d[x_{k+m}](w) = \left(\frac{w+1}{w}\right)^m \mathscr{S}_d[x_k](w) - \sum_{n=0}^{m-1}\frac{(w+1)^{m-n-1}}{w^{m-n}}x_n. \tag{3.3}$$

3. **Retard :**

$$\mathscr{S}_d\left[x_{n-m}\right](w)=\left(\frac{w}{w+1}\right)^m \mathscr{S}_d\left[x_n\right](w)+\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1} x_{m-k}. \tag{3.4}$$

4. **Convolution :**

$$\mathscr{S}_d[(x\star y)_k](w)=\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(x\star y)_k\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1},$$

où

$$(x\star y)_k=\sum_{m=0}^{\infty} x_{k-m}y_m$$

Proposition 3.5 *Soit* δ *la suite de Dirac retardé définie par*

$$\delta_{k-q}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad k=q,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors, sa transformée de Sumudu Discrète est

$$\mathscr{S}_d[\delta_{k-q}](w)=\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}.$$

Preuve. Soit $q\in\mathbb{N}$. L'utilisation de la formule de la transformation de Sumudu discrète du retard (formule (3.4)), donne

$$\mathscr{S}_d\left[\delta_{k-q}\right](w) \quad = \quad \left(\frac{w}{w+1}\right)^q \mathscr{S}_d[\delta_k](w)+\frac{1}{w}\sum_{i=0}^{q-1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{i+1}\delta_{i-q}.$$

Comme

$$\delta_{k-q}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad k=q,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$\mathscr{S}_d\left[\delta_k\right](w)=\frac{1}{w+1},$$

il en résulte

$$\mathscr{S}_d\left[\delta_{i-q}\right](w) \quad = \quad \frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}.$$

■

4 Solvabilité d'un système dynamique linéaire hybride

La résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride est présentée dans cette section en utilisant la transformation de Sumudu continue et discrète ainsi que leurs propriétés.

4.1 Préliminaires

Soit le système dynamique linaire bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes [9]

$$\dot{x}(t,i+1) = A_0x(t,i)+A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+B_0u(t,i)+B_1\dot{u}(t,i)+B_2u(t,i+1) \tag{3.5}$$
$$y(t,i) = Cx(t,i)+Du(t,i), \tag{3.6}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t,i) = \dfrac{\partial x(t,\,i)}{\partial t}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. A_k, B_k, C, et D sont des matrices réelles de dimension appropriées avec $k = 0, 1, 2$.

Les conditions initiales associées à l'équation (3.5) sont

$$\begin{aligned} x(t_0,\,i) &= x(0,\,i), & i \in \mathbb{Z}_+,\\ x(t,\,i_0) &= x(t,\,0), & t \in \mathbb{R}_+,\\ \dot{x}(t,\,i_0) &= \dot{x}(t,\,0), & t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

En s'inspirant des résultats présentés dans [9], il découle

Définition 4.1 *Le système décrit par l'équation* (3.5) *est dit régulier si et seulement si*

$$\det\left[I_{n\times n} - v\frac{w}{w+1}A_0 - \frac{w}{w+1}A_1 - vA_2\right] \neq 0, \tag{3.7}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$ *et un certain* $w \in \mathbb{C} - \{-1\}$.

Proposition 4.2 *Soit g une matrice définie par*

$$G(v,\,w) = I_{n\times n} - v\frac{w}{w+1}A_0 - \frac{w}{w+1}A_1 - vA_2.$$

Si pour un certain $v \in \mathbb{C}$ *et un certain* $w \in \mathbb{C} - \{-1\}$, $\det G(v,\,w) \neq 0$, *alors,*

$$G(v,\,w)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq}v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^q,$$

où

$$T_{pq} = \begin{cases} I_{n\times n} & \text{si} \quad p = q = 0,\\ A_0T_{p-1,q-1} + A_1T_{p,q-1} + A_2T_{p-1,q} & \text{si} \quad p+q > 0,\\ 0 & \text{si} \quad p,\,q < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

4.2 Résultat

Considérons le système dynamique bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes [9]

$$\dot{x}(t,i+1) = A_0x(t,i)+A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+B_0u(t,i)+B_1\dot{u}(t,i)+B_2u(t,i+1) \tag{3.9}$$
$$y(t,i) = Cx(t,i)+Du(t,i), \tag{3.10}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t,i) = \dfrac{\partial x(t,\,i)}{\partial t}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. A_k, B_k, C, et D sont des matrices réelles de dimension appropriées avec $k = 0, 1, 2$.

Les conditions initiales associées à l'équation (3.9) sont

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \dot{x}(t, i_0) &= \dot{x}(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Supposons que le système dynamique décrit par l'équation (3.9) est régulier, i.e. ;

$$\det\left[\mathrm{I}_{n\times n} - v\frac{w}{w+1}\mathrm{A}_0 - \frac{w}{w+1}\mathrm{A}_1 - v\mathrm{A}_2\right] \neq 0, \tag{3.11}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$ et un certain $w \in \mathbb{C} - \{-1\}$.

De plus, supposons que $\mathrm{X}(v, w)$ et $\mathrm{U}(v, w)$ sont, respectivement, les transformées de Sumudu continue et discrète des fonctions $x(t, i)$ et $u(t, i)$. Ainsi, l'application de la transformée de Sumudu continue et discrète (formules (3.1) et (3.3)) à l'équation (3.9) donne

$$\begin{aligned} \frac{w+1}{w}\mathrm{X}(v,w) - \frac{1}{w}\mathrm{X}(v,0) - \frac{w+1}{w}\mathrm{X}(0,w) + \frac{1}{w}x(0,0) =& v\mathrm{A}_0\mathrm{X}(v,w) + \mathrm{A}_1\mathrm{X}(v,w) - \mathrm{A}_1\mathrm{X}(0,w) \\ &+ v\mathrm{A}_2\frac{w+1}{w}\mathrm{X}(v,w) - v\mathrm{A}_2\frac{\mathrm{X}(v,0)}{w} \\ &+ v\mathrm{B}_0\mathrm{U}(v,w) + \mathrm{B}_1\mathrm{U}(v,w) - \mathrm{B}_1\mathrm{U}(0,w) \\ &+ v\mathrm{B}_2\frac{w+1}{w}\mathrm{U}(v,w) - v\mathrm{B}_2\frac{\mathrm{U}(v,0)}{w}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{I}_{n\times n} - \frac{vw}{w+1}\mathrm{A}_0 - \frac{w}{w+1}\mathrm{A}_1 - v\mathrm{A}_2\right)\mathrm{X}(v,w) =& \frac{1}{w+1}\mathrm{X}(v,0) + \mathrm{X}(0,w) - \frac{1}{w+1}x(0,0) \\ &- \mathrm{A}_1\frac{w}{w+1}\mathrm{X}(0,w) - \mathrm{A}_2\frac{v}{w+1}\mathrm{X}(v,0) \\ &+ \left(\mathrm{B}_0\frac{vw}{w+1} + \mathrm{B}_1\frac{w}{w+1} + \mathrm{B}_2 v\right)\mathrm{U}(v,w) \\ &- \mathrm{B}_1\frac{w}{w+1}\mathrm{U}(0,w) - \mathrm{B}_2\frac{v}{w+1}\mathrm{U}(v,0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme le système décrit par l'équation (3.9) est régulier (formule (3.11)), alors, par l'utilisation de la proposition 4.2, l'expression (3.12) devient

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(v,w) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\Bigg[& v^p\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{X}(v,0) + v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{X}(0,w) \\ &- v^p\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}x(0,0) - \mathrm{A}_1 v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{X}(0,w) \\ &- \mathrm{A}_2 v^{p+1}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{X}(v,0) + \mathrm{B}_0 v^{p+1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{U}(v,w) \\ &+ \mathrm{B}_1 v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{U}(v,w) - \mathrm{B}_1 v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{U}(0,w) \\ &+ \mathrm{B}_2 v^{p+1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{U}(v,w) - \mathrm{B}_2 v^{p+1}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{U}(v,0)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A fin de retrouver l'expression de $x(t, i)$, il suffit d'appliquer les transformations de Sumudu continue et discrète inverses. Pour ce faire, nous nous basons sur les expressions présentées dans les propositions 2.4, 2.5, 3.4 et en dernier la proposition 3.5.

En effet,

- Posons

$$\mathrm{I}_1(v,w)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}v^p\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{X}(v,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_1(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathscr{S}^{-1}[v^p\mathrm{X}(v,0)](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}x(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_1(v,w)](t,i)] &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}x(\tau,0)d\tau\,\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\right](i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}x(\tau,0)d\tau\delta[i-q],\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pi}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}x(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_2=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{X}(0,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_2(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{X}(0,w)\mathscr{S}^{-1}[v^p](t,w),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{X}(0,w)\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_2(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\mathscr{S}_d^{-1}\left[\left(\frac{w}{w+1}\right)^q\mathrm{X}(0,w)\right](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}x(0,q).\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_3=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\,v^p\,\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\,x(0,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_d^{-1}\left[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_3(v,w)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathscr{S}^{-1}[v^p](t)\,\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\right](i)\,x(0,0),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pi}\,\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\,x(0,0).\end{aligned}$$

- Posons

$$I_4 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} v^p \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} A_1 X(0,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[I_4(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} A_1 \mathscr{S}^{-1}[v^p](t)\mathscr{S}_d^{-1}\left[\left(\frac{w}{(w+1)}\right)^{q+1} X(0,w)\right](i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} T_{p,i-q-1} A_1 \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} x(0,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_5 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} v^{p+1} \frac{w^q}{(w+1)^{q+1}} A_2 X(v,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[I_5(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} A_2 \mathscr{S}^{-1}\left[v^{p+1}X(v,0)\right]\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\right](i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty} T_{pi} A_2 \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)} x(\tau,0)\,d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_6 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} v^{p+1} \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} B_0 U(v,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[I_6(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} B_0 \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} \mathscr{S}^{-1}[v^{p+1}U(v,w)](t,w),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} B_0 \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)} U(\tau,w)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[I_6(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} B_0 \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)} \mathscr{S}_d^{-1}\left[\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} U(\tau,w)\right](i)\,d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i-1} T_{p,i-q-1} B_0 \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p+1)} u(\tau,q)\,d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$I_7 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} v^p \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} B_1 U(v,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[I_7(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} B_1 \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} \mathscr{S}^{-1}[v^p u(v,w)](t,w),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} B_1 \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} U(\tau,w)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_7(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_1\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}\mathscr{S}_d^{-1}[\frac{w^{q+1}}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{U}(\tau,w)](i)d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{B}_1\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)}u(\tau,q)d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_8 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}v^p\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{B}_1\mathrm{U}(0,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_8(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_1\mathscr{S}^{-1}[v^p](t)\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^{q+1}}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{U}(0,w)\right](i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\mathrm{T}_{p,i-q-1}\mathrm{B}_1\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}u(0,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_9 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}v^{p+1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q}\mathrm{B}_2\mathrm{U}(v,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_9(v,w)](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_2\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q}\mathscr{S}[v^{p+1}\mathrm{U}(v,w)](t,w),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_2\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)}u(\tau,w)d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_9(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_2\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)}u(\tau,w)\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^{q}}{(w+1)^{q}}\mathrm{U}(\tau,w)\right](i)\,d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\mathrm{B}_2\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)}u(\tau,q)d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_{10} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}v^{p+1}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{B}_2\mathrm{U}(v,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_{10}(v,w)]](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pq}\mathrm{B}_2\mathscr{S}^{-1}\left[v^{p+1}\mathrm{U}(v,0)\right](t)\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^{q}}{(w+1)^{q+1}}\right](i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{pi}\mathrm{B}_2\int_0^t \frac{(t-\tau)^{p}}{\Gamma(p+1)}u(\tau,0)d\tau.
\end{aligned}$$

En dernier, le résultat final est décrit par le théorème suivant

Théorème 4.3 *Le système dynamique linéaire bidimensionnel hybride décrit par l'équation* (3.9) *admet comme trajectoire*

$$
\begin{aligned}
x(t,i) = {} & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{pi}}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1}\, x(\tau,0)\, d\tau - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{pi} A_2}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{p}\, x(\tau,0)\, d\tau \\
& + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} \frac{T_{p,i-q}}{\Gamma(p+1)} t^p\, x(0,q) - \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1} A_1}{\Gamma(p+1)} t^p\, x(0,q) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{p,i}}{\Gamma(p+1)} t^p\, x(0,0) \\
& + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1} B_0}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{p}\, u(\tau,q)\, d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1} B_1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} u(\tau,q)\, d\tau \\
& + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} \frac{T_{p,i-q} B_2}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{p}\, u(\tau,q)\, d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{T_{p,i-q-1} B_1}{\Gamma(p+1)} t^p\, u(0,q) \\
& - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{p,i} B_2}{\Gamma(p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{p}\, u(\tau,0)\, d\tau.
\end{aligned}
$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler et T_{pq} *est la matrice de transition définie par la formule* (3.8).

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions sur la transformée de Sumudu discrète et continue suivie par ses propriétés existantes et d'autres que nous avons développés en s'inspirant des résultats existants. En dernier, ces deux transformations ont été utilisées pour résoudre notre système dynamique bidimensionnel linéaire hybride.

Chapitre 4

Comparaison et discussion

1 Introduction

Ce chapitre fait l'objet d'une étude comparative entre les deux transformations utilisées pour la résolution du système dynamique linéaire bidimensionnel hybride en précisant leurs avantages et limites.

2 Conditions d'existence

Dans cette section, nous discutons les différences existent entre les deux transformation en terme de conditions d'existence. Pour ce faire, nous nous basons sur [11].

2.1 Transformée de Laplace

Une fonction x peut être Laplace transformable si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes

1. x doit être continue par morceaux ;

2. x doit être d'ordre exponentiel ;

3. x satisfait les conditions de Dirichlet .

2.2 Transformée de Sumudu

Si une fonction x est dans l'ensemble $\mathscr{A}$ définit par

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t) / \exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0 |x(t)| < \mathrm{M} e^{\frac{|t|}{t_j}} si \quad t \in (-1)^j \times [0, \infty[\right\},$$

autrement dit

1. x une fonction continue ;

2. x une d'ordre exponentiel.

Alors, sa transformée de Sumudu existe.

2.3 Discussion

A partir de ce qui précède, nous remarquons que la transformée Sumudu possède moins de conditions en comparant avec la transformée de Laplace.

3 Multiplication par un scalaire

La propriété de la multiplication par un scalaire est étayée, pour les deux transformations, dans cette section.

3.1 Transformée de Laplace

Théorème 3.1 [10] *Soit x une fonction admettant une transformée de Laplace* X*. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, nous avons*

$$\mathscr{L}[x(at)](s) = \frac{1}{a} \mathrm{X}\left(\frac{s}{a}\right).$$

3.2 Transformée de Sumudu

Théorème 3.2 [1] *Soit* X *la transformée de Sumudu de la fonction $x \in \mathscr{A}$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathscr{S}[x(at)](v) = \mathrm{X}(av).$$

3.3 Discussion

A partir des deux théorèmes précédant, nous déduirons que la transformation de Laplace change lors de la multiplication par un scalaire contrairement à la transformation de Sumudu.

4 Propriétés des limites

Dans cette section, nous allons étudier la propriétés des limites des deux transformations.

4.1 Transformée de Laplace

Théorème 4.1 [15] *Soit x une fonction admettant une transformée de Laplace* X*. Alors,*

- $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\mathrm{X}(s)$;
- $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} s\mathrm{X}(s)$;

si les limites envisagées existent.

4.2 Transformée de Sumudu

Théorème 4.2 [1, 2] *Soient x et* X *une fonction et sa transformée de Sumudu respectivement admettant des limites au voisinage de* 0 *et de* ∞*. Alors,*

- $\lim\limits_{v\to 0} \mathrm{X}(v) = \lim\limits_{t\to 0} x(t)$,
- $\lim\limits_{v\to\infty} \mathrm{X}(v) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

4.3 Discussion

La transformation de Sumudu ne change pas de voisinage lors d'un passage à la limite contrairement à la transformation de Laplace.

5 Autres propriétés

Une propriété très intéressante de la transformation de Sumudu est que la fonction d'origine et sa transformation de Sumudu ont les même coefficients de Taylor, à l'exception d'un facteur $n!$, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.1 [4] *La transformée de Sumudu amplifie les coefficient de la série de puissance. En effet,*

$$\mathscr{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right](v) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n v^n \tag{4.1}$$

Le pus grand avantage de la transformée de Sumudu est qu'elle permet de résoudre des problèmes sans recourir à un nouveau domaine de fréquence, i. e. ; la transformée de Sumudu permet la préservation de la fréquence et l'unité.

6 Discussion et conclusion

D'après tous ce qui précède, nous pouvons conclure que la transformation la plus avantageuse est celle de Sumudu.

Conclusion

Dans ce manuscrit nous nous sommes intéressé, dans un premier temps, à l'étude de la solvabilité d'un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu et discret par deux transformations différentes à savoir la transformée de Laplace et la transformée en Z qui sont largement utilisée, puis la transformée de Sumudu continue et discrète récemment découverte.

Toutefois, le principal objectif de ce mémoire est de faire une étude comparative entre les différentes transformations utilisées pour la résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride vu qu'au cours de ces dernières années, les différents phénomènes et dans diverses domaines peuvent être modélisé par des systèmes dynamiques linéaires.

A travers cette étude, nous avons conclu que lors de la solvabilité d'un système dynamique linéaire la transformation de Sumudu est meilleure que celle de Laplace.

Bibliographie

[1] **Belgacem, F. B. M., Karaball, A. A. and Kalla, S.** (2003), *Analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations*, Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, **3**, 103–118. 17, 18, 28

[2] **Belgacem, F. B. M. and Karaballi, A. A.** (2006), *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Hindawi Publishing Corporation, 2006, Article ID 91083, 23 pages. https ://doi.org/10.1155/JAMSA/2006/91083 17, 18, 28

[3] **Cohen, A. M.** (2007), *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Numerical Methods and Algorithms, 5, Springer-Verlag US. 7, 8

[4] **Eltayeb, H. and Kiliçman, A.** (2010), *A Note on the Sumudu Transforms and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **4(22)**, 1089–1098. 29

[5] **Granjon, Y.** (2010), *Automatiques : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu,à temps discret, représentation d'état*, Cours et exercices corrigés. 2^{nd} édition, Dunod, Paris. 7, 8, 9

[6] **Jarad, F., Bayram, K., Abdejawad, T. and Baleanu, D.** (2012), *On The Discrete Sumudu Transfrom*, Romanian Reports in Physics, **64(2)**, 347–356. 19

[7] **Jarad, F. and Tas, K.** (2012), *On Sumudu Transform Method in Discrete Fractional Calculus*, Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, 2012, Article ID 270106, 16 pages. doi :10.1155/2012/270106. 19

[8] **Kaczorek, T.** (2002), *Positive 1D and 2D systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd. 4, 5, 6

[9] **Kaczorek, T.** (2010), *Standard and Positive Hybrid Linear SystemsDescribed by the General Model*, Acta Mechanica et Automatica, **5**, 112–116. 6, 11, 12, 21

[10] **Kaczorek, T. and Rogowski, K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, **13**, Springer International Publishing, Switzerland 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 28

[11] **Kiliçman, A., Eltayeb, N. and Atan, R. A. M.** (2011), *A note on the comparison between Laplace and Sumudu transforms*, Bulletin of the IranianMathematical Society, **37**, 131–141. 27

[12] **Lang, F.** (2011), *Transformation de Laplace*, Haute École d'Ingénierie et de gestion du Canton de Vaud. 3, 4

[13] **Lathi, B. P.** (2004), *Linear Systems and Signals*, Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, USA. 9, 10, 11

[14] **Podlubny, I.** (1999), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York. 2, 4

[15] **Vashi, J. and Timol, M. G.** (2016), *Laplace and Sumudu transforms and their application,*,International Journal of Innovation Science, Engineering & Technology,**3(8)**, 538—542. 28

[16] **Watugala, G. K.** (1993), *Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **24**, 35–43. 17, 18

[17] **Yosida, K.** (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 9, 11

Une étude comparative sur la résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel hybride

Ce travail porte essentiellement sur la solvabilité d'un système dynamique bidimensionnel hybride vu son importante utilisation dans de nombreux domaines.

Nous avons, tout d'abord, étudié la résolution du système en question par la transformation de Laplace et celle en Z.

Ensuite, la transformation de Sumudu continue et discrète a été utilisée pour la résolution de notre système.

En dernier, une étude comparative a été faite sur les transformations utilisées afin de motionner leurs avantages et limites.

Mots-Clés. Solvabilité, Système dynamique linéaire bidimensionnel hybride, Transformation de Laplace, Transformée en Z, Transformées de Sumudu continue et discrète.

A comparative study on the resolution of a hybrid two-dimensional linear dynamic system

Abstract : This work focuses on the resolution of a hybrid two-dimensional dynamical system in view of its uses in many fields.

At the first, we have studied the resolution of the dynamical system by the use of Laplace and Z transforms.

Then, the continuous and discrete Sumudu transformations were used for the resolution of our system.

Finally, a comparative study was established on the transformations in order to show their advantages and limitations.

Key words. Solvability, Hybrid two-dimensional dynamical system, Laplace transform, Z transform, discrete and continuous Sumudu transforms.