UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de

MASTER

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Quelques résultats sur les propriétés des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes

Présenté par : Melle. BRAHIMI Samia

Président	**Mme H. BENDAHMANE**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**Mme A. FERRAOUN**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadrant	**Mme M. SAIDANI**	**U. MOSTAGANEM.**

Année universitaire : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail à mes chers parents qui m'ont soutenu pendant toute la période de mes études, pour leurs encouragements et de leurs conseils, ils ont été un exemple parfait pour ma réussite, sans oublier toute ma famille, mes amis, qui étaient une source de bonheur pour moi.

Remerciements

Avant tout, je remercie "DIEU" qui nous a donné le courage, la volonté, la patience, la santé et la force pour finir ce modeste travail.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire. En particulier mon encadreur Mme SAIDANI Mansouria, pour sa totale disposition et ses conseils précieux qui ont permis l'accomplissement de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements aux membres du jury Mme Hafida BENDAHMANE et Mme Amina FERRAOUN qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie aussi l'ensemble de mes professeurs pour leur enseignement, le département de mathématiques et les étudiants de la promotion 2021.

Merci à toutes et à tous.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini et $k \geqslant 2$.

Sous certaines conditions sur les coefficients, nous donnons quelques estimations générales sur l'ordre p-itératif des équations ci-dessus.

Mots-Clés : Fonctions entières, ordre de croissance, l'exposant de convergence.

Abstract

In this manuscript, we study the growth of meromorphic solutions of linear differential equations

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

and

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

where $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ and $F(z) \not\equiv 0$ are meromorphic functions of finite iterated p-order and $k \geqslant 2$.

Under certain conditions on the coefficients, we give some general estimates on the iterated p-order of the above equations.

Keywords : Meremorphic function, order of growth, exponent of convergence.

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe.

En 1982, B. Bank et I. Laine ont traité la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions polynomiales
Après, plusieurs résultats concernant cette étude ont été obtenus, voir par exemple [3,5,6,11].
Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre**, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques définitions concernant la mesure linéaire, la mesure logarithmique.

Dans **le deuxième chapitre,** on traite les résultats de l'article [19], où on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z)$$

où $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini et $k \geqslant 2$.
Sous certaines conditions sur les coefficients, une estimation précise générale sur l'ordre p-itératif des solutions des équations différentielles.

Le dernier chapitre contient quelques exemples d'applications des résultats obtenus en deuxième chapitre.

Ce travail ce termine par une conclusion générale et quelques références.

Chapitre 1

Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir W.K. Hayman ([13]) et I.Laine ([18])).

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 ***(Formule de Jensen)*** ([13], [18]) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1.1 ([13], [18]) *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([2]) *Soient $x, y, x_1, ..., x_n$ des nombres réels strictement positifs. Alors, nous avons*

(a) $\log x \leq \log^+ x$,

(b) $\log^+ x \leq \log^+ y$ *pour* $x \leq y$,

(c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$,

(d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$,

(e) $\log^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$,

(f) $\log^+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$.

Preuve Les propriétés (a), (b) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1 et la monotonie de la fonction logarithme.

Montrons (c), (d), (e) et (f).

(c) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ - \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0) \\ &= \log x \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0) \\ &= |\log x| . \end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$, alors l'inégalité est évidente. Supposons que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \log^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) &= \log \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j, \text{ d'après } (a) . \end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned} \log^+ (\sum_{j=1}^{n} x_j) &\leq \log^+ (n \max_{1 \leq j \leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \log^+ (\max_{1 \leq j \leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j . \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 ***(Fonction a-points)*** ([*13*], [*18*]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a. On définit $N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$ la fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq r\}$ par*

$$N(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r, \qquad si\ a \neq \infty,$$

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r,$$

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,\frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\log r \quad (a \neq \infty),$$

et

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{[\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\log r\ .$$

où $n(t,a,f)$ désigne le nombre de zéros de l'équation $f(z) = a$ situés dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. $n(t,\infty,f)$ désigne le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité. $\overline{n}(t,a,f)$ désigne le nombre de zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$, $\overline{n}(t,\infty,f)$ désigne le nombre de pôles distincts de la fonction f dans le disque $\{z : |z| \leq t\}$.

Exemple 1.1.1 *Soit la fonction $f(z) = \exp(-2z)$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent $N(r,f) = 0$.*

Lemme 1.1.2 ([*13*], [*18*]) *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $\{z : |z| \leq r\}$ tels que :$0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < ... < |\alpha_n| \leq r$ et $f(0) \neq 0$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|\alpha_j|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha_j|}$$

Proposition 1.1.1 ([*13*], [*18*]) *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \epsilon \mathbb{Z}.$$

Alors,

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.1.3 ***(Fonction de proximité)*** ([13], [18]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on définit la fonction de proximité de f par*

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(r \exp(i\theta)) - a|} d\theta \qquad (a \neq \infty)$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r \exp(i\theta))| \, d\theta.$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction caractéristique)*** ([18]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. La fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, f)$ de la fonction méromorphe f est définie par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1.2 *Soit la fonction $f(z) = \exp(-2z)$. Nous avons $N(r, f) = 0$. De plus*

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |\exp(-2r\cos\theta)| \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |\exp(-2r\cos\theta)| \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2r\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{2r}{\pi}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2 ***(Propriétés de la fonction caractéristique de Nevanlinna)*** ([18]) *Soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telles que $ab - cd \neq 0$. Alors*

1.

$$T(r, \sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \log n \text{ pour } r \geq 1,$$

2.
$$T(r,\prod_{j=1}^{n}f_j) \leq \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j),\ \ pour\ r \geq 1,$$

3.
$$T(r,f^n) = nT(r,f), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

4.
$$T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r,f) + O(1),\ \ f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

Preuve

1. On a.
$$T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) = m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right),$$

$$\begin{aligned}
m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\sum_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(r,(re^{i\theta})\right| + \log n\right) d\theta \\
&= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j) + \log n.
\end{aligned}$$

D'autre part,
$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}N(r,f_j),$$

par suite

$$\begin{aligned}
T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j) + \log n\ .
\end{aligned}$$

2.On a
$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right) = m\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right) + N\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right).$$

Comme

$$\begin{aligned} m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \prod_{j=1}^{n} f_j(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \log^+ \left| f_j(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &= \sum_{j=1}^{n} m(r, f_j), \end{aligned}$$

de plus, si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j , alors z_0 est un pôle d'ordre au plus $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ pour la fonction $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j$, ce qui donne

$$N\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} N(r, f_j).$$

Donc

$$T\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j).$$

3.On a $|f| \leq 1$ équivaut à $|f|^n \leq 1$.

(a) Si $|f| \leq 1$, alors

$$m(r, f^n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f^n(re^{i\theta}) \right| d\theta = 0,$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

(b) Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f^n(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &= nm(r, f), \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

4. Posons $g = \frac{af+b}{cf+d}$, avec $ad - cb \neq 0$ alors nous avons

$$gcf + gd = af + b \Leftrightarrow \; f = \frac{b - gd}{gc - a}$$

il suffit donc de montrer que

$$T(r, g) \leq T(r, f) + O\left(1\right).$$

Nous distinguons deux cas.

Cas 1. Si $c = 0$,alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T(r, \frac{af + b}{d}) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Cas 2. Si $c \neq 0$,alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{af + b}{cf + d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{\frac{a}{c}(cf + d) - \frac{ad}{c} + b}{cf + d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c^2}.\frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right) \\ &\leq T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3 *Soit* $\quad g(z) = cotz$. *Alors*

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}\right) \\ &= T\left(r, i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}\right) \\ &= T(r, e^{2iz}) + O\left(1\right) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.2 ***(Premier Théorème fondamental de Nevanlinna dans le plan complexe)*** ([*13*], [*18*]) *Soit f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m\epsilon\mathbb{Z}, \quad z\epsilon\mathbb{C}$$

la série de Laurent de $f(z)-a$ $(a \in \mathbb{C})$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a, nous avons

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a)$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2$.

Preuve Montrons le théorème pour $a=0$, d'après la proposition 1.1.1 et lemme 1.1.1 $c)$ on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta})\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| \\
&= T(r,f) - \log|c_m| \qquad\qquad (I)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,0)=0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f-a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
N(r,h) &= N(r, f-a) = N(r,f).
\end{aligned}$$

On a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on obtient

$$-(\log^+|a| + \ln 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Alors $\varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2$. On aura

$$\begin{aligned} T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit :*

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1), \quad r \to +\infty.$$

1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.2.1 ([13], [18]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini si

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

Définition 1.2.2 ([13], [18]) *Soit f une fonction entière non constante ; alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Dans le cas où l'ordre d'une fonction méromorphe est infini, on introduit une autre notion qui donne plus de précision sur la croissance qui est appelée l'hyper ordre et est définie comme suivant

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r},$$

et pour une fonction entière, on a

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2.1 *Soit* $f(z) = \exp(2z^n), (n \in \mathbb{N}^*)$. *Alors* $\rho(f) = n$, *et l'hyper-ordre* $\rho_2(f) = 0$.

Remarque 1.2.1 *Si* f *est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nul.*

Théorème 1.2.1 ([13]) *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Alors*

1. $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
2. $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
3. Si $\rho(g) < \rho(f)$. Alors

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f).$$

1.3 L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur d'une fonction

Définition 1.3.1 ([13]) *Soit* f *une fonction entière. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de cette fonction sont définis respectivement par*

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \\
\mu_2(f) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}
\end{aligned}$$

1.4 Exposant de convergence des pôles d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 ([18]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des pôles de la fonction f noté $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ est défini par*

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,f)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence des pôles distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \bar{N}(r,f)}{\log r}.$$

1.5 L'ordre p-itératif d'une fonction

Afin de généraliser quelques résultats sur les propriétés des solutions de certaines équations différentielles, nous avons besoin de définir l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe, mais pour le faire il faut d'abord définir les expressions suivantes sur l'exponentielle et sa fonction réciproque : pour tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r := \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. De la même façon on définit $\log_1 r := \log r$ et $\log_{p+1} r := \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$ et ceci pour r suffisamment grand.

Définition 1.5.1 ([18]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre p-itératif de croissance de la fonction f par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \quad (p \geqslant 1,\ p \text{ entier}),$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si f est entière, alors l'ordre p-itératif de la fonction f est défini par

$$\rho_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r} \quad (p \geqslant 1,\ p \text{ entier}),$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.5.1 $\rho_1(f)$ *coïncide avec l'ordre usuel.*

De plus, on définit l'indice de croissance comme suit

Définition 1.5.2 ([18]) *L'indice de croissance d'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f est définit par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & si\ f\ est\ rationnelle \\ \min\limits_{j\in\mathbb{N}} \left\{\rho_j(f) < +\infty\right\}, & si\ f\ est\ transcendante \\ +\infty, & si\ \rho_j(f) = +\infty\ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.6 L'ordre p-itératif inférieur d'une fonction

Définition 1.6.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe. L'ordre p-itératif inférieur $\mu_p(f)$ de f est définit par*

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{log_p T(r,\ f)}{log\ r} \quad (p \geqslant 1,\ p\ entier).$$

Si f est entière, alors l'ordre $p-$itératif inférieur $\mu_p(f)$ est définit par

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{log_{p+1} M(r,\ f)}{log\ r} \quad (p \geqslant 1,\ p\ entier).$$

1.7 L'exposant de convergence p-itératif d'une fonction

Définition 1.7.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence p-itératif des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On définit l'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.7.2 ([15]) *Le degré de finitude de l'exposant de convergence itératif des zéros d'une fonction méromorphe f est donné par*

$$i_\lambda(f,a) := \begin{cases} 0, & si\ n(r,a) = O(\log r), \\ \min\{j \in \mathbb{N}\ : \lambda_j(f,a) < \infty\}, & pour\ \ j \in \mathbb{N} \\ & avec\ \lambda_j(f,a) < \infty\ existe, \\ +\infty, & si\ \lambda_j(f,a) = \infty\ \ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.8 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.8.1 ([16], [17]) *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E*. La mesure logarithmique d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$m_l(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.8.1 *la mesure de l'ensemble* $E = [1, 3] \subset [1, +\infty]$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^3 dt = 2.$$

la mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, 3] \subset [1, +\infty]$ *est*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln 3.$$

Définition 1.8.2 ([16], [17]) *La densité inférieure et la densité supérieure d'un sous ensemble* $H \subset [0, +\infty)$ *sont définies respectivement par*

$$\begin{aligned} \underline{dens} H &= \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}, \\ \overline{dens} H &= \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}. \end{aligned}$$

Définition 1.8.3 ([16], [17]) *La densité logarithmique supérieure d'un ensemble* $F \subset (1, +\infty)$ *est définie par*

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

La densité logarithmique inférieure d'un ensemble $F \subset (1, +\infty)$ *est définie par*

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}$$

Proposition 1.1 ([5]) Pour tout ensemble $H \subset (1, +\infty)$ les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) si $m_l(H) = \infty$, alors $m(H) = \infty$;

(ii) si $\overline{dens}(H) > 0$, alors $m(H) = \infty$;

(iii) si $\overline{\log dens}(H) > 0$, alors $m_l(H) = \infty$.

1.9 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.9.1 ***(Produits canonique)*** ([22]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient z_1, z_2,.. ses zéros avec $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ...$ Soit p l'entier minimal tel que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge. On appelle

$$\begin{aligned} E(u,0) &= (1-u), \\ E(u,p) &= (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + ... + \frac{u^p}{p}) \quad p = 1, 2, ... \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p),$$

converge uniformément dans chaque domaine borné dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f . L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.9.1 ([20]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f)$ et soient $\{a_{1,}a_2, ...\}$ et $\{b_{1,}b_2, ...\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivement. Supposons que f a une représentation*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ..., (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$. Alors

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $Q(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\rho(f)$ et $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produits canoniques de f formés des zéros et des pôles non nuls de f .

1.9.1 Indice central et le terme maximal

Définition 1.9.2 ([18])*Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une fonction entière. On définit le terme maximal de* f *par* $\mu(r,f) = \{\max|a_n| r^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est bien défini. On définit l'indice central de la fonction* f *par*

$$\nu(r,p) = m : \mu(r,f) = |a_m| r^m$$

Chapitre 2

La croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à coefficients fonctions méromorphes

2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.2}$$

où $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini et $k \geqslant 2$. Nous améliorons et étendons quelques résultats de Belaïdi et Andasmas [1], [5] en utilisant le concept de l'ordre itératif et nous considérons la croissance de quelques coefficients arbitraires dominants A_s $(s = 0, 1, ..., k-1)$ au lieu de A_0.

Plusieurs auteurs $([3], [4], [8], [9], [17], [21])$ ont étudié la croissance de solutions d'équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes de second ordre et d'ordre supérieur avec des coefficients fonctions entières ou méromophes.

Dans [1], Andasmas et Belaïdi ont étudié les zéros et la croissance des solutions méromorphes des équations (2.1.1) et (2.1.2) et ils ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.1.1 [1] *Soient $H \subset [0. +\infty)$ un ensemble de mesure linéaire infinie et soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que*

$$\rho = \max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma$$

et

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{\alpha |z|^\sigma\}$$

l'orsque $|z| = r \in H, r \to +\infty$. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.1) *satisfait $\mu(f) = \rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) \geqslant \sigma$. De plus, si $\lambda(1/f) < \infty$, alors $\sigma \leqslant \rho_2(f) \leqslant \rho(A_0)$.*

Théorème 2.1.2 [1] *Soient $H \subset [0, +\infty]$ un ensemble de densité supérieure positive, et $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$, et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que*

$$\rho = \max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1, \rho(F)\} < \sigma$$

et

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{\alpha |z|^\sigma\}$$

lorsque $|z| = r \in H, r \to +\infty$, alors toute solution méromorphe f avec $\lambda(1/f) < \sigma$ de l'équation (2.1.2) *est d'ordre infini et*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty,\ \overline{\lambda_2}(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

De plus si $\lambda(1/f) < \min\{\mu(f), \sigma\}$, alors $\sigma \leqslant \rho_2(f) \leqslant \rho(A_0)$.

Récemment, Belaïdi dans [5] a considéré la croissance des solutions méromorphes des équations (2.1.1) et (2.1.2) avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre itératif fini et il a obtenu des résultats qui améliorent et généralisent certains résultats précédents.

Théorème 2.1.3 [5] *Soient $H \subset [0, +\infty]$ un ensemble de densité supérieure positive et A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que*

$$\rho = \max \left\{ \rho_p (A_j) : j = 1, 2, ..., k-1 \right\} < \sigma$$

et

$$|A_0 (z)| \geqslant \exp_p (\alpha r^{\sigma})$$

avec $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.1) *satisfait*

$$\mu (f) = \rho_p (f) = +\infty,$$

$$\rho_{p+1} (f) \geqslant \sigma.$$

De plus , si $\lambda_p (1/f) < \infty$, alors $i (f) = p + 1$ et

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1} (f) \leqslant \rho_p (A_0).$$

Théorème 2.1.4 [5] *Soient $H \subset [0, +\infty]$ un ensemble de densité supérieure positive, $A_j (j = 0, 1, ..., k-1)$, et $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que*

$$|A_0 (z)| \geqslant \exp_p (\alpha r^{\sigma})$$

avec $|z| = r \in H, r \to +\infty$, et

$$\rho = \max \left\{ \rho_p (A_j) \quad (j = 1, ..., k-1) , \rho_p (F) \right\} < \sigma,$$

alors toute solution méromorphe de (2.1.2) *avec $\lambda_p (1/f) < \sigma$ satisfait*

$$\overline{\lambda}_p (f) = \lambda_p (f) = \rho_p (f) = +\infty,$$

$$\overline{\lambda}_{p+1} (f) = \lambda_{p+1} (f) = \rho_{p+1} (f).$$

De plus, si $\lambda_p (1/f) < \min \left\{ \mu_p (f) , \sigma \right\}$, alors $i (f) = p + 1$ et

$$\overline{\lambda}_{p+1} (f) = \lambda_{p+1} (f) = \rho_{p+1} (f) \leqslant \rho_p (A_0).$$

Une question naturelle se pose : qu'en est-il de la croissance des solutions méromorphes des équations (2.1.1) et (2.1.2) avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini si on remplace le coefficient fixe dominant A_0 par un coefficient arbitraire A_s ? L'objectif principal de cette partie est d'examiner la question ci-dessus en étudiant les résultats du travail de Saidani et Belaïdi [19] qui ont généralisé le Théorèmes précédents en utilisant le concept de l'ordre p-itératif. En fait, nous allons détailler les preuves des résultats suivants.

Théorème 2.1.5 [*19*] *Soient $H \subset (1, +\infty)$ un ensemble d'une densité logarithmique supérieure positive $(ou\ m_l(H) = +\infty)$, et $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ et un entier s, $0 \leqslant s \leqslant k-1$, tels que*

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_p(\alpha r^\sigma)$$

avec $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, et

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j) \quad (j \neq s)\right\} < \sigma.$$

Alors, toute solution non transcendante $f(z) \not\equiv 0$ de (2.1.1) *est polynômiale avec* $\deg f \leqslant s-1$ *et toute solution méromorphe transcendante f de* (2.1.1) *avec*

$$\lambda_p(1/f) < \mu_p(f)$$

satisfait $i(f) = p+1$

$$\mu_p(f) = \rho_p(f) = +\infty$$

et

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s).$$

Corollaire 2.1.1 [*19*] *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1.5*, supposons que $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. Alors, toute solution méromorphe transcendante f de l'équation* (2.1.1) *avec*

$$\lambda_p(1/f) < \mu_p(f)$$

satisfait

$$\sigma \leqslant \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s).$$

Pour l'équation linéaire différentielle non-homogène (2.1.2)*, Nous obtenons les résultats suivants.*

Théorème 2.1.6 [*19*] *Soient* $H \subset (1, +\infty)$ *un ensemble de densité logarithmique supérieure positive* (*ou* $m_l(H) = \infty$), $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *et* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes réelles* $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ *et un entier s,* $0 \leqslant s \leqslant k-1$, *tels que*

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_p(\alpha r^\sigma)$$

avec $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, *et*

$$\max\left\{\rho_p(A_j) \quad (j \neq s), \rho_p(F)\right\} < \sigma,$$

alors toute solution non transcendante f *de* (2.1.2) *est polynômiale avec* $\deg f \leqslant s-1$ *toute solution méromorphe transcendante* f *de* (2.1.2) *avec*

$$\lambda_p(1/f) < \min\left\{\sigma, \mu_p(f)\right\}$$

satisfait $i(f) = p+1$

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = \mu_p(f) = +\infty$$

et

$$\sigma \leqslant \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s).$$

Corollaire 2.1.2 [*19*] *Soient les fonctions* A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$, F *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème* 2.1.6 *et soit* φ *une fonction méromorphe transcendante telle que* $i(\varphi) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *avec*

$$\lambda_p(1/f) < \min\left\{\sigma, \mu_p(f)\right\}$$

de l'équation (2.1.2) *satisfait*

$$\sigma \leqslant \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) \leqslant \rho_p(A_s).$$

Remarque 2.1.1 *Evidemment,le Théorème* 2.1.5 *et le Théorème* 2.1.6 *sont la généralisation des Théorèmes A,B,C et D.*

2.2 Lemmes préliminaires

Pour prouver nos principaux résultats, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 ([8]) *Soient f une fonction méromorphe transcendante dans le plan et soit $\eta > 1$ une constante réelle. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ dépendante uniquement de η et de H tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ et pour tout (m,n) (m,n sont des nombres entiers avec $0 \leqslant m < n$), nous avons*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leqslant B \left(\frac{T(\eta r, f)}{r} (\log^{\eta} r) \ \log \ T(\eta r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.2.2 ([12]) *Soit $p \geqslant 1$ un entier et $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe, où g, d sont des fonctions entières satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leqslant \rho_p(f) = \rho_p(g) \leqslant +\infty, 0 < p < +\infty$, $i(d) < p$ ou $i(d) = p$ et $\rho_p(d) = \lambda_p(1/f) < \mu_p(f) = \beta < \mu$. Alors, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s} \ \ (s \geqslant 1 \text{ est un entier}).$$

Lemme 2.2.3 ([21]) *Soit $p \geqslant 1$ un entier. Supposons que f est une fonction méromorphe telle que $i(f) = p$, $\rho_p(f) = \rho < +\infty$. Alors , il existe des fonctions entières π_1, π_2 et D telles que*

$$f(z) = \frac{\pi(z) e^{D(z)}}{\pi_2(z)}$$

et

$$\rho_p(z) = \max\left\{\rho_p(\pi_1), \rho_p(\pi_2), \rho_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho+\varepsilon}\right)\right\} \leqslant |f(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\rho+\varepsilon}\right), \ r \notin E_3,$$

où $E_3 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Pour éviter certains problèmes causés par l'ensemble exceptionnel, nous rappelons les lemmes suivants .

Lemme 2.2.4 ([2]) *Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles que $g(r) \leqslant h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E_4 de mesure linéaire finie. Alors pour tout $\lambda > 1$ il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leqslant h(\lambda r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 2.2.5 ([11]) *Soient $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles que $\varphi(r) \leqslant \psi(r)$ pour toute $r \notin (E_5 \cup [0, 1])$ où E_5 est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\gamma > 1$ une constante donnée. Alors, il existe un $r_1 = r_1(\gamma) > 0$ tel que $\varphi(r) \leqslant \psi(\gamma r)$ pour tous $r > r_1$.*

Lemme 2.2.6 ([5]) *Soient $k \geqslant 2$ et $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ et F des fonctions méromorphes . Soient*

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j) : (j = 0, 1, 2, ..., k-1), \rho_p(F)\right\} < \infty$$

et f est une solution méromorphe d'ordre $p-$itératif infini de l'équation (2.1.2) *avec*

$$\lambda_p(1/f) < \mu_p(f).$$

Alors, $\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho$.

Lemme 2.2.7 *Sous les hypothèses du théorème* 2.1.5 *ou du théorème* 2.1.6 *, nous avons $\rho_p(A_s) = \beta \geqslant \sigma$.*

Preuve Montrons que $\rho_p(A_s) = \beta \geqslant \sigma$ par l'absurde, nous supposons que $\rho_p(A_s) = \beta < \sigma$. Alors , en utilisant le Lemme 2.2.3 il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$, on a pour tout ε donnée avec $0 < \varepsilon < \sigma - \beta$, nous avons

$$|A_s(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\beta+\varepsilon}\right). \tag{2.2.1}$$

D'autre part , les hypothèses du Théorème 2.1.5 ou 2.1.6, il existe des constantes réelles $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_p(\alpha r^{\sigma}), \tag{2.2.2}$$

où $|z| = r \in H, r \to +\infty$, où $H \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de densité logarithmique supérieure positive (ainsi nous avons $m_l(H) = +\infty$). De (2.2.1) et (2.2.2), nous obtenons pour $|z| = r \in H \setminus E_3$, $r \to +\infty$

$$\exp_p(\alpha r^{\sigma}) \leqslant |A_s(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\beta+\sigma}\right)$$

ce qui donne

$$\exp_p(\alpha r^\sigma) \leqslant \exp_p\left(r^{\beta+\sigma}\right).$$

En composant la fonction logarithme p fois, nous obtenons

$$\alpha r^\sigma \leqslant r^{\beta+\sigma}$$

Comme ε est arbitraire avec $0 < \varepsilon < \sigma - \beta$, nous obtenons une contradiction quand $r \to +\infty$, d'où $\rho_p(A_s) = \beta \geqslant \sigma$.

Lemme 2.2.8 *Soient $H \subset (1, +\infty)$ un ensemble d'une densité logarithmique supérieure positive (ou mesure logarithmique infinie), A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et F des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini . S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ et un entier s, $0 \leqslant s \leqslant k-1$, tels que $|A_s(z)| \geqslant \exp_p(\alpha r^\sigma)$ lorsque $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, et*

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j)(j \neq s), \rho_p(F)\ \right\} < \sigma,$$

alors toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (2.1.2) satisfait $\rho_p(f) \geqslant \sigma$.

Preuve Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.2). De (2.1.2), nous avons

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_s f^{(s)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F$$

alors

$$A_s f^{(s)} = F - \left[f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_1 f^{'} + A_0 f\right]$$

d'où

$$A_s = \frac{F}{f^{(s)}} - \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} - \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j \frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}. \tag{2.2.3}$$

En combinant la formule (2.2.3) et le première théorème fondamental du Nevanlinna et les propriétés de la fonction caractéristique, nous obtenons

$$\begin{aligned} T(r, A_s) &= T\left(r, \frac{F}{f^{(s)}} - \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j \frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right) \\ &\leqslant T(r, \frac{F}{f^{(s)}}) + T(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}) + T(r, A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}) + ... + T(r, A_0 \frac{f}{f^{(s)}}) + O(1) \\ &\leqslant T(r, F) + (k+1)T(r, f^{(s)}) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k} T(r, f^{(j)}) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k} T(r, A_j) + O(1). \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

Pour tout entier $j \in [1, k]$, on a l'estimation suivante (voir [13], p.56)

$$T(r, f^{(j)}) \leqslant (j+1)T(r, f) + S(r, f), \quad (2.2.5)$$

où

$$S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r),$$

à l'extérieure d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. En combinant les inégalités (2.2.4) et (2.2.5), nous obtenons

$$T(r, A_s) \leqslant \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k} T(r, A_j) + CT(r, f) + T(r, F) + S(r, f) + O(1), \quad (2.2.6)$$

avec $C > 0$. En utilisant la condition $\max\{\rho_p(A_j)\ (j \neq s), \rho_p(F)\} < \sigma \leqslant \rho_p(A_s)$ et le lemme 2.2.4

$$\begin{aligned} \rho_p(A_s) &\leqslant \max(\{\rho_p(A_j)\ (j \neq s), \rho_p(F), \rho_p(f))\}, \\ &= \rho_p(f). \end{aligned}$$

Du lemme 2.2.7 on trouve

$$\sigma \leqslant \rho_p(A_s) \leqslant \rho_p(f)$$

D'où

$$\sigma \leqslant \rho_p(f).$$

Lemme 2.2.9 ([6]) *Soient* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (2.1.2) *avec* $\rho_p(f) = +\infty$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \rho < +\infty$, *alors*

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = +\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho.$$

Lemme 2.2.10 ([15]) *Soient* $A_j(j = 0, 1, ..., k-1)$ *et* $F(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes et soit* f *une solution de* (2.1.2) *satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

(i) $\max\{i(F) = p, i(A_j)(j = 0., 1, ..., k-1)\} < i(f) = p + 1(0 < p < +\infty)$,

(ii) $\max\{\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(A_j)(j = 0, 1, ..., k-1)\} < \rho_{p+1}(f)$. *Alors,*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f).$$

Lemme 2.2.11 ([19]) *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes avec* $i(f) = i(g) = p + 1$. *Alors*

$$\begin{aligned}\rho_{p+1}(f+g) &\leqslant \max(\rho_{p+1}(f), \rho_{p+1}(g)),\\ \rho_{p+1}(fg) &\leqslant \max(\rho_{p+1}(f), \rho_{p+1}(g)).\end{aligned}$$

Lemme 2.2.12 ([19]) *Soient* $f(z)$ *et* $g(z)$ *deux fonctions méromorphes dans le plan complexe . Si* $\rho_p(f) = +\infty$ *et* $\rho_p(f) < +\infty$ *donc* $\rho_p(fg) = +\infty$.

Lemme 2.2.13 ([7]) *Soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* $[p, q]$ *ordre . Si* $p \geqslant q \geqslant 1$,*alors* $\rho_{[p,q]}(f') = \rho_{[p,q]}(f)$.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de l'équation (2.1.1). Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geqslant 1$, ou f est polynômiale avec $\deg f \geqslant s$, alors

$f^{(s)} \not\equiv 0$. Par (2.1.1), on a

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = -\left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z) \right).$$

$$\rho_p(A_s f^{(s)}) = \rho_p \left(-\left(f^{(k)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j f^{(j)} \right) \right)$$

comme f est non transcendante, alors $\rho_p\left(f^{(s)}\right) = 0$ et donc

$$\rho_p(A_s f^{(s)}) = \rho_p(A_s)$$

En utilisant le Lemme 2.2.11, on obtient

$$\begin{aligned} \rho_p(A_s f^{(s)}) &\leqslant \max\left(\rho_p(f^{(k)}, \rho_p(A_j), \rho_p(f^{(j)})\right) \\ &\leqslant \max_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k-1 \\ j \neq s}} \left(\rho_p(A_j)\right) \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 2.2.7 on a $\rho_p(A_s) \geqslant \sigma$. D'où

$$\max_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k-1 \\ j \neq s}} (\rho_p(A_j)) \geqslant \sigma.$$

Ce qui contredit la condition du Théorème 2.1.5. Donc, la solution f doit être polynômiale avec $\deg(f) \leqslant s-1$.

Maintenant, on suppose que f est une solution méromorphe transcendante de (2.1.1) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$.

De l'équation (2.1.1), on a

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = -\left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z) \right)$$

$$\Rightarrow \left|A_s(z) f^{(s)}(z)\right| = \left| -\left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z) \right) \right|$$

$$\leqslant \left|f^{(k)}(z)\right| + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} |A_j| \left|f^{(j)}\right|,$$

ce qui implique

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right|$$

$$= \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_0| \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k-1} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right|.$$

D'où

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k-1} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \right) \tag{2.3.1}$$

Par les hypothèses du Théorème 2.1.5, il existe un ensemble $H \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(H) = +\infty$ telque pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H, r \to +\infty$,on a :

$$|A_s| \geqslant \exp_p(\alpha r^{\sigma}). \tag{2.3.2}$$

Par utilisation du Lemme 2.2.1. Pour $\eta = 2$, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$ tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B \left(\frac{T(2r, f)}{r} (\log^2 r) \log(T(2r, f)\right)^{j-1}$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme on obtient

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leqslant B\left[T(2r, f) \log T(2r, f)\right]^{j-1} \\ &\leqslant B\left(T(2r, f)\right)^{k+1}, j = 1, 2, ..., k, j \neq s. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Par le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s} \text{ ($s \geqslant 1$ est un entier).} \tag{2.3.4}$$

Et d'après le Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire fini (et donc de mesure logarithmique fini) pour tout un ε $(0<\varepsilon<\sigma-\rho)$ tels que

$$\begin{aligned}|A_j| &\leqslant \exp_p(r^{\rho_p(A_j)+\varepsilon})\\ &\leqslant \exp_p(r^{\max_{j\neq s}(\rho_p(A_j)+\varepsilon)})\end{aligned}$$

$$\leqslant \exp_p(r^{\rho+\varepsilon}), j=0,1,...,k-1, j\neq s. \tag{2.3.5}$$

pour tout z avec $|z|=r\notin E_3$.

Donc d'aprés les formules (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5) pour tout z satisfaisant $|z|=r\in H\backslash[0.1]\cup E_1\cup E_2\cup E_3, r\to+\infty$, on déduit que

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\leqslant|A_s|\leqslant r^{2s}\left(B[T(2r,f)]^{k+1}+\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1}\right).$$

Alors ,

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\leqslant r^{2s}B([T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})+\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1}$$

on obtient donc,

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\leqslant r^{2s}B([T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})+B[T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})+(k-2)B[T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})).$$

D'où

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\leqslant r^{2s}kB([T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho+\varepsilon})). \tag{2.3.6}$$

de l'inégalité (2.3.6) , on obtient

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\exp(-\exp_{p-1}(r^{\rho+\varepsilon}))\leqslant r^{2s}kB[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow \exp\left(\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)-\exp_{p-1}(r^{\rho+\varepsilon})\right)\leqslant r^{2s}kB[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow \exp\left\{\left(1-\frac{\exp_{p-1}(r^{\rho+\varepsilon})}{\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)}\right)\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)\right\}\leqslant r^{2s}kB[T(2r,f)]^{k+1}$$

Par $0<\varepsilon<\sigma-\rho$, il découle du Lemme 2.2.5

$$\exp\left\{(1-o(1)\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma))\right\}\leqslant r^{2s}kB[T(2r,f)]^{k+1}.$$

D'où

$$\mu_p(f) = \rho_p(f) = +\infty \text{ et } \sigma \leqslant \rho_{p+1}(f). \tag{2.3.7}$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 2.2.7, on a

$$\max\{\rho_p(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} = \rho_p(A_s) = \beta < +\infty$$

Puisque les conditions du Lemme 2.2.6 sont vérifiées, alors

$$\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s). \tag{2.3.8}$$

Par (2.3.7) et (2.3.8), on conclut que $i(f) = p+1, \mu_p(f) = \rho_p(f) = +\infty$ et $\sigma \leqslant \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s)$.

2.4 Preuve du Corollaire 2.1.1

On pose $h = f - \varphi$ où φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, on obtient

$$\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f).$$

Sachant que f est une solution de l'équation (2.1.1) alors

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1}(h) \leqslant \rho_p(A_s).$$

En remplaçant $f = h + \varphi$ dans l'équation (2.1.1), on obtient :

$$(h+\varphi)^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)(h+\varphi)^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)(h+\varphi)'(z) + A_0(z)(h+\varphi)(z) = 0$$

ce qui donne

$$h^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)h^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)h'(z) + A_0(z)h(z)$$

$$= -(\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z)). \tag{2.4.1}$$

Soit

$$K(z) = \varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z).$$

Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$

$$\rho = \max\{\rho_p(A_j)(j \neq s)\} < \sigma.$$

et comme f est une solution de l'équation (2.1.1) alors

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s)$$

et comme $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$ donc par le Théorème 2.1.5, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (2.1.1) c'est à dire

$$\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z) \neq 0.$$

Dans ce cas $K(z) \not\equiv 0$ et d'apres le Lemme 2.2.11, on obtient

$$\rho_{p+1}(k) = \rho_{p+1}(\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_1\varphi' + A_0\varphi)$$

$$\leqslant \max\{\rho_{p+1}(\varphi), \rho_{p+1}(A_j), (j = 0, 1, ..., k-1)\} < \sigma.$$

Donc,

$$\max\{\rho_{p+1}(k), \rho_{p+1}(A_j), (j = 0, 1, ..., k-1)\} < \sigma$$

car $\rho_{p+1}(A_j) = 0$ et

$$\rho_{p+1}(K) < \sigma \leqslant \rho_{p+1}(f).$$

Comme $K \not\equiv 0$, on peut utiliser le Lemme 2.2.10

$$\overline{\lambda}_{p+1}(h) = \lambda_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(h)$$

ce qui implique

$$\sigma < \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s).$$

2.5 Preuve du Théorème 2.1.6

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de l'équation (2.1.2). Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geqslant 1$, ou f est polynômiale avec $\deg f \geqslant s$, alors $f^{(s)} \not\equiv 0$. Par (2.1.2), on a

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + ... + A_s f^{(s)}(z) + ... + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = F(z)$$

alors,

$$\begin{aligned} A_s(z)\,f^{(s)}(z) &= F(z) - \left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z) \right). \\ \rho_p\left(A_s f^{(s)}\right) &= \rho_p\left(F(z) - \left(f^{(k)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j f^{(j)} \right)\right). \end{aligned}$$

et donc

$$\rho_p(A_s f^{(s)}) = \rho_p(A_s)$$

En utilisant le Lemme 2.2.11, on obtient

$$\begin{aligned} \rho_p(A_s f^{(s)}) &\leqslant \max\left(\rho_p(f^{(k)}, \rho_p(A_j), \rho_p(f^{(j)}), \rho_p(F)\right) \\ &\leqslant \max_{\substack{0\leqslant j\leqslant k-1 \\ j\neq s}} \left(\rho_p(A_j), \rho_p(F)\right) \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 2.2.7 on a $\rho_p(A_s) \geqslant \sigma$. D'où

$$\sigma \leqslant \rho_p(A_s) = \rho_p(A_s f^{(s)}) \leqslant \max_{\substack{0\leqslant j\leqslant k-1 \\ j\neq s}} \left(\rho_p(A_j), \rho_p(F)\right),$$

ce qui implique

$$\max_{\substack{0\leqslant j\leqslant k-1 \\ j\neq s}} (\rho_p(F), \rho_p(A_j)) \geqslant \sigma.$$

Ce qui contredit la condition du Théorème 2.1.6.

Donc, la solution f doit être polynômiale avec $\deg(f) \leqslant s-1$.

Maintenant, on suppose que f est une solution méromorphe transcendante de (2.1.2) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. De l'équation (2.1.2), on a

$$A_s f^{(s)} = F - \left(f^{(k)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j f^{(j)} \right)$$

$$\Rightarrow \left|A_s f^{(s)}\right| = \left| F - \left(f^{(k)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j f^{(j)} \right)\right|$$

$$\leqslant |F| + |f^{(k)}| + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{k-1} |A_j||f^{(j)}|$$

$$\Rightarrow |A_s| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_0|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1} |A_j|\left|\frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right|$$

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_0| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1} |A_j|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right) \tag{2.5.1}$$

Par le Lemme 2.2.8, nous savons que f satisfait $\rho_p(f) \geqslant \sigma$. Par l'hypothèse $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\mu_p(f), \sigma\}$ et le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$,où g et d sont des fonctions entières satisfaisant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leqslant \rho_p(g) = \rho_p(f)$$

$$\rho_p(d) = \lambda_p(1/f) = \beta < \min\{\mu_p(f), \sigma\}.$$

Par la définition de l'ordre p-itératif inférieur, nous avons

$$M(r, g) \geqslant \exp_p\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\}. \tag{2.5.2}$$

Soit $\rho_1 = \max\{\rho_p(A_j), j \neq s, \rho_p(F) < \sigma$. Alors, par le Lemme 2.2.3 ona

$$\begin{aligned} |g(z)| &= M(r, g) \geqslant \exp_p\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|g(z)|} \leqslant \frac{1}{\exp_p\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\}}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Pour tout ε avec $0 < \varepsilon < \min\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\}$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$ avec $|g(z)| = M(r, g)$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{F(z)d(z)}{g(z)}\right| \\ &\leqslant \frac{\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})\exp_p(r^{\rho_p(d)+\varepsilon})}{\exp_p(r^{\mu_p(g)-\varepsilon})} \\ &\leqslant \frac{\exp_p(r^{\rho_1(F)+\varepsilon})\exp_p(r^{\rho_p(d)+\varepsilon})}{\exp_p(r^{\mu_p(g)-\varepsilon})} \\ &\leqslant \exp_p(r^{\rho_1(F)+\varepsilon}) \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

car $\frac{\exp_p(r^{\rho_p(d)+\varepsilon})}{\exp_p(r^{\mu_p(g)-\varepsilon})} \leqslant 1$.

D'une façon similaire à la preuve du Théorème 2.1.5, pour tout ε satisfaisant $0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\right\}$,et pour tout z satisfait $|z| = r \in H\backslash([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3), r \longrightarrow +\infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on a par le Lemme 2.2.1 on obtient

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B(T(2r,f)^{k+1}, j = 1,2,...,k, j \neq s, \tag{2.5.5}$$

et par le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r assez grand

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s} \ (s \geqslant 1 \text{ est un entier }). \tag{2.5.6}$$

Et par le lemme 2.2.3, pour tout un ε donné avec $0 < \varepsilon < \sigma - \rho$ il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire fini (et aussi de mesure logarithmique fini) telque

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}), j = 0,1,...,k-1, j \neq s, \tag{2.5.7}$$

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_p(\alpha r^{\sigma}). \tag{2.5.8}$$

Donc d'après les formules (2.5.1), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.6), (2.5.7) et (2.5.8) pour tout z satisfaisant $|z| = r \subset H\backslash([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3), r \to +\infty$ avec $|g(z)| = M(r,g)$ et pour tout ε donné avec $0 < \varepsilon < \min\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\}$, on obtient

$$\exp_p(\alpha r^{\sigma}) \leqslant |A_s| \leqslant r^{2s}\left(B[T(2r,f)]^{k+1} + \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k-1} \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1} + \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})\right).$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \quad r^{2s}\{B[T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}) + B[T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}) \\ &\qquad + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k-1} \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1} + \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1}\}. \end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} \exp_p(\alpha r^{\sigma}) \quad &\leqslant \quad r^{2s}(B[T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}) + \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})[BT(2r,f)]^{k+1} \\ &\qquad +(k-2)[BT(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon}) + \exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})B[T(2r,f)]^{k+1}) \end{aligned}$$

D'où

$$\exp_p(\alpha r^\sigma) \leqslant r^{2s}B(k+1)([T(2r,f)]^{k+1}\exp_p(r^{\rho_1+\varepsilon})). \tag{2.5.9}$$

Par la condition $0<\varepsilon<\sigma-\rho_1$, on a

$$\exp_p(\alpha r^\sigma)\exp(-\exp_{p-1}(r^{\rho_1+\varepsilon})) \leqslant r^{2s}(k+1)B[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow \exp(\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)-\exp_{p-1}(r^{\rho_1+\varepsilon})) \leqslant r^{2s}(k+1)B[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow \exp[(1-\frac{\exp_{p-1}(r^{\rho_1+\varepsilon})}{\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)})\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)] \leqslant r^{2s}(k+1)B[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow \exp[(1-o(1))\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma)] \leqslant r^{2s}(k+1)B[T(2r,f)]^{k+1}$$

$$\Rightarrow (1-o(1))\exp_{p-1}(\alpha r^\sigma) \leqslant \log(r^{2s}(k+1)B[T(2r,f)]^{k+1}) \tag{2.5.10}$$

Il découle du Lemme 2.2.5 et (2.5.10) Alors ,

$$\mu_p(f)=\rho_p(f)=+\infty,\ \sigma\leqslant\rho_{p+1}(f). \tag{2.5.11}$$

Comme $F\not\equiv 0$,et d'après le Lemme 2.2.9, on a

$$\overline{\lambda}_p(f)=\lambda_p(f)=\rho_p(f)=\mu_p(f)=+\infty,\ \sigma\leqslant\rho_{p+1}(f)=\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f). \tag{2.5.12}$$

Par le Lemme 2.2.7, on a

$$\max\{\rho_p(A_j):j=0,1,...,k-1\}=\rho_p(A_s)=\beta<+\infty.$$

Et comme f est une solution méromorphe de l'équation (2.1.2) avec $\rho_p(f)=+\infty$, $\lambda_p(1/f)<\sigma<\mu_p(f)=+\infty$, puisque les conditions du Lemme 2.2.6 sont vérifiés, on obtient

$$\rho_{p+1}(f)\leqslant\rho_p(A_s). \tag{2.5.13}$$

Par (2.5.12) et (2.5.13), on conclut que

$$i(f)=p+1, \overline{\lambda}_p(f)=\lambda_p(f)=\rho_p(f)=+\infty\ ,$$

$$\sigma\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}(f)\leqslant\rho_p(A_s).$$

2.6 Preuve du Corollaire 2.1.2

On pose $h = f - \varphi$ où φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, on obtient

$$\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f).$$

Sachant que f est une solution de l'équation (2.1.2) alors

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1}(h) \leqslant \rho_p(A_s).$$

En remplaçant $f = h + \varphi$ dans l'équation (2.1.2) , on obtient :

$$(h+\varphi)^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)(h+\varphi)^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)(h+\varphi)'(z) + A_0(z)(h+\varphi)(z) = F(z)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & h^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)h^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)h'(z) + A_0(z)h(z) \\ = \; & F(z) - (\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z)). \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Soit

$$G(z) = F(z) - (\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z)).$$

Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$

$$\rho = \max\{\rho_p(A_j)(j \neq s), \rho_p(F)\} < \sigma.$$

et comme f est une solution de l'équation (2.1.2) alors

$$\sigma \leqslant \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s)$$

et comme $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$ donc par le Théorème 2.1.6, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (2.1.2) c'est à dire

$$\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)\varphi'(z) + A_0(z)\varphi(z) \neq F(z).$$

Dans ce cas $G(z) \neq 0$ et d'après le Lemme 2.2.11, on obtient

$$\rho_{p+1}(G) = \rho_{p+1}(F - \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_1\varphi' + A_0\varphi)$$

$$\leqslant \max\{\rho_{p+1}(\varphi), \rho_{p+1}(A_j), (j = 0, 1, ..., k-1), \rho_{p+1}(F)\} < \sigma.$$

Donc,

$$\max\{\rho_{p+1}(G), \rho_{p+1}(A_j), (j = 0, 1, ..., k-1), \rho_{p+1}(F)\} < \sigma$$

$$\rho_{p+1}(G) < \sigma \leqslant \rho_{p+1}(f).$$

Comme $G \not\equiv 0$, on peut utiliser le Lemme 2.2.10

$$\overline{\lambda}_{p+1}(h) = \lambda_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(h)$$

ce qui implique

$$\sigma < \overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \lambda_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s).$$

Chapitre 3

Applications

Dans cette partie, on va citer quelques applications de nos résultats prouvés dans le chapitre précédant.

3.1 Application 1

Considérons l'équation suivante

$$f^{(5)}(z)+2e^{z^3}f^{(4)}(z)+(z^2+1)f^{(3)}(z)+\frac{2-z^2}{4z+1}f''(z)+\frac{3ze^z+4}{z}f'(z)+6f(z)=0. \quad (3.1.1)$$

Dans cette équation, on a

$$\begin{aligned} A_0 &= 6\ ,\ \rho(A_0)=0, \\ A_1 &= \frac{3ze^z+4}{z}\ ,\ \rho(A_1)=1, \\ A_2 &= \frac{2-z^2}{4z+1}\ ,\ \rho(A_2)=0, \\ A_3 &= (z^2+1)\ ,\rho(A_3)=0, \\ A_4 &= 2e^{z^3},\ \rho(A_4)=3. \end{aligned}$$

Alors,

$$\max\{\rho_1(A_j), j\neq 4\}=\max\{0,1\}=1<2.$$

D'autre part, nous avons pour tout $z=re^{i\theta}(r\longrightarrow+\infty), r\in[1,+\infty[$ et $\frac{\pi}{18}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{9}$

$$\begin{aligned}|A_4| &= \left|2e^{z^3}\right| \\ &= \left|2e^{r(\cos\theta+i\sin\theta)^3}\right| \\ &= \left|2e^{r^3\cos 3\theta}e^{r^3 i\sin 3\theta}\right| \\ &= 2e^{r^3\cos 3\theta} \geqslant e^{r^3\cos\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

car,

$$\cos\frac{\pi}{3} \leqslant \cos 3\theta \leqslant \cos\frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leqslant \cos 3\theta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où

$$|A_4| \geqslant e^{r^3\cos\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{1}{2}r^3} \geqslant e^{\frac{1}{2}r^2}.$$

Il est clair que les conditions du théorème1.1 sont vérifiées avec $\sigma = 2$ et $\alpha = 1/2$, par suite

$$\max\{\rho_1(Aj) = 1 < \sigma = 2\}$$

sur l'ensemble $H = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \in [1, +\infty[,\ \frac{\pi}{18} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{9}\right\}$ telque

$$\begin{aligned}\overline{\log dens(H)} &= \lim\sup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{m_l\left(H\cap[1,r]\right)}{\log r} \\ &= \lim\sup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{m_l\left([1,r]\right)}{\log r}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}m_l\left([1,r]\right) &= \int_1^r \frac{dt}{t} \\ &= \log r - \log 1\end{aligned}$$

$$\overline{\log dens(H)} = \lim\sup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{[\log r - \log 1]}{\log r} = 1 > 0$$

D'après le théorème1.1, toute solution méromorphe transcendante $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.1) , avec $\lambda(1/f) < \mu(f)$ satisfait $\rho(f) = \mu(f) = +\infty$ et $2 \leqslant \rho(f) \leqslant \rho(A_4) = 3$.

3.2 Application 2

Considérons l'équation suivante

$$f^{(5)}(z)+\cos(z)f^{(4)}(z)+\frac{z^2+5}{z-3}f^{(3)}(z)+e^{z^4}\quad f''(z)+(z^3-2)f'(z)+2f(z)=e^z. \qquad (3.2.1)$$

Dans cette équation, on a

$$\begin{aligned}
A_0 &= 2 \qquad\quad , \rho(A_0)=0,\\
A_1 &= (z^3-2) \quad , \rho(A_1)=0,\\
A_2 &= e^{z^4} \quad , \rho(A_2)=4,\\
A_3 &= \frac{z^2+5}{z-3} \quad , \rho(A_3)=0,\\
A_4 &= \cos(z) \qquad , \rho(A_4)=1,\\
F(z) &= e^z, \rho(F)=1.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\max\{\rho_1(A_j), j\neq 2, \rho_1(F)\}=\max\{0,1\}=1<3$$

D'autre part, nous avons $z=re^{i\theta}(r\longrightarrow+\infty), r\in[1,+\infty[$ et $\frac{\pi}{16}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{12}$

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \left|e^{z^4}\right|\\
&= e^{r^4\cos 4\theta}\geqslant e^{r^4\cos\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

car

$$\frac{\pi}{32}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{24}\Longrightarrow\frac{\pi}{8}\leqslant 4\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

D'où

$$|A_2|\geqslant e^{r^4\cos\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}r^4}\geqslant e^{\frac{\sqrt{3}}{2}r^3}.$$

Il est clair que les conditions du théorème1.2 sont vérifiées avec $\sigma=3$ et $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, par suite

$$\max\{\rho_1(A_j),\rho_1(F)\}=1<\sigma=3.$$

sur l'ensemble $H=\left\{z\in\mathbb{C}: z=re^{i\theta}, r\in[1,+\infty[\text{ et } \frac{\pi}{32}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{24}\right\}$ telque

$$\overline{\log dens(H)}=\lim\sup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{m_l([1,r])}{\log r}$$

$$\overline{\log dens(H)} = \overline{\lim} \sup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{[\log r - \log 1]}{\log r} = 1 > 0$$

D'après le théorème 1.2, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$, de l'équation (3.2.1), avec $\lambda(1/f) < \mu(f)$ satisfait

$$\overline{\lambda}_1(f) = \lambda_1(f) = \rho_1(f) = \mu_1(f) = +\infty$$

et

$$3 \leqslant \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leqslant \rho_1(A_2).$$

3.3 Exemple

Considérons l'équation suivante :

$$f^{(3)}(z) + \frac{3}{z} \ f''(z) - f'(z) - \frac{1}{z}(1 + 3e^{2z} + e^{3z})f(z) = 0. \tag{3.3.1}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{z}(1 + 3e^{2z} + e^{3z}), \rho(A_0) = 1, \\ A_1 &= -1 \quad , \rho(A_1) = 0, \\ A_2 &= \frac{3}{z} \quad , \rho(A_2) = 0, \\ A_3 &= 1 \quad , \rho(A_3) = 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\max\{\rho(A_j), j \neq 0\} = 0 < \frac{1}{2}.$$

D'autre part, pour tout $z = re^{i\theta}(r \to +\infty)$, $r \in [6, +\infty[$ et $\frac{\pi}{8} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|1 + 3e^{2z}\right| &\leqslant 1 + 3e^{2r\cos\theta} \\ &\leqslant 1 + 3e^{r\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

donc,

$$|A_0(z)| = \frac{|1 + 3e^{2z} + e^{3z}|}{|z|} \geqslant e^{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est clair que les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées avec $\alpha = 1$,et $\sigma = 1/2$.

Sur l'ensemble $H = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \in [6, +\infty[\text{ et } \frac{\pi}{8} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \right\}$ telque

$$\overline{\log dens(H)} = \lim \sup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log r - \log 6}{\log r} = 1$$

donc, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$, de l'équation (3.3.1), avec $\lambda(1/f) < \infty$, satisfait

$$i(f) = 2 et \sigma = 1/2 \leqslant \rho_2(f) \leqslant \rho(A_0) = 1.$$

A titre d'exemple, la fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution de (3.3.1).

$$\overline{\lambda}_1(f) = \lambda_1(f) = \rho_1(f) = \mu_1(f) = +\infty \ .$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.2}$$

où $k \geq 0$, $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. L'outil principal utilisé dans cette étude étant la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles.

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes d'ordre $[p, q]$ fini ?

Bibliographie

[1] M. Andasmas and B. Belaïdi, *On the growth and the zeros of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 98(112) (2015), 199-210.

[2] S. Bank, *A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations.* Compositio Math. 25 (1972), 61-70.

[3] B. Belaïdi, *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions*, Electron. J. Qual. Theory Di er. Equ. 2002, no. 5, 1-8.

[4] B. Belaïdi, *Growth of solutions of certain non-homogeneous linear differential equations with entire coefficients*, JIPAM. J. Inequal. Pure
Appl. Math. 5 (2004), no. 2, Article 40, 1-9.

[5] B. Belaïdi, *Iterated order of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous linear differential equations*, Romai J.,v. 11,
No.1 (2015), 33-46.

[6] B. Belaïdi, *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations*, Acta. Math. Univ. Comenianae 77 (2008), no.
2, 263-269.

[7] B. Belaïdi, (2015), *On the [p, q]-order of meromorphic solutions of linear differential equations*, Acta Univ. M. Belii Ser.Math. 37-49.

[8] Y. Chen, *Estimates of the zeros and growths of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous second order linear differential equations*, Math. Appl. (Wuhan) 23 (2010), no. 1, 18-26.

[9] Z. X. Chen, C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 22 (1999), no. 2, 273-285.

[10] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.

[11] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415-429.

[12] K. Hamani and B. Belaïdi, *Growth of solutions of complex linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 27 (2011), 203-216.

[13] W. K. Hayman, *Meromorphic functions.* Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[14] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull. 17 (1974), no. 3, 317-358.

[15] J. He, X. M. Zheng and H. Hu, *Iterated order of meromorphic solutions of certain higher order linear differential equations with meromorphic coefficients of infinite iterated order*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 33 (2013), 145-157.

[16] L. Kinnunen, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 22 (1998), no. 4, 385-405.

[17] K. H. Kwon, *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations*, Bull. Korean Math. Soc. 33 (1996), no. 3, 487-496.

[18] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations.* de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[19] M. Saidani, B. Belaïdi, Oscillation of Solutions and Their Arbitrary-Order Derivatives of Higher Order Non-Homogeneous LDE. Ser. A : Appl. Math. Inform. AND Mech. vol. 9, 2 , 103-126, (2017).

[20] X. Shen and H. Y. Xu, *The zeros and growth of solutions of higher order differential equations*, Fourth International Conference Computational and Information Sciences (2012), 605-608.

[21] J. Tu and T. Long, *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Qual. Theory Di er. Equ. 2009, No. 66, 1-13.

[22] H. Wittich, (1968), *Neuere Untersuchungen ber eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[23] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers
Group, Dordrecht, 2003.

[24] L. Yang, *Value distribution theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.