UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIUQUE

Mémoire de master en mathématiques Option Analyse fonctionnelle

intitulé

Existence, L'Unicité et la Régularité Maximale d'une Equation Différentielle Abstraite Complète de Type Elliptique

Présenté par

ZIANE Assia

Soutenu le 06/2021

Devant le jury

Mr	Menad	Abdallah	**Président**	MCA	**U. MOSTAGANEM.**
Mr	Maamar	ANDASMAS	**Examinateur**	MCA	**U. MOSTAGANEM.**
Mme	Horiya.	Diala	**Encadreur**	MAA	**U. MOSTAGANEM.**

REMERCIEMENTS

Tous d'abord, je remercie le Dieu Alkadir le plus puissant de m'avoir donné la volonté et la patience d'aller jusqu'au bout pour réaliser mon but.
Je tiens à remercier mon encadreur Mme Horiya DIALA qui m'a aidé par ses connaissances scientifiques et disposer tous ce qui est nécessaire pour résoudre les difficultés rencontrés lors de la réalisation de travail.
Je remercie aussi Mr Mened Abdallah et Mr Maamar ANDASMAS pour la faveur accordée à l'examination de ce travail.
Et je remercie mes chères parents qui ont aidé à arriver ce que je suis, merci à toutes et à tous.

Table des matières

INTRODUCTION

Ce travail est une synthèse des résultats obtenus dans l'article de Angelo FAVINI , Rabah LABBAS , Stéphane MAINGOT , Hiroki TANABE et Atsushi YAGI "On the Solvability and Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type 2004".

Le but était d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de l'équation différentielle abstraite complète de second ordre suivante

$$u^{''}(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in (0,1) \tag{0.0.1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \tag{0.0.2}$$

Ici A et B sont deux opérateurs lineaires fermés dans l'espace de Banach complexe X, le second membre f est une fonction continue sur $[0.1]$ et u_0, u_1sont des donneés dans $D(A)$.

L'objectif de ce travail est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution stricte u de problème$(2.2.1) - (2.2.2)$, ainsi que dans ce cas on dira qu'une solution stricte u à la régularité maximale.

Le présent travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète de second ordre avec des conditions aux limites.

Ce mémoire comporte quatre chapitres et est organisé comme suit.

Dans le premier chapitre est consacré à des rappels sur les outils mathématiques utilisés dans ce travail on introduit les notions d'opérateurs linéaires fermés, les semi-groupes, l'intégral de Dunford, les espaces d'interpolation, les puissance fractionnaires d'opérateurs, la théorie des sommes d'opérateurs, les espace de Hölder, et les opérateurs adjoints.

Dans le deuxième chapitre il y'a deux partie, dans la première partie on a étudie de cas particulier $B = 0$. Dans la deuxième partie on a étudié l'existence et l'unicité de la solution stricte.

Le résultat de ce chapitre est représenté par le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *Sous les hypothèses*$(2.2.3) \sim (2.2.8)$*, si de plus* $D(BA) \subset D(B^3)$*, alors pour tout* $f \in C^\theta([0,1], X)$*,* $\quad 0 < \theta < 1$ *et tout* $\quad u_0, u_1 \in D(A)$*, le problème* $(2.2.1) - (2.2.2)$ *admet une solution stricte unique sur* $[0,1]$*.*

Dans le troisième chapitre on a étudie la régularité maximale de la solution u. Le résultat de ce chapitre est représenté par le théorème suivant :

Théorème 0.0.2 *sous les hypothèses*$(2.2.3) \sim (2.2.8)$*, si de plus* $D(BA) \subset D(B^3)$*, alors pour tout* $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$*,* $0 < \theta < 1$ *et tout* $u_0, u_1 \in D(A)$ *satisfait*

$$f(i), Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty) = (D(A), X)_{1-\theta/2,\infty}, \qquad i = 0, 1,$$

la solution stricte u *de problème* $(2.2.1) - (2.2.2)$ *a la propriété de la régularité maximale :* u''*,* Bu'*,* $Au \in C^\theta([0,1]\,;X)$*.*

Et le quatrième chapitre est une application de ce qu'on a traité dans les chapitre précédent sous forme d'exemple de problème concrets dans l'espace de travail.

Le travail se termine par une bibliographie relative à l'ensemble des travaux présentés ici.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs et des semi-groupes .

Nous considérons X un espace de Banach complexe.

1.1 Les opérateurs linéaires bornés et fermés

On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés et fermés afin que les notations utilisées au cours de cette thèse soient claires.

1. On rappelle que A est un opérateur linéaire sur X un espace de Banach si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$(domaine de définition de A)de X, à valeurs dans X.i.e. tel que pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

   •$A(x+y) = Ax + Ay$,

   • $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

2. A est dit borné si

$$D(A) = X \text{ et } \exists c > 0 : \|A\xi\| \leq c \|\xi\|$$

   et on écrit $A \in L(X)$.

3. .A est dit fermé si et seulement si son graphe est fermé, i.e, pour toute suite$(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{cases}$$

4. A est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermé, ce qui équivaut à dire que pour toute suite$(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

La convergence des suites x_n et Ax_n au sens de la norme de l'espace X.
La notion fermabilité des opérateurs linéaires est importante dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles car elle permet d'avoir des solutions distributions, (voir Kato [12])
$D(A)$ est appelé le domaine de A. On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$ i.e, si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(X_n)_{n\geq 0}$d'éléments de $D(A)$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

1.2 Les semi- groupes

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach. On dit que la famille $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornées sur X constitue un semi-groupe si :*

1. $G(0) = I = I_E$,
2. $\forall t, s \geq 0, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $(G(t))_{t\geq 0}$est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ et que la deuxième propriété est vérifiée pour tous t et s de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2.2 *On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$est fortement continu si et seulement si*
pour tous $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}_+$dans X est continue c'est à dire

$$\forall x \in X, \lim_{t\to 0} \|G(t)x - x\|_X = 0$$

on dit aussi que $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Proposition 1.2.1 *Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \|G(t)x\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.2.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$,l'opérateur Λ défini par*

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{G(t)x-x}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall x \in D(\Lambda), \Lambda x = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{G(t)x-x}{t}. \end{cases}$$

Proposition 1.2.2 *Si Λ est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, alors*

1. Λ est linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans X.

2. L'ensemble résolvant $\rho(\Lambda)$ défini par :

$$\rho(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\},$$

qui contient le demi-plan

$$P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\},$$

et $\forall \lambda \in P_\omega, \forall n \geq 1$

$$\left\| (\Lambda - \lambda I)^{-n} \right\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}.$$

3. La résolvant de Λ est donnée par la transformation de Laplace :

$$\forall \lambda \in P_\omega, (\Lambda - \lambda I)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\, x dt,$$

où M et ω sont les constantes de la proposition précédente.

La réciproque de ce résultat est donnée par le célèbre théorème de Hille-Yosida suivant :

Théorème 1.2.1 $(Hille - Yosida)$ [12] *Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X$ un opérateur linéaire tel que :*

1. Λ est fermé et $D(\Lambda)$ est dense dans X.

2. Il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que :

$$\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\},$$

et pour $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega, n = 1, 2...$

$$\left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n}}.$$

Alors Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$.

Proposition 1.2.3 *On peut retrouver le semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ à partir de son générateur Λ par la formule*

$$G(t)\,x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\Lambda\lambda}x, \quad t \geq 0, \; x \in X,$$

où $\Lambda_\lambda \in L(X)$ est l'approximation de Yosida définie par

$$\Lambda_\lambda = -\lambda\Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1} \qquad \lambda > \omega.$$

La proposition suivante détaile les principaux propriétés des C_0 semi-groupes.

Proposition 1.2.4 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal Λ, alors on a :*

1. *Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to G(t)\,x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors $G(t)\,x \in D(\Lambda)$.*
3. *La fonction $t \to G(t)\,x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(\Lambda)$. Dans ce cas*
$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}G(t)\,x = \Lambda G(t)\,x = G(t)\,\Lambda x.$$
4. *Pour tout x de X et tout $t \geq 0$*
$$\int_0^t G(s)\,xds = D(\Lambda)\,et\Lambda\int_0^t G(s)\,xds = G(t)\,x - x,$$
et si de plus $x \in D(\Lambda)$
$$\Lambda\int_0^t G(s)\,xds = \int_0^t G(s)\,\Lambda xds = G(t)\,x - x.$$

5. *Si Λ est générateur infinitésimal d'un autre C_0 semi-groupe de $(S(t))_{t\geq 0}$, alors*

$$\forall t \geq 0,\ S(t) = G(t).$$

La proposition précédente permet d'afirmer entre autre que si Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de $(G(t))_{t\geq 0}$ et si $u_0 \in D(\Lambda)$, la fonction $u : [0, +\infty[\to X$ définie par

$$\forall t \geq 0,\ u(t) = G(t)\, u_0,$$

est l'unique fonction dans $C^1([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(\Lambda))$, solution
du problème de Cauchy $\begin{cases} u'(t) = \Lambda u(t), & x \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$

Définition 1.2.4 *On a $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe telle que*

$$\forall t \geq 0, \|G(t)\, x\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

on dit que :

**$(G(t))_{t\geq 0}$ infinitésimal borné si $M \geq 1$ et $\omega = 0$.*

**$(G(t))_{t\geq 0}$ de contraction si on a $(1,1)$ avec $M = 1$ et $\omega = 0$.*

1.2.1 semi-groupes différentiables

Définition 1.2.5 *On dit qu'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est différentiable si pour tout x de X, la fonction $t \to T(t)\, x$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans X.*

Proposition 1.2.5 *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal Λ. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a :*

1. $\forall t \in]0, +\infty[\, , T(t)\, x \in D(\Lambda^n)$.
2. $t \mapsto T(t)\, x$ est n fois différentiable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall t \in]0, +\infty[\, , T^{(n)}(t)\, x = \Lambda^n T(t)\, x$$

3. $\forall t \in]0, +\infty[\, , T^{(n)}(t) \in L(X)$.
4. $t \mapsto T^{(n)}(t)$ est différentiable (donc continu) de $]0, +\infty[$ dans $L(X)$.

1.2.2 semi-groupe analytique

Dans toute la suite arg désigne la détemination principale de la fonction argument caractérisée par:

$$\arg(z) = \varphi \quad \text{si} \quad z = re^{i\phi}, r > 0, \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Définition 1.2.6 *Soit $\phi \in]0, \pi]$. On appelle semi-groupe analytique, l'application G définie sur le secteur $\overline{S_\phi}$ avec*

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\},$$

et à valeurs dans $L(X)$ telle que :

1. $z \to G(z)$est analytique sur S_ϕ.
2. $G(0) = I$ et $\forall x \in X, \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{S_\phi}}} \|G(z)x - x\|_X = 0.$
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}, G(z_1 + z_2) = G(z_1) G(z_2).$

Si de plus $\underset{z \in \overline{S_\phi}}{Sup} \|G(z)\| < +\infty$, on dit que $(G(z))_{z \in \overline{S_\phi}}$ est uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.

1.2.3 semi-groupe analytique généralisé

On dit que $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé si Q est un opérateur linéaire dans X,de domaine non dense et vérifiant :

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \;/\; |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \left\|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases},$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans ce cas $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ n'est pas supposé un semi-groupe fortement continu (voir Sinestrari, E. [18], Lunardi [15]).

Remarque 1.2.1 *En fixant $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ alors $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ est défini par*

$$e^{xQ} = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\lambda x} (\lambda I - Q)^{-1} d\lambda \text{ si } x > 0 \\ I \quad \text{si } x = 0, \end{cases},$$

où γ est le bord de $S_{\omega,\delta} \setminus B(0, r)$ orienté négativement.

1.2.4 Générateur infinitésimal de semi-groupe analytique (ou holomorphe)

Théorème 1.2.2 *Soit Λ le générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe $(G(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ uniformément borné sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. Il existe $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $C \geq 0$ tels que
$$\left\{ \begin{array}{c} \rho(\Lambda) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \ \text{ et} \\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}\ , \qquad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{array} \right. .$$
2. $(G(t))_{t\geq 0}$est un C_0 semi-groupe différentiable et il existe $M > 0$ tel que pour tout $t > 0$,
$$G(t) \in L(X, D(\Lambda)) \ \ et \ \ \|\Lambda G(t)\|_{L(X)} \leq \frac{M}{t}.$$
3. Il existe $\phi \in \left]0, \pi\right]$ tel que $(G(t))_{t\geq 0}$ soit prolongeable en $(G(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ semi-groupe sur X, analytique sur S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.

Théorème 1.2.3 *Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Λ est fermé, $D(\Lambda)$ est dense dans X et il existe $C \geq 0$ tel que
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\Lambda) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* / \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \ \text{ et} \\ \ \ \forall \lambda \in \Pi, \quad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{array} \right. .$$
2. Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné $(G(t))_{t\geq 0}$ qui de plus se prolonge en $(G(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$, semi-groupe sur X, analytique dans S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$ (avec $\phi \in \left]0, \pi\right]$).

1.3 Les espaces d'interpolation

On donne ici certaines caractérisations des espaces d'interpolation.

Définition 1.3.1 *Soit X un espace de Banach.*

On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f : \mathbb{R}_+ \to X \quad \text{est fortement mesurable et} \\ \underset{0<t<\infty}{Sup\ ess} \|f(t)\|_X < \infty. \end{array} \right. .$$

Définition 1.3.2 *Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé X.*
Pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$, on dit que $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} i) \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 / x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1). \end{array} \right.$$

Proposition 1.3.1 $\left(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0 \cap X_1}\right), \left(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0+X_1}\right)$ *et* $\left((X_0, X_1)_{\theta,p}, \|.\|_{\theta,p}\right)$ *sont des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\left\{ \begin{array}{c} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \quad si\ x \in X_0 \cap X_1, \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x_i \in X_i, x_0+x_1=x} \left(\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}\right) \; si\ x \in X_0 + X_1, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i : \mathbb{R}_+ \to X_i, i=0,1 : \\ \forall t>0, u_0(t)+u_1(t)=x}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1)}\right) \\ \qquad si\ x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}. \end{array} \right.$$

Et de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Notons que

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p}$$

Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplets d'espaces d'interpolation $(X_0, X_1, X), (Y_0, Y_1, Y)$ et un opérateur linéaire T de X dans Y, alors on a le théorème :

Théorème 1.3.1 *On suppose que les restrictions de T aux espaces X_i à valeurs dans Y_i avec $i = 1, 2$ sont linéaires continues, alors pour tous $\theta \in \,]0,1[$ et $p \in [1, \infty]$, l'opérateur T est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ dans $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ et*

$$\|T\|_{L\left((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p}\right)} \leq C \|T\|_{L(X_0,Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{L(X_1,Y_1)}^{\theta}$$

Définition 1.3.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine*

$$D(A) \subset X,$$

muni de sa norme

$$\forall x \in D(A), \;\; \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X .$$

On pose

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p},$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ ainsi :

Théorème 1.3.2 *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.*
Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \;\; \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X : t^\theta A (A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\right\},$$

et

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{x \in X : \sup_{t>0} \left\|t^\theta A (A - tI)^{-1} x\right\|_X \leq C < +\infty\right\},$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \left\|t^\theta A (A - tI)^{-1} x\right\|_X ,$$

(voir Grisvard P.[11]).

1. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E

$$D_A(\theta,p)=\left\{x\in E: t^{-\theta}\left(e^{tA}-I\right)^{-1}x\in L_*^p(\mathbb{R}_+;X)\right\}.$$

   (voir Lions J.L.[14]).

2. Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans E, alors

$$D_A(\theta,p)=\left\{x\in E: t^{1-\theta}Ae^{tA}x\in L_*^p(\mathbb{R}_+;X)\right\}.$$

1.4 Calcul et integrale de Dunford

1.4.1 Formule de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Pour $f\in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée par

$$f(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{\lambda-z_0}d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

1.4.2 Integrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(T)$où T est opérateur linéaire fermé et f est holomorphe.
Plus précisément si $T\in L(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(T)$ (le spectre de T) alors on définit l'integrale de Dunford-Riesz par

$$f(T)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(T)$ et contenu dans U.

1.4.3 Propriété de l'integrale de Dunford

Théorème 1.4.1 *Soient f et $g \in H(T)$ et $T \in L(X)$, alors $f.g \in H(T)$ et*

$$f(T)\,g(T) = (fg)(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\lambda)\,g(T)\,(\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda.$$

Preuve. (voir Dunford-Schwartz [5]). □

1.5 Puissances fractionnaires

Théorème 1.5.1 *Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*
$$\begin{cases} \exists C > 0 : \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geq 0 \\ \quad \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{(1+\lambda)}, \end{cases}$$
alors pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, -(-A)^\alpha$ génère un semi-groupe $G_\alpha(t)$ fortement continu pour $t \geq 0$ et uniformément continu pour $t > 0$.

Preuve. (voir A. Balakrishnan [1]) □

Exemple 1.5.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, , , , ,*

Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

On considère ici $A \in S_\phi$où $\phi \in \left]0, \pi\right[$.

On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule

$$A^\alpha = (z^\alpha)(A),$$

ici z^α désigne la détèrmination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \ \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Proposition 1.5.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta$, on a alors*

1. A^α est opérateur fermé de X.
2. $A^\alpha + B^\beta = A^\alpha B^\beta = B^\beta A^\alpha$.
3. $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha \Rightarrow D\left(A^\beta\right) \subset D(A^\alpha)$et en particulier

$$\operatorname{Re}\alpha < 1 \Rightarrow D(A) \subset D(A^\alpha).$$

4. Si A est injectif alors A^{α} l'est aussi et
$$\left(A^{-1}\right)^{\alpha} = (A^{\alpha})^{-1}.$$
5. Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^{n})$.
6. Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{\omega}$ alors
$$\left(A^{\theta}\right)^{\alpha} = A^{\theta\alpha}.$$
7. $A \in L(X) \Rightarrow A^{\alpha} \in L(X)$.

Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 1.5.2 *On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que A est injective. Alors*

1. A^{α} est un opérateur fermé de X.
2. A^{α} est injectif et $(A^{\alpha})^{-1} = A^{-\alpha} = (A^{-1})^{\alpha}$.
3. $A^{\alpha+\beta} \subset A^{\alpha}A^{\beta}$.
4. Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{\omega}$ alors
$$\left(A^{\theta}\right)^{\alpha} = A^{\theta\alpha}.$$

Considérons maintenant le cas particulier où A admet un inverse borné.

Définition 1.5.1 *Si $0 \in \rho(A)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$, alors*

1. $A^{-\alpha} = (A^{-1})^{\alpha} \in L(X)$.
2. $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$.

1.6 La théorie des sommes d'opérateurs

On rappelle dans la suite les principaux résultats de la théorie des sommes d'opéraeurs linéaires dans les espaces de Banach quelconques.

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$.

On s'intéresse alors à l'équation
$$Au + Bu = g,$$

où g est un vecteur donné de X.

L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par
$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \text{ si } u \in D(L), \end{cases}$
alors ce dernier s'écrit comme

$$Lu = g.$$

Une solution stricte de $Lu = g$ est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant l'égalité, L'idéal est de trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X, mais ce n'est pas toujours possible, on introduit dont une nouvelle notion :

u est une solution forte si et seulement si, il existe$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Lu_n = g.$$

Evidemment, la solution stricte u est une solution forte. La notion de solution forte est donc plus faible (mais le terme de solution faible ne sera pas utilisé ici, il est en général réservé aux solutions variationnelles, la notion de solution forte correspond plutot à une solution distribution).

Notons que si L est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalantes, mais la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

D'autre part si l'on suppose que L est fermable et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extension fermée de L) alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Lu_n = g,$$

équivaut à

$$u \in D\left(\overline{L}\right) \text{ et } \overline{L}u = g.$$

Enfin dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout g de X, il existe une solution forte de $Lu = g$.
2. $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.

Et si L est fermé les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout g de X, il existe une solution stricte de $Lu = g$.
2. $0 \in \rho(L)$.

Dans ce contexte, on comprend l'importance de trouver des conditions raisonnables sur les opérateurs A et B, qui assurent que L est fermable (voire fermé) et que $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.
Les deux théorèmes de G. Da Prato et P.Grisvard, énoncés plus loin, répondent positivement à problème sur les sommes d'opérateurs sous des conditions adéquates.

1.6.1 La théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato et Grisvard

On suppose qu'il existe $r > 0$ et un angle $\theta \in \left]0, \pi\right]$. On note le secteur S_θ par

$$S_\theta \left\{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |z| \geq r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta\right\},$$

Les hypothèses sur A et B

On suppose que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses de (Da Prato et Grisvard [4])suivantes :

Parabolicité-ellipticité :

$$(DP.1) \begin{cases} \exists r, C_A, C_B > 0, \theta_A, \theta_B \in \left]0, \pi\right[: \\ i)\rho(A) \supset S_{\theta_A} = \left\{z : |z| \geq r, |\arg(z)| < \pi - \theta_A\right\}, \\ \forall z \in S_{\theta_A}, \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C_A}{|z|}. \\ ii)\rho(B) \supset S_{\theta_B} = \left\{z : |z| \geq r, |\arg(z)| < \pi - \theta_B\right\}, \\ \forall z \in S_{\theta_B}, \left\|(B - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C_B}{|z|}. \\ iii)\theta_A + \theta_B < \pi. \\ iv)\overline{D(A) + D(B)} = X. \end{cases}$$

Commutativité au sens des résolvantes :

$$(DP.2) \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(-B) \\ (A + \lambda I)^{-1} (B + \lambda I)^{-1} = (B + \lambda I)^{-1} (A + \lambda I)^{-1} \end{cases}$$

et

$$(DP.1) \quad \sigma(A) \cap \sigma(-B) = \varnothing$$

où $\sigma(A)$ $(rep\ \sigma(-B))$ désigne le spectre de A (resp de $(-B)$) et $\rho(A), \rho(-B)$ leurs ensembles résolvants.

La première hypothèse est dite d'ellipticité-parabolicité, la deuxième indique le cadre commutatif.

Théorème de Da Prato et Grisvard

L'opérateur linéaire continu défini par l'integrale de Dunford suivant :

$$S : u \to \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (B + zI)^{-1} (A - zI)^{-1} g dz$$

provenant naturellement de l'extension de laformule de Cauchy dans le cadre opérationnel, vérifie les propriétés :

1. $\forall u \in D(A) \cap D(B)$ on a $S(Au + Bu) = u$,
2. $\forall v \in D(A) + D(B)$ on a
$$S(v) \in D(A) \cap D(B)$$
et
$$A(S(v)) + B(S(v)) = v.$$
3. Pour $v \in D_A(\theta, p) + D_B(\theta, p), \theta \in \left]0,1\right[, p \in [1, +\infty]$, on a
$$Sv \in D(L) \text{ et } L(Sv) = v$$
4. L est fermable et $\left(\overline{L}\right)^{-1} = S$ ($\overline{L}$ est la fermeture de $A + B$), de plus :
$$(D(L); X)_{\theta,p} = (D(A); X)_{\theta,p} \cap (D(B); X)_{\theta,p}$$

Γ est une courbe sectorielle séparant les spectres de A et $(-B)$ et demeurant dans $\rho(A) \cap \rho(-B)$ (voir Da Prato-Grisvard [4]).
La fonction u est l'unique solution forte de $Lu = g$.

Théorème 1.6.1 *Sous les hypothèses* $(DP1) \sim (DP3)$ *et pour* $\theta \in \left]0,1\right[, p \in [1, +\infty]$, *on a :*

1. Si $g \in D_B(\theta, q)$ alors $u \in D(L)$ et $Au,\ Bu \in D_B(\theta, p)$.
2. Si $g \in D_A(\theta, q)$ alors $u \in D(L)$ et $Au,\ Bu \in D_A(\theta, p)$.

1.7 Les espaces de Hölder

Définition 1.7.1 *Soient* X *un espace de Banach complexe et* $C([0,1]; X)$ *l'espace de Banach des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* X *muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_X.$$

On considère, pour $0 < \alpha < 1$,l'espace

$$C^{\alpha}\left([0,1]\,;X\right) = \left\{ f \in C\left([0,1]\,;X\right) / \sup_{t-s \neq 0} \frac{\left\| f(t) - f(s) \right\|_X}{\left| t-s \right|^{\alpha}} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\alpha}([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{t-s \neq 0} \frac{\left\| f(t) - f(s) \right\|_X}{\left| t-s \right|^{\alpha}}.$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace höldérien de degré α.

1.8 Opérateurs auto-adjoints positif

Définition 1.8.1 *(opérateur adjoint) Soit H un espace de hilbert. Deux opérateurs $(A, D(A))$ et $(T, D(T))$ sont dits adjoints si*

$$\forall u \in D(A) \subset H;\ \forall v \in D(T) \subset H : \langle Au, v \rangle = \langle u, Tv \rangle\,.$$

Où $A = T^{*}$.

Définition 1.8.2 *(opérateur auto-adjoint postif) Un opérateur $A \in L(H)$ est dit*

- hermitien ou auto-adjoint si $A^{*} = A$.

- positif s'il hermitien et si de plus $\langle Ah, h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$.

Chapitre 2

L'éxistence et L'unicité de la solution stricte

2.1 L'étude de cas particulier $B = 0$

Dans l'espace de Banach complexe X, on considère le problème abstraite suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} u''(t) + Au(t) = f(t) & t \in (0,1) \\ u(0) = u_0 & \\ u(1) = u_1 & \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

où A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X vérifiant l'hypothèse suivante

$$(H1) \quad \left\{\begin{array}{l} \forall \lambda \geq 0, \exists (\lambda I - A)^{-1} \in L(X) \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda} \end{array}\right.$$

et le second membre

$$f \in C([0,1]\,; X),$$

ici u_0, u_1 sont deux éléments donnés dans X

Remarque 2.1.1 *Sous l'hypothèse* ***(H1)*** *l'opérateur $-\sqrt{-A}$ génère un semi-group analytique noté*

$$V(t) = e^{-t\sqrt{-A}}, \quad t \geq 0.$$

Pour plus de détails voir [1].

On sait que la solution de l'équation homogène du problème (2.1.1)

$$u''(t) + Au(t) = 0,$$

dans le cas scalaire est données par

$$u(t) = C_1 e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2 e^{-t\sqrt{-A}}. \tag{2.1.2}$$

On utilise la méthode de la variation des constantes pour l'équation non homogène, c'est à dire on va cherche une solution sous la forme

$$u(t) = C_1(t) e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2(t) e^{-t\sqrt{-A}},$$

telles que C_1et C_2 sont deux fonctions à déterminer vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{-(1-t)\sqrt{-A}} + C_2'(t) e^{-t\sqrt{-A}} = 0 \\ \sqrt{-A} C_1'(t) e^{-(1-t)\sqrt{-A}} - \sqrt{-A} C_2'(t) e^{-t\sqrt{-A}} = f(t). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & e^{-t\sqrt{-A}} \\ \sqrt{-A} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & -\sqrt{-A}\, e^{-t\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -2\sqrt{-A} e^{-\sqrt{-A}},$$

alors

$$C_1'(t) =^{-1} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t\sqrt{-A}} \\ f(t) & -\sqrt{-A}\, e^{-t\sqrt{-A}} \end{vmatrix} = -D^{-1} e^{-t\sqrt{-A}} f(t),$$

et

$$C_2'(t) = D^{-1} \begin{vmatrix} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & 0 \\ \sqrt{-A} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} & f(t) \end{vmatrix} = D^{-1} e^{-(1-t)\sqrt{-A}} f(t),$$

donc

$$\begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{2} \int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{(1-s)\sqrt{-A}} f(s) ds + \xi_0 \\ C_2(t) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{s\sqrt{-A}} f(s) ds + \xi_1 \end{cases}$$

par conséquent dans le cas opérationnels la solution est donné par :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-(1-t)\sqrt{-A}} \xi_0 + e^{-t\sqrt{-A}} \xi_1 - \frac{1}{2} \int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s) ds \\ & -\frac{1}{2} \int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s) ds \end{aligned}$$

pour déterminer ξ_0, ξ_1, on utilise les conditions aux limites

$$u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u(1) = u_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{-\sqrt{-A}} \xi_0 + \xi_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s) ds \\ u_1 &= \xi_0 + e^{-\sqrt{-A}} \xi_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\xi_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\
\xi_0 &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds.
\end{aligned}$$

En remplace la valeur de ξ_1 dans la deuxième équation, on obtient

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}\xi_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \\
&= u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 + e^{-2\sqrt{-A}}\xi_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \\
&= (1 - e^{-2\sqrt{-A}})^{-1}\left[u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds\right].
\end{aligned}$$

On sait que l'opérateur $(1 - Z)$ avec $Z = e^{-2\sqrt{-A}}$, est inversible grâce à Lunardi [15], page 60.

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1 - Z)^{-1}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds\right]
\end{aligned}$$

La solution du problème considéré comme suit

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\xi_0 + e^{-t\sqrt{-A}}\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(t-s)\sqrt{-A}} f(s)ds \qquad (2.1.3) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(s-t)\sqrt{-A}} f(s)ds
\end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (1 - Z)^{-1}\left[u_1 - e^{-\sqrt{-A}}u_0 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-s\sqrt{-A}} f(s)ds\right. \qquad (2.1.4) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1} e^{-(1-s)\sqrt{-A}} f(s)ds\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (1-Z)^{-1}\left[u_0 - e^{-\sqrt{-A}}u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds\right].\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Pour vérifier que u est bien une solution du problème $(2.1.1)$, on dérive deux fois la solution obtenue, on trouve

$$\begin{aligned}u'(t) &= \sqrt{-A}e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\xi_0 - \sqrt{-A}e^{-t\sqrt{-A}}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(s-t)\sqrt{-A}}f(s)ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}u''(t) &= -Ae^{-(1-t)\sqrt{-A}}\xi_0 - Ae^{-t\sqrt{-A}}\xi_1 + \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds \\ &-\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(s-t)\sqrt{-A}}f(s)ds + \frac{1}{2}f(t) \\ &= -A\left[e^{-(1-t)\sqrt{-A}}\xi_0 + e^{-t\sqrt{-A}}\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds\right. \\ &\left.-\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(t-s)\sqrt{-A}}f(s)ds\right] + f(t) \\ &= -Au(t) + f(t)\end{aligned}$$

alors

$$u''(t) + Au(t) = f(t).$$

avec les condition aux limites

$$u(0) = u_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-s\sqrt{-A}}f(s)ds = u_0$$

$$u(1) = u_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)ds = u_1.$$

Remarque 2.1.2 *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semi-group analytique génère par $-\sqrt{-A}$. Alors la formule de la solution* $(2.1.3)$, $(2.1.4)$, $(2.1.5)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}u(t) &= T(1-t)\xi_0 + T(t)\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\sqrt{-A})^{-1}T(t-s)f(s)ds \\ &-\frac{1}{2}\int_t^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s-t)f(s)ds,\end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$ *et*

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (1-T(2))^{-1}(u_1 - u_0 T(1)) \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}(T(1-s)f(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1-T(2))^{-1}(u_0 - u_1 T(1)) \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(1-T(2))^{-1}T(1)\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}(T(1-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = T(1)\xi_0 + \xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(s)f(s)ds = u_0 \\ u(1) = \xi_1 + T(1)\xi_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{-A})^{-1}T(1-s)f(s)ds = u_1 \end{cases}$$

2.2 L'étude de l'équation complète

On considère l'équation différentielle abstraite de second ordre :

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t) \qquad t \in (0,1) \tag{2.2.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

f est fonction continue sur $[0,1]$; X étant un espace de banach complexe, $u_0$et u_1 dans $D(A)$, A et B sont deux opérateurs linéaires fermé dans X

on cherche une solution stricte $u(.)$ de problème(2.2.1)-(2.2.2) c'est à dire

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C^1([0,1];D(B)) \cap C([0,1];D(A))$$

satisfie (2.2.1) et (2.2.2).

Notre objectifs principale et de donner à la fois une approche alternative par rapport aux résultats récents du EL Haial et Labbas [6] et pour améliorer le résultat principal de Favini,Labbas,Tanabe,Yagi [7]. Nous supposons que :

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dense défini dans } X \text{ et} \\ \forall\lambda \geq 0, \exists(\lambda I + B^2 - A)^{-1} \in L(X) \\ \|(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{(1+\lambda)} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

il est bien connu que l'hypohèse (2.2.3) implique que $-(B^2 - A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique {T(t)}, $t \geq 0$, dans X,

$$D(A) \subseteq D(B^2), \tag{2.2.4}$$

$$\forall y \in D(B) \qquad B(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)^{-1}By, \tag{2.2.5}$$

$$A \text{ est infiniment inversible }, \tag{2.2.6}$$

$$D((B^2 - A)^{1/2}) \subseteq D(B), \tag{2.2.7}$$

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ génère un semi group analytique danx } X \tag{2.2.8}$$

Remarque 2.2.1 ***1.*** *Si X est un espace de Hilbert, B, $B^2 - A$ sont des opérateur auto adjoints, $B^2 - A$ égalment positive, et on plus $D(A) \subseteq D(B^2)$,une modification facile du théorème de Heinz (voir [19], p. 44–46) montre que*

$$D((B^2 - A)^{1/2}) \subseteq D(B),$$

on trouve aussi que(2.2.7) *est satisfait.*

2. *Dans le cas général des opérateurs définis dans les espaces de banach,* (2.2.7) *implique que pour tout $\rho \geq 0$*

$$\forall y \in D(B^2 - A) \qquad \|By\| \leq C(\rho^{1/2} \|y\| + \rho^{-1/2} \left\|(B^2 - A)y\right\|),$$

inversement, si pour certains $\gamma \in]0, 1/2[$ et pour tout $\rho \geq \rho_0 \geq 0$ on a :

$$\forall y \in D(B^2 - A) \qquad \|By\| \leq C(\rho^{\gamma} \|y\| + \rho^{\gamma-1} \left\|(B^2 - A)y\right\|),$$

alors

$$D((B^2 - A)^{1/2}) \subseteq D(B).$$

(voir [17], p. 73–74).

3. *Soit A_0 et B deux opérateurs linéaires fermés en X commutent au sens de résolvant avec $D(A_0) \subseteq D(B^2)$, $D(A_0)$ dense en X et $B^2 - A_0$ est un opérateur fermé. S'il existe $\lambda_0 < 0$ telle que :*

$$\begin{cases} \forall \lambda > 0 \\ \|(A_0 + \lambda_0 I - \lambda I)^{-1}\| \leq 1/\lambda, \\ \|(B^2 + \lambda I)^{-1}\| \leq 1/\lambda, \end{cases}$$

alors pour tout $s > 0$

$$\begin{cases} \|((s + \lambda_0)I - (\lambda_0 I + A_0) + B^2)^{-1}\| \\ = \|(A_0 - B^2 - sI)^{-1}\| \\ \leq 1/s, \end{cases}$$

(voir [4], p. 320). Par conséquent (2.2.3) est valable pour $A = A_0 + \lambda_0 I$.

4. *Les hypothèse (2.2.3) $\sim$ (2.2.4) donnent*

$$B^2(B^2 - A)^{-1} \in L(X), \tag{2.2.9}$$

et

$$A(B^2 - A)^{-1} \in L(X), \tag{2.2.10}$$

5. *Comme on le sait, les seules hypothèses (2.2.3), (2.2.5) n'impliquent pas (2.2.8). Cependant, par fois certaines condition facilement vérifiables, garantissent que l'hypothèse (2.2.8) est satisfaite sans demander, la petitesse de B par rapport à $(B^2 - A)^{1/2}$.*

Nous rappelons ici la forme de Favini et Triggiani [9]. Théorème 1.1, p. 94.

Soit L un opérateur auto adjoint strictement positif sur l'espace de hilbert X et soit M un autre opérateur auto-adjoint sur X telle que $D(L^{1/2}) \subseteq D(|M|^{1/2})$ ou $|M| = (M^2)^{1/2}$. Alors $-L \pm iM$ génère des semi groupes analytiques dans X .

Par contre, si l'on suppose $D(L) \subseteq D(M)$ $(= D(|M|))$, alors par le corollaire de Tanabe [19], p. 45, $D(L^{1/2}) \subseteq D(|M|^{1/2})$ et donc $-L \pm iM$ génèrent à nouveau des semi groupes analytiques dans X.

L'hypohèse (2.2.8) suit si l'on prend $B = iM$ et $(B^2 - A)^{1/2} = L$.

Nous établirons le premier résultat comme suit

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses(2.2.3) $\sim$ (2.2.8), si de plus $D(BA) \subset D(B^3)$, alors pour tout $f \in C^\theta([0, 1], X)$, $\quad 0 < \theta < 1$ et tout $\quad u_0, u_1 \in D(A)$, le problème (2.2.1) $-$ (2.2.2) admet une solution stricte unique sur $[0, 1]$.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoins des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses*(2.2.3) ,(2.2.4) *on a :*

1. *L'hypothèse*(2.2.5) *équivalente à :*

$$\begin{cases} D(B(B^2-A)) \subset D((B^2-A)B) \quad \text{et} \\ \forall z \in D(B(B^2-A)), \quad B(B^2-A)z = (B^2-A)Bz. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

2. *L'hypothèse* (2.2.5) *équivalente à :*

$$\begin{cases} \forall y \in D(B), \quad (B^2-A)^{-1/2}y \in D(B) \quad \text{et} \\ B(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}By. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

3. *Si* (2.2.5) *étant donné, alors*

$$\forall y \in D(A), \qquad A(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}Ay, \tag{2.2.13}$$

et si(2.2.5) ,(2.2.7) *étant donné, alors*

$$\forall y \in D(A), \qquad B(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{1/2}By, \tag{2.2.14}$$

4. *Si*(2.2.5) ,(2.2.6) *étant donné, alors*

$$\forall y \in X, \qquad (B^2-A)^{-1/2}A^{-1}y = A^{-1}(B^2-A)^{-1/2}y, \tag{2.2.15}$$

et si(2.2.5) ,(2.2.6),*et* (2.2.7) *étant donné, alors*

$$\forall y \in D((B^2-A)^{1/2}), \qquad A^{-1}(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{1/2}A^{-1}y. \tag{2.2.16}$$

Preuve. Supposons(2.2.3) ,(2.2.4).

1. Si (2.2.5) donnée, alors pour tout $z \in D(B(B^2-A)) \subset D(B)$ on a

$$Bz = B(B^2-A)^{-1}(B^2-A)z = (B^2-A)^{-1}B(B^2-A)z \tag{2.2.17}$$

alors $Bz \in D(B^2-A)$ et $z \in D((B^2-A)B)$.donc

$$(B^2-A)Bz = B(B^2-A)z.$$

Inversement, l'hypothèse (2.2.11) et soit $y \in D(B)$.alors

$$(B^2-A)^{-1}y \in D(B(B^2-A))$$

et

$$B(B^2 - A)(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)B(B^2 - A)^{-1}y$$

ce qui implique

$$(B^2 - A)^{-1}By = B(B^2 - A)^{-1}y.$$

2. Si(2.2.12) donnée, alors pour tout $y \in D(B)$.on a

$$\begin{aligned} B(B^2 - A)^{-1/2}(B^2 - A)^{-1/2}y &= (B^2 - A)^{-1/2}B(B^2 - A)^{-1/2}y \\ &= (B^2 - A)^{-1/2}(B^2 - A)^{-1/2}By, \end{aligned}$$

ce qui implique(2.2.5).

Inversement, supposons(2.2.5). Soit $y \in D(B)$, $\lambda \in \rho(-(B^2 - A))$ et l'ensemble

$$z = (B^2 - A + \lambda I)^{-1}y.$$

Alors

$$(B^2 - A)z = y - \lambda z \in D(B),$$

de sorte que $z \in D(B(B^2 - A))$. Maintenant d'aprés l'instruction 1, nous avons

$$B(B^2 - A + \lambda I)z = (B^2 - A + \lambda I)Bz$$

et ainsi

$$(B^2 - A + \lambda I)^{-1}By = B(B^2 - A + \lambda I)^{-1}y.$$

Pour conclure, laissez $y \in D(B)$. Puis on utilisant une courbe appropriée γ, nous pouvons écrire

$$(B^2 - A)^{-1/2}y = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (-\lambda)^{-1/2}(B^2 - A + \lambda I)^{-1}y \, d\lambda.$$

Maintenant l'intégrale

$$\int_\gamma B(-\lambda)^{-1/2}(B^2 - A + \lambda I)^{-1}y \, d\lambda,$$

est convergent puisque

$$\begin{aligned} \left\|B(-\lambda)^{-1/2}(B^2 - A + \lambda I)^{-1}y\right\|_X &= |\lambda|^{-1/2}\left\|(B^2 - A + \lambda I)^{-1}By\right\| \\ &\leq C\frac{\|By\|_X}{|\lambda|^{3/2}}, \end{aligned}$$

donc $(B^2-A)^{-1/2}y \in D(B)$ et

$$\begin{aligned} B(B^2-A)^{-1/2}y &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma B(-\lambda)^{-1/2}(B^2-A+\lambda I)^{-1}y\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (-\lambda)^{-1/2}(B^2-A+\lambda I)^{-1}By\, d\lambda \\ &= (B^2-A)^{-1/2}By, \end{aligned}$$

dont(2.2.12) suit.

3. Si l'hypothèse(2.2.5) vérifier, puis de (2.2.12) on a

$$\forall y \in D(B^2), \qquad B^2(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}B^2y,$$

donc

$$\forall y \in D(A), \qquad A(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}Ay.$$

Supposons que les hypothèses(2.2.5) et (2.2.7) vérifier, laisser $y \in D(A) = D(B^2-A)$. Ensuite $(B^2-A)^{1/2}y \in D(B)$ et en d'aprés l'hypothèse (2.2.12) on a

$$B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}B(B^2-A)^{1/2}y,$$

qui donne

$$(B^2-A)^{1/2}By = B(B^2-A)^{1/2}y.$$

4. Il suffit de considérer $A^{-1}y \in D(A)$ et appliquer (2.2.13), (2.2.14). $\square$

Lemme 2.2.2 *Sous hypothèses* (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5)*et* (2.2.7) *on a pour tout* $z \in \rho(-B-(B^2-A)^{1/2})$ *et tout* $\lambda \in \rho(B-(B^2-A)^{1/2})$.

1.

$$\begin{aligned} &(zI+B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B^2-A)^{-1/2} \\ =\ &(B^2-A)^{-1/2}(zI+B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned} &(\lambda I-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B^2-A)^{-1/2} \\ =\ &(B^2-A)^{-1/2}(\lambda I-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}, \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

2.

$$\begin{aligned} &(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(B^2 - A)^{1/2}y \\ = \;& (B^2 - A)^{1/2}(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y, \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned} &(\lambda I - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(B^2 - A)^{1/2}y \\ = \;& (B^2 - A)^{1/2}(\lambda I - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y, \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

où $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$.

Preuve. **1.** On considère $\xi \in X$ et l'ensemble

$$y = (B^2 - A)^{-1/2}(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}\xi \in D(B^2 - A) = D(A).$$

On utilisant maintenant (2.2.14) nous avons

$$\begin{aligned} &(B^2 - A)^{1/2}(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})y \\ = \;& (zI + B + (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{1/2}y, \end{aligned}$$

ce qui implique (2.2.18) de la même manière que nous obtenons (2.2.19).
2. Il suffit appliqué (2.2.18), (2.2.19) à $\xi \in X$, tel que $y = (B^2 - A)^{1/2}\xi$. □

Lemme 2.2.3 *Supposons* (2.2.3) $\sim$ (2.2.7) . *alors*

1.

$$\begin{cases} (B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})A^{-1} = I \\ (B + (B^2 - A)^{1/2})(B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1} = I. \end{cases} \tag{2.2.22}$$

2. pour tout $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$

$$\begin{aligned} &(B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1}(B + (B^2 - A)^{1/2})y \\ = \;& (B - (B^2 - A)^{1/2})(A^{-1}B - BA^{-1})y + y, \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

et

$$\begin{aligned} &(B + (B^2 - A)^{1/2})A^{-1}(B - (B^2 - A)^{1/2})y \\ = \;& (B + (B^2 - A)^{1/2})(A^{-1}B - BA^{-1})y + y. \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Preuve. **1.** D'aprés l'hypothèse (2.2.14), on a

$$(B^2 - A)^{1/2} BA^{-1} = B(B^2 - A)^{1/2} A^{-1},$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & (B - (B^2 - A)^{1/2})(B + (B^2 - A)^{1/2})A^{-1} \\ = \ & B^2 A^{-1} - (B^2 - A)^{1/2} BA^{-1} + B(B^2 - A)^{1/2} A^{-1} - (B^2 - A)A^{-1} \\ = \ & I, \end{aligned}$$

et aussi

$$(B + (B^2 - A)^{1/2})(B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1} = I.$$

2. Soit $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$. Alors

$$\begin{aligned} & (B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1}(B + (B^2 - A)^{1/2})y \\ = \ & BA^{-1}By - (B^2 - A)^{1/2} A^{-1} By + BA^{-1}(B^2 - A)^{1/2} y \\ & -(B^2 - A)^{1/2} A^{-1} (B^2 - A)^{1/2} y. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

On utilisant maintenant l'équation (2.2.16), on trouve

$$\begin{aligned} (B^2 - A)^{1/2} A^{-1} (B^2 - A)^{1/2} y &= (B^2 - A)^{1/2} (B^2 - A)^{1/2} A^{-1} y \\ &= B^2 A^{-1} y - y, \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

et

$$\begin{aligned} BA^{-1}(B^2 - A)^{1/2} y &= B(B^2 - A)^{1/2} A^{-1} y \\ &= (B^2 - A)^{1/2} BA^{-1} y. \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Utilisant les équations (2.2.25), (2.2.26) et (2.2.27) on obtient

$$\begin{aligned} & (B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1}(B + (B^2 - A)^{1/2})y \\ = \ & B(A^{-1}B - BA^{-1})y - (B^2 - A)^{1/2}(A^{-1}B - BA^{-1})y + y \\ = \ & (B - (B^2 - A)^{1/2})(A^{-1}B - BA^{-1})y + y. \end{aligned}$$

De même nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}(B-(B^2-A)^{1/2})y \\
= \ & BA^{-1}By+(B^2-A)^{1/2}A^{-1}By-BA^{-1}(B^2-A)^{1/2}y \\
& -(B^2-A)^{1/2}A^{-1}(B^2-A)^{1/2}y \\
= \ & (B+(B^2-A)^{1/2})(A^{-1}B-BA^{-1})y+y.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.4 *Sous hypothèses* (2.2.3) $\sim$ (2.2.7), $B+(B^2-A)^{1/2}$ *est un opérateur borné et inversible si et seulement si* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *est un opérateur borné et inversible et alors*

$$\begin{cases} (B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}=(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}; \\ (B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}=(B-(B^2-A)^{1/2})A^{-1}, \end{cases} \tag{2.2.28}$$

Preuve. Suppose que $B+(B^2-A)^{1/2}$ est infiniment inversible. Pour prouver que $B-(B^2-A)^{1/2}$ est infiniment inversible, d'aprés l'hypothèse (2.2.22) on montre que cet opérateur est injectif.
Soit $x \in D((B^2-A)^{1/2})$ telle que

$$(B-(B^2-A)^{1/2})x=0.$$

D'aprés l'hypothèse (2.2.20), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& (B^2-A)^{-1}(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B^2-A)^{1/2}x \\
= \ & (B^2-A)^{-1}(B^2-A)^{1/2}(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x \\
= \ & (B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x,
\end{aligned}$$

ce qui implique $(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x \in D(A)$ et ainsi

$$\begin{aligned}
0 &= (B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x \\
&= A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x.
\end{aligned}$$

Puisque A est injectif, on a trouvé que $x=0$. □

Lemme 2.2.5 *Sous les hypothèses*(2.2.3) $\sim$ (2.2.7)*, les assertions suivantes sont équivalentes* .

1. $B + (B^2 - A)^{1/2}$ *est infiniment inversible,*
2. $B - (B^2 - A)^{1/2}$ *est infiniment inversible,*
3. $\forall y \in D((B^2 - A)^{1/2}),\ \ (B^2 - A)^{1/2}(A^{-1}B - BA^{-1})y = 0,$
4. $\forall y \in D(B),\ \ (A^{-1}B - BA^{-1})y = 0,$
5. $D(BA) \subset D(B^3)$.

Preuve : De l'hypothèse (2.2.22), $B + (B^2 - A)^{1/2}$ sera infiniment inversible si et seulement si pour tout $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$

$$(B - (B^2 - A)^{1/2})A^{-1}(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y = y.$$

Donc, à l'aide de l'hypoyhèse (2.2.23), $B+(B^2-A)^{1/2}$ est infiniment inversible si et seulment si pour tout $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$

$$(B - (B^2 - A)^{1/2})(A^{-1}B - BA^{-1})y = 0. \tag{2.2.29}$$

De même $B - (B^2 - A)^{1/2}$ est infiniment inversible si et seulment si pour tout $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$

$$(B + (B^2 - A)^{1/2})(A^{-1}B - BA^{-1})y = 0. \tag{2.2.30}$$

D'autre part par le Lemme 4, les assertions 1 et 2 sont équivalentes, et d'aprés les hypothèses (2.2.29) et (2.2.30), implique

$$(B^2 - A)^{1/2}(A^{-1}B - BA^{-1})y = 0, \tag{2.2.31}$$

pour tout $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$ d'où l'assertion 3.

Supposons maintenant l'assertion 3 et soit $y \in D(B)$.Alors d'aprés l'hypothèse (2.2.12)

$$(B^2 - A)^{-1/2}y \in D(B),$$

et

$$(B^2 - A)^{1/2}(A^{-1}B - BA^{-1})(B^2 - A)^{-1/2}y = 0,$$

alors

$$(B^2-A)^{1/2}A^{-1}B(B^2-A)^{-1/2}y-(B^2-A)^{1/2}BA^{-1}(B^2-A)^{-1/2}y=0,$$

donc, à l'aide de l'hypothèse(2.2.12)et (2.2.15), on obtient

$$(B^2-A)^{1/2}(B^2-A)^{-1/2}A^{-1}By-(B^2-A)^{1/2}(B^2-A)^{-1/2}BA^{-1}y=0,$$

et

$$(A^{-1}B-BA^{-1})y=0.$$

On obtient alors l'assertion 4.

Supposons maintenant l'assertion 4. Puis à l'aide de les hypothèses (2.2.7)et (2.2.29). Par conséquent $B+(B^2-A)^{1/2}$ est infiniment inversible c'est l'assertion 1.

Pour conclure il suffit de prouver que les assertions 4 et 5 sont équivalentes.

Supposons l'assertion 4, puis pour $y\in D(BA)$ nous écrivons

$$By=A^{-1}BAy\in D(A),$$

alors $By\in D(A)\subset D(B^2)$ et $y\in D(B^3)$. Cela donne l'assertion 5. Inversement, si l'assertion 5 donnée alors, de (2.2.5), en déduit

$$\forall y\in D(B(B^2-A)),\qquad (B^2-A)By=B(B^2-A)y,$$

ce qui impliques

$$\forall y\in D(B^3)\cap D(BA),\qquad B^3y-ABy=B^3y-BAy,$$

donc

$$\forall y\in D(BA),\qquad ABy=BAy,$$

d'ou découle l'assertion 4

Preuve de théorème 2.2.1 : Supposons (2.2.3) $\sim$ (2.2.8), et $D(BA)\subset D(B^3)$, laisser $f\in C^\theta([0,1];X)$, où $\theta\in\,]0,1[$, et $u_0,u_1\in D(A)$. Notre première étape consiste à trouver une solution particulière $\overline{u}(.)$ de (2.2.1). Nous introduisons $\overline{u}(.)$ par

$$\begin{aligned}\overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 U(s-t)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds,\end{aligned}\tag{2.2.32}$$

pour $0 \leq t \leq 1$, où $V(t)$ et $U(t)$ sont des semi groupes analytiques générés par $-B-(B^2-A)^{1/2}$et $B-(B^2-A)^{1/2}$ respectivement.

Alors $\overline{u}(.)$ est fortement différenciable sur $[0,1]$ et en raison de Lemme 2, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_t^1 U(s-t)(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds \\
&= \frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_0^t V(t-s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_t^1 U(s-t)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
(B^2-A)^{1/2}\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 U(s)f(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 U(s)(f(s)-f(0))ds - \frac{1}{2}\int_0^1 U(s)f(0)ds.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $s \in]0,1]$

$$\left\|(B-(B^2-A)^{1/2})U(s)\right\|_X \leq \frac{C}{s},$$

alors, puis que $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$, on a

$$\begin{aligned}
(B^2-A)\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\
&\quad \times \int_0^1 (B-(B^2-A)^{1/2})U(s)(f(s)-f(0))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}(U(1)-U(0))f(0),
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\overline{u}(0) \in D(B^2-A) = D(A). \tag{2.2.33}$$

De la même manière que nous obtenons

$$\overline{u}(1) \in D(A). \tag{2.2.34}$$

Puis que f est Höldérienne, on déduit que $\overline{u}(.)$ est deux fois continuement différenciable et

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= -\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^t V(t-s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})\int_t^1 U(s-t)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(t) \\
&= -\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(I-V(t))f(t) \\
&\quad +\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(U(1-t)-I)f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}f(t) \\
&= -\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}V(t)f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}U(1-t)f(t).
\end{aligned}$$

de plus, d'aprés le lemme 2, $\overline{u}(t) \in D(A)$, $A\overline{u}(.) \in C([0,1]\,;X)$ et

$$
\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^t V(t-s)f(s)ds + \int_t^1 U(s-t)f(s)ds\right) \\
&= -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-V(t))f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}(U(1-t)-I)f(t) \\
&= -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\
&= -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}f(t). \\
&\quad +\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}f(t). \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}V(t)f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}U(1-t)f(t).
\end{aligned}
$$

Maintenant

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}((B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}-(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}) \\
= & \frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}((B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}-(B-(B^2-A)^{1/2})A^{-1}) \\
= & A(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}A^{-1} \\
= & I,
\end{aligned}
$$

et ainsi

$$
\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= f(t)+\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}V(t)f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}U(1-t)f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds.
\end{aligned}
$$

Remarquons que $A(B^2-A)^{-1/2}(B \pm (B^2-A)^{1/2})^{-1} \in L(X))$.

Puis que f est höldérienne et de la formule (2.2.8), il est bien conue que

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_0^t V(t-s)f(s)ds & \in & D(B+(B^2-A)^{1/2}) = D((B^2-A)^{1/2}) \\ \displaystyle\int_t^1 U(s-t)f(s)ds & \in & D(-B+(B^2-A)^{1/2}) = D((B^2-A)^{1/2}),\end{array}$$

ensuit $\overline{u}'(t) \in D(B)$ et

$$\begin{array}{rcl}B\overline{u}'(t) & = & -\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}V(t)f(t) + \frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}U(1-t)f(t) \\ & & +\frac{1}{2}B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\ & & \times \displaystyle\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(B+(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(f(s)-f(t))ds \\ & & +\frac{1}{2}B(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\ & & \displaystyle\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(B-(B^2-A)^{1/2})(B^2-A)^{-1/2}(f(s)-f(t))ds.\end{array}$$

Donc

$$\overline{u}''(t) + 2B\overline{u}'(t) + A\overline{u}(t) = f(t) + \frac{1}{2}((i)+(ii)+(iii)+(iv)),$$

où

$$\begin{array}{rcl}(i) & = & \left\{-B(B^2-A)^{-1/2} + I + A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\right\} V(t)f(t) \\ (ii) & = & \left\{B(B^2-A)^{-1/2} + I - A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}\right\} U(1-t)f(t) \\ (iii) & = & -\left\{-B(B^2-A)^{-1/2} + I + A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}\right\} \\ & & \times \displaystyle\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds, \\ (iv) & = & \left\{B(B^2-A)^{-1/2} + I - A(B^2-A)^{-1/2}(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}\right\} \\ & & \times \displaystyle\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds.\end{array}$$

Et d'autre part

$$\begin{array}{rl} & A(B^2-A)^{-1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\ = & -(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} + B(B^2-A)^{-1/2}B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\ = & -(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} + B(B^2-A)^{-1/2} - B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} \\ = & B(B^2-A)^{-1/2} - I.\end{array}$$

Par conséquent $(i) = (iii) = 0$.

De même, on voit aisément que $(ii) = (iv) = 0$. Nous avons prouvé que $\overline{u}(t)$ est la solution stricte unique de (2.2.1) satisfaire les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 U(s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds,\\ \overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 V(1-s)(B^2-A)^{-1/2}f(s)ds.\end{aligned}$$

Pour conclure notre preuve, considérons maintenant le problème homogène

$$v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) = 0, \qquad t \in [0,1], \tag{2.2.35}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = x_0, \qquad v(1) = x_1, \tag{2.2.36}$$

où $x_0, x_1 \in D(A)$. Nous avons les lemmes suivantes

Lemme 2.2.6 *Supposons* (2.2.3) $\sim$ (2.2.8) *et* $D(BA) \subset D(B^3)$. *Si* $x_0, x_1 \in D(A)$, *alors le problème*(2.2.35) $-$ (2.2.36) *a une solution stricte unique.*

Preuve. Il suffit de montrer que sous les hypoyhèses indiquées, le problème (2.2.35) $-$ (2.2.36) a une solution stricte. pour montrer ce résultat on a la solution explicite

$$v(t) = V(t)\xi_0 + U(1-t)\xi_1, \tag{2.2.37}$$

où

$$\begin{cases} Z = e^{-2(B^2-A)^{1/2}} \\ \xi_0 = (I-Z)^{-1}(x_0 - U(1)x_1) \\ \xi_1 = (I-Z)^{-1}(x_1 - V(1)x_0). \end{cases}$$

Notez que puisque l'axe imaginaire est contenu dans l'ensemble résolvante

$$\rho(-(B^2-A)^{1/2}),$$

$I - Z$ a un inverse borné (voir Lunardi [15], page 60)

$$(I-Z)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\#} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}(zI + (B^2-A)^{1/2})^{-1}dz + I,$$

où $\gamma_{\#} = \gamma_1 - \gamma_2$ est une courbe appropriée dans le plan complexe voir (voir Lunardi [15], page 59). D'autre parte, puisque $x_0, x_1 \in D(A)$ et d'aprés l'hypothèse (2.2.4), il existe $\eta \in X$ tel que

$$\begin{aligned} & (zI + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(x_0 - U(1)x_1) \\ = & (zI + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(B^2 - A)^{-1}\eta \\ = & (B^2 - A)^{-1}(zI + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}\eta \in D(A), \end{aligned}$$

donc $\xi_0 = (I - Z)^{-1}(x_0 - U(1)x_1) \in D(A)$. De même $\xi_1 \in D(A)$.
De (2.2.20) du Lemme 2 il s'ensuit que pour $z \in \rho(-B - (B^2 - A)^{1/2})$ et $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$ que

$$\begin{aligned} & (zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}By \\ = & (zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1} \\ & \times((zI + B + (B^2 - A)^{1/2})y - zy - (B^2 - A)^{1/2}y) \\ = & y - z(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y \\ & -(B^2 - A)^{1/2}(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y \\ = & ((zI + B + (B^2 - A)^{1/2}) - zI - (B^2 - A)^{1/2}) \\ & \times(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y \\ = & B(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y. \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

De même

$$(\lambda I - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}By = B(\lambda I - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y \tag{2.2.39}$$

pour $\lambda \in \rho(B - (B^2 - A)^{1/2})$ et $y \in D((B^2 - A)^{1/2})$. Par conséquent, on utilisant la deuxième partie de Lemme 2 on obtient

$$\begin{aligned} & (zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(\lambda - B + (B^2 - A)^{1/2})y \\ = & (\lambda - B + (B^2 - A)^{1/2})(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}y, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} & (\lambda - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1} \\ = & (zI + B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}(\lambda - B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

D'aprés (2.2.40) et que $U(t)$, $V(t)$ commute, et

$$\frac{d}{dt}(U(t)V(t)) = -2U(t)(B^2 - A)^{1/2}V(t) = -2(B^2 - A)^{1/2}U(t)V(t),$$

ce qui implique

$$U(t)V(t) = V(t)U(t) = e^{-2t(B^2-A)^{1/2}},$$

en particulier

$$U(1)V(1) = V(1)U(1) = Z.$$

Puisque

$$U(1)(I - Z)^{-1} = (I - Z)^{-1}U(1),$$

au $D(A) = D(B^2 - A)$ (voir le Lemme 2), on a

$$\begin{aligned} v(0) &= \xi_0 + U(1)\xi_1 \\ &= (I - Z)^{-1}(x_0 - U(1)x_1) + U(1)(I - Z)^{-1}(x_1 - V(1)x_0) \\ &= (I - Z)^{-1}(x_0 - U(1)x_1) + (I - Z)^{-1}U(1)(x_1 - V(1)x_0) \\ &= x_0. \end{aligned}$$

De même

$$v(1) = x_1.$$

Nous avons aussi que $v(.)$ est fortment différenciable pour $t \in [0, 1]$ et

$$v'(t) = -V(t)(B + (B^2 - A)^{1/2})\xi_0 - U(1 - t)(B - (B^2 - A)^{1/2})\xi_1.$$

Rappeler que, puisque $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$, alors

$$(B + (B^2 - A)^{1/2})(B - (B^2 - A)^{1/2})\xi_i = A\xi_i, \qquad i \in \{0, 1\}.$$

D'aprés les hypothèses (2.2.38) et (2.2.39) on a pour $y \in (D(B^2 - A)^{1/2})$

$$BV(t)y = V(t)By, \qquad BU(1 - t)y = U(1 - t)By.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2Bv'(t) &= -V(t)2B(B - (B^2 - A)^{1/2})^{-1}A\xi_0 \\ &\quad -U(1 - t)2B(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}A\xi_1; \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

de plus, le Lemme 2 garantit que v est deux fois différentiable et

$$\begin{aligned} v''(t) &= V(t)(2B^2 - A + 2B(B^2 - A)^{1/2})\xi_0 \\ &\quad + U(1-t)(2B^2 - A - 2B(B^2 - A)^{1/2})\xi_1. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

La commutativité des opérateurs impliqués donne que pour $t \in [0,1]$, $v(t) \in D(A)$ et

$$Av(t) = V(t)A\xi_0 + U(1-t)A\xi_1. \tag{2.2.43}$$

On fait la somme de l'équation (2.2.41), (2.2.42)et (2.2.43), et on passe par les lemmes 4 et 5

$$\begin{aligned} & v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) \\ = \; & V(t)\left[2B(B + (B^2 - A)^{1/2}) - 2B(B - (B^2 - A)^{1/2})^{-1}A\right]\xi_0 \\ & + U(1-t)\left[2B(B - (B^2 - A)^{1/2} - 2B(B + (B^2 - A)^{1/2})^{-1}A\right]\xi_1 \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$. □

Pour conclure la preuve de Théorème 2.2.1, notez qu'en raison de (2.2.33), (2.2.34)

$$u_0 - \overline{u}(0) \in D(A), \qquad u_1 - \overline{u}(1) \in D(A).$$

Maintenant, on note $\overline{\overline{u}}$ la solution stricte du problème (2.2.35) − (2.2.36) avec

$$x_0 = u_0 - \overline{u}(0), \qquad x_1 = u_1 - \overline{u}(1),$$

alors il est simple de reconnaitre que

$$u(.) = \overline{u}(.) + \overline{\overline{u}}(.),$$

est la solution unique de problème (2.2.1) − (2.2.2).

Chapitre 3

Régularité Maximale de la solution stricte

Dans cette section, nous allon prouver le théorème de la régularité maximal

Théorème 3.0.2 *sous l'hypoyhèses*(2.2.3) $\sim$ (2.2.8), *si de plus* $D(BA) \subset D(B^3)$, *alors pour tout* $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$, $0 < \theta < 1$ *et tout* $u_0, u_1 \in D(A)$ *satisfait*

$$f(i),\ Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty) = (D(A), X)_{1-\theta/2,\infty}, \qquad i = 0, 1,$$

l'unique solution stricte u *de problème* $(2.2.1) - (2.2.2)$ *on a la propriété de la régularité maximal :* u'', Bu', $Au \in C^\theta([0,1]\,;X)$,

ici $D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty)$ est l'espace d'interplotion réel caractérisé par

$$\begin{aligned} & D_{-(B^2-A)}(\theta/2;+\infty) \\ = \ & \left\{\varphi \in X : \sup_{r>0} r^{0/2} \left\|(B^2-A)(rI+B^2-A)^{-1}\varphi\right\|_X < \infty\right\}. \end{aligned}$$

Preuve. Nous rappelons que

$$\begin{aligned} u(t) &= V(t)\xi_0 + U(1-t)\xi_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^t V(t-s)f(s)ds + \int_t^1 U(s-t)f(s)ds\right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (I-Z)^{-1}(u_0 - U(1)u_1) \\ &\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^1 U(s)f(s)ds - U(1)\int_0^1 V(1-s)f(s)ds\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (I-Z)^{-1}(u_1 - V(1)u_0) \\ &+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^1 V(1-s)f(s)ds + V(1)\int_0^1 U(s)f(s)ds\right).\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}A &= (B+(B^2-A)^{1/2})(B-(B^2-A)^{1/2}) \\ &= (B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Au(t) &= (V(t)A\xi_0 + U(1-t)A\xi_1) \\ &+\left(-\frac{1}{2}A(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^t V(t-s)f(s)ds + \int_t^1 U(s-t)f(s)ds\right)\right) \\ &= (I)+(II).\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}(II) &= -\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^t V(t-s)f(s)ds \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)(B-(B^2-A)^{1/2})\int_t^1 U(s-t)f(s)ds \\ &= -\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)f(t) + \frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)V(t)f(t) \\ &+\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)f(t) - \frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)U(1-t)f(t) \\ &= -\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)\int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(t-s)(f(s)-f(t))ds \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)\int_t^1 \frac{\partial U}{\partial s}(s-t)(f(s)-f(t))ds \\ &+f(t)+\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)V(t)(f(t)-f(0)) \\ &+\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}-I)V(t)f(0) \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)U(1-t)(f(t)-f(1)) \\ &-\frac{1}{2}(B(B^2-A)^{-1/2}+I)U(1-t)f(1).\end{aligned}$$

donc, $(II) \in C^\theta([0,1]\,;X)$, si $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$ et

$$\begin{aligned}
f(0) &\in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta,\infty) = D_{-(B^2-A)^{1/2}}(\theta,\infty) = D_{-(B^2-A)}(\theta/2,\infty)\\
f(1) &\in D_{B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta,\infty) = D_{-(B^2-A)^{1/2}}(\theta,\infty) = D_{-(B^2-A)}(\theta/2,\infty),
\end{aligned}$$

voir ([3], Proposition 1.3 et Théorème 1.4, pp. 360–361)

pour (I), on a

$$\begin{aligned}
I &= (I-Z)^{-1}V(t)Au_0 - (I-Z)^{-1}U(1)V(t)Au_1\\
&\quad +(I-Z)^{-1}U(1-t)Au_1 - (I-Z)^{-1}V(1)U(1-t)Au_0\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}V(t)A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 U(s)f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}V(t)U(1)A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 V(1-s)f(s)ds\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}U(1-t)A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 V(1-s)f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}V(1)U(1-t)A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 U(s)f(s)ds\\
&= (I_1)+(I_2)+(I_3)+(I_4)+(I_5)+(I_6).
\end{aligned}$$

Puisque $Au_0, Au_1 \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2,\infty)$, alors $(I_1),(I_2) \in C^\theta([0,1]\,;X)$. On écrit

$$\begin{aligned}
&A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 U(s)f(s)ds\\
&= (B(B^2-A)^{-1/2}+I)(B-(B^2-A)^{1/2})\int_0^1 U(s)f(s)ds\\
&= (B(B^2-A)^{-1/2}+I)(B-(B^2-A)^{1/2})\int_0^1 U(s)(f(s)-f(0))ds\\
&\quad +(B(B^2-A)^{-1/2}+I)(B-(B^2-A)^{1/2})\int_0^1 U(s)f(0)ds\\
&= (B(B^2-A)^{-1/2}+I)\int_0^1 (B-(B^2-A)^{1/2})U(s)(f(s)-f(0))ds\\
&\quad +(B(B^2-A)^{-1/2}+I)(U(1)-I)f(0).
\end{aligned}$$

Maintenant, on sait que

$$\int_0^1 (B-(B^2-A)^{1/2})U(s)(f(s)-f(0))ds \in D_{B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta,\infty),$$

voir ([3], Théorème 1.4, p. 361). Donc

$$V(t)\int_0^1 (B-(B^2-A)^{1/2})U(s)(f(s)-f(0))ds \in C^\theta([0,1]\,;X).$$

Par contre, l'hypothèse sur $f(0)$ implique $V(t)f(0) \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$.

Puis $(I_3) \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$.

Concernant (I_4), on écrit

$$\begin{aligned}
& A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 V(1-s)f(s)ds \\
= \; & (B(B^2-A)^{-1/2}-I)(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^1 V(1-s)(f(s)-f(1))ds \\
& +(B(B^2-A)^{-1/2}-I)(B+(B^2-A)^{1/2})\int_0^1 V(1-s)f(1)ds \\
= \; & (B(B^2-A)^{-1/2}-I)\int_0^1 (B+(B^2-A)^{1/2})V(1-s)(f(s)-f(1))ds \\
& +(B(B^2-A)^{-1/2}-I)(I-V(1))f(1).
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments utilisés ci-dessous impliquent $(I_4) \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$.

Ainsi (I_5) et (I_6) sont traités de manière analogue en changeant $U(1-t)$. Alors, sous les hypothèses précédent, $Au(.) \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$.

D'autre part

$$\begin{aligned}
Bu'(t) \; = \; & -V(t)B(B+(B^2-A)^{1/2})\xi_0 - U(1-t)B(B-(B^2-A)^{1/2})\xi_1 \\
& +\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}\left\{(B+(B^2-A)^{1/2})\right. \\
& \qquad \left. .\int_0^t V(t-s)(f(s)-f(t))ds + (I-V(t))f(t)\right\} \\
& +\frac{1}{2}B(B^2-A)^{-1/2}\left\{(B-(B^2-A)^{1/2})\right. \\
& \qquad \left. .\int_t^1 U(s-t)(f(s)-f(t))ds + (U(1-t)-I)f(t)\right\} \\
= \; & (J_1)+(J_2)+(J_3)+(J_4).
\end{aligned}$$

Les arguments précédents s'appliquent a (J_3) et (J_4). De plus, puisque $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$, on trouve

$$\begin{aligned}
B(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}A\xi_0 &= B(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1}A\xi_0 \\
B(B-(B^2-A)^{1/2})A^{-1}A\xi_1 &= B(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}A\xi_1.
\end{aligned}$$

Mais nous avons déjà que $V(.)A\xi_0 \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$, $U(1-.)A\xi_1 \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$. $\square$

Chapitre 4

Exemples

Exemple 4.0.1 *: Condition aux limites périodiques*

Prenons $X = L^2(0.1)$ *et introduisons l'opérateur* $T : D(T) \subset X \to X$ *définit par*

$$\begin{cases} D(T) = \{f \in H^1(0.1) : f(0) = f(1)\} \\ Tf = if'. \end{cases}$$

Il bien connu que T *est auto-adjoint et que le spectre est* $\sigma(T) = 2\pi Z$, *([12] , page 75). De sort que* T^2, *où*

$$\begin{cases} D(T^2) = \{f \in H^2(0.1) : f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\} \\ T^2 f = -f'', \end{cases}$$

est auto-adjoint positif, On introduisant alors $B = -iT$ *et* A *définie par*

$$\begin{cases} D(A) = D(T^2) \\ Af = (-2T^2 - aI)f = 2f'' - af, \end{cases}$$

(où $a > 0$*). Puis* $(B^2 - A) = T^2 - aI$ *avec le domaine* $D(T^2)$ *est auto adjoint positif. donc* $D(T)$ *coincide avec l'espace d'interpolation complexe, et* $(T^2 - aI)^{1/2}$ *est auto-adjoint positif d'aprés la remarque (2.2.1), on a* $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ *génère un semi group analytique en* X*. Il s'ensuit que nous pouvons résoudre le problème de la valeur aux limites*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - au(x,t) \\ = f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 < x < 1, \\ u(x,1) = u_1(x), \qquad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t), \qquad 0 < t < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad 0 < t < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(1,t), \quad 0 < t < 1, \end{cases}$$

avec $u_0, u_1 \in D(A) = D(T^2)$,*telle que* $f \in C^\theta([0,1]\,; L^2(0,1))$

Exemple 4.0.2 *Les opérateurs paraboliques dégénérés*

Soit $a \in C^1([0,1])$ *une fonction à valeur réelle qui est strictement positive sur* $(0,1)$, $a(0) = a(1) = 0$. *Définissons l'opérateur différentiel*

$$Tu = \frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right), \qquad u \in D(T),$$

où

$$\begin{aligned} D(T) &= \big\{u \in L^2(0,1) : \\ &\qquad u \text{ est localement absolement continue dans (0,1) et } au' \in H_0^1(0,1)\big\}. \end{aligned}$$

Alors, (voir [2], Lamme 2.7 et Théorème 2.8) on montre que T *est auto-adjoint et génère un semi-groupe analytique d'angle* $\pi/2$ *et borné en* $L^2(0,1)$. *Soit*

$$\begin{cases} D(B) = D(T) \\ B = iT, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} D(A) &= D(T^2) = \big\{u \in L^2(0,1) : au' \in H_0^1(0,1) \text{ et } a(au')'' \in H_0^1(0,1)\big\} \\ A &= -\alpha T^2 - cI, \end{aligned}$$

où $\alpha > 1$ *et* $c > 0$, *telle que*

$$B^2 - A = (\alpha - 1)T^2 + cI,$$

$B^2 - A$ *est un opérateur auto-adjoint positif, alors* $(B^2 - A)^{1/2}$ *est positif avec le domaine* $D(T)$ *et donc par la remarque(2.2.1)* $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ *génère un semi-groupe analytique de* X, *avec le domaine* $D(T)$, *donc nous pouvons traiter le problème aux limite*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2i\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t)\right) \\ -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\right) - cu(x,t) \\ = f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 < x < 1, \\ u(x,1) = u_1(x), \qquad 0 < x < 1, \\ \left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = \left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)(1,t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)(0,t) = \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)(1,t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ \left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)(0,t) = \left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)(1,t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \end{cases}$$

avec $u_0, u_1 \in D(A)$ *à condition que* $f \in C^\theta([0,1]\,; L^2(0,1))$.

CONCLUSION

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation abstraite complète du second ordre

$$u^{''}(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in (0,1).$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1.$$

Où A et B sont deux opérateurs lineaires fermé dans l'espace de Banach complexe X, le second membre f est une fonction continue sur $[0.1]$ et u_0, u_1sont des donneés dans $D(A)$. On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution de ce problème.

Bibliographie

[1] **Balakrishnan, A. V.,** Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, Pacif. J. Math. 10, (1960), pp 419–473.

[2] **Campiti, M., Metafune, G. and Pallara, D.,** Degenerate Self-adjoint Evolution Equations on the Unit Interval, semigroup Forum **57** (1998), 1–36.

[3] **Da Prato, G.,** Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization, Proceed. Symposia. Pura Math. **45** (1986), Part I, 359–370.

[4] **Da Prato, G.,** Sommes d'Opérateur Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles, J. Math. Pures Appl. IX Ser. **54** (1975), 305–387.

[5] **Dunford, N. and Schwartz, J.,** Linear Operators, Part I, New York, Interscience 1958.

[6] **EL Haial, A. and Labbas, R.,** On the Ellipticity and Solvability of Abstract Second-order Differential Equation, Electronic journal of Differential Equations, 57 (2001),1–18.

[7] **Favini, A., Labbas, R., Tanabe,H. and Yagi, A.,** On the Solvability of complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkc. Ekv., **47** (2004), 205–224.

[8] **Favini, A. and Romanelli, S.,** Analytic Semigroups on $C([0,1])$ Generated by some Classes of Second Ordre Differential Operators, Semigroup Forum **56** (1998), 367–372.

[9] **Favini, A.and Triggiani, R.,** Analytic and Gevrey Class Semigroups generated by $-A+iB$, and Applications, in"Differential Equations in Banach Spaces", proceeding of the Bologna conferences, G. Dore, A. Favini, E. Obrecht, A. Venni, eds (1993), 93–114, M. Dekker, New York.

[10] **Goldstein, J.A.**, Semigroups of Linear Operators and Applications, Oxford University Press, Oxford, New York, 1985.

[11] **Grisvard, P.,** Spazi di Tracce e Applicazioni, Rendiconti di Matematica (4), vol. 5, sérieVI (1972), 657–792.

[12] **Kato, T.,** Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[13] **Krein, S, G.,** Linear Differential Equations in Banach Space, Moscow, 1967 ; English Translation : AMS, Providence, 1971.

[14] **Lions, J.L.,** Théorème de trace et d'interpolation I et II. Annali S.N.S.di Pisa, 13, (1959), 389–403 et 14, (1960), 317–331.

[15] **Lunardi, A.,** Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel, 1995.

[16] **Miklavčič, M.,** Applied Functional Analysis and Partial Differntial Equations, Word Scientific, Singapore, 1998.

[17] **Pazy, A.,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differntial Equations, Springrer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[18] **Sinestrari, E.,** On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions, J. Math. Anal. App. 66 (1985) 16–66.

[19] **Tanab, H.,** Equations of Evolution, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[20] **Triebel H.,** Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, Amsterdam, North-Holland, 1978.

Résumé :

L'objectif de ce travail est l'étude l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte d'une équation differentielle complete du second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs.

Les techniques utilisées reposent sur la théorie de semi-group, le calcule fonctional de Dunford et principalement sur le travail de `Angelo FAVINI, Rabah LABBAS, Stéphane MAINGOT, Hiroki TANABE et Atsushi YAGI.`

Mots clés :

Equation differentielle opérationnelle du second ordre de type elliptique, conditions aux limites, régularité maximale, semi-groupe, espace d'interpolation.