MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DELA RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

Benabdellah Chaimaa

THEME :

Problèmes elliptiques avec conditions aux limites de Robin à coefficients-opérateurs, dans les espaces L^p et applications.

Devant le jury composé de :

Mme.	Saidani Mansouria	Université de Mostaganem	MCB	Présidente
Mme.	Bendahmane Hafida	Université de Mostaganem	MCB	Examinatrice
Mr.	Andasmas Maamar	Université de Mostaganem	MCA	Encadreur
Mme.	Limam Kheira	Université de Mostaganem	MCA	Co-Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté **par : BENABDLLAH Chaima**

Intitulé

Problèmes elliptiques avec conditions aux limites de Robin a coefficients-opérateurs, dans les espaces Lp et applications.

Juin 2021

Devant **le jury composé de**

Présidente	Mme Saidani Mansouria, MCB, UMAB
Examinatrice	Mme Bendahmane Hafida, MCB, UMAB
Encadreur	Mr ANDASMAS Maamar, MCA, UMAB
Co-Encadreur	Mme Limam Kheira, MCA, UMAB

Remerciements

Avant tout je remercie Dieu tout-puissant, qui m'a donné la force, la patience, le courage, la volonté pour accomplir ce mémoire.

Je tiens à remercie toutes les personnes qui ont contribué au succés et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercie, mon directeur de mémoire, Mr. Andasmas Maamar, et mon professeur Mme. Limam de m'avoir encadré et pour leur patience, leur disponibilité et surtout leur judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie fortement les enseignantes, Mme. Saidani et Mme. Bendahmane d'avoir accepter d'êtres parmi le jury de ce mémoire.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance en vers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

En fin, je remercie ma chère mère qui est toujours été là pour moi.

Je désire aussi remercie mes soeurs et frères pour leurs encouragements.
À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Résumé

Dans ce mémoire, on donne une synthèse sur les résultats de l'article [10] ; concernant l'étude des équations différentielles d'ordre deux de type elliptique suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1) \tag{1}$$

avec coeffcients operateurs dans les conditions aux bords

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1. \tag{2}$$

Où
* A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X de type UMD.
* f est une fonction de $L^P(0,1;X)$ avec $p \in]1,\infty[$,
On s'intérsse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution classique u du problème $(1)-(2)$ i.e. on va chercher une fonction u telle que

$$\begin{cases} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)), \quad u' \in L^p(0,1,D(B)). \\ (ii) \; u(0) \in D(H). \end{cases} \tag{3}$$

Ce travail améliore et complète les résultats obtenus dans les deux travaux [6] et [7].

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous étudions le problème différentiel opérationnel elliptique complet de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \qquad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{P.1}$$

Où

♦ A, B et H sont des operateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X.

♦ d_0, u_0 sont des éléments donnés de X.

L'étude se fait dans le cas où le second membre

$$f \in L^p(0,1;X), \ 1 < p < \infty.$$

L'objectif de ce travail est de trouver une solution classique u du problème (P.1) ; c'est-à-dire cherchons une fonction $u : [0,1] \to X$ telle que :

$$\begin{cases} (i) \ \ u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)), \ u' \in L^p(0,1,D(B)). \\ (ii) \ u(0) \in D(H). \\ (iii) \ \ u \text{ satisfait (P.1)}. \end{cases}$$

On commence par étudier le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x) \quad \ p.p \ \ x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{P.2}$$

Où L et M sont des operateurs linéaires fermés dans X.

Afin de résoudre (P.1), on résout le problème (P.2) lorsque L et M satisfaisant de plus

$$L - M \subset 2B \quad et \quad LM \subset -A \tag{1}$$

C'est-à-dire

$$D(L-M) \subset D(B) \text{ et } L - M = 2B \ \text{ sur } D(L-M)$$

et

$$D(LM) \subset D(A) \text{ et } LM = -A \text{ sur } D(LM),$$

La solution classique de (P.2), par définition est une fonction

$$\begin{cases} (i)\ u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(LM)), \quad u' \in L^p(0,1,D(L-M)) \\ (ii)\ u(0) \in D(H) \\ (iii)\ u \text{ satisfait } \ (P.2). \end{cases} \tag{2}$$

Remarque. En vertu de (1), une solution classique de (P.2) sera, une solution classique de (P.1).

Afin de résoudre les problèmes (P.1) et (P.2) pour tout

$$f \in L^p(0,1,X), \quad 1 < p < \infty.$$

On suppose dans tout la suite de ce travail que

$$X \text{ est un espace } UMD \tag{H.0}$$

C'est à dire est un espace de Banach telle que pour tout $p > 1$, la transformée de Hilbert

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$$

est continue de $L^p(\mathbb{R}, X)$ dans lui même (voir [2], [4]).

0.0.1 Historique

Nombreux auteurs ont étudié l'équation :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \quad p.p \ \ x \in (0,1)$$

Avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

Lorsque le second membre $f \in L^p(0,R,X)$, $1 < p < \infty$, on cite par exemple les articles de A. Favini et al [20], [21].

Mais dans ce travail les auteurs ont traité le cas des conditions aux limites opérationnelle de type Robin en 0,

$$u'(0) - Hu(0) = d_0,$$

qui contient un opérateur fermé linéaire général H.

Par conséquent la situation est plus compliquée à cause des différents domaines. Voir par exemple, le travail de Cheggag et al [6], ils ont étudié le problème (P.1) dans le cas particulier

$B = 0$, lorsque $f \in L^P(0, R, X), 1 < p < \infty$. avec certain hypothèse sur les domaines $D(H)$ et $D\left(\sqrt{-A}\right)$.
Citons aussi l'article [7] ou les auteurs ont considéré le cas où B génère un groupe.
Dans ce mémoire, nous examinerons des situations plus générales, lorsque A, B et H vérifiant certains hypothèses.
Les techniques utilisées dans ce travail sont basées sur

- la théorie des sommes de deux opérateurs linéaires fermés, en particulier sur le célèbre théorème de Doré-Venni [12], et donc sur les résultats de Pruss-Sohr [30],
- le théorème de réitération dans la théorie de l'interpolation (Voir [27], [32]).

Considérons, dans ce travail comme dans tous les articles cités ci-dessus que les opérateurs A et B (respectivement L et M) commute dans un certain sens.

0.0.2 Le plan de ce travail

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres.

Dans **le premier chapitre,** on donne des rappels sur quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème (P.2), sous certaines hypothèses sur les opérateurs L, M et H. En donnant la formule de représentation de la solution.

Dans le **troisième chapitre,** nous appliquons les résultats obtenus précédemment pour

$$L = B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad M = -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}.$$

En précisant également les hypothèses sur les opérateurs A et B.
Puis, on étudie quelques situations particulières intéressantes dans lesquelles nos hypothèses sur les opérateurs L, M et H sont satisfaites.
En termine ce chapitre par quelques exemples d'équations différentielles aux quelles s'applique la théorie abstraite obtenu.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [3], [2], [4], [24], [28], [29]). On donnera aussi quelques résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif (voir [12], [23]).

1.1 Les opérateurs fermés

Soit E un espace de Banach complexe, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de E à valeurs dans E.

Définition 1.1.1 *On dit que l'opérateur A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Définition 1.1.2 *Soient $A : D(A) \subset E \to F$, $B : D(B) \subset E \to F$ deux opérateurs linéaires. On dit que B est une extension de A, et on note $A \subset B$ si*

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } A = B \text{ sur } D(A)$$

c'est à dire pour tout $x \in D(A)$ on a $Ax = Bx$.

Définition 1.1.3 *L'opérateur A est dit fermable si et seulement si A admet une extension fermée i.e.*

$$\forall (x_n) \subset D(A) : \left\{ \begin{array}{c} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{array} \right. \Longrightarrow y = 0.$$

La plus petite extension fermée de A est notée $\overline{A}$ et s'appelle la fermeture de A.

Définition 1.1.4 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur E.*

♦ *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est définie par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \quad \text{est inversible dans } L(E)\}.$$

♦ *On définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point $\lambda \in \rho(A)$ par*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

♦ *Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est définie par*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Proposition 1.1.1 *Soient $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire.*
1. Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in L(E,F)$, l'opérateur $A+B : D(A) \subset E \to F$ est fermé.
2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans E et $D(A)$ est fermé dans E, alors A est continue de $D(A)$ dans E (Application directe du théorème du graphe fermé).
4. Si A est un opérateur continu de $D(A)$ dans E, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.
5. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Définition 1.1.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire. On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|.\|_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Proposition 1.1.2 *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.3 *Soient $A \in L(E)$ et $B : D(B) \subset E \to E$ un opérateur linéaire fermé tels que $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in L(E)$.*
Preuve *: Il est clair que BA est défini sur E. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } E, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } E. \end{cases}$$

Alors comme $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_n$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in L(E)$ on a

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } X, \\ B(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

B étant fermé et $Ax \in D(B)$, d'après la définition (1.1.1), on a $B(Ax) = y$. Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)x = y$.
BA est donc un opérateur fermé et définie sur E. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient BA borné sur E i.e. $BA \in L(X)$.

Définition 1.1.6 *[24, p. 19] On dit que l'opérateur A est sectoriel d'angle $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, si*

$$\begin{cases} i)\ \sigma(A) \subset \overline{S_\omega} \\ ii)\ M(A, \omega') := \sup\left\{\|\lambda R(\lambda, A)\|,\ \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\right\}\ \textit{pour tout}\ \omega' \in (\omega, \pi) \end{cases}$$

Avec

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} & si\ \ 0 < \omega \leqslant \pi \\ (0, \infty) & si\ \ \omega = 0 \end{cases}$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,(zI - A)^{-1}\,dz$$

Où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$. L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(E)$ et ne dépend pas du choix de γ.

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X toute famille $(G(t))_{t \geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant les axiomes suivants*
(i) Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \to & X \\ t & \mapsto & G(t)\,x \end{array}$$

est continue.
(ii) $G(0) = I$.
(iii) $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G(t+s) = G(t)\,G(s)$.
On dit aussi que $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarques

i) On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.

ii) On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leqslant 1.$$

Exemples

1) Soit A un opérateur borné dans E, alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur E.

2) Soit $E = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t)f)(x) = f(x-t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1 *Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\| \leqslant Me^{-\omega t}.$$

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{x \in E : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Remarques

1) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors A est fermé à domaine dense.

2) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A.

3) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ où A est un opérateur borné dans E.

4) Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\| \leqslant Me^{-\omega t},$$

alors, l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\, x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} x \right\| \leqslant M (\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(G(t))_{t \geqslant 0}$*, alors*

i) Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors $G(t)x \in D(A)$.

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ *est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si* $x \in D(A)$.

De plus, pour $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in E$ *et tout* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A \int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(A)$

$$A \int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3 *On appelle semi-groupe analytique de type* $\alpha \in \left]0, \pi/2\right[$ *toute application* G *définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha \}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ *telle que*

(1) $z \mapsto G(z)$ *est analytique sur* Σ_α.

(2) $\forall x \in E,\ G(0) = I$ *et*

$$\lim_{z \in \Sigma_\alpha \quad z \to 0} G(z)\, x = x$$

(3) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha,\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.

De plus

$$G(t)\, x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{tz} (zI - A)^{-1} x dz = e^{tA} x.$$

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire vérifiant*
(1) *A fermé de domaine $D(A)$ dense dans E.*
(2) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors, A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant
(1) *$\exists C > 0,\ \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant C$.*
(2) *$\forall t > 0,\ G(t) \in \mathcal{L}(E, D(A))$ et $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.*

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.4.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit les espaces $L^p(0,R;E)$ pour $R > 0$ par*

$$L^p(0,R;E) = \left\{ g : (0,R) \longrightarrow E \text{ mesurable : } \int_0^R \|g(x)\|_E^p \, dx < \infty \right\}$$

Si p est fini. On munit cet espace de la norme

$$\|g\|_{L^p(0,R,E)} = \left(\int_0^R \|g(x)\|_E^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$ on pose :

$$L^\infty(0,R;E) = \left\{ g : [0,R] \longrightarrow E, \text{ mesurable : } \sup_{x \in (0,R)} ess \|g(x)\|_E < +\infty \right\},$$

muni de la norme : $\|g\|_{L^\infty(0,R,E)} = \sup\limits_{x \in (0,R)} ess \|g(x)\| x$.

Théorème 1.4.1 *L'espace $L^p(0,R;E)$, $p \in [1,+\infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

On rappelle le résultat classique :

Proposition 1.4.1 *Soient*
i) J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$,
ii) E un espace de Banach,
iii) $f : J \times [a,b] \to E$ une application continue admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.
iv) α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a,b]$.
Alors, l'application

$$\begin{array}{cccl} h & : & J \longrightarrow E \\ x & \longrightarrow & h(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$ on a

$$h'(x) = \beta'(x) f(x, \beta(x)) - \alpha'(x) f(x, \alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

1.4.2 Les espaces d'interpolation

On désigne par E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est à dire $E_0 \hookrightarrow E$, $E_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$E_0 \cap E_1 \text{ et } E_0 + E_1,$$

munis des normes $\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}$, et

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x = x_0 + x_1, \quad x_i \in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right).$$

Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.2 *Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre E_0 et E_1 tout espace de Banach E tel que*

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Les espaces E_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.3 *Soient $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1,+\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre E_0, E_1 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i\,(t) \in E_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0\,(t) + u_1\,(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p\,(\mathbb{R}_+, E_0)\,, \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p\,(\mathbb{R}_+, E_1)\,, \end{cases}$$

où

$$L_*^p(E) = \left\{ f : \left]0,\infty\right[\to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in \left]0,1\right[$ et $p, q, r \in [1,+\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\omega,q}$.

2) Si $p \leqslant q$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q}$.

3) Si $E_0 = E_1$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1$.

4) Si $0 < \theta < 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p} \tag{1.4.1}$$

Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a $\left((E_0, E_1)_{\theta,p}, (E_0, E_1)_{\omega,q}\right)_{t,r} = (E_0, E_1)_{\alpha,r}$, avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Propriété de réitération

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$. Alors pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$, $p \in [1,+\infty]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(E, D(A^n))_{\theta,p} = (E, D(A))_{n\theta,p} \tag{1.4.2}$$

Cas Particulier $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans E. Posons $E_0 = D(A)$ et $E_1 = E$, alors

$$E_0 \cap E_1 = D(A) \text{ et } E_0 + E_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1,+\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

alors

$$\begin{aligned} (D(A), E)_{\theta,p} &= D_A(1-\theta, p) = (E, D(A))_{1-\theta,q} \\ &= \left\{ x \in E : \left\| t^{1-\theta} A (A - t)^{-1} x \right\|_E \in L^p_* \right\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.4 *Pour tout $\theta \in]0,1[$, $p \in [1, +\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_A(\theta + k, p) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta, p) \right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\| A^k x \right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Si $\theta \neq \frac{1}{2}$, on a le résultat de réitération suivant

$$(E, D(A^2))_{\theta,q} = (E, D(A))_{2\theta,q} \tag{1.4.3}$$

En utilisant (1.4.3), on obtient

$$(D(A^2), E)_{\theta,q} = (E, D(A^2))_{1-\theta,q} = (E, D(A))_{2-2\theta,q} \tag{1.4.4}$$

(Pour plus de détails sur les espaces d'interpolation et le théorème de réitération, voir par exemple Lions-Peetre [27] et Lunardi [28]).

Théorème 1.4.2 (de Lions) *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0,1[$*

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \left\| t^{\theta-1} (G(t) - I) x \right\|_E \in L^p_* \right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \left\| t^{\theta-1} (G(t) - I) x \right\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Avec les modifications usuelles si $p = \infty$.

1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev par

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x-y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

On définit les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, E)$. Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, par

$$B^s_{p,q}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

Avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a $B^s_{p,p}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E)$.

1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach E, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale Difference property), pour plus détails voir [2].

Définition 1.4.5 *On dit que E est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

est bornée.

Définition 1.4.6 *E est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \to \mathbb{R}$ convexe telle que*

i) $\xi(0,0) > 0$

ii) $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1, \ \forall x, y \in E.$

Théorème 1.4.3 *Soit E un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) E est UMD.

ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \forall x, y \in E$.

Exemples

▶ Les espaces de Hilbert (il suffit de choisir $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y\rangle$ où le crochet $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire).

▶ Les sous espaces fermés d'un espace UMD.

▶ Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ tel que E est UMD

sont des espaces UMD. Mais les espaces $C^\alpha(\Omega; E)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ ne sont pas UMD.

1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $A : E \to E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur **A** est définie par

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t^z (tI - A)^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Si A est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (Pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$A^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - A)^{-1} A x dt,$$

Pour tout $x \in D(A)$ (voir Haase [24], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(A)$,

$$A^z x = A^{z+1} A^{-1} x = \frac{\sin(z+1)\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - A)^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de A^z (voir Dore et Venni [12])

Théorème 1.5.1 *Soit A un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*

1) Soit $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ alors

$$\forall x \in E \quad A^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} \left(A(tI - A)\right)^{-1} A^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \to A^z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ alors $D(A^m)$ est dense dans $D(A^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ alors

$$A^w A^z \subseteq A^{w+z} \subseteq A^z A^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ alors $A^{w+z} = A^z A^w$.

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $x \in D(A^\alpha)$ alors $z \to A^z x$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z < \alpha$.

6) Supposons que $A^{is} \in \mathcal{L}(E)$ pour $s \in \mathbb{R}$ donc
(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ et $w + z = is$ alors $A^{w+z} = A^w A^z = A^z A^w$.
(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ alors $A^{is} A^w = A^{w+is} = A^w A^{is}$.
(c) Si $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ alors $A^{is} A^w \subseteq A^{w+is} \subseteq A^w A^{is}$ et la seconde inclusion est en fait une égalité si $\operatorname{Re} w > 0$.

7) Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$ alors

$$\left\|A^{-z}\right\| \leqslant M \left(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \operatorname{Im} z)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}\right).$$

8) Soit $A^{is} \in \mathcal{L}(E)$ avec $s \in \mathbb{R}$, pour $\varphi \in]0, \pi/2[$ fixé, on pose

$$\Sigma_\varphi = \left\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\right\},$$

alors $A^{z+is} \to A^{is}$ (dans la topologie forte de $\mathcal{L}(E)$).

9) Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ et $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. On suppose que

$$\sup_{z \in \Delta} \|A^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $A^w \in \mathcal{L}(E)$ et $A^z \to A^w$ où $z \to w$, $z \in \Delta$ (dans la topologie forte de $\mathcal{L}(E)$).

10) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ alors $(A - \lambda I)^{-1} T = T(A - \lambda I)^{-1}$, pour $\lambda \in \rho(A)$, et

$$\begin{aligned} (a)\ TA^z &= A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ TA^z &\subseteq A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{aligned}$$

11) Si $(A - \lambda I)^{-1}$ *et* $(B - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*
(a) $A^z B^w = B^w A^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$.
(b) *si* A^{is} *et* $B^{it} \in \mathcal{L}(E)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $A^z B^w = B^w A^z$
pour $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0$.

Définition 1.5.1 *On note* $BIP(E, \alpha)$ *(**B**ounded **I**maginary **P**owers) ou* $\alpha \in [0, \pi[$, *l'ensemble des opérateurs sectoriels sur* E *qui admettent des puissances imaginaires bornées (Pour plus de détail voir [12]), c'est à dire* $U \in BIP(X, \alpha)$, *si* U *est un operateur linéaire fermé densément satisfaisant :*

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\subset \rho(U), \ Ker(U) = \{0\}, \ \overline{\operatorname{Im}(U)} = X \\ \quad et \ \ \exists c \leqslant 1, \forall \lambda > 0, \| (U + \lambda I)^{-1} \|_{L(E)} \leqslant \dfrac{c}{\lambda} \end{cases} \tag{1.5.1}$$

$Ker(U), \operatorname{Im}(U)$ et $\rho(U)$ sont respectivement le noyau, l'image et l'ensemble résoulvant de U et :

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, \ U^{is} \in L(E) \text{ et :} \\ \exists c \geqslant 1, \forall s \in \mathbb{R}, \| U^{is} \|_{L(E)} \leqslant c e^{\alpha|s|} \end{cases} \tag{1.5.2}$$

On rappelle que l'operateur vérifiant (1.5.1) admet une puissance complexe U^z pour tout $z \in \mathbb{C}$ (voir Haase [24] p.70). D'autre part, soit

$$\theta \in]0, 1[; q \in [1, +\infty[, m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$$

et V un operateur linéaire fermé dans X satisfaisant :

$$]\mu, +\infty[\subset \rho(V) \ \ et \ \ \sup_{\lambda > \mu} \| \lambda (V - \lambda I)^{-1} \|_{L(E)} < +\infty.$$

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans le cas commutatives

Soit E un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans E et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires pour résoudre le problème suivant

$$Au + Bu - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

lorsque les résolvantes des opérateurs A et B commutent : i.e.,

$$\left[(A - zI)^{-1}; (B - \mu I)^{-1}\right] := (A - zI)^{-1} (B - \mu I)^{-1} - (B - \mu I)^{-1} (A - zI)^{-1} = 0$$

La résolution de ce problème repose sur la construction de l'inverse de $A + B$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes

1.6.1 Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

$$(DG.1) \quad \begin{cases} \exists\ C_A, C_B > 0,\ \ \theta_A, \theta_B \in [0, \pi[\ \text{ tels que} \\ i)\ \rho(A) \supset \Sigma_A = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_A\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{A}};\ \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_A(\theta)}{|z|}. \\ ii)\ \rho(B) \supset \Sigma_B = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_B\}, \\ \forall z \in \Sigma_B;\ \left\|(B - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_B(\theta)}{|z|}. \\ iii)\ \theta_A + \theta_B < \pi. \\ iv)\ \overline{D(A) + D(B)} = E, \end{cases}$$

$$(DG.2) \quad \begin{cases} \quad \forall \lambda \in \rho(A), \forall \mu \in \rho(B) : \\ \left[(A - \lambda I)^{-1}; (B - \mu I)^{-1}\right] = 0. \end{cases}$$

Ces auteurs ont montré, pour $f \in D_A(\theta, q) + D_B(\theta, q)$, $\theta \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty]$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - (z + \lambda) I)^{-1} (B + zI)^{-1} f dz$$

Où γ_λ est une courbe simple orientée de $\infty\ e^{-i\theta_0}$ à $\infty\ e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]\theta_B, \pi - \theta_A[$, demeurant dans $\Sigma_{A-\boldsymbol{\lambda}} \cap \Sigma_{-B}$.De plus, la solution a la régularité suivante

$$Au, Bu \in D_A(\theta, q) \qquad (\text{resp. } D_B(\theta, q)).$$

1.6.2 Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

$(DV.0)$ E est un espace de Banach de type UMD,

$$(DV.1) \begin{cases} i) \rho(A) \supset]-\infty, 0] \ \ et\ \exists M_A > 0 : \left\|(A + tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_A}{1 + t}, \forall t \geqslant 0 \\ ii) \rho(B) \supset]-\infty, 0] \ \ et\ \exists M_B > 0 : \left\|(B + tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_B}{1 + t}, \forall t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(DV.2) \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(A), \quad \mu \in \rho(B), \\ (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - B)^{-1} = (\mu I - B)^{-1} (\lambda I - A)^{-1}. \end{cases}$$

$$(DV.3) \begin{cases} i) \forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(E) \ \ et \\ \exists K_A \geqslant 1,\ \theta_A > 0,\ \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leqslant K_A e^{\theta_A |s|}, \\ ii) \forall s \in \mathbb{R} : B^{is} \in \mathcal{L}(E) \ \ et \\ \exists K_B \geqslant 1,\ \theta_B > 0,\ \forall s \in \mathbb{R} : \|B^{is}\| < K_B e^{\theta_B |s|}, \\ iii)\ \theta_A + \theta_B < \pi. \end{cases}$$

Alors, la somme $A+B$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma}\frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin\pi z}dz,$$

Où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.
Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [30], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Lemme 1.6.1 *([23, p. 678, Theorem 2]) Soit* u *une fonction tels que*

$$u\in W^{n,p}(a,b;E)\cap L^{p}(a,b;D(Q^{k})),$$

Où $n,\ k\in N^{*}$ *et* $p\in]1,+\infty[$. *Puis pour* $j\in\mathbb{N}$ *satisfait la condition de Poulsen* $0<\frac{1}{p}+j<n$ *et* $s\in\{a,b\}$, *on a* $u^{(j)}(s)\in(D(Q^{k}),E)_{\frac{j}{n}+\frac{1}{np},p}$.

Chapitre 2

Problème elliptique complet avec conditions aux limites de type Robin

On va étudier dans ce chapitre le problème $(P.2)$ suivant

$$\begin{cases} u''(x) \ + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x) & p.p \ \ x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases}$$

posé dans un espace de Banach E.

2.1 Hypothèses sur les operateurs

Supposons que

$$E \text{ est un espace UMD} \tag{H.0}$$

et que les opérateurs L, M et H sont linéaires fermés vérifiants

$$D(L) = D(M) \text{ et } D(ML) = D(LM) \tag{H.1}$$

$$ML = LM \tag{H.2}$$

$$\exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[: -L \in BIP(X, \theta_L) \ et - M \in BIP(X, \theta_M) \tag{H.3}$$

$$L + M \ \text{ est inversible d'inverse borné} \tag{H.4}$$

$$\begin{cases} \forall \xi \in D(H), \forall \lambda \in \rho(L), (L - \lambda I)^{-1}\xi \in D(H) \text{ et :} \\ (L - \lambda I)^{-1} H\xi = H(L - \lambda I)^{-1}\xi \end{cases} \tag{H.5}$$

et

$$\begin{cases} \forall \xi \in D(H), \forall \mu \in \rho(M), (M - \mu I)^{-1}\xi \in D(H) \text{ et :} \\ (M - \mu I)^{-1} H\xi = H(M - \mu I)^{-1}\xi \end{cases} \tag{H.6}$$

Les hypothèses précédentes nous permettent de construire l'opérateur $e^{L+M} \in L(X)$ (voir le Lemme ci- dessous) donc on peut considérer l'operateur linéaire Λ défini par :

$$D(\Lambda) = D(L) \cap D(H) \text{ et } \Lambda = (M - H) + e^{L+M}(L + H)$$

nous supposerons que :

$$\Lambda \text{ est fermé et inversible d'inverse borné} \tag{H.7}$$

Cette dernière hypothèse signifie exactement que le déterminant dans un certain sens de (P.2) est inversible, elle généralise l'hypothèse utilisée dans l'article [7]. page 526. Lorsque $B = 0$ elles coincident. Cela sera discuté en détail dans le chapitre 03.
Le principal résultat de ce travail garantit que sous les hypothèses ci-dessus sur L, M et lorsque

$$f \in L^p(0, 1, X) \quad \text{avec} \quad 1 < p < \infty,$$

le problème (P.2) admet une unique solution classique u au sens (2) si et seulement si

$$\Lambda^{-1}d_0, \quad u_1 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

2.2 Conséquences des hypothèses

Remarque 2.2.1 *Sous les hypothèses* $(H.1)$ *et* $(H.2)$*. On a*

1. $D(L^2) = D(M^2) = D(ML) = D(LM)$.

2. Pour $\theta \in]0, 1[$, $q \in [1, +\infty[$ on a

$$(X, D(L))_{\theta,q} = (X, D(M))_{\theta,q}$$

et

$$(X, D(L^2))_{\theta,q} = (X, D(M^2))_{\theta;q} = (X, D(LM))_{\theta;q} = (X, D(ML))_{\theta;q}.$$

En plus, on a

$$(X; D(L))_{1+\theta;q} = (X; D(M))_{1+\theta;q}.$$

(Pour la dernière égalité voir ([16], remarque 5 page 4970).

3. $\forall \lambda \in \rho(L)$, $\forall \mu \in \rho(M)$:

$$(L - \lambda I)^{-1}(M - \mu I)^{-1} = (M - \mu I)^{-1}(L - \lambda I)^{-1}.$$

Remarque 2.2.2 *Grâce au résultats de Prüss-Sohr [30] (Théorème 2, page. 437), l'hypothèse (H.3) impliquent que L et M génèrent des semi groupes analytiques uniformément bornés dans X*

$$(e^{xL})_{x\geq 0}, \quad (e^{xM})_{x\geq 0}.$$

Dans la suite, on va détaillé quelques propriétés de la somme $L+M$ et du produit LM.

Remarque 2.2.3 *Sous les hypothèses $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.3)$, on peut appliquer les Théorèmes 4, 5 et le Corollaire 3 dans [30] page. 441, page. 443 et page. 444 respactivement, pour trouver les résultats importants suivants :*

Conséquence 2.2.1 *L'opérateur $-L-M$ de domaine $D(L)=D(M)$ est fermé et satisfait $(1.5.1)$. De plus, si L ou M est inversible et son inverse est bornée, alors $L+M$ est inversible d'inverse bornée aussi, et dans ce cas $(H.4)$ est satisfait.*

Conséquence 2.2.2 *On peut choisir $\varepsilon > 0$ (arbitraire et petit) tel que :*

$$-(L+M) \in BIP(X, \theta) \tag{2.2.1}$$

avec $\theta = \max(\theta_L, \theta_M) + \varepsilon$, (si $\theta_L \neq \theta_M$, on peut prendre $\varepsilon = 0$). Il s'ensuit que $L+M$ génère un semi-groupe analytique uniformément borné dans X.

Remarque 2.2.4 *On peut prouvé ce résultat d'une autre manière, sans appliquer la théorie des opérateurs BIP voir le Lemme 2.2.1 (ci-desous), le point 6.*

Conséquence 2.2.3 *LM est fermable et*

$$\overline{LM} \in BIP(X; \theta_L + \theta_M).$$

On obtient la fermeture par une application directe du Corollaire 3 dans [30]. Mais, dans ce cas, comme $D(L)=D(M)$ alors LM est fermé (En appliquant [21], Lemme 1, page. 168), ainsi

$$LM \in BIP(X; \theta_L + \theta_M).$$

Nous étudions maintenant quelques propriétés de commutativité.

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.7)$. On a*

1. Soit C l'un des opérateurs $\{M, L, L+M\}$ et $\widetilde{C} \in \{M, L, H\}$, $x \geq 0$ et $\xi \in D(\widetilde{C})$, alors

$$e^{xC}\xi \in D(\widetilde{C})$$

et $\widetilde{C}e^{xC}\xi = e^{xC}\widetilde{C}\xi$.

2. Soient $C \in \{M, L, L+M\}$, $\widetilde{C} \in \{M, L\}$, $x \geq 0$, $z \in X$ et $\lambda \in \rho(\widetilde{C})$, alors

$$e^{xC}(\widetilde{C} - \lambda I)^{-1}z = (\widetilde{C} - \lambda I)^{-1}e^{xC}z.$$

3. Si $C \in \{M, L\}$, alors pour $\xi \in D(\Lambda)$, $\lambda \in \rho(C)$ on a

$$(C - \lambda I)^{-1}\xi \in D(\Lambda) \text{ et } (C - \lambda I)^{-1}\Lambda\xi = \Lambda(C - \lambda I)^{-1}\xi.$$

4. Si $C \in \{M, L\}$ et $\xi \in D(C)$, alors on a

$$C\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}C\xi.$$

5. Pour $\xi \in D(\Lambda) = D(H) \cap D(L)$ on a $H\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}H\xi$.

6. pour $x \geq 0$, l'opértateur $L + M$ génère un semi-groupe analytique uniformément borné dans X satisfaisant

$$e^{x(L+M)} = e^{xL}e^{xM} = e^{xM}e^{xL}.$$

Preuve.

1. Soit $x \geq 0$ et $\xi \in D(H)$. L'opérateur C génère un C_0-semi groupe, donc selon [29], Théorème 8.3 page. 33 on a

$$e^{xC}\xi = \lim_{n \longrightarrow \infty} (\frac{n}{x}(\frac{n}{x}I - C)^{-1})^n\xi, \tag{2.2.2}$$

et de $(H.2), (H.5)$ et $(H.6)$, on déduit que

$$e^{xC}\widetilde{C}\xi = \lim_{n \longrightarrow \infty} (\frac{n}{x}(\frac{n}{x}I - C)^{-1})^n\widetilde{C}\xi = \lim_{n \longrightarrow \infty} \widetilde{C}(\frac{n}{x}(\frac{n}{x}I - C)^{-1})^n\xi,$$

alors, puisque $\widetilde{C}$ est fermé, on déduit que $e^{xC}\xi \in D(\widetilde{C})$ et

$$\widetilde{C}e^{xC}\xi = e^{xC}\widetilde{C}\xi.$$

2. Posons $\xi = (\widetilde{C} - \lambda I)^{-1}z$, on déduit, de point 1, que

$$(\widetilde{C} - \lambda I)e^{xC}\xi = e^{xC}(\widetilde{C} - \lambda I)\xi,$$

alors $(\widetilde{C} - \lambda I)e^{xC}(\widetilde{C} - \lambda I)^{-1}z = e^{xC}z$.

3. Puisque $\xi \in D(H)$, de $(H.5), (H.6)$ on déduit que $(C - \lambda I)^{-1}\xi \in D(\Lambda)$ et

$$\begin{aligned}\Lambda(C-\lambda I)^{-1}\xi &= ((M-H)+e^{L+M}(L+H))(C-\lambda I)^{-1}\xi \\ &= (M-H)(C-\lambda I)^{-1}\xi + e^{L+M}(L+H)(C-\lambda I)^{-1}\xi,\end{aligned}$$

maintenant, de $(H.2), (H.5), (H.6)$ et le point 2, on déduit que

$$\begin{aligned}\Lambda(C-\lambda I)^{-1}\xi &= (C-\lambda I)^{-1}(M-H)\xi + (C-\lambda I)^{-1}e^{L+M}(L+H)\xi \\ &= (C-\lambda I)^{-1}\Lambda\xi.\end{aligned}$$

4. On fixé $\lambda \in \rho(C)$ et $y = \Lambda^{-1}(C - \lambda I)\xi$, alors de point 3 on trouve

$$(C-\lambda I)^{-1}\Lambda y = \Lambda(C-\lambda I)^{-1}y,$$

c'est-à-dire $\xi = \Lambda(C - \lambda I)^{-1}\Lambda^{-1}(C - \lambda I)\xi$, donc

$$(C-\lambda I)\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}(C-\lambda I)\xi,$$

alors

$$C\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}C\xi.$$

5. Si $\xi \in D(\Lambda)$ on a

$$\Lambda\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}\Lambda\xi,$$

c'est-à-dire

$$((M-H)+e^{L+M}(L+H))\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}((M-H)+e^{L+M}(L+H))\xi,$$

alors

$$\begin{aligned}&M\Lambda^{-1}\xi + e^{L+M}L\Lambda^{-1}\xi - (I-e^{L+M})H\Lambda^{-1}\xi \\ =\ &\Lambda^{-1}M\xi + \Lambda^{-1}e^{L+M}L\xi - \Lambda^{-1}(I-e^{L+M})H\xi,\end{aligned}$$

donc

$$(I-e^{L+M})H\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}(I-e^{L+M})H\xi = (I-e^{L+M})\Lambda^{-1}H\xi.$$

Mais $I - e^{L+M}$ est inversible et borné, donc

$$H\Lambda^{-1}\xi = \Lambda^{-1}H\xi.$$

6. En appliquant le point 2, on obtient, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$e^{xM}\left(\frac{n}{x}(\frac{n}{x}I - M)^{-1}\right) = (\frac{n}{x}(\frac{n}{x}I - M)^{-1})e^{xM},$$

et par (2.2.2), on déduit que

$$e^{xL}e^{xM} = e^{xM}e^{xL}.$$

Alors $(e^{xL}e^{xM})_{x\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu (voir Engel et Nagel [14], paragraphe 5.15, page. 44).

Notons que, grâce à l'hypothèse (H.4), l'opérateur $L + M$ est fermé, puis du paragraphe 2.7, page. 64 dans [14], on déduit que $L + M$ est le générateur du produit des semi-groupes $(e^{xL}e^{xM})_{x\geq 0}$.

2.3 Représentation de la solution

Sous les hypothèses $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.7)$, supposons que le problème $(P.2)$ admet une solution classique u. c'est à dire :

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(LM)), u' \in L^p(0,1;D(L-M),$$

avec $u_0 = u(0) \in D(H)$. On peut écrire

$$\begin{cases} u''(.) + (L-M)u'(.) + LMu(.) \in L^p(0,1;X), \\ u_0 = u(0), \quad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Donc d'après [21], point 2, Théorème 5, page. 173 on a

$$u(0), u(1) \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p} = (D(M^2), X)_{\frac{1}{2p},p}. \tag{2.3.1}$$

D'autre part, en utilisant (1.4.4), on obtient

$$(D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p} = (X, D(L))_{2-\frac{1}{p},q} = \left\{\phi \in D(L) : L\phi \in (X, D(L))_{1-\frac{1}{p},q}\right\}.$$

Ensuite

$$u(0), u(1) \in D(L) = D(M). \tag{2.3.2}$$

On utilise la représentation de la solution u obtenue dans [20] donnée par

$$u(x) = e^{xM}\xi_0 + e^{(1-x)L}\xi_1 + I_x + J_x$$

pour $p.p$ $x \in (0,1)$, où

$$I_x = (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds, \quad J_x = (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds.$$

Pour trouver la représentation de u, il suffit de déterminer les constantes ξ_0 et ξ_1, en tenant compte des conditions aux limites du problème $(P.2)$

$$u'(0) - Hu(0) = d_0,\ u(1) = u_1. \tag{2.3.3}$$

Il est clair que ξ_0, $\xi_1 \in D(L) = D(M)$ à cause de (2.3.2), alors

$$u(0) = \xi_0 + e^L\xi_1 + J_0.$$

$$u(1) = e^M\xi_0 + \xi_1 + I_1.$$

Où

$$J_0 = (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \ \text{ et } \ I_1 = (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds.$$

On a, pour $p.p\ x \in (0,1)$

$$u'(x) = Me^{xM}\xi_0 - Le^{(1-x)L}\xi_1 + MI_x - LJ_x. \tag{2.3.4}$$

Donc $u'(0) = M\xi_0 - Le^L\xi_1 - LJ_0$.
Par suite, on trouve

$$\begin{cases} M\xi_0 - Le^L\xi_1 - LJ_0 - H\left[\xi_0 + e^L\xi_1 + J_0\right] = d_0, \\ e^M\xi_0 + \xi_1 + I_1 = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (M-H)\,\xi_0 - (L+H)\,e^L\xi_1 = (L+H)\,J_0 + d_0, \\ e^M\xi_0 + \xi_1 = -I_1 + u_1 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} M-H & -(L+H)\,e^L \\ e^M & 1 \end{vmatrix} = (M-H) + e^{M+L}(L+H) = \Lambda$$

Comme Λ est inversible et son inverse est borné alors

$$\Lambda^{-1}(X) = D(H) \cap D(L) = D(H) \cap D(M)$$

donc, le système (2.3.5) admet une unique solution (ξ_0, ξ_1). Pour le déterminer, en effet

$$\begin{cases} \Lambda^{-1}u(0) = \Lambda^{-1}\xi_0 + \Lambda^{-1}e^L\xi_1 + \Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}u'(0) = \Lambda^{-1}M\xi_0 - \Lambda^{-1}Le^L\xi_1 - \Lambda^{-1}LJ_0. \end{cases}$$

Donc $\Lambda^{-1}u(0) \in D(H)$ et

$$\begin{cases} H\Lambda^{-1}u(0) = H\Lambda^{-1}\xi_0 + H\Lambda^{-1}e^L\xi_1 + H\Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}u'(0) = \Lambda^{-1}M\xi_0 - \Lambda^{-1}Le^L\xi_1 - \Lambda^{-1}LJ_0. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}d_0 &= \Lambda^{-1}[u'(0) - Hu(0)] \\ &= \Lambda^{-1}u'(0) - H\Lambda^{-1}u(0) \\ &= (M-H)\Lambda^{-1}\xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L\xi_1 - (L+H)\Lambda^{-1}J_0,\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Pour les permutations on a utilisé

– le Lemme 2.2.1, point 5 pour $H\Lambda^{-1}u(0) = \Lambda^{-1}Hu(0)$.

– le fait que

$$u(0), u(1) \in D(L) = D(M)$$

et le Lemme 2.2.1, point 4 pour $M\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}M$ sur $D(M)$, et

$$L\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}L$$

sur $D(L)$.

Ensuite, à partir de $u_1 = e^M\xi_0 + \xi_1 + I_1$, on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}d_0 &= [(M-H) + e^{L+M}(L+H)]\Lambda^{-1}\xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L(u_1 - I_1) - (L+H)\Lambda^{-1}J_0 \\ &= \xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L(u_1 - I_1) - (L+H)\Lambda^{-1}J_0,\end{aligned}$$

donc

$$\xi_0 = \Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}[e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0], \tag{2.3.8}$$

et

$$\xi_1 = -e^M(L+H)\Lambda^{-1}(e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0) - e^M\Lambda^{-1}d_0 + u_1 - I_1. \tag{2.3.9}$$

Enfin, on conclure la représentation suivante de u

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{xM}[\Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}e^Lu_1] \\ &\quad -e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad +e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad +e^{(1-x)L}[(I - (L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M})u_1 - \Lambda^{-1}e^Md_0] \\ &\quad -e^{(1-x)L}(L+H)e^M\Lambda^{-1}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad -e^{(1-x)L}[I - (L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}](L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds,\end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} u(x) &= S(x, f_0, f, M) + S(1-x, f_1, f(1-.), L) \\ &\quad + R(x, Tf_1, M) - R(1-x, f_0 + Te^L f_1, L), \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

où

$$T = (L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X), \tag{2.3.11}$$

$$f_0 = \Lambda^{-1} d_0 + T(L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds, \tag{2.3.12}$$

$$f_1 = u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds, \tag{2.3.13}$$

et

$$\begin{aligned} S(x, f_0, f, M) &= e^{xM}(\Lambda^{-1} d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}(L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \\ &\quad + (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(1-x, f_1, f(1-.), L) &= e^{(1-x)L}(u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds) \\ &\quad + (L+M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s) ds. \end{aligned}$$

$$R(x, Tf_1, M) = e^{xM} e^L [(L+H)\Lambda^{-1}(u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds)].$$

$$\begin{aligned} R(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) &= e^{(1-x)L} e^M [\Lambda^{-1} d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}(L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \\ &\quad + (L+H)\Lambda^{-1} e^L (u_1 - (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds)]. \end{aligned}$$

et pour $\phi \in X$ et $C = L$ ou M

$$\begin{cases} S(x, \phi, f, C) = e^{xC}\phi + (L+M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)C} f(s) ds \\ R(x, \phi, C) = e^{xC} e^{L+M-C} \phi. \end{cases} \tag{2.3.14}$$

Cela montre que si le problème $(P.2)$ a une solution classique u alors il est unique et déterminé par (2.3.10).

2.4 Lemmes techniques

On rappelle dans le Lemme suivant une conséquence très importante de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Dore-Venni cas commutative

Lemme 2.4.1 *Sous l'hypothèse* $(H.0)$ *et lorsque que l'opérateur* $-C \in BIP(X,\alpha)$ *avec* $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ *et pour tout* $g \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < +\infty$. *On a*

$$1.\ \ x \longmapsto C\int_0^x e^{(x-s)C}g(s)ds \in L^p(0,1;X) \tag{2.4.1}$$

$$2.\ x \longmapsto Ce^{xC}\int_0^1 e^{sC}g(s)ds \in L^p(0,1;X) \tag{2.4.2}$$

Preuve.
1. Le premier point, est une conséquence directe de l'exemple donné dans Dore et Venni [12] en utilisant le résultat de Pruss et Sohr losrsque C n'est pas inversible.

2. Le point 2 est une conséquence de 1. (Voir [20], p.200, propriété (26)).

Pour les données d_0, u_1 on utilise le résultat suivant basé sur la définition des espaces l'interpolation lorsque C est un générateur d'un semi groupe analytique.

Rappelons que, pour tout $\theta \in]0,1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 < p \leq \infty$, (voir [32, p. 96] p. 96),

$$\left(D\left(C^m\right), E\right)_{\theta,p} = \left\{\phi \in X : \int\limits_0^\infty \left\|t^{m\theta}C^m e^{tC}\phi\right\|^p \frac{dt}{t} < +\infty\right\}.$$

Ceci montre que

$$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp},p} \iff t \longmapsto C^m e^{tC}\phi \in L^p(0,1;X), \tag{2.4.3}$$

il s'ensuite, pour $m = 1$ et $m = 2$, que

$$\left\{\begin{array}{r} \phi \in (D(C), X)_{\frac{1}{p},p} \iff Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X) \\ \phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \iff C^2e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X), \end{array}\right. \tag{2.4.4}$$

Lemme 2.4.2 *Supposons* $(H.0)$ *et* $(H.1) \backsim (H.4)$. *Pour* $C \in \{L,\ M\}$, *on a*
1. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \iff (C - \lambda_0 I)Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$. *où* $\lambda_0 \in \rho(C)$.
2. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \iff (L + M - C)Ce^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$.
3. $\phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p},p} \iff (L + M - C)^2e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;X)$.

Preuve.

1. Ce résultat est démontré dans [21] (Lemme 3, page. 171-172).

2. Dans le cas où $C = L$ (la preuve pour $C = M$ est similaire), on effet : Soit $\phi \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$. En prenant $\lambda_0 = 1$ (car $-L \in Bip$ hypothèse $(H.3)$, donc vérifie (1.5.1) dans l'assertion 1. et le fait que

$$MLe^{\cdot L}\phi = M(L-I)^{-1}(L-I)Le^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X).$$

Car $M(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$,
Inversement, supposons que $MLe^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ et montrons que $L^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ pour avoir utiliser (2.4.4). En effet

$$\begin{aligned} Le^{\cdot L}\phi &= L(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= (M-I)^{-1}LMe^{\cdot L}\phi - L(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi, \end{aligned}$$

et donc $Le^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$, ensuite de

$$\begin{aligned} L^2e^{\cdot L}\phi &= L^2(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= L(M-I)^{-1}LMe^{\cdot L}\phi - L(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi, \end{aligned}$$

on déduit que $L^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$, par conséquent $\phi \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
3. Supposons que $C = L$. Si $\phi \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$, alors $Me^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ puisque

$$\begin{aligned} Me^{\cdot L}\phi &= M(L-I)^{-1}(L-I)e^{\cdot L}\phi \\ &= M(L-I)^{-1}Le^{\cdot L}\phi - M(L-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi, \end{aligned}$$

Par le point 2, on déduit que $M^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ car

$$\begin{aligned} M^2e^{\cdot L}\phi &= M(L-I)^{-1}M(L-I)e^{\cdot L}\phi \\ &= M(L-I)^{-1}MLe^{\cdot L}\phi - M(L-I)^{-1}Me^{\cdot L}\phi. \end{aligned}$$

Inversement, si $M^2e^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ donc $Me^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$ car

$$\begin{aligned} Me^{\cdot L}\phi &= M(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= (M-I)^{-1}M^2e^{\cdot L}\phi - M(M-L)^{-1}e^{\cdot L}\phi, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} LMe^{\cdot L}\phi &= LM(M-I)(M-I)^{-1}e^{\cdot L}\phi \\ &= L(M-I)^{-1}M^2e^{\cdot L}\phi - L(M-I)^{-1}Me^{\cdot L}\phi, \end{aligned}$$

donc $LMe^{\cdot L}\phi \in L^p(0,1;X)$, et la déclaration 2 donne $\phi \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
Maintenant, on peut étudier la régularité des termes R et S apparaissant dans (2.3.10).

Lemme 2.4.3 *Supposons $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.7)$. Soient $C = L$ ou M et ϕ un élément donné dans X. Alors pour le terme régulier $R(., \phi, C)$ définit au-dessus, on a*

$$LMR(., \phi, C), \quad L^2R(., \phi, C), \quad M^2R(., \phi, C) \in L^p(0,1;X).$$

Pour la preuve de ce lemme, voir Lemme 2 pages. 170-171, dans [21].
Dans la section suivante on va étudier le terme singulier $S(., f_0, f, M)$.

2.5 Etude de $S(., f_0, f, M)$

Proposition 2.5.1 *Sous les hypothèses $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.7)$ et pour $f \in L^p(0,1;X)$, avec $1 < p < +\infty$ et $P \in \{LM, M^2, L^2\}$ on a*

$$PS(., f_0, f, M) \in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

où f_0 est défini par (2.3.12).

Preuve. Soit $C \in \{L, M\}$. On pose, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,g,C) = LM(L+M)^{-1} \int\limits_0^x e^{(x-s)C} f(s)ds \\ M(x,g,C) = LM(L+M)^{-1} e^{xC} \int\limits_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)ds. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

En vertu de la commutativité de L et M, on peut écrire pour $y \in D(L) = D(M)$

$$LM(L+M)^{-1}y = (L+M-C)(L+M)^{-1}Cy,$$

On en déduit

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,g,C) = (L+M-C)(L+M)^{-1}C \int\limits_0^x e^{(x-s)C} f(s)ds \\ M(x,g,C) = (L+M-C)(L+M)^{-1}Ce^{xC} \int\limits_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)ds. \end{cases}$$

Comme $(L+M-C)(L+M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, alors on a

$$\mathcal{L}(., g, C) \in L^p(0,1;X) \tag{2.5.2}$$

et

$$x \longmapsto (L+M-C)e^{x(L+M-C)}\int_0^1 e^{s(L+M-C)}g(s)ds \in L^p(0,1;X).$$

Ainsi

$$\int_0^1 e^{s(L+M-C)}g(s)ds \in (D(L+M-C),X)_{\frac{1}{p},p} = (D(C),X)_{\frac{1}{p},p},$$

voir (2.4.4) et encore

$$x \longmapsto Ce^{xC}\int_0^1 e^{s(L+M-C)}g(s)ds \in L^p(0,1;X),$$

de ce qui précède, on déduit

$$M(.,g,C) \in L^p(0,1;X). \tag{2.5.3}$$

Par exemple, si $P = LM$, on peut écrire, pour p.p. $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
PS(x,f_0,f,M) &= LMe^{xM}f_0 + LM(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\
&= LMe^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + LM(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds \\
&\quad + LMe^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&= Me^{xM}L\Lambda^{-1}d_0 + \mathcal{L}(x,f,M) + (L+H)\Lambda^{-1}M(x,f,M),
\end{aligned}$$

et comme $L\Lambda^{-1}, H\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, A partire de (2.5.2),(2.5.3) et (2.4.4), on déduit que

$$\begin{aligned}
PS(.,f_0,f,M) &\in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow Me^{\cdot M}L\Lambda^{-1}d_0 \in L^p(0,1;X) \\
&\Longleftrightarrow L\Lambda^{-1}d_0 \in (D(M),X)_{\frac{1}{p},p} = (D(L),X)_{\frac{1}{p},p}. \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (X,D(L))_{2-\frac{1}{p},p}. \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (X,D(L^2))_{1-\frac{1}{2p},p}. \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(L^2),X)_{\frac{1}{2p},p}. \\
&\Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}.
\end{aligned}$$

Les cas $P = L^2$ ou $P = M^2$ sont traités d'une manière similaire.

Pour le terme $S(1-.,f_1,f(1-.),L)$: On a la proposition suivante

Proposition 2.5.2 *Sous les hypothèses* $(H.0)$ *et* $(H.1) \backsim (H.7)$ *et pour* $f \in L^p(0,1;X)$ *et* $P \in \{LM, M^2, L^2\}$ *on a*

$$PS(1-.,f_1,f(1-.),L) \in L^p(0,1;X) \iff u_1 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

où f_1 *est définit par (2.3.13).*

Preuve. Supposons que $P = LM$ (par une méthode similaire, on obtient le résultat dans les cas $P = M^2$ ou $P = L^2$. En effet,

$$\begin{aligned} & PS(1-x,f_1,f(1-.),L) \\ = \; & LMe^{(1-x)L}f_1 + LM(L+M)^{-1}\int_0^{1-x} e^{(1-x-s)L}f(1-s)ds \\ = \; & LMe^{(1-x)L}u_1 + LM(L+M)^{-1}\int_0^{1-x} e^{(1-x-s)L}f(1-s)ds \\ & -LM(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\int_0^{1} e^{sM}f(1-s)ds \\ = \; & LMe^{(1-x)L}u_1 + \mathcal{L}(1-x,f(1-.),L) - M(1-x,f(1-.),L) \end{aligned}$$

par le Lemme 2.4.2, et le point 2, on trouve

$$\begin{aligned} PS(1-.,f_1,f(1-.),L) \in L^p(0,1;X) & \iff LMe^{(1-.)L}u_1 \in L^p(0,1;X) \\ & \iff u_1 \in (D(L^2),X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{aligned}$$

2.6 Résultat principal

Théorème 2.6.1 (Solution classique) *Sous les hypothèses* $(H.0)$ *et* $(H.1) \backsim (H.7)$ *et pour* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Le problème* $(P.2)$ *admet une unique solution classique* u *si et seulement si*

$$\Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Dans ce cas, u *est déterminé par 2.3.10.*

Preuve. On sait que, si le problème $(P.2)$ admet une solution classique u alors cette solution est donnée par 2.3.10

$$\begin{aligned} u(x) &= S(x,f_0,f,M) + S(1-x,f_1,f(1-.),L) \\ &\quad + R(x,Tf_1,M) - R(1-x,f_0+Te^Lf_1,L) \end{aligned}$$

où f_0, f_1 et T sont définis par 2.3.12, 2.3.13 et 2.3.11. Pour conclure, il suffit d'étudier la régularité de u.
Du Lemme 2.4.3, on a

$$LMR(x, Tf_1, M) - LMR(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) \in L^p(0,1;X),$$

et les Lemmes 2.2.1 et 2.4.1 donnes

$$\begin{cases} LMS(.,f_0,f,M) \in L^p(0,1;X) \iff \Lambda^{-1}d_0 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p} \\ LMS(1-.,f_1,f(1-.),L) \in L^p(0,1;X) \iff u_1 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

En résumant, on obtient

$$LMu \in L^p(0,1;X) \iff \Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & (L-M)u'(x) && (2.6.1) \\ = \; & (L-M)MS(x,f_0,f,M) + (L-M)LR(1-x,f_0+Te^Lf_1,L) \\ & -(L-M)LS(1-x,f_1,f(1-.),L) + (L-M)MR(x,Tf_1,M) \\ = \; & (LM-M^2)S(x,f_0,f,M) + (L^2-LM)R(1-x,f_0+Te^Lf_1,L) \\ & -(L^2-LM)S(1-x,f_1,f(1-.),L) + (LM-M^2)R(x,Tf_1,M). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.4.3 et les Propositions 2.5.1 et 2.5.2, on obtient

$$(L-M)u'(.) \in L^p(0,1;X) \iff \Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(LM),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Donc, u a la régularité souhaitée.
Maintenant, nous conclurons en montrant que la fonction u donnée par (2.3.10), satisfait le problème $(P.2)$. On a

$$\begin{aligned} u''(x) &= M^2S(x,f_0,f,M_\omega) - L^2R(1-x,f_0+Te^Lf_1,L) && (2.6.2) \\ &\quad +L^2S(1-x,f_1,f(1-.),L) + M^2R(x,Tf_1,M) + f(x), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$M^2 + (L-M)M - LM = L^2 - (L-M)L - LM \subset 0$$

et (2.3.10), (2.6.2), on trouve

$$\begin{aligned}
& u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) \\
= \; & [M^2 + (L-M)M - LM]S(x, f_0, f, M) \\
& -[L^2 - (L-M)L - LM]R(1-x, f_0 + Te^L f_1, L) \\
& +[L^2 - (L-M)L - LM]S(1-x, f_1, f(1-.), L) \\
& +[M^2 + (L-M)M - LM]R(x, Tf_1, M) + f(x) \\
= \; & f(x).
\end{aligned}$$

De 2.3.10, on a

$$\begin{aligned}
u(1) \; = \; & S(1, f_0, f, M) - R(0, f_0 + Te^L f_1, L) \\
& +S(0, f_1, f(1-.), L) + R(1, Tf_1, M),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u(1) \; = \; & e^M f_0 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - e^M[f_0 + (L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1] \\
& +f_1 + (L+H)\Lambda^{-1} e^{L+M} f_1 \\
= \; & f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds = u_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u(0) \; = \; & S(0, f_0, f, M) + S(1, f_1, f(1-.), L) \\
& +R(0, Tf_1, M) - R(1, f_0 + Te^L f_1, L) \\
= \; & f_0 + e^L f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
& +(L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1 - e^{L+M}(f_0 + (L+H)\Lambda^{-1} e^L f_1) \\
= \; & (I - e^{L+M})f_0 + [I + (I - e^{L+M})(L+H)\Lambda^{-1}]e^L f_1 + (L+M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u(0) &= \Lambda^{-1}(I - e^{L+M})d_0 \\ &+\Lambda^{-1}(L+M)e^L[u_1 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds] \\ &+[\Lambda + (I - e^{L+M})(L+H)]\Lambda^{-1}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds. \end{aligned}$$

De plus, on a $\Lambda + (I - e^{L+M})(L+H) \subset L + M$ et

$$(I - e^{L+M})(L+H)\Lambda^{-1} + I = (L+M)\Lambda^{-1},$$

alors

$$\begin{aligned} u(0) &= \Lambda^{-1}(I - e^{L+M})d_0 \\ &+\Lambda^{-1}(L+M)e^L[u_1 - (L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds] \\ &+\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds, \end{aligned}$$

d'où on remarque que $u(0) \in D(H)$ et

$$\begin{aligned} u'(0) &= MS(0, f_0, f, M) + LR(1, f_0 + Te^L f_1, L) \\ &-LS(1, f_1, f(1-.), L) + MR(0, Tf_1, M). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \; & (M-H)S(0,f_0,f,M) + (L+H)R(1,f_0+Te^L f_1, L) \\
& -(L+H)S(1,f_1,f(1-.),L) + (M-H)R(0,Tf_1,M) \\
= \; & (M-H)f_0 + (L+H)e^{L+M}(f_0+(L+H)\Lambda^{-1}e^L f_1) - (L+H)e^L f_1 \\
& -(L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)L}f(1-s)ds + (M-H)(L+H)\Lambda^{-1}e^L f_1 \\
= \; & \Lambda f_0 + (L+H)[(M-H)+e^{L+M}(L+H)-\Lambda]\Lambda^{-1}e^L f_1 \\
& -(L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)L}f(1-s)ds \\
= \; & d_0 + (L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds - (L+H)(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
= \; & d_0.
\end{aligned}$$

Remarque. Supposons $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.7)$. Si

$$d_0 \in (D(M),X)_{\frac{1}{p},p}, u_1 \in (D(M^2),X)_{\frac{1}{2p},p},$$

alors

$$\Lambda^{-1}d_0, u_1 \in (D(M^2),X)_{\frac{1}{2p},p},$$

comme $\Lambda^{-1}(X) \subset D(L) = D(M)$, alors, le problème (P.1) admet une solution classique u.

Chapitre 3

Retour au problème $(P.1)$ et Applications

3.1 L'étude de problème $(P.1)$

Dans cette section, on va utilisé les résultats obtenus dans le chapitre précédent pour

$$L = B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad M = -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}.$$

En précisant également les hypothèses sur les opérateurs A et B.

3.1.1 Hypothèses sur les opérateurs A, B et H

L'hypothèse essentielle sur les opérateurs A, B est :

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ ]-\infty, 0] \subset \rho(B^2 - A) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} \| \lambda(\lambda I + B^2 - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Remarque 3.1.1 *1. l'hypothèse (3.1.1) signifie l'ellipticité de l'équation* $(P.1)$.
2. Sous l'hypothèses (3.1.1) et selon [1] , l'opérateur $-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur* X,

$$D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B), \tag{3.1.2}$$

maintenant, posons

$$L = B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \text{ et } M = -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}},$$

On supposera, en plus

$$\exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[: -L \in BIP(X, \theta_L), \ -M \in BIP(X, \theta_M), \tag{3.1.3}$$

$$\forall y \in D(B),\ (B^2 - A)^{-\frac{1}{2}} By = B(B^2 - A)^{-\frac{1}{2}} y, \tag{3.1.4}$$

$$\begin{cases} \forall \xi \in D(H),\ \forall \lambda \in \rho(L),\ (L - \lambda I)^{-1}\xi \in D(H) \ et \\ (L - \lambda I)^{-1} H\xi = H(L - \lambda I)^{-1}\xi. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{cases} \forall \xi \in D(H),\ \forall \mu \in \rho(M),\ (M - \mu I)^{-1}\xi \in D(H) \ et \\ (M - \mu I)^{-1} H\xi = H(M - \mu I)^{-1}\xi, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

De plus, on pose

$$D(\Lambda) = D(L) \cap D(H) \quad et \quad \Lambda = (M - H) + e^{L+M}(L + H).$$

On suppose, aussi que

$$\Lambda \text{ est fermé et inversible borné.} \tag{3.1.7}$$

Remarque 3.1.2 *Sous les hypothèses* (3.1.1) $\backsim$ (3.1.5), *on a*

1. $D(L) = D(M) = D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}})$ donc

$$D(L - M) = D(L + M) = D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B),$$

ainsi

$$L - M \subset 2B,\ L + M = -2(B^2 - A)^{\frac{1}{2}} et\ 0 \in \rho(L + M).$$

2. $D(ML) = D(LM) = D(B^2 - A)$ et $ML = LM \subset -A$.

Preuve. pour la preuve voir le Lemme 7 dans [21].

3.1.2 Résultat principal pour le problème (P.1)

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses* $(H.0)$ *et* (3.1.1) $\backsim$ (3.1.7), *et pour* $f \in L^p(0, 1; X)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Le problème* $(P.1)$ *admet une solution classique* u *satisfaisant de plus*

$$u \in L^p(0, 1; D(B^2 - A)) \ et\ u' \in L^p(0, 1; D(B^2 - A)^{\frac{1}{2}}),$$

si et seulement si

$$\Lambda^{-1} d_0 \in (D(B^2 - A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \ et\ u_1 \in (D(B^2 - A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Dans ce cas, u est déterminé uniquement par (2.3.10).

Preuve. Si nous supposons les hypothèses (3.1.1) $\backsim$ (3.1.7), alors les hypothèses $(H.1)$ $\backsim$ $(H.7)$ sont satisfaites avec L, M, Λ défini dans les hypothèses (3.1.1) $\backsim$ (3.1.7). Ainsi, on peut appliquer le Théorème 2.6.1.

3.2 Quelques cas dans lesquels l'hypothèse (H.7) ou (3.1.7) sont satisfaits

3.2.1 Nouvelles hypothèses impliquant (H.7)

Proposition 3.2.1 *Supposons* $(H.0)$ *et* $(H.1) \backsim (H.6)$. *Si*

$$M - H \text{ est fermé et } 0 \in \rho(M - H), \tag{3.2.1}$$

et

$$\| (I - e^{L+M})^{-1}(L + M)e^{L+M}(M - H)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} < 1, \tag{3.2.2}$$

alors, l'hypothèse $(H.7)$ *est satisfaite et on peut appliquer le théorème 2.6.1.*

Preuve. Puisque $I - e^{L+M}$ est inversible borné (voir [28], page. 60), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Lambda &= (M - H) - e^{L+M}[(M - H) - L - M] \\ &= (I - e^{L+M}) \left[I + (I - e^{L+M})^{-1}(L + M)e^{L+M}(M - H)^{-1}\right] (M - H) \\ &= G(M - H), \end{aligned}$$

ou

$$G = (I - e^{L+M}) \left[I + (I - e^{L+M})^{-1}(L + M)e^{L+M}(M - H)^{-1}\right] \in \mathcal{L}(X).$$

Maintenant, $0 \in \rho(G)$ à cause de (3.2.2). En utilisant (3.2.1), alors $\Lambda = G(M - H)$ est inversible d'inverse borné.

Remarque 3.2.1 *1. La Proposition 3.2.1 reste vraie si on remplace (3.2.2) par :*

$$\begin{cases} \text{pour tout } n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \| [(I - e^{L+M})^{-1}(L + M)e^{L+M}(M - H)^{-1}]^{n_1} \|_{\mathcal{L}(X)} < 1. \end{cases}$$

2. On peut obtenir l'hypothèse (3.2.1), de la manière suivante : Sous $(H.0)$ *et* $(H.1) \backsim (H.6)$, *si on suppose en plus que*

$$\begin{cases} -M \in BIP(X, \theta_M) \\ H \in BIP(X, \theta_H), \quad \text{avec } \theta_H \in]0, \pi[\\ 0 \in \rho(M) \cup \rho(H) \text{ et } \theta_M + \theta_H \in]0, \pi[, \end{cases}$$

alors $(-M) + H$ *est fermé et inversible borné (voir [30], Théorème 4, p. 441 avec la remarque à la fin de la page 445), c'est-à-dire (3.2.1) est satisfait.*

3. Le problème spectral avec un paramètre $\omega \geq \omega_0$ *où* $\omega_0 \geq 0$ *est un nombre fixe*

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \text{ p.p } x \in (0, 1), \\ u'(0) - Hu(x) = d_0, \quad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

*est étudié dans [**?**], comme une application de cet article : la mise en*

$$A_\omega = A - \omega I,\ L_\omega = B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \ \text{et}\ M_\omega = -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}},$$

Le problème spectral (3.2.3) devient

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - L_\omega M_\omega u(x) = f(x),\ p.p\ x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1, \end{cases}$$

et, sous des hypothèses appropriées, on peut appliquer les résultats de cet article, en remplaçant L, M par L_ω, M_ω. En particulier, le paramètre spectral ω est utilisé pour obtenir l'hypothèse (3.2.2) si ω assez grand et alors (H.7) par la proposition 3.2.1.

Proposition 3.2.2 *Supposons $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.6)$. Si*

$$M - H \ \text{est fermé et}\ 0 \in \rho(M - H),$$

et, pour certains $n_1 \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$

$$\| ((L + H)(M - H)^{-1})^{n_1} \|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

alors l'hypothèse (H.7) est satisfaite et on peut appliquer le Théorème 2.6.1.

Preuve. On écrit

$$\Lambda = [I + e^{L+M}(L + H)(M - H)^{-1}](M - H) = (I - C)(M - H),$$

où $C = -e^{L+M}(L + H)(M - H)^{-1}$. Donc (H.7) sera satisfait si et seulement si

$$0 \in \rho(I - C).$$

Nous procédons de la même manière que la démonstration du Lemme 2.3 p. 1458 dans [8]

$$\begin{aligned} *)\ \exists K &\geq 1,\ \exists \delta > 0, \forall y > 0 : \| e^{y(L+M)} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{-\delta y}. \\ *)\ \exists k &\in \mathbb{N} \diagdown \{0\} : \| e^{2kn_1(L+M)} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{-2kn_1\delta} < 1. \end{aligned}$$

Donc $\| C^{kn_1} \|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ alors $0 \in \rho(I - C^{kn_1})$ et ainsi $0 \in \rho(I - C)$.

3.2.2 Quelques cas particuliers

Considérons le problème $(P.2)$ et supposons que $(H.0)$ et $(H.1) \backsim (H.6)$ sont satisfaites.
1. Si $H = -L$ alors $\Lambda = M + L$, et (H.7) est satisfait.

2. Si $-\frac{1}{2}(L - M) \subset H$ alors
$$\Lambda = \frac{1}{2}(L + M)(I + e^{L+M})$$
et encore, l'hypothèse (H.7) est satisfait.

De même façon, considérons le problème (P.1) et supposons (3.1.1) $\backsim$ (3.1.6). Si
$$H = -B + \sqrt{B^2 - A}$$
ou $-B$ alors (3.1.7) est satisfont.

3.3 Applications

Exemple 3.3.1 *Considérons K tel que $-K$ admet des puissances imaginaires bornées et $0 \in \rho(K)$. Prendre*
$$L = M = -H = -\sqrt{-K}.$$
Alors $\Lambda = M + L = -2\sqrt{-K}$ est inversible d'inverse bornée et
$$-L = (-K)^{\frac{1}{2}}, \quad (-L)^{it} = (-K)^{\frac{it}{2}} \quad (t \in \mathbb{R}),$$
en plus $L - M \subset 0$ et $-ML = K$, donc on peut appliquer le résultat principal au Problème suivant
$$\begin{cases} u''(x) + Ku(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1) \\ u'(0) - \sqrt{-K}u(0) = d_0, \quad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Par exemple, si on porend $X = L^p(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lisse, et
$$K = \Delta - cI,$$
$c > 0$ avec conditions aux limites de type Dirichlet (on peut choisir les conditions décrites dans [32], page. 320. Alors la puissance fractionnaire $\sqrt{-\Delta + cI}$est bien définie.

Exemple 3.3.2 *Soit* $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad c < 0$. *Considérons* $X = L^2(\mathbb{R})$ *et* L, M *des opérateurs dans* X *défini par*

$$\begin{cases} D(L) = D(M) = H^2(\mathbb{R}) \\ Lu = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu, \\ Mu = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

donc

$$(L - M)u = b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

et

$$(L + M)u = 2a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

avec $0 \in \rho(L + M)$.

On prend H défini par

$$\begin{cases} D(H) = H^1(\mathbb{R}) \\ Hu = -\frac{1}{2}(b\frac{\partial u}{\partial y} + cu). \end{cases}$$

Alors le résultat principal s'applique au problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \left(b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y) \\ -a\left(a\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} + b\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} + c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \dfrac{b}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}(0, y) + \dfrac{c}{2}u(0, y) = d_0(y), \quad y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) = u_1(y), \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque. on peut généraliser cet exemple sur $\mathbb{R}^n$ en prenant l'opérateur différentiel suivant

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j})u + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

Pour les propriétés de cet opérateur voir ([30]) et [31].

Exemple 3.3.3 *Choisissons*

i) L, M *deux opérateurs satisfaisant les hypothèses* $(H.1) \backsim (H.5)$.

ii) H *satisfaisant* $(H.6)$.

Supposons de plus que $M - H$ *est inersible d'inverse borné.*

Il reste à vérifie l'hypothèse $(H.7)$. *Mais, comme indiqué dans la proposition 3.2.2, on a*

$$\Lambda = [I + e^{L+M}(L + H)(M - H)^{-1}](M - H),$$

avec $(L+H)(M-H)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *et l'inversibilité de* Λ *est garantie par la petitesse de*

$$\| \, e^{L+M}(L+H)(M-H)^{-1} \, \|_{\mathcal{L}(X)} \, .$$

Maintenant, si on remplace L *par*

$$L_\delta := L - \delta I$$

avec $\delta > 0$ *assez grand, alors* L_δ, M *et* H *satisfait les hypothèses* $(H.1) \backsim (H.7)$, *en effet :*

$$\begin{array}{rcl} \left\| e^{L_\delta + M}(L_\delta + H)(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} & \leq & \left\| e^{L_\delta} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M}(L+H)(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & & +\delta \left\| e^{L_\delta} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M}(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & \leq & e^{-\delta} \left\| e^{L} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M}(L+H)(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & & +\delta e^{-\delta} \left\| e^{L} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{M}(M-H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} , \end{array}$$

et alors $\| \, e^{L_\delta + M}(L_\delta + H)(M-H)^{-1} \, \|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ *pour* $\delta > 0$ *assez grand.*

Ceci nous permet d'appliquer immédiatement aux opérateurs différentiels traités dans les papiers de Prüss et Sohr cités ci-dessus.

Bibliographie

[1] Balakrishnan A.V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] Bourgain J. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ark. Mat. 21 (1983), pp.163-168.

[3] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[4] Burkholder D.L. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.

[5] Cheggag M., Favini A., Labbas A., Maingot S., Ould Melha K. : New results on complete elliptic equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case, Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr., 2017, Volume 10, Issue 1, 70–96.

[6] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Strum-Liouville problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Space, Differential and Integral Equations, Vol. 21, 9-10, (2008), 981-1000.

[7] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Space, DCDS-S, 4, no. 3 (2011), 1-16.

[8] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary conditions in Holder Space, Applicable Analysis, Vol. 91, No. 8, (2012), p. 1453-1475.

[9] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Spectral Parameter Problems with Robin Boundary Coefficient-operator Conditions in UMD spaces and Applications to appear.

[10] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. , Medeghri A. : Elliptic Problems with Robin Boundary Cofficient-Operator Conditions in General Lp Sobolev Spaces and Applications, Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77.

[11] Da Prato G. and Grisvard P. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), pp. 305-387.

[12] Dore G. and Venni. A. : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.

[13] El Haial A, and Labbas R. on the Ellipticity and Solvability of Abstract Second-order Differential Equation, Electronic Journal of Differential Equations, 57 (2001), 1-18.

[14] Engel K and Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer Verlag, New York, 2000.

[15] Eltaief A. and Maingot S. : SECOND ordre abstract differntial equations of elliptic type set in R+. demenstration mathematical, Vol. XLVI, No 4 2013.

[16] Favini A., Labbas R., Maingot S., Meisner M. : Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non Commutative Cases. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, issue 8, pp. 1495 1510.

[17] Favini A, Labbas R, Tanabe H, and Yagi A. On the solvability of complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkc. Ekv, 47 (2004), 205-224.

[18] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. Etude Unifiée de problèmes Elliptiques dans le Cadre Holdérien, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), 485-490.

[19] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A.On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Absract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcialaj Ekvacioj, 47 (2004), 423-452.

[20] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD Spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), 193-214.

[21] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. A Simplified Approach in the Study Of Elliptic Differenial Equations in UMD Spaces and New Applications, Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 165-187.

[22] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Holder Spaces, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.

[23] Grisvard P. : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[24] Haase M. : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[25] Krein S. G. : *Linear differential equations in Banach spaces.* Moscou, (1967).

[26] Limam K. : *Resolution, in Lp-spaces, of transmission problems set in an unbounded domains.* Appl. Math. Comput. 218 (9) (2012), pp. 5605-5619.

[27] Lions j.J., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publications Mathématiques de l'institut des hautes études scientifiues, 1964, vol. 19 N°1, pp.5-68. Doi : 10.1007/BF02684796.

[28] Lunardi A. : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, (1995).

[29] Pazy A. : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[30] Prüss J. and Sohr H. : On operators with bounded *Imaginary powers in Banach spaces.* Math Zeitschrift, 203 (1990), pp.429-452.

[31] Prüss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces.* Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.

[32] Triebel H. : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North Holland, amsterdam, (1978).

Elliptic problems with Robin boundary coefficients-operators conditions, in L^p spaces and Applications

Abstract. In this thesis, we give a summary of the results of the article [10]; concerning the study of the following second-order differential equations of elliptic type

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \;\; a.e. \;\; x \in (0,1) \quad (1)$$

With coefficient-operator in the boundary conditions

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1. \qquad (2)$$

Where A, B and H are closed linear operators in a Banach space X of UMD type, f is a function of $L^p(0,1,X)$ with $p \in]1,\infty[$.
We are interested in the study of the existence, the uniqueness and the optimal regularity of the classical solution u of the problem (1) - (2) i.e. we are going to look for a function u such that

$$\begin{cases} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p\big(0,1,D(A)\big), \;\; u' \in L^p\big(0,1,D(B)\big). \\ \qquad (ii) \;\; u(0) \in D(H). \end{cases}$$

This work improves and completes the results obtained in the two works [6] and [7].

مسائل إهليجية بمعاملات ذات مؤثرات خطية في الشروط الحدية لروبن، في الفضاءات L^p و تطبيقات .

ملخص : في هذه المذكرة ، سنقدم ملخصًا لنتائج المقال [10] ، بشأن دراسة المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية من النوع الإهليجي التالي

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \;\; p.p. \, x \in (0,1) \quad (1)$$

مع معاملات-مؤثرات خطية في الشروط الحدية،

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1. \qquad (2)$$

- A، B و H مؤثرات خطية مغلقة في فضاء بناخ X من النوع UMD.
- f هي دالة من $L^p(0,1,X)$ مع $p \in]1,\infty[$.

سنهتم بدراسة الوجود ، الوحدانية والانتظام للحل الكلاسيكي u للمسألة (1) - (2) أي سنبحث عن الدالة u حيث

$$\begin{cases} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p\big(0,1,D(A)\big), \;\; u' \in L^p\big(0,1,D(B)\big). \\ \qquad (ii) \;\; u(0) \in D(H). \end{cases}$$

هذا العمل يطور ويكمل النتائج التي تم الحصول عليها في العملين [6] و[7].