MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DELA RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

Cherief Rachid

THEME :

Nouveaux résultats sur les équations elliptiques complètes avec condition aux limite de type Robin dans le cas non commutatif

Devant le jury composé de :

Mr.	**Medeghri Ahmed**	**Université de Mostaganem**	**Pr**	**Président**
Mr.	**Haoua Rabah**	**Université de Mostaganem**	**MCB**	**Examinateur**
Mme.	**Limam Kheira**	**Université de Mostaganem**	**MCA**	**Encadreur**
Mr.	**Andasmas Maamar**	**Université de Mostaganem**	**MCA**	**Co-Encadreur**

Année Universitaire 2020-2021

Remerciements

Avant tout, louange à **ALLAH** le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier ma directrice de mémoire, Madame **Khira Limam**, Maitre de conférences à l'université de Mostaganem pour avoir accepté de m'encadrer et diriger ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche. Ce travail de recherche est un réel plaisir pour moi.

J'exprime également toute ma gratitude à mon co-encadreur de ce mémoire, Monsieur **Andasmas Maamar** Maître de conférences à l'université de Mostaganem, son expérience, ses grandes compétences, sa finesse, ses nombreux conseils et ses remarques pertinentes ont permis l'accomplissement de ce travail, j'ai eu un grand plaisir d'apprendre de lui, ainsi que Monsieur **Medeghri Ahmed** Professeur à l'université de Mostaganem qui a aussi contribué avec ses multiples orientations documentaires, ses encouragements et ses conseils incessants, tous étaient réuni pour mener à bien cette étude, je suis très honoré par sa présidence de jury, qu'il trouve dans ces mots toute ma sincère reconnaissance.

Je remercie infiniment Monsieur **Haoua Rabah**, Maître de conférences à l'université de Mostaganem, pour avoir accepté d'être examinateur de ce mémoire.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de la Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à ma famille, mes amis, et tous ceux qui m'ont aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

❖ *Cherief Rachid*

Résumé

Ce mémoire est une synthèse sur l'article [6], où on donne des résultats sur les équations différentielles opérationnelles elliptiques du second ordre

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1)$$

avec des conditions aux limites de type Robin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

tels que L_ω, M_ω et H sont des opérateurs linéaires fermés dans l'espace UMD X, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité dans le cadre non commutatif $[L_\omega, M_\omega] \neq 0$, f est une fonction appartient à $L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$ et $d_0, u_0 \in X$. On cherche l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution classique, en utilisant la théorie des semi-groupes, espaces d'interpolation et des résultats sur la classe des opérateurs à puissances imaginaires bornées $BIP(X)$. Une application sur le théorème est donnée par un exemple.

Mots clés : Equations elliptiques complètes, condition aux limites de type Robin, non-commutativité, semi-groupes analytiques, régularité maximale, espace UMD, espaces d'interpolation.

Table des matières

Introduction

0.1 Aperçu historique

Plusieurs auteurs ont étudié les équations différentielles abstraites complète d'ordre 2 sur un domaine borné.

Dans une série d'articles à partir de 2004, les auteurs A. Favini,R. Labbas, S. Maingot,H. Tanabe et A. Yagi (voir [11] et [12]) sont intéressés à l'équation différentielle opérationnelle

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

dans le cadre des espaces de Hölder, où A et B sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X, avec les conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

Ils ont prouvé sous certaines hypothèses, l'existence, l'unicité et la régularité de la solution stricte i.e.

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C^1([0,1], D(B)) \cap C([0,1], D(A)).$$

Ce travail a été complété par les mêmes auteurs, dans l'article [13] paru en 2006, ils ont traité les équations différentielles abstraites complètes du second ordre de type elliptique dans le cadre $L^p([0,1];X)$, $p \in (1;+\infty)$ avec X un espace UMD de Banach ; l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte sont prouvées en utilisant le célèbre théorème de Dore-Venni.

En 2008, dans l'article [14], les auteurs ont donné une approche unifiée dans l'analyse du problème ci-dessus, en introduisant deux opérateurs fermés L et M (pas necéssairement inversibles) où $L - M \subset 2B$ et $ML \subset -A$, dans le cadre $L^p([0,1];X)$ avec X un espace UMD de Banach, ils ont prouvé l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte.

Dans les deux articles [15] et [16] apparus en 2012 et 2013, les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et M. Meisner ont étudié les deux problèmes

$$u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

Pour cela, ils les ont réécrit sous la forme

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + \tfrac{1}{4}((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

danc l'espace $BUC^\theta(\mathbb{R}, X)$ et

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + \tfrac{1}{4}((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases}$$

dans l'espace $C^\theta([0,1], X)$, avec $[L_\omega; M_\omega] \neq 0$ et

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B, \\ -\tfrac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) \subset A_\omega. \end{cases}$$

En particulier, sous l'hypothèse qui permet de définir $(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$, les opérateurs L_ω et M_ω, sont définis comme suit

$$M_\omega = -B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad L_\omega = B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En 2015 dans [5], des nouveaux résultats ont été démontrés sur les équations différentielles d'ordre 2 de type elliptique dans le cadre $L^p(0,1;X)$ avec $p \in (1, +\infty)$, X un espace UMD. Les auteurs M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et Medeghri A ont étudié l'unicité et la régularité de la solution classique du problème

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X, $f \in L^p(0,1;X)$, d_0 et u_0 des données dans X. Les auteurs ont écrit l'équation (1) ci-dessus, sous la forme suivante

$$\begin{cases} u''(x) + (L - M)u'(x) - LMu(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

où $L = B - \sqrt{B^2 - A}$ et $M = -B - \sqrt{B^2 - A}$, sous certaines hypothèses appropriées et en supposant la commutativité $ML = LM$. Ils résolvent une plus classe de problèmes avec condition au limite de Robin (2).

Ce mémoire est une synthèse sur l'article [6] paru en 2017, où les auteurs M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et K. Ould Melha ont abandonné l'hypothèse de commutativité $LM = ML$, ils ont considéré certains opérateurs linéaires fermés dans X, L_ω, M_ω, en fonction du paramètre spectral $\omega \geq 0$, non necéssairement inversibles. Ils ont étudié l'équation différentielle opérationnelle du second ordre

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites abstraites du type de Robin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

On applique la théorie des semi-groupes analytiques et le célèbre Théorème de Dore et Venni [8] pour prouver l'existence de la solution classique de (3), (4), c'est-à-dire une fonction u satisfaisant (3) et (4) telles que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X), \\ x \longmapsto (L_\omega M_\omega)u(x), x \longmapsto (M_\omega L_\omega)u(x) \in L^p(0,1;X) \\ x \longmapsto (L_\omega - M_\omega)u'(x) \in L^p(0,1;X), \\ u(0) \in D(H). \end{cases} \tag{5}$$

0.2 Description des chapitres

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre**, on donne des rappels sur quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail. En particulier, le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes [23], la théorie des sommes d'opérateurs linéaires [8], [7], les espaces d'interpolation [18], [27], les puissances fractionnaires d'opérateurs [25].

Le deuxième chapitre est consacré à la recherche de la solution classique u du problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad p.p \ \ x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{6}$$

tels que L_ω, M_ω et H sont des opérateurs linéaires fermés de domaines respectivement $D(L_\omega)$

$D(M_\omega)$ et $D(H) \subset X$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité dans le cas non commutatif $[L_\omega, M_\omega] \neq 0$.

Ce chapitre est composé de cinq parties :

- Dans la première partie, on donne les hypothèses, quelques conséquences et un théorème qui présente le résultat principal.
- La deuxième partie contient certains lemmes techniques.
- Dans la troisième partie, on construit une représentation de la solution du problème (6), en utilisant une méthode heuristique où on se base sur la représentation de la solution dans le cas commutatif, pour obtenir l'équation intégrale

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + \Gamma_\omega,$$

avec

$$u := (L_\omega + M_\omega)^{-2} v$$

où R_ω, F_ω et Γ_ω dépendent de L_ω, M_ω.

- Dans la quatrième partie, on étudie la régularité de la solution où on donne la preuve du résultat principal.
- Dans la cinquième partie, on donne une comparaison entre le résultat obtenu dans ce travail et celui du cas commutatif étudié dans l'article [5].

Dans **le dernier chapitre**, on termine avec un exemple concret d'EDP auquel on applique le résultat obtenu.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les intégrales de Dunford, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [2], [1], [3], [18], [20], [23]). On donnera aussi quelques résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif et non commutatif (voir [8], [17]).

Soit X un espace de Banach complexe, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de X à valeurs dans X, $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A.

1.1 Les opérateurs linéaires

Soit $(X; \|.\|_X)$ un espace de Banach complexe. Un opérateur linéaire A sur l'espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$ dit domaine de A et à valeurs dans X. On désigne par $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définie sur X. Cet espace muni de la norme

$$\|A\|_{L(X)} = sup\{\|Ax\|_X : x \in X, \|x\|_X = 1\},$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1.1. *On dit qu'un opérateur A, défini de X dans X est borné si*

$$D(A) = X \quad et \quad \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty.$$

Définition 1.1.2. *On dit que l'opérateur A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Définition 1.1.3. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est définie par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \quad \text{est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est définie par

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Proposition 1.1.1. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire.*
1. Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in L(X, X)$,
l'opérateur $A + B : D(A) \subset E \to F$ est fermé.
2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X, alors A est continue de $D(A)$ dans E (Application directe du théorème du graphe fermé).
4. Si A est un opérateur continue de $D(A)$ dans X, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.
5. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.

Définition 1.1.4. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|.\|_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

Proposition 1.1.2. *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.3. *Soient $A \in L(E)$ et $B : D(B) \subset E \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $Im(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in L(E)$.*

Preuve. Il est clair que BA est défini sur X. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

Alors comme $Im(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_n$est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in L(X)$ on a

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } x, \\ B(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

B étant fermé et $Ax \in D(B)$, d'après la définition (1.1.2), on a $B(Ax) = y$. Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)x = y$. BA est donc un opérateur fermé et défini sur X. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient BA borné sur X i.e. $BA \in L(X)$. $\square$

Définition 1.1.5. *[18, p. 19] On dit que l'opérateur A est sectoriel d'angle $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, si*

$$\begin{cases} i) \ \sigma(A) \subset \overline{S_\omega} \\ ii) \ M(A, \omega') := \sup \left\{ \|\lambda R(\lambda, A)\|, \ \lambda \notin \overline{S_{\omega'}} \right\} \ \textit{pour tout } \omega' \in (\omega, \pi) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} S_\omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \ \textit{et} \ |\arg z| < \omega\} & \textit{si} \ \ 0 < \omega \leqslant \pi \\ \quad := (0, \infty) & \textit{si} \qquad \omega = 0 \end{cases}$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) (zI - A)^{-1} dz.$$

Où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$. L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1. *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X toute famille $(G(t))_{t \geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant les axiomes suivants*
(i) Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & G(t)x \end{array}$$

est continue.
(ii) $G(0) = I$
(iii) $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G(t+s) = G(t)G(s)$.
On dit aussi que $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarque 1.3.1. *i) On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.*

ii) On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leqslant 1.$$

Exemple 1.3.1. *1) Soit A un opérateur borné dans X, alors la famille d'opérateurs*

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur X.
2) Soit $X = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t) f)(x) = f(x-t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1. *Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\| \leqslant Me^{\omega t}.$$

Définition 1.3.2. *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in E : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Remarque 1.3.2. *1) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors A est fermé à domaine dense.*
2) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A.
3) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ où A est un opérateur borné dans X.
4) Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$, Alors l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} x \right\| \leqslant M (\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors

i) Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors

$$G(t)x \in D(A).$$

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(A)$. De plus

$$\forall t \geqslant 0, \frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in X$ et tout $t \geqslant 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(A)$

$$A\int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3. *On appelle semi-groupe analytique de type $\alpha \in]0, \pi/2[$ toute application G définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que

(1) *$z \mapsto G(z)$ est analytique sur Σ_α.*

(2) *$\forall x \in X$, $G(0) = I$ et*

$$\lim_{z \in \Sigma_\alpha \ z \to 0} G(z)x = x$$

(3) *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.*

De plus

$$G(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{tz}(zI - A)^{-1}xdz = e^{tA}x.$$

Théorème 1.3.2 (de Kato)**.** *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant*

(1) *A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*

(2) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : Re\lambda \geqslant 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant

(1) *$\exists C > 0$, $\forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$.*

(2) *$\forall t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.*

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.4.1. *Soit $1 \leq p$. On définit les espaces $L^p(0, R; X)$ pour $R > 0$ par :*
$L^p(0, R; X) = \{g : (0, R) \longrightarrow X,$ *mesurable telle que la fonction*
$x \mapsto \|g(x)\|_X^p$ *est Lebesgue intégrable*$\}$
On munit cet espace de la norme :

$$\|g\|_{L^p(0,R;X)} = \left(\int_0^R \|g(x)\|_X^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$ on pose :
$L^\infty(0, R; X) = \left\{ g : [0, R] \longrightarrow E, \text{ mesurable telle que } \sup_{x\in(0,R)} ess \|g(x)\|_X < +\infty \right\},$
muni de la norme : $\|g\|_{L^\infty(0,R,X)} = \sup_{x\in(0,R)} ess \|g(x)\|.$

Théorème 1.4.1. *L'espace $L^p(0, R; X)$, $p \in [1, +\infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

On rappelle le résultat classique :

Proposition 1.4.1. *Soient J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, X un espace de Banach, $f : J \times [a, b] \to X$ une application continue admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a, b]$. Soient α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a, b]$. Alors, l'application*

$$\begin{array}{ccc} h & : & J \longrightarrow E \\ x & \longrightarrow & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$

$$h'(x) = \beta'(x)f(x, \beta(x)) - \alpha'(x)f(x, \alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

1.4.2 Les espaces d'interpolation

On désigne par E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est à dire $E_0 \hookrightarrow E$, $E_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$E_0 \cap E_1 \ \text{ et } \ E_0 + E_1$$

Munis des normes

$$\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1},$$

Et

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x=x_0+x_1, \quad x_i \in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right).$$

Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.2. *Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre E_0 et E_1 tout espace de Banach E tel que*

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Les espaces E_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.3. *Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre E_0, E_1 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i) \ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in E_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) \ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1) \end{cases}$$

Où

$$L^p_*(E) = \left\{ f :]0, \infty[\to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p_E \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout $\omega, \theta, t \in]0, 1[$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\omega,q}.$$

2) Si $p \leqslant q$ alors

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q}.$$

3) Si $E_0 = E_1$ alors

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1.$$

4) Si $0 < \theta < 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p} \tag{1.1}$$

Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$((E_0, E_1)_{\theta,p}, (E_0, E_1)_{\omega,q})_{t,r} = (E_0, E_1)_{\alpha,r},$$

Avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Cas Particulier $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans E. Posons

$$E_0 = D(A) \text{ et } E_1 = E,$$

Alors

$$E_0 \cap E_1 = D(A) \text{ et } E_0 + E_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

Alors

$$\begin{aligned} (D(A), E)_{\theta,p} &= D_A(1-\theta, p) \\ &= \left\{ x \in E : \left\| t^{1-\theta} A (A-t)^{-1} x \right\|_E \in L_*^p \right\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.4. *Pour tout $\theta \in]0,1[$, $p \in [1, +\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_A(\theta + k, p) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta, p) \right\},$$

Avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\| A^k x \right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Théorème 1.4.2 (de Lions)**.** *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0,1[$*

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \left\| t^{\theta-1} (G(t) - I)\, x \right\|_E \in L_*^p \right\}$$

Muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \left\|t^{\theta-1}(G(t)-I)\,x\right\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Avec les modifications usuelles si $p=\infty$.

Théorème 1.4.3 (Propriété de réitération)**.** *Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)\subset E$. Alors pour tout $\theta\in\,]0,1[$, $p\in[1,+\infty]$ et $n\in\mathbb{N}^*$*

$$(E, D(A^n))_{\theta,p} = (E, D(A))_{n\theta,p} \tag{1.2}$$

Théorème 1.4.4. *Soit $A: D(A)\subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé où*

$$(0;+\infty)\subset\rho(A) et \;\; \exists C>0 : \lambda>0, \;\; \left\|\lambda\,(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leq C$$

Si $u\in L^p(a,b;D\left(A^k\right))\cap W^{m,p}(a,b;X)$ avec $m,k\in\mathbb{N}^*$ et $1<p<+\infty$: Alors pour tout $j\in\mathbb{N}$ avec $0<\frac{1}{p}+j<m$ et $t\in\{a,b\}$, on a

$$u^{(j)}(t)\in\left(D\left(A^k\right),X\right)_{\frac{1}{mp}+\frac{j}{m},p}.$$

1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m\in\mathbb{N}$ et $1\leqslant p\leqslant\infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega,E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f:\Omega\to E$ telles que $\partial^\alpha f\in L^p(\Omega,E)$ pour tout $|\alpha|\leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)}\right)^{1/p} & \text{si } 1\leqslant p<\infty \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p=\infty. \end{cases}$$

Pour $s\in\,]0,1[$ et $1\leqslant p<\infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega,E) = \left\{ f\in L^p(\Omega,E) : \int_\Omega\int_\Omega \frac{\|f(x)-f(y)\|_E^p}{|x-y|^{sp+n}}dxdy<\infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B_{p,q}^{m}(\Omega, E)$. Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, on définit

$$B_{p,q}^{s}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^{p}(\Omega, E) : \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_{E}^{p}}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

Avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.
Dans le cas où $p = q$ on a

$$B_{p,p}^{s}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach X, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale difference property), pour plus détails voir [1].

Définition 1.4.5. *On dit que X est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^{p}(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^{+}} \int_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, X)$$

Est bornée.

Définition 1.4.6. *X est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : X \times X \to \mathbb{R}$ convexe telle que*

i) $\xi(0,0) > 0$
ii) $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.4.5. *Soit X un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) X est UMD.
ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \forall x, y \in X$.

Exemple 1.4.1.

- *Les espaces de Hilbert (On choisit $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle .,. \rangle$ indique le produit scalaire).*
- *Les sous espaces fermés d'un espace UMD.*
- *Les espaces construits sur $L^{p}(\Omega, X)$, $1 < p < \infty$ tel que X est UMD*
- *Les espaces $C^{\alpha}(\Omega; X)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ ne sont pas UMD.*

1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $\mathbf{A} : E \to E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur $\mathbf{A}$ est définie par

$$\mathbf{A}^z x = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Si $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (pour $0 < Re(z) < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$\mathbf{A}^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} x dt,$$

Pour tout $x \in D(\mathbf{A})$ (voir Haase [18], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < Re(z) < 0$, on écrit, pour $x \in D(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{A}^z x = \mathbf{A}^{z+1} \mathbf{A}^{-1} x = \frac{\sin(z+1)\pi}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de $\mathbf{A}^z$ (voir Dore et Venni [8])

Théorème 1.5.1. *Soit $\mathbf{A}$ un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*

1) Soit $z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} : m > n + Re(z) > 0$ alors

$$\forall x \in E \quad \mathbf{A}^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int\limits_0^{+\infty} t^{z+n-1} (\mathbf{A}(tI - \mathbf{A}))^{-1} \mathbf{A}^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \to \mathbf{A}^z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C} : Re(z) < m$ alors $D(\mathbf{A}^m)$ est dense dans $D(\mathbf{A}^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : Re(w) < 0 < Re(z)$ alors

$$\mathbf{A}^w \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^{w+z} \subseteq \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

De plus, si $Re(w+z) \neq 0$ alors

$$\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $x \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ alors $z \to \mathbf{A}^z x$ est holomorphe pour $Re(z) < \alpha$.

6) *Supposons que* $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *donc*

(a) *Si* $Re(w) < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^{w}\mathbf{A}^{z} = \mathbf{A}^{z}\mathbf{A}^{w}$.

(b) *Si* $Re(w) < 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^{w} = \mathbf{A}^{w+is} = \mathbf{A}^{w}\mathbf{A}^{is}$.

(c) *Si* $Re(w) \geqslant 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^{w} \subseteq \mathbf{A}^{w+is} \subseteq \mathbf{A}^{w}\mathbf{A}^{is}$ *et la seconde inclusion est en fait une égalité si* $Re(w) > 0$.

7) *Si* $0 < Re(z) < 1$ *alors*

$$\left\|\mathbf{A}^{-z}\right\| \leqslant M\left(\cosh\left(\pi Im(z)\right) + \frac{\sinh\left(\pi Im(z)\right)}{\sin\left(\pi Im(z)\right)}\right).$$

8) *Soit* $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $s \in \mathbb{R}$, *pour* $\varphi \in \left]0, \pi/2\right[$ *fixé, on pose*

$$\Sigma_{\varphi} = \left\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\right\},$$

alors $\mathbf{A}^{z+is} \to \mathbf{A}^{is}$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(E)$*).*

9) *Soit* $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \left\|\mathbf{A}^{z}\right\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $\mathbf{A}^{w} \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathbf{A}^{z} \to \mathbf{A}^{w}$ *où* $z \to w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(E)$*).*

10) *Si* $T \in \mathcal{L}(E)$ *alors*

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} T = T(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1},$$

pour $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, *et*

$$\begin{aligned} (a)\ T\mathbf{A}^{z} &= \mathbf{A}^{z}T \text{ pour } Re(z) < 0. \\ (b)\ T\mathbf{A}^{z} &\subseteq \mathbf{A}^{z}T \text{ pour } Re(z) \geqslant 0. \end{aligned}$$

11) *Si* $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$ *et* $(\mathbf{B} - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*

(a) $\mathbf{A}^{z}\mathbf{B}^{w} = \mathbf{B}^{w}\mathbf{A}^{z}$ *pour* $\max\{Re(w), Re(z)\} < 0$.

(b) *si* $\mathbf{A}^{is}$ *et* $\mathbf{B}^{it} \in \mathcal{L}(E)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $\mathbf{A}^{z}\mathbf{B}^{w} = \mathbf{B}^{w}\mathbf{A}^{z}$ *pour* $\max\{Re(w), Re(z)\} \leqslant 0$.

Définition 1.5.1. *On note Bip(*$\theta; E$*) (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur* E *qui admettent des puissances imaginaires bornées.*

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires

Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation

$$Au + Bu - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.3}$$

$(DV.0)$ X est un espace de Banach de type UMD,

$$(DV.1)\begin{cases} i)\rho(\mathbf{A}) \supset \left]-\infty,0\right] \ \ et\ \exists M_{\mathbf{A}} > 0 : \left\|(\mathbf{A}+tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{A}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \\ ii)\rho(\mathbf{B}) \supset \left]-\infty,0\right] \ \ et\ \exists M_{\mathbf{B}} > 0 : \left\|(\mathbf{B}+tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{B}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(DV.2)\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \quad \mu \in \rho(\mathbf{B}), \\ (\lambda I - \mathbf{A})^{-1}(\mu I - \mathbf{B})^{-1} = (\mu I - \mathbf{B})^{-1}(\lambda I - \mathbf{A})^{-1}. \end{cases}$$

$$(DV.3)\begin{cases} i)\forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(x) \ \ et \\ \exists K_{\mathbf{A}} \geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{A}} > 0,\ \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{A}^{is}\| \leqslant K_{\mathbf{A}} e^{\theta_{\mathbf{A}}|s|}, \\ ii)\forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{B}^{is} \in \mathcal{L}(x) \ \ et \\ \exists K_{\mathbf{B}} \geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{B}} > 0,\ \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{B}^{is}\| < K_{\mathbf{B}} e^{\theta_{\mathbf{B}}|s|}, \\ iii)\ \theta_{\mathbf{A}} + \theta_{\mathbf{B}} < \pi. \end{cases}$$

Alors, la somme $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} \frac{\mathbf{A}^{-z}\mathbf{B}^{z-1}}{\sin \pi z} dz,$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < Re(z) < 1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [24], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Comme application de cette théorie, on cite l'exemple de Dore et Venni [8] pages 196-197. Ils ont étudiés, dans le cadre $L^p(0,T,E)$ avec $1 < p < \infty$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + \mathbf{A}u(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

lorsque

$$E \text{ est un espace } UMD, \tag{1.5}$$

A est un opérateur linéaire fermé vérifie

$$\rho(\mathbf{A}) \supset]-\infty, 0] \;\; et \; \exists M > 0 : \left\|(\mathbf{A} + t)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \tag{1.6}$$

et

$$\exists K \geqslant 1, \;\; \theta > 0, \;\; \forall s \in \mathbb{R} : \left\|\mathbf{A}^{is}\right\| \leqslant K e^{\theta|s|}. \tag{1.7}$$

Le résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 1.6.1. *Sous les hypothèses (1.5), (1.6), (1.7) et pour*

$$f \in L^p(0, T, E), \quad 1 < p < \infty,$$

le problème (1.4) admet une unique solution stricte

$$t \longmapsto u(t) = \int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s) ds \in L^p(0, T, E),$$

de plus

$$t \mapsto \mathbf{A}u(t) = \mathbf{A} \int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s) ds \in L^p(0, T, E).$$

Chapitre 2

Etude des équations différentielles elliptiques abstraites complètes dans le cas non commutatif

On étudie l'équation différentielle opérationnelle du second ordre

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{3}$$

posée dans un espace de Banach complexe X de type UMD, avec les conditions aux limites abstraites du type Robin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Telles que L_ω, M_ω et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X, ω un paramètre spectral $\omega \geq \omega_0 \geq 0$, $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$ et d_0, u_0 deux données dans X.
On cherche l'existence de la solution classique de (3)-(4), c'est-à-dire une fonction u satisfaisant (3) et (4) telles que

$$\begin{cases} u \in W^{2;p}(0,1;X), \\ x \longmapsto (L_\omega M_\omega)u(x), \quad x \longmapsto (M_\omega L_\omega)u(x) \in \ L^p(0,1;X) \\ x \longmapsto (L_\omega - M_\omega)u'(x) \in \ L^p(0,1;X), \\ u(0) \in D(H). \end{cases} \tag{5}$$

2.1 Hypothèses et conséquences

On suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD. \tag{2.1}$$

Les hypothèses sur les opérateurs H L_ω et M_ω sont les suivantes

$$\begin{cases} \exists \ \ C_0 > 0 \ , \ \exists \ \ \omega_0 > 0 : \forall \omega \geq \omega_0, \\ ]0, +\infty[\ \subset \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega), \\ ker(L_\omega) = ker(M_\omega) = \{0\} \quad \overline{R(L_\omega)} = \overline{R(M_\omega)} = X \\ \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda \left(L_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 \ \text{ et } \ \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda \left(M_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

et

$$\begin{cases} \exists \ \ \theta_1, \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \exists C \geq 1 : \forall \omega \geq \omega_0, \forall s \in \mathbb{R}, \\ (-L_\omega)^{is}, \ (-M_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X), \\ \|(-L_\omega)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 e^{\theta_1 |s|} \ \text{ et } \ \|(-M_\omega)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_0 e^{\theta_2 |s|}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les hypothèses (2.2) et (2.3) impliquent que, pour tout $\omega \geq \omega_0$ les opérateurs $-L_\omega$ et $-M_\omega$ appartiennent à la classe $BIP(X, \theta)$ [voir [24], Definition 1, p. 431], Puisque $\theta_1, \ \theta_2 \in]0; \frac{\pi}{2}[$; L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques $(e^{\xi L_\omega})_{\xi \geq 0}$, $(e^{\xi M_\omega})_{\xi \geq 0}$ bornés dans X.
Pour tout $\omega \geq \omega_0$, on suppose aussi que

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{2.4}$$

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2), \tag{2.5}$$

$$0 \in \rho(L_\omega + M_\omega). \tag{2.6}$$

On définit l'opérateur Λ_ω par

$$\Lambda_\omega := (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (H + L_\omega), \tag{2.7}$$

avec

$$D\left(\Lambda_\omega\right) = D\left(H\right) \cap D\left(M_\omega\right),$$

on suppose que

$$\omega \geq \omega_0, \ 0 \in \rho(\Lambda_\omega), \tag{2.8}$$

en plus ;

$$\forall \ \ \xi \in D(L_\omega), \forall \ \ \omega \geq \omega_0, \Lambda_\omega^{-1} \ \xi \ \ \in D((L_\omega + M_\omega)^2). \tag{2.9}$$

Soit la notation

$$C_{L_\omega, M_\omega} = (M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-2} = [M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2}, \tag{2.10}$$

alors

$$C_{L_\omega, M_\omega} \in \mathcal{L}(X)$$

Nous supposons dans tout ce travail que le commutateur vérifie l'estimation suivante

$$\forall \omega \geq \omega_0, \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \mathcal{X}(\omega), \tag{2.11}$$

où

$$\mathcal{X} \ : [\omega_0, +\infty[\longrightarrow \ \mathbb{R}^+ \ \text{ telle que } \ \lim_{\omega \to +\infty} \ \mathcal{X}(\omega) = 0. \tag{2.12}$$

Dans de nombreux cas concrets, la fonction $\mathcal{X}$ a la forme suivante
$\mathcal{X}(\omega) = \frac{C^\alpha}{\omega}$ pour ω assez grand, avec $C, \alpha > 0$.
Le commutateur défini dans (2.10) a été utilisé pour la première fois par Favini et al. dans [15]
.

Remarque 2.1.1. *De l'hypothèse(2.6), on déduit que* $(L_\omega + M_\omega)^2$ *est fermé.*

Remarque 2.1.2. *Nous n'avons pas supposé que* L_ω *et* M_ω *sont inversibles comme dans Cheggag et al. [5],[4].*

Remarque 2.1.3. *Par le théorème de réitération (voir chapitre 1), on a*

$$\begin{aligned}(X; D(L_\omega + M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\ p} &= (X; D(L_\omega + M_\omega))_{2-\frac{1}{p},\ p} = (X; D(L_\omega))_{1+1-\frac{1}{p},\ p} \\ &= \left\{\phi \in D(L_\omega) \ : \ L_\omega\phi \in (X; D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},\ p}\right\},\end{aligned} \tag{2.13}$$

et

$$u(0), u(1) \ \ \in D(L_\omega) = D(M_\omega). \tag{2.14}$$

Remarque 2.1.4. *Concernant* (2.4) *et* (2.5)*, on note que si* P *et* Q *sont deux opérateurs linéaires fermés sur* X*, alors l'hypothèse* $D(P) = D(Q)$ *n'implique pas* $D(P^2) = D(Q^2)$ *; généralement, on a*

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \neq D((L_\omega - M_\omega)^2).$$

En effet, on touche cette différence entre les domaines dans notre exemple donné dans le chapitre 3, voir aussi [21] page 105.

2.2 Lemmes techniques

Dans les lemmes suivants, nous remplaçons $L_\omega, M_\omega, \Lambda_\omega$ par L, M, Λ ; car les propriétés trouvées sont indépendantes de ω.

Lemme 2.2.1. *On suppose* (2.2) $\sim$ (2.3)*. Alors*

1) $D(LM) = D(M^2)$ *et* $D(ML) = D(L^2)$.

2) $D((L + M)^2) = D(L^2) \cap D(M^2) = D(LM) \cap D(ML)$.

3) $D((L - M)^2 - (L + M)^2) = D(LM) \cap D(ML) = D((L + M)^2)$.

Preuve. 1) Soit $\phi \in D(LM)$, alors $\phi \in D(M)$ et $M\phi \in D(L) = D(M)$ d'où $\phi \in D(M^2)$.

Inversement, si $\phi \in D(M^2)$ alors $\phi \in D(M)$ et

$$M\phi \in D(L) = D(M),$$

d'où $\phi \in D(LM)$. On obtient aussi l'égalité $D(LM) = D(M^2)$. En échangeant les rôles de L et M, on obtient $D(ML) = D(L^2)$.

2) Soit $\phi \in D((L+M)^2)$, alors il existe $\zeta \in X$ tel que

$$\phi = (L+M)^2\zeta,$$

de plus $\phi \in D(L+M) = D(M) \cap D(L) = D(M)$ et

$$\begin{aligned} M\phi &= M(L+M)^{-2}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(2M(L+M)^{-1})(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(I-(L+M-2M)(L+M)^{-1})(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(I-(L-M)(L+M)^{-1})(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1}\zeta - \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\zeta, \end{aligned}$$

mais $y = \frac{1}{2}(L+M)^{-1}\zeta \in D(M)$ et de(2.4) et (2.5), on a

$$z = \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\zeta \in D(L-M) = D(M),$$

d'où $M\phi = y - z \in D(M)$ donc $\phi \in D(M^2)$. En échangeant les rôles de L et M, on obtient $\phi \in D(L^2)$ et ainsi

$$\phi \in D(M^2) \cap D(L^2).$$

Inversement, soit $\phi \in D(M^2) \cap D(L^2)$. Alors

$$L\phi \in D(L) = D(L+M)\ textet M\phi \in D(M) = D(L+M).$$

donc $L\phi + M\phi \in D(L+M)$, ainsi $\phi \in D((L+M)^2)$.

3) L'assertion 2 et l'hypothèse (2.5) permettent de déduire

$$D((L-M)^2 - (L+M)^2) = D((L+M)^2) = D(LM) \cap D(ML).$$

$\square$

Remarque 2.2.1. *Supposons* (2.1) $\sim$ (2.11) *.Du Lemme ci-dessous, on a*

$$D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega + M_\omega)^2.$$

Supposons que le problème (3)(4) *admet une solution classique* u*. c-à-d*

$$u \in W^{2;p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(L_\omega + M_\omega)^2),$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} u \in L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega)) \\ u \in L^p(0,1;D(M_\omega L_\omega)) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow u \in L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)),$$

ce qui implique

$$u(0)\ ;\ u(1) \in (D(L_\omega + M_\omega)^2;X)_{\frac{1}{2p},\ p} = (X;D(L_\omega + M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\ p}. \tag{2.15}$$

Preuve. 1) ? $\Rightarrow$

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega)) \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \|u(x)\|^p_{D(L_\omega M_\omega)}\,dx < \infty \\ \text{et} \\ u \in L^p(0,1;D(M_\omega L_\omega)) \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \|u(x)\|^p_{D(M_\omega L_\omega)}\,dx < \infty. \end{array}\right.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(M_\omega L_\omega \cap L_\omega M_\omega)}\,dx &= \int_0^1 \left[\|u(x)\|_{D(M_\omega L_\omega)} + \|u(x)\|_{D(L_\omega M_\omega)}\right]^p dx \\ &\leq \left[\left(\int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(M_\omega L_\omega)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(L_\omega M_\omega)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p < \infty, \end{aligned}$$

donc

$$u \in L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)) = L^p(0,1;D(L_\omega + M_\omega)^2).$$

2) ? $\Leftarrow$

Soit

$$\int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(M_\omega L_\omega \cap L_\omega M_\omega)}\,dx < \infty.$$

On a

$$\begin{cases} \int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(M_\omega L_\omega)}\,dx \leq \int_0^1 \left[\|u(x)\|_{D(M_\omega L_\omega)} + \|u(x)\|_{D(L_\omega M_\omega)}\right]^p dx < \infty \\ \int_0^1 \|u(x)\|^p_{D(L_\omega M_\omega)}\,dx \leq \int_0^1 \left[\|u(x)\|_{D(M_\omega L_\omega)} + \|u(x)\|_{D(L_\omega M_\omega)}\right]^p dx < \infty, \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} u \in L^p(0,1; D(L_\omega M_\omega)) \\ \text{et} \\ u \in L^p(0,1; D(M_\omega L_\omega)). \end{cases}$$

□

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses* (2.1) $\sim$ (2.10)*. Alors pour tout opérateur* $S, \widetilde{S} \in \{L, M, L+M, L-M\}$*, on a*

1) $S(L-I)^{-1}, S(L+M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$,

2) $S(L-M)(L+M)^2, S\ \widetilde{S}(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$,

3) $(L+H)\Lambda^{-1}, (M+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Preuve. Pour les assertions 1 et 2, on utilise la proposition 1.1.3

3) Grâce à l'assertion 2, on obtient

$$\begin{cases} (L+M)(L-M)(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X), \\ (L-M)^{+2}(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X). \end{cases}$$

Puisque $(L+H)$ est un opérateur fermé sur X et $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$\Lambda^{-1}(X) \subset D(L+H),$$

alors $(L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

□

Lemme 2.2.3. *Soit* (2.1) $\sim$ (2.8)*. On a les assertions suivantes :*

1) $(L \pm M)^2 = L^2 \pm LM \pm ML + M^2$ *et pour* $\phi \in D((L \pm M)^2)$,
on a $(L \pm M)^2\phi = L^2 \pm LM\phi \pm ML\phi + M^2\phi$.

2) $LM + ML = \frac{1}{2}\left((L+M)^2 - (L-M)^2\right)$.

3) $[(L-M); (L+M)^{-1}] = -2\,[M; (L+M)^{-1}] = 2\,[L; (L+M)^{-1}]$.

4) $C_{L;M} = \frac{1}{2}(L+M)\,[(L-M); (L+M)^{-1}]\,(L+M)^{-1}$.

5) $(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I$.

6) $\begin{cases} (L+M)^{-1}M - (L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) = M(L+M)^{-1}, \\ (L+M)^{-1}L - (L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) = L(L+M)^{-1}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} M(L+M)^{-1}M + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}, \\ L(L+M)^{-1}L + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) = \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}. \end{cases}$

8) $$\begin{array}{lcc} M + (L-M)M(L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} = 0 & \textit{dans} & D(M), \\ L + (L-M)L(L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} = 0 & \textit{dans} & D(L). \end{array}$$

Preuve. 1) En vertu de l'assertion 2 du Lemme 2.2.2, on a pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et pour $\phi \in D((L+M)^2) \subset D((L-M)^2)$

$$\begin{aligned} (L+\varepsilon M)^2\phi &= (L+\varepsilon M)(L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L(L\phi + \varepsilon M\phi) + \varepsilon M(L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L^2\phi + \varepsilon LM\phi + \varepsilon ML\phi + M^2\phi. \end{aligned}$$

2) C'est une conséquence de l'assertion précédente.

3) Soit $\phi \in D(M) = D(L)$, on a

$$\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right]\phi = \left[L;(L+M)^{-1}\right]\phi - \left[M;(L+M)^{-1}\right],$$

de même, on a

$$\left[L;(L+M)^{-1}\right]\phi + \left[M;(L+M)^{-1}\right]\phi = \left[(L+M);(L+M)^{-1}\right]\phi = 0.$$

c-à-d
$$\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] = -2\left[M;(L+M)^{-1}\right] = 2\left[L;(L+M)^{-1}\right]$$

4) On a

$$\begin{aligned} C_{L;M} &= [M;L](L+M)^{-2} \\ &= (ML-LM)(L+M)^{-2}, \end{aligned}$$

et puisque on a pour $\phi \in D((L+M)^2)$

$$\begin{cases} (L+M)(L-M)\phi = L^2\phi - LM\phi + ML\phi - M^2\phi, \\ (L-M)(L+M)\phi = L^2\phi + LM\phi - ML\phi + M^2\phi, \end{cases}$$

et ainsi
$$((L+M)(L-M) - (L-M)(L+M))\phi = 2(ML-LM)\phi,$$

d'où

$$\begin{aligned}
C_{L;M} &= \frac{1}{2}((L+M)(L-M)-(L-M)(L+M))(L+M)^{-2} \\
&= \frac{1}{2}(L+M)((L-M)(L+M)^{-1}-(L+M)^{-1}(L-M))(L+M)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

5) Puisque $\Lambda = (M-H)+e^Le^M(H+L)$, alors

$$\begin{aligned}
& (L+M)\Lambda^{-1}+e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}-I \\
=\; & [(L+M)+e^Le^M(L+H)-(M-H)-e^Le^M(L+H)]\Lambda^{-1} \\
=\; & (L+H)\Lambda^{-1}.
\end{aligned}$$

6) D'après l'assertion 4, on a

$$\begin{aligned}
& (L+M)^{-1}M-(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) \\
=\; & (L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}(L+M) \\
=\; & (L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] \\
=\; & (L+M)^{-1}M+\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\
=\; & M(L+M)^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (L+M)^{-1}L-(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) \\
=\; & (L+M)^{-1}L-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}(L+M) \\
=\; & (L+M)^{-1}L-\frac{1}{2}\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] \\
=\; & (L+M)^{-1}L+\left[L;(L+M)^{-1}\right] \\
=\; & L(L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

7) D'après l'assertion 3 et 4, on a

$$\begin{aligned}
& M(L+M)^{-1}M+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) \\
=\; & M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\
=\; & M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M(L+M)^{-1}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L+M-2M)(L+M)^{-1}M \\
&= M(L+M)^{-1}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}M \ - M(L+M)^{-1}M \\
&= \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1},
\end{aligned}$$

de même, on obtient

$$L(L+M)^{-1}L + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L;M}(L+M) = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}.$$

8) Sur le domaine $D(L) = D(M)$, on a d'après l'assertion 2

$$\begin{aligned}
& M + (L-M)M(L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} \\
= \ & M + (L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} \\
= \ & M + (L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L-M)^2(L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L+M),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& M + (L-M)M(L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} \\
= \ & (L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L-M)^2(L+M)^{-1} + M - \frac{1}{2}(L+M) \\
= \ & (L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L-M)^2(L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L+M-2M) \\
= \ & \frac{1}{2}(L-M)\left[2M + (L-M)\right](L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L-M) \\
= \ & \frac{1}{2}(L-M)(M+L)(L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L-M) \\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

de même, on obtient

$$L - (L-M)L(L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} = 0.$$

$\square$

Lemme 2.2.4. *Sous les hypothèses* (2.1) $\sim$ (2.3)*. Pour* $f \in L^p(0,1;X)$*, avec* $1 < p < \infty$ *et* $Q \in \{L, M\}$*, on a*

1) $x \longmapsto Q \int\limits_0^x e^{(x-s)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

2) $x \longmapsto Q \int\limits_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

3) $x \longmapsto Q \int\limits_0^1 e^{(s+x)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

4) $\int\limits_0^1 e^{sQ} f(s)ds, \int\limits_0^1 e^{(1-s)Q} f(s)ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

Preuve. Pour les assertions 1, 2 et 3, voir [[8], [14], p. 167, 168] ainsi que [[13]]. L'énoncé 4 est une conséquence directe des assertions 1 et 2, et on utilise le fait que

$$x \longmapsto \int\limits_0^x e^{(x-s)Q} f(s)ds,\ x \longmapsto \int\limits_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)ds \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(Q)).$$

□

Lemme 2.2.5. *Sous les hypothèses* (2.1) $\sim$ (2.9) *et pour* $\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$ *avec* $Q \in \{L, M\}$, *on a*

1) $(L + M)\ \Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

2) $(L + H)\ \Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

Preuve. 1) On pose $T = (L + M)\Lambda^{-1}$, alors T est un opérateur linéaire continu de X dans$X$. En utilisant l'hypothèse (2.9), on obtient

$$T(D(L)) \subset D(L)\text{et } T \in \mathcal{L}(D(L), D(L)).$$

ici $D(L)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe.
Alors, en utilisant les propriétés de l'interpolation, on trouve

$$T \in \mathcal{L}((X, D(L))_{\frac{1}{p},p}, (X, D(L))_{\frac{1}{p},p}).$$

voir [20], p. 19.

2) D'après l'assertion 5 du Lemme (2.2.3), on a

$$(L + H)\Lambda^{-1} = (L + M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L + H)\Lambda^{-1} - I,$$

donc, d'après l'assertion 1, on déduit

$$(L + H)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q); X)_{\frac{1}{p},p},$$

pour $\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

□

2.3 Représentation de la solution

En utilisant un raisonnement heuristique basé sur la représentation de la solution du problème (3)- (4) dans le cas commutatif, nous essayerons d'obtenir une équation intégral vérifiée par l'éventuelle solution classique

$$u := (L + M)^{-2} v.$$

Cette équation intégrale est écrite sous la forme

$$v + R(v) = F(f) + \Gamma,$$

où R, F et Γ dépendent de L, M, R et $C_{L;M}$; aussi Γ dépend des données u_1, d_0 .
Dans le cadre commutatif, la solution formelle u du problème (3) $-$ (4) est donnée, p. p $x \in (0, 1)$, sous la forme suivante

$$u(x) = e^{xM} \xi_0 + e^{(1-x)L} \xi_1 + I_x + J_x,$$

pour $p.p$ $x \in (0, 1)$, où

$$I_x = (L + M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)M} f(s) ds, \quad J_x = (L + M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s) ds.$$

Pour trouver la représentation de u, il suffit de déterminer les constantes ξ_0 et ξ_1, en tenant compte des conditions aux limites (4)

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \ u(1) = u_1.$$

Pour ξ_0, $\xi_1 \in D(L) = D(M)$ et pour $u(0), u(1) \in D(L) = D(M)$. (Voir [[5], p. 62]), alors

$$u(0) = \xi_0 + e^L \xi_1 + J_0,$$

$$u(1) = e^M \xi_0 + \xi_1 + I_1.$$

Où

$$J_0 = (L + M)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s) ds \ \text{ et } \ I_1 = (L + M)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s) ds.$$

On a, pour $p.p$ $x \in (0, 1)$

$$u'(x) = Me^{xM} \xi_0 - Le^{(1-x)L} \xi_1 + MI_x - LJ_x.$$

Donc $u'(0) = M\xi_0 - Le^L \xi_1 - LJ_0$.
Par suite, on trouve

$$\begin{cases} M\xi_0 - Le^L \xi_1 - LJ_0 - H \left[\xi_0 + e^L \xi_1 + J_0 \right] = d_0, \\ e^M \xi_0 + \xi_1 + I_1 = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (M-H)\,\xi_0 - (L+H)\,e^L\xi_1 = (L+H)\,J_0 + d_0, \\ e^M\xi_0 + \xi_1 = -I_1 + u_1 \end{cases} \tag{2.16}$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} M-H & -(L+H)\,e^L \\ & \\ e^M & I_{id} \end{vmatrix} = (M-H) + e^{M+L}\,(L+H) = \Lambda.$$

Comme Λ est inversible et son inverse est borné alors

$$\Lambda^{-1}(X) = D(H) \cap D(L) = D(H) \cap D(M),$$

donc, le système (2.16) admet une unique solution (ξ_0, ξ_1). Pour le déterminer, en effet

$$\begin{cases} \Lambda^{-1}u(0) = \Lambda^{-1}\xi_0 + \Lambda^{-1}e^L\xi_1 + \Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}u'(0) = \Lambda^{-1}M\xi_0 - \Lambda^{-1}Le^L\xi_1 - \Lambda^{-1}LJ_0. \end{cases}$$

Donc $\Lambda^{-1}u(0) \in D(H)$ et

$$\begin{cases} H\Lambda^{-1}u(0) = H\Lambda^{-1}\xi_0 + H\Lambda^{-1}e^L\xi_1 + H\Lambda^{-1}J_0 \\ \Lambda^{-1}u'(0) = \Lambda^{-1}M\xi_0 - \Lambda^{-1}Le^L\xi_1 - \Lambda^{-1}LJ_0. \end{cases}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}d_0 &= \Lambda^{-1}[u'(0) - Hu(0)] \\ &= \Lambda^{-1}u'(0) - H\Lambda^{-1}u(0) \\ &= (M-H)\Lambda^{-1}\xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L\xi_1 - (L+H)\Lambda^{-1}J_0, \end{aligned}$$

Pour les permutations on a utilisé $H\Lambda^{-1}u(0) = \Lambda^{-1}Hu(0)$. (voir [5]) le Lemme 1, point 5 et (21)) et $M\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}M$ sur $D(M)$, et $L\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}L$ sur $D(L)$.(voir [5]) le Lemme 1, point 4)
Ensuite, à partir de $u_1 = e^M\xi_0 + \xi_1 + I_1$, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}d_0 &= [(M-H) + e^{L+M}(L+H)]\Lambda^{-1}\xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L(u_1 - I_1) - (L+H)\Lambda^{-1}J_0 \\ &= \xi_0 - (L+H)\Lambda^{-1}e^L(u_1 - I_1) - (L+H)\Lambda^{-1}J_0, \end{aligned}$$

donc

$$\xi_0 = \Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}[e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0],$$

et

$$\xi_1 = -e^M(L+H)\Lambda^{-1}(e^Lu_1 - e^LI_1 + J_0) - e^M\Lambda^{-1}d_0 + u_1 - I_1.$$

Enfin, en remplaçant ξ_0 et ξ_1 , on peut réécrire u sous la forme suivante

$$\begin{aligned}u(x) =& e^{xM}\xi_0 + e^{(1-x)L}\xi_1 + I_x + J_x \\ &= e^{xM}\left[\Lambda^{-1}d_0 + (L+H)\Lambda^{-1}\left(e^L u_1 - e^L I_1 + J_0\right)\right] \\ &+ e^{(1-x)L}\left[-e^M(L+H)\Lambda^{-1}(e^L u_1 - e^L I_1 + J_0) - e^M\Lambda^{-1}d_0 + u_1 - I_1\right] \\ &+ (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds,\end{aligned}$$

en remplaçant I_1 et J_0, on obtient

$$\begin{aligned}u(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)L}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)M}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & +e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 - e^{(1-x)L}e^M\Lambda^{-1}d_0 + e^{xM}e^L(L+H)\Lambda^{-1}u_1 \\ & +e^{(1-x)L}u_1 - e^{(1-x)L}e^M e^L(L+H)\Lambda^{-1}u_1,\end{aligned}$$

on pose

$$u(x) := \Phi(x) + \Psi(x) + D(x),$$

telles que

$$\Phi(x) = (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds,$$

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}D(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 - e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 + e^{xM}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1 \\ &\quad +e^{(1-x)L}u_1 - e^{(1-x)L}e^{M}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1,\end{aligned}$$

où

$$\Lambda = (M-H)+e^{L}e^{M}(L+H),$$

avec

$$D(\Lambda) = D(M)\cap D(H) = D(L)\cap D(H).$$

(Voir Cheggag et al. dans [[5], p. 63]).

Dans le cas non commutatif, en faisant un raisonnement heuristique et cela en supposant qu'il existe une solution classique u du problème (3)- (4) satisfaisant la propriété de régularité maximale pour trouver une équation intégrale de la forme :

$$v := (L+M)^2 u. \tag{2.17}$$

Le calcul de Φ :

En remplaçant f par $u''(x)+(L-M)u'(x)-\frac{1}{2}(LM+ML)u(x)$, p.p $x\in(0,1)$, Φ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\ &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}\left[u''(s)+(L-M)u'(s)-\frac{1}{2}(LM+ML)u(s)\right]ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}\left[u''(s)+(L-M)u'(s)-\frac{1}{2}(LM+ML)u(s)\right]ds \\
=&\ \sum_{i=1}^{6}\Phi_i(x),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}u''(s)\,ds, \\
\Phi_2(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}u''(s)\,ds, \\
\Phi_3(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}(L-M)u'(s)\,ds, \\
\Phi_4(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}(L-M)u'(s)\,ds, \\
\Phi_5(x) &= -\frac{1}{2}(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}(LM+ML)u(s)\,ds, \\
\Phi_6(x) &= -\frac{1}{2}(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}(LM+ML)u(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

L'idée principale est de réaliser l'intégration par parties en vue de déduire l'équation intégrale satisfaite par Φ. Puisque u satisfait (5), tous les calculs ci-dessus sont justifiés p.p $x\in(0,1)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}u''(s)\,ds \\
&= (L+M)^{-1}\left[e^{(x-s)M}u'(s)\right]_0^x+(L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}u'(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}u'(x)-(L+M)^{-1}e^{xM}u'(0)+(L+M)^{-1}Mu(x) \\
&\quad -(L+M)^{-1}Me^{xM}u(0)+(L+M)^{-1}\int_0^x M^2e^{(x-s)M}u(s)ds,
\end{aligned}
$$

de même, on a

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}u''(s)\,ds\\ &= (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}u'(1)-(L+M)^{-1}u'(x)-(L+M)^{-1}Le^{(1-x)L}u_1\\ &\quad +(L+M)^{-1}Lu(x)+(L+M)^{-1}\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}u(s)ds.\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2\left(\Phi_1(.)+\Phi_2(.)\right)$

Suite à la Remarque 2.1.3, on a

$$u(0)\ ,u(1)\in D(L)=D(M),$$

donc

$$\begin{aligned}(L+M)^{-1}Me^{xM}u_0 &= (L+M)^{-1}e^{xM}Mu_0,\\ (L+M)^{-1}Le^{(1-x)L}u_1 &= (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}Lu_1.\end{aligned}$$

Puisque,

$$v(.):=(L+M)^2u(.)\ \text{ et }\ u'(0)=d_0+Hu(0),$$

on applique $(L+M)^2$ à $(\Phi_1(x)+\Phi_2(x))$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2\left(\Phi_1(x)+\Phi_2(x)\right) &= v(x)-(L+M)e^{xM}\left(H+M\right)u(0)\\ &\quad +(L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Lu_1)-(L+M)e^{xM}d_0\\ &\quad +(L+M)\int_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds\\ &\quad +(L+M)\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds.\end{aligned}\tag{2.18}$$

De la même manière, on calcule $(L+M)^2\left(\Phi_3(.)+\Phi_4(.)\right)$, pour p.p $x\in(0,1)$,on obtient grâce aux intégrations par parties

$$\begin{aligned}\Phi_3(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}(L-M)u'(s)\,ds\\ &= (L+M)^{-1}(L-M)u(x)-(L+M)^{-1}e^{xM}(L-M)u(0)\\ &\quad +(L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}(L-M)u(s)\,ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_4(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}(L-M)u'(s)\,ds \\ &= (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)u(1)-(L+M)^{-1}(L-M)u(x) \\ &\quad -(L+M)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}(L-M)u(s)\,ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi_3(x)+\Phi_4(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L-M)u(0)+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)u(1) \\ &\quad +(L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}(L-M)u(s)\,ds \\ &\quad -(L+M)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}(L-M)u(s)\,ds.\end{aligned}$$

D'après

$$\begin{cases} M(L-M)u(x)=M(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2u(x), \\ L(L-M)u(x)=L(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2u(x). \end{cases}$$

En appliquant $(L+M)$ à $\Phi_3(x)+\Phi_4(x)$, et en remplaçant u par $(L+M)^{-2}v$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)\left(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)\right) &= -e^{xM}(L-M)u(0)+e^{(1-x)L}(L-M)u(1) \\ &\quad +\int_0^x e^{(x-s)M}M(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &\quad -\int_x^1 e^{(s-x)L}L(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau $(L+M)$ à $(L+M)\left(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2\left(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)\right) &= -(L+M)e^{xM}(L-M)u(0) \\ &\quad +(L+M)e^{(1-x)L}(L-M)u(1) \\ &\quad +(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}M(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds \\ &\quad -(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}L(L-M)(L+M)^{-2}v(s)\,ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(L+M)e^{xM}(L-M)u_0 + (L+M)e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \qquad (2.19)\\
&\quad +(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad -(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}M^2(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad +(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad -(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}L^2(L+M)^{-2}v(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Le calcul de $(L+M)^2\left(\Phi_5(.)+\Phi_6(.)\right)$

En appliquant $(L+M)$ à $\Phi_5(x)+\Phi_6(x)$, et en remplaçant u par $(L+M)^{-2}v$, on obtient

$$
\begin{aligned}
(L+M)\left(\Phi_5(x)+\Phi_6(x)\right) &= -\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M}(LM+ML)u(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L}(LM+ML)u(s)\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M}LMu(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M}MLu(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L}LMu(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L}MLu(s)\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L}MLu(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

En appliquant à nouveau $(L+M)$ à $(L+M)\left(\Phi_5(x)+\Phi_6(x)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(L+M)^2\left(\Phi_5(x)+\Phi_6(x)\right) &= -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

En utilisant (2.18), (2.19) et (2.20), on obtient

$$(L+M)^2\Phi(x) =$$

$$\begin{aligned}
& v(x)-(L+M)e^{xM}\left(H+M\right)u(0)+(L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Lu_1)-(L+M)e^{xM}d_0 \\
& +(L+M)\int\limits_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds+(L+M)\int\limits_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L-M)u_0+(L+M)e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\
& +(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds-(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}M^2(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
& +(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds-(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}L^2(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds-\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds-\frac{1}{2}(L+M)\int\limits_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v\left(s\right)ds,
\end{aligned}$$

après les simplifications, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2\Phi(x) &= v(x)-(L+M)e^{xM}\left[(H+L)\,u_0+d_0\right] \\ &+(L+M)e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right) \\ &+\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}\left[ML-LM\right](L+M)^{-2}v\,(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}\left[LM-ML\right](L+M)^{-2}v\,(s)\,ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(L+M)^2\Phi(x) &= v(x)-(L+M)e^{xM}\left[(H+L)\,u_0+d_0\right] \\ &+(L+M)e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right) \\ &+\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v\,(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v\,(s)\,ds,\end{aligned}$$

avec

$$C_{L,M}:=(ML-LM)(L+M)^{-2}=[M;L](L+M)^{-2}.$$

Le calcul de Ψ :
dans ce cas non commutatif, en remplaçant f par $u''\,(x)+(L-M)u'\,(x)-\frac{1}{2}(LM+ML)u\,(x)$, p.p $x\in(0,1)$, Ψ s'écrit

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}\left[u''\,(s)+(L-M)u'\,(s)\right]ds \\ &+\frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u\,(s)\,ds \\ &+(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}\left[u''\,(s)+(L-M)u'\,(s)\right]ds \\ &-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u\,(s)\,ds \\ &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}\left[u''\,(s)+(L-M)u'\,(s)\right]ds\end{aligned}$$

$$-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left[u''(s)+(L-M)u'(s)\right]ds$$

$$+\frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)\,ds$$

$$=\sum_{i=1}^{12}\Psi_i(x),$$

avec

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}u''(s)\,ds,\\
\Psi_2(x) &= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}u''(s)\,ds,\\
\Psi_3(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}u''(s)\,ds,\\
\Psi_4(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}u''(s)\,ds\\
\Psi_5(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)\,ds,\\
\Psi_6(x) &= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}(L-M)u'(s)\,ds,\\
\Psi_7(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}(L-M)u'(s)\,ds,\\
\Psi_8(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)\,ds,\\
\Psi_9(x) &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds,\\
\Psi_{10}(x) &= -\frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}(LM+ML)u(s)ds,\\
\Psi_{11}(x) &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}(LM+ML)u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\Psi_{12}(x) = \frac{1}{2}(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds.$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)\,ds \\
&= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left(u'(1) - e^{M}u'(0) + Mu_1 - Me^{M}u(0)\right) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2(x) &= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}u''(s)\,ds \\
&= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}u'(1) - u'(0) - Le^{L}u_1 + Lu(0) + L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}u''(s)\,ds \\
&= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}u'(1) - u'(0) - Le^{L}u_1 + Lu(0)\right) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)\,ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)\,ds \\
&= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left(u'(1) + Mu_1 - e^{M}(u'(0) + Mu(0)\right) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

de même pour les fonctions $\Psi_5(x), \Psi_6(x), \Psi_7(x), \Psi_8(x)$

$$\begin{aligned}
\Psi_5(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)\,ds \\
&= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\big((L-M)u_1 - e^{M}(L-M)u(0)\big) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_6(x) &= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)\,ds \\
&= (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\big(e^{L}(L-M)u_1 - (L-M)u(0)\big) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_7(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)\,ds \\
&= (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\big(e^{L}(L-M)u_1 - (L-M)u(0)\big) \\
&\quad +(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_8(x) &= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)\,ds \\
&= -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\big((L-M)u_1 - e^{M}(L-M)u(0)\big) \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(\mathbf{L}+\mathbf{M})^{\mathbf{2}}\left(\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\Psi_4(x)\right)$

En appliquant $(L+M)^2$ à $(\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\Psi_4(x))$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\left(\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\Psi_4(x)\right) \\
= & -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left[u'(1)-e^{M}u'(0)+Mu_1-Me^{M}u(0)\right] \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}u'(1)-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}u'(1)-u'(0)+Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[u'(1)+Mu_1-e^{M}(u'(0)+Mu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u\left(s\right)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(\mathbf{L}+\mathbf{M})^{\mathbf{2}}\left(\Psi_5(x)+\Psi_6(x)+\Psi_7(x)+\Psi_8(x)\right)$

En appliquant $(L+M)^2$ à $(\Psi_5(x)+\Psi_6(x)+\Psi_7(x)+\Psi_8(x))$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\left(\Psi_5(x)+\Psi_6(x)+\Psi_7(x)+\Psi_8(x)\right) \\
= & (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left((L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left((L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u\left(s\right)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u\left(s\right)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u\left(s\right)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u\left(s\right)ds,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\left(\Psi_5(x)+\Psi_6(x)+\Psi_7(x)+\Psi_8(x)\right) \\
= \; & (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}e^{M}(L-M)u(0) \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(L-M)u(0) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left((L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u\,(s)\,ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u\,(s)\,ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u\,(s)\,ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u\,(s)\,ds.
\end{aligned}$$

De même **le calcul de** $(L+M)^2\left(\Psi_9(x)+\Psi_{10}(x)+\Psi_{11}(x)+\Psi_{12}(x)\right)$

En appliquant $(L+M)^2$ à $\left(\Psi_9(x)+\Psi_{10}(x)+\Psi_{11}(x)+\Psi_{12}(x)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\left(\Psi_9(x)+\Psi_{10}(x)+\Psi_{11}(x)+\Psi_{12}(x)\right) \\
= \; & \frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds,
\end{aligned}$$

alors

$$(L+M)^2\Psi(x)=$$

$$
\begin{aligned}
&= (L+M)^2 \sum_{i=1}^{12} \Psi_i(x) \\
&= -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left[-e^{M}u'(0)+Mu_1-Me^{M}u(0)\right] \\
&\quad +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}u'(1)-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[u'(1)-e^{M}u'(0)+Mu_1-Me^{M}u(0)\right] \\
&\quad -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)(L-M)u(0) \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right] \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[(L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right] \\
&\quad -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds \\
&\quad +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)\,ds \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)\,ds \\
&\quad -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)\,ds \\
&\quad -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)\,ds \\
&\quad +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)\,ds \\
&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds,$$

en posant $v(.) := (L+M)^2u(.)$, et puisque sur $D((L+M)^2)$, on a

$$L^2e^L = e^LL^2 \quad \text{et} \quad M^2e^M = e^MM^2$$

alors, après des simplifications, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\Psi(x) \\
= \; & -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left[-e^{M}u'(0)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right] \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-e^{L}Mu_1+Mu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-e^{L}Mu_1+Mu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[-e^{M}u'(0)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}u'(1) \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\times \\
& \int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left[-M^2-M(L-M)+\frac{1}{2}(LM+ML)\right](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\times \\
& \int_{0}^{1}e^{sL}\left[L^2-L(L-M)-\frac{1}{2}(LM+ML)\right](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\times \\
& \int_{0}^{1}e^{sL}\left[-L^2+L(L-M)+\frac{1}{2}(LM+ML)\right](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\times \\
& \int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left[-M^2-M(L-M)+\frac{1}{2}(LM+ML)\right](L+M)^{-2}v(s)ds
\end{aligned}$$

Comme

$$C_{L;M} := (ML-LM)(L+M)^{-2} = [M;L](L+M)^{-2}.$$

alors

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\Psi(x) \\
= \; & (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[\left(-I+e^{L}e^{M}\right)u'(0)-e^{L}(L+M)u_1+\left(M+e^{L}e^{M}L\right)u(0)\right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$
\begin{aligned}
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[\left(e^{L}e^{M}-I\right)u'(0)+M+e^{L}e^{M}Lu(0)\right]\\
&+(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\
&-(L+M)e^{(1-x)L}\left[-e^{M}u\prime(0)+u\prime(1)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right]\\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&-(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\left(s\right)ds.
\end{aligned}
$$

Finalement, Puisque $u_0'(0)=Hu(0)+d_0$, on obtient,

$$
\begin{aligned}
(L+M)^2\Psi(x) \;=\; &(L+M)e^{xM}(L+H)u(0)-(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\
&-(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(I-e^{L}e^{M})d_0\\
&+(L+M)e^{(1-x)M}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\
&+(L+M)e^{(1-x)L}(L+H)\Lambda^{-1}(I-e^{L}e^{M})d_0\\
&-(L+M)e^{(1-x)L}u'\left(1\right)-(L+M)e^{(1-x)L}Lu_1+(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0\\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&-(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v\left(s\right)ds.
\end{aligned}
$$

$(L+M)^2\Psi\left(.\right)$ sommée avec $(L+M)^2\Phi\left(.\right)$ permet de poser

$$
v(x)+R(v)(x)=F\left(f\right)\left(x\right)+\Gamma(x). \tag{2.22}
$$

où

$$
\begin{aligned}
R(v)(x) &= \frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(s)\,ds - \frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-x)M}C_{L,M}v(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-x)M}C_{L,M}v(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)\,ds,
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
F(f)(x) &= (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\
&-(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&+(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds,
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\
&+(L+M)e^{xM}d_0 - (L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\
&+(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\
&+(L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1.
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

Comme

$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I,$$

on peut écrire

$$\Gamma(x) = \widetilde{R}(x) + S(x),$$

avec

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{R}(x) & = & (L+M)e^{xM}e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}d_0 - (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 \\ & & -(L+M)e^{xM}e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 + (L+M)e^{xM}e^Le^Md_0 \\ & & -(L+M)e^{(1-x)L}e^M\left[I + (L+H)\Lambda^{-1}(I - e^Le^M)\right]d_0 \\ & & +(L+M)e^{xM}e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ & & -(L+M)e^{xM}e^L(L+M)u_1 \\ & & -(L+M)e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ & & +(L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1,\end{array}$$

et

$$S(x) = (L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1.$$

2.4 Etude de $F_\omega(f), S_\omega,\ \widetilde{R_\omega}$ et R_ω

On suppose $u_1 \in D(L+M) = D(L)$, $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$.
Si u est une solution classique, alors $v := (L+M)^2u$, vérifie l'équation intégrale suivante

$$v(.) + R(v)(.) = F(f)(.) + \widetilde{R}(.) + S(.).$$

Proposition 2.4.1. *(voir [27], p. 96) Soient Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ sur X, $\varphi \in X$, $1 < p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1. $e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X)$.
2. $Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \iff e^{\cdot Q}\varphi \in W^{m,p}(0,1;X) \iff\ '\varphi \in (D(Q^m),X)_{\frac{1}{mp},p}$.

   On pose, p.p $x \in (0,1)$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M_\omega}g(s)ds \quad et \quad K(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L_\omega}g(s)ds$$

   où g est une fonction de $(0,1)$ de X.

On applique [24] et la remarque dans [9], p. 25 et en utilisant le théorème du graphe, on obtient

Proposition 2.4.2. *On suppose* (2.1) $\sim$ (2.3) *. Pour $g \in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$, on a*

1) Il existe $C>0$ te lque

$$\begin{cases} \| G(g) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)} \quad ; \quad \| K(g) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)}, \\ \| x \mapsto MG(g)(x) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)}, \\ \| x \mapsto LK(g)(x) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)} . \end{cases}$$

2) $K(g), G(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M))$,

3)

$$G(g)(1),\ K(g)(0) \in (D(M),X)_{\frac{1}{p},p} = (D(L),X)_{\frac{1}{p},p}. \tag{2.26}$$

Preuve. 1) Ce résultat est démontré dans [[23] page 70] et [21] dans la Proposition I.46 page 33.

2) Selon 1) on a $K(g), G(g) \in\ L^p(0,1;D(M))$ et $MG(g), LK(g) \in L^p(0,1;D(M))$, et p.p $x \in (0,1)$, on a

$$G'(g)(x) = MG(g)(x) + g(x) \quad \text{et} \quad K'(g)(x) = -LK(g)(x) - g(x).$$

D'après 1)

$$K'(g), G'(g) \in\ L^p(0,1;D(M)),$$

alors

$$K(g), G(g) \in W^{1;p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M)).$$

3) D'après le Théorème de trace 1.4.4, on obtient

$$G(g)(1)\ \ K(g)(0) \in (D(M),X)_{\frac{1}{p},p} = (D(L),X)_{\frac{1}{p},p}.$$

$\square$

Proposition 2.4.3. *Soient* (2.1) $\sim$ (2.5) *et* (2.8) $-$ (2.9)*. Soient $g \in L^p(0,1;X)$ avec $1<p<\infty$, et*

$$\begin{cases} \Psi_1(g) := e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0), \\ \Psi_2(g) := e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1), \\ \Psi_3(g) := e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1), \\ \Psi_4(g) := e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0), \\ \Psi_5(g) := e^{(1-\cdot)L}G(g)(1), \end{cases}$$

alors il existe $C>0$, tels que

$$\begin{cases} \| \Psi_i(g) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)}, i = \overline{1,5}, \\ \| M\Psi_i(g) \|_{L^p(0,1,X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)}, i = 1,2, \\ \| L\Psi_i(g) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)}, i = 3,4,5. \end{cases}$$

Preuve. On étudie $\Psi_1(g)$ (même travail pour les autres fonctions). On note C une constante quelconque et peut être dépendante de p. Il est clair que $\Psi_1(g) \in L^p(0,1;X)$ et

$$\| \Psi_1(g) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)} .$$

Maintenant, on montre que $\Psi_1(g) \in L^p(0,1;D(M))$. On a

$$\begin{aligned}\Psi_1(g) &= e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}g(s)ds \\ &= \int_0^x e^{(x-s)M}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s)ds + e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Psi_1(g) = G(\widetilde{g})(x) + \widetilde{\Psi}_1(g)$$

avec

$$\widetilde{g}(s) = e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Psi}_1(g) = e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds$$

Mais $\widetilde{g} \in L^p(0,1;X)$, alors d'après la Proposition 2.4.2, $G(\widetilde{g}) \in L^p(0,1;D(M))$ et

$$\| x \mapsto MG(\widetilde{g})(x) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| \widetilde{g} \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)} . \tag{2.27}$$

Maintenant, suite au Lemme 2.2.3, l'assertion 5, on a

$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} - I$$

donc, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Psi}_1(g) \\ &= e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\ &= e^{xM}\left[(L+M)\Lambda^{-1} + e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} - I\right]\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\ &= e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\ &= +e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds - e^{xM}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds,\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\widetilde{\Psi}_1(g) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \tag{2.28}$$

Puisque $e^L(X) \subset D(M)$, on a $Me^Le^M(L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \parallel MI_2(x) \parallel^p ds &= \int_0^1 \left\| e^{xM}Me^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^{xL}\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)ds \right\|^p dx \\
&\leq C\int_0^1 \left\| \int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)dx \right\|^p ds \leq C \parallel K(g) \parallel^p_{L^p(0,1;X)} \\
&\leq C \parallel g \parallel^p_{L^p(0,1;X)},
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \parallel MI_3(x) \parallel^p dx &= \int_0^1 \left\| e^{xM}M\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p dx \\
&= \int_0^1 \left\| e^{xM}M(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p dx \\
&\leq C\int_0^1 \left\| (L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p ds \\
&\leq C\int_0^1 \left\| L\int_x^1 e^{sL}g(s)ds - \int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p ds \\
&\leq C\left(\parallel LK(g) \parallel_{L^p(0,1;X)} + \parallel K(g) \parallel\right)^p \\
&\leq C \parallel g \parallel^p_{L^p(0,1;X)} .
\end{aligned}$$

Pour I_1, on utilise l'hypothèse (2.9) pour montré que $M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \parallel MI_1(x) \parallel^p dx \\
&= \int_0^1 \left\| Me^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p dx \\
&= \int_0^1 \left\| e^{xM}M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p dx \\
&\leq C\int_0^1 \left\| (L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \right\|^p dx \leq C \parallel g \parallel^p_{L^p(0,1;X)} .
\end{aligned}$$

Finalement, les estimations précédentes concernant I_1, I_2 et I_3 avec (2.27) et (2.28), montrent que $\Psi_1 \in L^p(0,1;D(M))$ et

$$\| x \mapsto M\Psi_1(g)(x) \|_{L^p(0,1;X)} \leq C \| g \|_{L^p(0,1;X)} .$$

□

Proposition 2.4.4. *Sous les hypothèses* (2.1) $\sim$ (2.8)*, pour* $f \in L^p(0,1;X)$*,* $1 < p < \infty$*. Alors*

$$F(f) \in L^p(0,1;X).$$

Preuve. En utilisant les notations de la Proposition 2.4.3, on peut écrire $F(f)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
& F(f) \\
= \ & (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)K(f) \\
& -(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_2(f) + (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_1(f) \\
& -(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_4(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_3(f) \\
& -(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_5(f)
\end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)(L-I)^{-1}, (L+M)(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Ainsi, en vertu des deux propositions précédentes (2.4.2) et (2.4.3), $F(f) \in L^p(0,1;X)$. □

Proposition 2.4.5. *On suppose* (2.1) $\sim$ (2.9)*. Soit* $1 < p < \infty$*. Alors*

$$\widetilde{R} \in L^p(0,1;X).$$

Preuve. On note

$$U := (L+M)(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \ \ et \ \ V := (L+M)(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in X$, on a

$$e^L\xi \in D(L^n) \text{ et } \ e^M\xi \in D(M^n),$$

donc $(M-I)e^L, (L-I)e^M \in \mathcal{L}(X)$, ainsi d'après l'hypothèse (2.9),

$$(M-I)(L+M)^{-1}\Lambda^{-1}e^L = M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)e^L - (L+M)\Lambda^{-1}e^L \in \mathcal{L}(X).$$

Pour $x \in (0,1)$, on peut écrire

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{R}(x) & = & Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}d_0 \\ & & -Ve^{xM}(M-I)(L+M)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 \\ & & -Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 + Ve^{xM}(M-I)e^Le^Md_0 \\ & & -Ue^{(1-x)L}(L-I)e^M\left[I+(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^Le^M\right)\right]d_0 \\ & & +Ve^{xM}(M-I)e^Le^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ & & -Ve^{xM}(M-I)e^L(L+M)u_1 \\ & & -Ue^{(1-x)L}(L-I)e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1 \\ & & +Ve^{xM}(M-I)(L+M)\Lambda^{-1}e^L(L+M)u_1,\end{array}$$

donc, suite à la Proposition 2.4.1, $\widetilde{R} \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. $\square$

Proposition 2.4.6. *On suppose* (2.1) $\sim$ (2.8). *Soit* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$S \in L^p(0,1;X)$$

si et seulement si

$$u_1, \Lambda^{-1}d_0 \in D((L+M)^2)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Pour $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{array}{rcl}S(x) & = & (L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1 \\ & = & (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \\ & & +(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)e^{(1-x)L}(L+M)u_1 \\ & = & S_1(x)+S_2(x).\end{array}$$

Comme $(L+M)(M-I)^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, alors $S_1 \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$x \longmapsto (M-I)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in L^p(0,1;X), \tag{2.29}$$

et, d'après la Proposition 2.4.1, on a (2.29) est équivalente à :

$$(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in (X;D(M))_{1-\frac{1}{p},p} = (X;D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

D'une autre part, on a $S_1 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right)$ et $S_2 \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right)$, alors

$$\begin{aligned}
S &\in L^p(0,1;X) \\
&\iff S \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right) \text{ et } S \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right) \\
&\iff S_1 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right) \text{ et } S_2 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right) \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in (X;D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p} \\ \text{et} \quad (L+M)u_1 \in (X;D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}, \end{array}\right. ,
\end{aligned}$$

Grâce à la propriété de réitération, on obtient :

$$S \in L^p(0,1;X) \iff u_1, \Lambda^{-1}d_0 \in D((L+M)^2)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

□

Maintenant, on a besoin de la dépendance de ω donc on réintroduit le paramètre ω dans R, $\widetilde{R}$, $F(f)$ et S, en les notant R_ω, $\widetilde{R}_\omega$, $F_\omega(f)$ et S_ω.
Dans la proposition suivante, on montre que $I+R_\omega$ est inversible pour ω assez grand, donc la représentation de la solution classique u du problème (3), (4) est

$$u(.) = (L_\omega+M_\omega)^{-2}\left[(I+R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f)+\widetilde{R}_\omega+S_\omega\right)(.)\right]. \tag{2.30}$$

Proposition 2.4.7. *On suppose* (2.1) $\sim$ (2.12). *Soit* $1<p<\infty$. *Alors* $R_\omega \in \mathcal{L}(L^p(0,1;X))$ *et il existe* $\omega^* \geq \omega_0$ *tel que pour tout*

$$\|R_\omega\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Ainsi $I+R_\omega$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(L^p(0,1;X))$ *pour* $\omega^* \geq \omega_0$.

Preuve. Soit $v \in L^p(0,1;X)$. Puisque $C_{L_\omega,M_\omega} \in \mathcal{L}(X)$ alors $C_{L_\omega,M_\omega}v \in L^p(0,1;X)$. En utilisant les notations des Propositions 2.4.2 et 2.4.3, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& 2R_\omega(v)(.) \\
= \ & (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}(M_\omega - I)G(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)K(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& -(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}(M_\omega - I)\Psi_1(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& -(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}(M_\omega - I)\Psi_2(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& +(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\Psi_3(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& +(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\Psi_4(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.) \\
& -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\Psi_5(C_{L_\omega,M_\omega}v(.))(.),
\end{aligned}$$

et comme $(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}$, $-(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ donc, d'après les Propositions 2.4.2 et 2.4.3, on a $R_\omega(v) \in L^p(0,1;X)$ et il existe une constante $b > 0$ telle que, pour $\omega \geq \omega_0$

$$\|R_\omega(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leq b \left\|C_{L_\omega,M_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|v\|_{L^p(0,1;X)},$$

et par l'hypothèse (2.12), on a

$$\|R_\omega(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leq C\mathcal{X}(\omega) \|v\|_{L^p(0,1;X)},$$

avec $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \mathcal{X}(\omega) = 0$, Il existe donc $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Alors $I + R_\omega$ est inversible en $\mathcal{L}(L^p(0,1;X))$ pour tout $\omega \geq \omega^*$ □

Le résultat principale de ce travail est donné par :

Théorème 2.4.1. *Sous les hypothèse (2.1) $\sim$ (2.11). Soit $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que, pour tout $\omega \geq \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1) Le problème (3)-(4) admet une solution classique unique i.e.

$$\begin{cases}
u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap \ L^p\left(0,1;D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right) \\
u' \in L^p(0,1;D(L_\omega - M_\omega)) \\
u(0) \in D(H) \\
u \ \text{vérifie} \ (3) \ \text{et} \ (4)
\end{cases}$$

2)

$$u_1, \quad \Lambda_\omega^{-1}\, d_0 \in (X;D(L_\omega + M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\ p} \tag{2.31}$$

Le plan de cet article [5] est le suivant :

2.5 Preuve du théorème

Assertion 1 implique l'assertion 2 :

On suppose **l'assertion 1**, i.e u définie par (2.30) est une solution classique du problème (3),(4), d'après la remarque 2.2.1, on a

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p\left(0,1;D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right).$$

Puisque

$$\|u\|_{D\left((L_\omega+M_\omega)^2\right)} = \left\|(L_\omega + M_\omega)^2 u\right\|_X + \|u\|_X$$

on déduit que

$$x \longmapsto (L_\omega + M_\omega)^2 u(x) \in L^p(0,1;X).$$

De (2.30), on constate

$$x \longrightarrow (L_\omega + M_\omega)^2 u(x) = (I + R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega\right)(x) \in L^p(0,1;X).$$

D'après la proposition 2.4.7, l'opérateur $(I + R_\omega)$ est un opérateur borné, d'où

$$F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega \in L^p(0,1;X).$$

En appliquant les Propositions 2.4.4, 2.4.5, on trouve

$$S_\omega \in L^p(0,1;X),$$

finalement, de la proposition 2.4.6, on déduit

$$u_1, \quad \Lambda_\omega^{-1}\, d_0 \in (X; D(L_\omega + M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\, p}$$

Assertion 2 implique l'assertion 1 :

On suppose (2.31). Le but est de montrer que u, définie par (2.30), est une solution classique de (3)-(4) . Soit

$$v(x) = (L_\omega + M_\omega)^2 u(x) = (I + R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f)(x) + \widetilde{R}_\omega(x) + S_\omega(x)\right)$$

Première étape : On montre que $u \in L^p\left(0,1;D((L_\omega - M_\omega)^2\right)$

D'après les Propositions 2.4.4, 2.4.5 et 2.4.6, on a

$$F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega \in L^p(0,1;X).$$

D'après 2.4.7 et l'effet que $(I+R_\omega)^{-1}$ est borné, on obtient

$$v \in L^p(0,1;X) \tag{2.32}$$

Puisque

$$(L_\omega - M_\omega)^2 (L_\omega + M_\omega)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$$

donc

$$x \longrightarrow (L_\omega - M_\omega)^2 u(x) = (L_\omega - M_\omega)^2 (L_\omega + M_\omega)^{-2} v(x) \in L^p(0,1;X)$$

Deuxième étape : Montrons que $(L_\omega - M_\omega)\, u' \in L^p(0,1;X)$. D'après (2.22) ;

$$v = F_\omega(f) + \Gamma_\omega - R_\omega(v),$$

on a

$$\begin{aligned} u(.) \quad : &= (L_\omega + M_\omega)^{-2} v(.) \\ &= (L_\omega + M_\omega)^{-2} \left(F_\omega(f) + \Gamma_\omega - R_\omega(v)\right)(.) \\ &= (L_\omega + M_\omega)^{-2} \left(F_\omega(f)(.) + \Gamma_\omega(.)\right) - (L_\omega + M_\omega)^{-2} R_\omega(v)(.) \end{aligned} \tag{2.33}$$

donc, en utilisant (2.23), (2.24) et (2.25), on peut réécrire u sous la forme suivante

$$u = \overline{u} + \widetilde{u} + \widehat{u}$$

telles que

$$\begin{cases} \overline{u}(x) = (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\ \qquad\qquad -\frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\,(.)\right)(x) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\,(.)\right)(x) \\ \widetilde{u}(x) = (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} f_0 \\ \widehat{u}(x) = (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} f_1 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f_0 \quad = \quad & (L_\omega + H)\, \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G(f)(1) + (L_\omega + H)\, \Lambda_\omega^{-1} K(f)(0) \\ & + (L_\omega + H)\, \Lambda_\omega^{-1} \left[\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0 + e^{L_\omega} (L_\omega + M_\omega)\, u_1\right] + d_0 \\ & + \frac{1}{2} (L_\omega + H)\, \Lambda_\omega^{-1} K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\,(.)\right)(0) \\ & + \frac{1}{2} (L_\omega + H)\, \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\,(.)\right)(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_1 &= -e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K(f)(0)+\left(-e^{M_\omega}d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right)\\
&\quad-\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]G(f)(1)\\
&\quad-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)(1)\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)(0).
\end{aligned}$$

On montre que

$$\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(\overline{u}'+\widetilde{u}'+\widehat{u}'\right)\in L^p(0,1;X).$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(x) &= M_\omega G(f)(x)-L_\omega K(f)(x)-\frac{1}{2}M_\omega G(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right))(x)\\
&\quad-\frac{1}{2}L_\omega K(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right))(x)-C_{L_\omega,M_\omega}v\left(x\right).
\end{aligned}$$

D'après la première étape (2.32) , on a $v\in L^p(0,1;X)$ et puisque $f\in L^p(0,1;X)$, en appliquant la Proposition 2.4.2 et l'assertion 5 du Lemme (2.2.3) **,** on trouve

$$\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(.)\in L^p(0,1;X).$$

Puisque

$$\left(L_\omega-M_\omega\right)\overline{u}'(.)=\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(.),$$

on déduit que

$$x\mapsto\left(L_\omega-M_\omega\right)\overline{u}'(x)\in L^p(0,1;X). \tag{2.34}$$

On a

$$\widehat{u}(x)=\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}e^{(1-x)L_\omega}f_1,$$

d'où

$$\left(L_\omega+M_\omega\right)\widehat{u}'(x)=-L_\omega e^{(1-x)L_\omega}f_1,$$

Maintenant on fait preuve que $f_1\in(D(L_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}$, on assemble tous les termes dans f_1 qui contient e^{M_ω} ; on peut réécrire

$$f_1=\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1-G(f)(1)+\frac{1}{2}G(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right))(1)+e^{M_\omega}\mu_1$$

avec $\mu_1\in X$.

Donc, d'après (2.26), on a

$$\left[G(f)(1)+\frac{1}{2}G(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.))(1)\right]\in(D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

Puisque

$$u_1\in(X;D(L_\omega+M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\,p}$$

d'après (2.13),

$$u_1\in(X;D(L_\omega+M_\omega))_{2-\frac{1}{p},\,p}=(X;D(L_\omega))_{1+1-\frac{1}{p},\,p}$$

d'où

$$u_1\in D(L_\omega)\text{ avec }\begin{cases}L_\omega u_1\in(X;D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},\,p}\\ \text{et}\\ M_\omega u_1\in(X;D(M_\omega))_{1-\frac{1}{p},\,p}=(X;D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},\,p}\end{cases}$$

donc

$$(L_\omega+M_\omega)\,u_1\in(X;D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},\,p}=(D(L_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

On a pour tout $\mu_1\in X$,

$$e^{M_\omega}\mu_1\in D(M_\omega)=D(L_\omega)\subset(D(L_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

On déduit

$$f_1\in(D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}=(D(L_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

Par conséquent

$$(L_\omega+M_\omega)\,\widehat{u}'\in L^p(0,1;X).$$

Puisque

$$(L_\omega-M_\omega)\,(L_\omega+M_\omega)^{-1}\in\mathcal{L}(X),$$

donc

$$x\mapsto(L_\omega-M_\omega)\widehat{u}'=(L_\omega-M_\omega)\,(L_\omega+M_\omega)^{-1}\,(L_\omega+M_\omega)\,\widehat{u}'\in L^p(0,1;X),$$

par conséquent

$$x\mapsto(L_\omega-M_\omega)\,\widehat{u}'(x)\in L^p(0,1;X).\tag{2.35}$$

On montre que

$$x\mapsto(L_\omega-M_\omega)\,\widetilde{u}'(x)\in L^p(0,1;X).$$

On a

$$\widetilde{u}(x)=(L_\omega+M_\omega)^{-1}\,e^{xM_\omega}f_0,$$

d'où

$$(L_\omega+M_\omega)\,\widetilde{u}'(x)=M_\omega e^{xM_\omega}f_0.\tag{2.36}$$

Maintenant on fait preuve que $f_0 \in (D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}$, on assemble tous les termes dans f_0 qui contient $(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}$, on trouve

$$\begin{aligned} f_0 &= (L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\left[G(f)(1)-e^{M_\omega}d_0+(L_\omega+M_\omega)\,u_1+\frac{1}{2}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(1)\right] \\ &\quad+(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}\left[K(f)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(0)\right] \\ &\quad+(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0+d_0, \end{aligned}$$

d'après (2.7) , on a

$$(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0+d_0=(L_\omega+M_\omega)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\,(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0,$$

d'où

$$\begin{aligned} f_0 &= (L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\tau \\ &\quad+(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}\left[K(f)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(0)\right] \\ &\quad+(L_\omega+M_\omega)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0, \end{aligned}$$

telle que

$$\tau=G(f)(1)-e^{M_\omega}d_0+(L_\omega+M_\omega)\,u_1+\frac{1}{2}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(1)+e^{M_\omega}\,(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0.$$

Donc, d'après (2.26), on a

$$\left[K(f)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(0)\right]\in(D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,,$$

et

$$e^{L_\omega}\tau\in(D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,,$$

en appliquant le Lemme 2.2.5, on obtient

$$(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\tau+(L_\omega+H)\,\Lambda_\omega^{-1}\left[K(f)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.)\right)(0)\right]\in(D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

D'autre part, on a

$$\Lambda_\omega^{-1}d_0\in(X;D(L_\omega+M_\omega)^2)_{1-\frac{1}{2p},\,p}$$

d'après (2.13),

$$\Lambda_\omega^{-1}d_0\in(X;D(L_\omega+M_\omega))_{2-\frac{1}{p},\,p}=(X;D(M_\omega))_{1+1-\frac{1}{p},\,p}=(X;D(L_\omega))_{1+1-\frac{1}{p},\,p}$$

d'où

$$\Lambda_\omega^{-1}d_0 \in D(M_\omega) \text{ avec } \begin{cases} L_\omega \Lambda_\omega^{-1}d_0 \in (X;D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},\ p} = (X;D(M_\omega))_{1-\frac{1}{p},\ p} \\ \text{et} \\ M_\omega \Lambda_\omega^{-1}d_0 \in (X;D(M_\omega))_{1-\frac{1}{p},\ p} \end{cases}$$

donc

$$(L_\omega + M_\omega)\,\Lambda_\omega^{-1}d_0 \in (X;D(M_\omega))_{1-\frac{1}{p},\ p} = (D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,.$$

On déduit

$$f_0 \in (D(M_\omega);X)_{\frac{1}{p},p}\,,$$

De (2.36) et d'après la proposition 2.4.1, on obtient

$$(L_\omega + M_\omega)\,\widetilde{u}' \in L^p(0,1;X).$$

Puisque

$$(L_\omega - M_\omega)\,(L_\omega + M_\omega)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

donc

$$x \mapsto (L_\omega - M_\omega)\widetilde{u}' = (L_\omega - M_\omega)\,(L_\omega + M_\omega)^{-1}\,(L_\omega + M_\omega)\,\widetilde{u}',$$

par conséquent

$$x \mapsto (L_\omega - M_\omega)\,\widetilde{u}'(x) \in L^p(0,1;X) \tag{2.37}$$

Finalement, à partir de (2.34), (2.35) et (2.37), on conclut que

$$x \mapsto (L_\omega - M_\omega)\,u'(x) \in L^p(0,1;X)$$

Troisième étape : Montrons que $u \in W^{2,p}(0,1;X)$.
Grâce aux étapes précédentes et vu que u vérifie l'équation (3) , on déduit que

$$x \mapsto u''(x) = -(L_\omega - M_\omega)u'(x) + \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) + f(x) \in L^p(0,1;X)$$

ce qui implique $u \in W^{2,p}(0,1;X)$.
On montre que u vérifie le problème (3),(4) p.p $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} v(x) &= (L_\omega + M_\omega)\,G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)\,K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2}\,(L_\omega + M_\omega)\,G(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.))(x) \\ &\quad +\frac{1}{2}\,(L_\omega + M_\omega)\,K(C_{L_\omega,M_\omega}v\,(.))(x) \\ &\quad +(L_\omega + M_\omega)\,e^{xM_\omega}f_0 + (L_\omega + M_\omega)\,e^{(1-x)L_\omega}f_1, \end{aligned} \tag{2.38}$$

et

$$\begin{aligned}(L_\omega + M_\omega)\, u'(x) &= M_\omega G(f)(x) - L_\omega K(f)(x) - \frac{1}{2} M_\omega G(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} L_\omega K(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad + M_\omega e^{xM_\omega} f_0 - L_\omega e^{(1-x)L_\omega} f_1 - C_{L_\omega,M_\omega} v\,(x)\,,\end{aligned}$$

Par conséquent, en insérant (2.38) dans $(L_\omega + M_\omega)\, u'(x)$, et en utilisant le Lemme (2.2.3), l'assertion 6, p.p tout $x \in (0,1)$on obtient

$$\begin{aligned}u'(x) &= M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) - L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} f_0 - L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} f_1.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Alors, p.p tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}u''(x) &= f(x) + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G(f)(x) + L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2} M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad +\frac{1}{2} L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K(C_{L_\omega,M_\omega} v\,(.))(x) \\ &\quad +\frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v\,(x) \\ &\quad + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega e^{xM_\omega} f_0 + L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega e^{(1-x)L_\omega} f_1,\end{aligned} \tag{2.40}$$

En substituant (2.38) dans (2.40) donc, p.p tout $x \in (0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}u''(x) &= f(x) + E_1 G(f)(x) + T_1 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_1 G(C_{L_\omega,M_\omega} v)(x) \\ &\quad +\frac{1}{2} T_1 K(C_{L_\omega,M_\omega} v)(x) + E_1 e^{xM_\omega} f_0 + T_1 e^{(1-x)L_\omega} f_1,\end{aligned} \tag{2.41}$$

où, sur le domaine$D(L_\omega + M_\omega)$

$$\begin{aligned}E_1 &= M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega + \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} (L_\omega + M_\omega) \\ &= \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_1 &= L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega}(L_\omega + M_\omega) \\ &= \frac{1}{2} L_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1}, \end{aligned}$$

en vertu du Lemme 2.2.3, l'assertion 6, on utilise (2.33), (2.39) et (2.41), p.p tout $x \in (0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned} & u''(x) + (L_\omega - M_\omega) u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) u(x) \\ = \; & f(x) + E_2 G(f)(x) + T_2 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_2 G(C_{L_\omega, M_\omega} v(.))(x) \\ & + \frac{1}{2} T_2 K(C_{L_\omega, M_\omega} v(.))(x) + E_2 e^{x M_\omega} f_0 + T_2 e^{(1-x) L_\omega} f_1, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} + (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\ & \quad - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} L_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} - (L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\ & \quad - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}. \end{aligned}$$

Mais, en vertu du Lemme (2.2.3), l'assertion 8, on obtient

$$E_2 G(f)(.) = T_2 K(f)(.) = 0 \quad \text{dans} \quad L^p(0,1;X)$$

Finalement, on déduit

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega) u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) u(x) = f(x).$$

On conclut alors que u, déterminée par (2.30), est une solution classique de (3),(4).

2.6 Revenir au cas commutatif

Cette section est consacrée à une comparaison avec le resultat de l'article [5]. On va montrer que ce travail améliore les résultats contenus dans [5]. En fait, on considère L, M deux opérateurs linéaires fermés dans X respectivement à la place des familles d'opérateurs linéaires $(M_\omega)_{\omega \geq \omega_0}$,

$(L_\omega)_{\omega\geq\omega_0}$, telles que

$$\begin{cases} D(M) = D(L) \\ ML = LM. \end{cases} \tag{2.42}$$

Comme les hypothèses (11) et (12), p. 59 dans [5]. Ceci implique

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2).$$

On a affaibli les conditions, on éliminant l'inversibilité des opérateurs L, M, et la commutativité au sens des résolvantes entre H et L, M; au lieu de cette commutativité, on a considéré l'hypothèse

$$\forall \xi \in D(L) = D(M) = D(L+M),\ \Lambda^{-1}\xi \in D((L+M)^2),$$

cette condition est vérifiée lorsque l'opérateur H commute avec L et M au sens des opérateurs résolvants.

D'après (2.42) , on a

$$\Lambda = (M-H) + e^L e^M (L+H) = (M-H) + e^{L+M}(L+H)$$

et puisque $C_{L_\omega,M_\omega} = 0$, on a $R = 0$. Alors, grâce à (2.30), la solution du problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x) \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \quad ; \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2.43}$$

est de la fomrme

$$u(.) = (L+M)^{-2}(F(f)(.) + \Gamma(.)),$$

(ici $(I+R)^{-1} = I$). De plus, pour $p.p.\ x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} (L+M)^{-2}F(f)(.) \quad = \quad & (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(L+M)^{-2}\Gamma(x) &= (L+M)^{-1}e^{xM}\left[(L+H)\Lambda^{-1}+I-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}\right]d_0\\&\quad -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}[(L+H)\Lambda^{-1}+I-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}]d_0\\&\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\&\quad +(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$(L+H)\Lambda^{-1}=(L+M)\Lambda^{-1}+e^{L}+M(L+H)\Lambda^{-1}-I,$$

(voir Lemme 2.2.3, l'assertion 5), on déduit

$$\begin{aligned}&e^{M}d_0+e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}d_0-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&e^{M}d_0+e^{M}\left[(L+H)\Lambda^{-1}+e^{L+M}(L+H)\Lambda^{-1}-I\right]d_0\\&-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&e^{M}(L+M)\Lambda^{-1}d_0+e^{M}e^{L}+M(L+H)\Lambda^{-1}d_0\\&-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}d_0+e^{M}[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}]d_0,\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned}&(L+H)\Lambda^{-1}d_0+d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&\left[(L+H)+(M-H)+e^{L+M}(L+H)\right]\Lambda^{-1}d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&\left[(L+M)+e^{L+M}(L+H)\right]\Lambda^{-1}d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\=\;&(L+M)\Lambda^{-1}d_0+[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}]d_0,\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&(L+M)^{-2}\Gamma(x)\\=\;&e^{xM}\Lambda^{-1}d_0+(L+M)^{-1}e^{xM}\left[e^{L+M};(L+H)^{-1}\Lambda^{-1}\right]d_0\\&-e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}\left[e^{L+M};(L+H)^{-1}\Lambda^{-1}\right]d_0\\&+(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\&+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1,\end{aligned}$$

Finalement, la représentation de la solution du problème (2.43), pour p.p. $x \in (0,1)$, est

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad -e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1 \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}(e^{xM} - e^{(1-x)L}e^{M})\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0,
\end{aligned}$$

Cette représentation généralise celle utilisée dans [5], p. 63. Notons que, le dernier terme

$$(L+M)^{-1}(e^{xM} - e^{(1-x)L}e^{M})\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0$$

disparaîtra lorsque H et les opérateurs L et M commutent au sens des résolvantes. Notre solution coïncide avec celle trouvée dans [5].

Corollaire 2.6.1. *Soient L et M deux opérateurs linéaires fermés vérifiant (2.42) On suppose (2.1) $\sim$ (2.9) tel que pour tout $\omega \geq \omega_0$, $L_\omega = L$, $M_\omega = M$. Soit $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Le Problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1, \end{cases}$$

admet une unique solution classique.

2) $u_1,\ \Lambda^{-1}d_0 \in (X, D((L+M)^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Remarque 2.6.1. *Notre résultat trouvé dans le cas commutatif coincide avec le résultat trouvé dans [5]. En fait, d'après le Lemme 2.2.1, on a*

$$D\left((L+M)^2\right) = D(LM) \cap D(ML),$$

et comme $D(LM) = D(ML)$, *on déduit*

$$(X, D\left((L+M)^2\right))_{1-\frac{1}{2p},p} = (X, D(LM))_{1-\frac{1}{2p},p} = (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

Chapitre 3

Application

3.1 Exemple

Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs L_ω, M_ω et H par

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = H^2(\mathbb{R}) \quad D(H) = H^1(\mathbb{R}), \\ L_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \quad M_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \\ H\varphi(y) = \varphi'(y), \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $\alpha > 0, \omega > 0$ et $a \in C_b^2(\mathbb{R})$, $a \neq 0$

3.1.1 Vérification des hypothèses

1. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace UMD.
2. L_ω et M_ω vérifient les hypothèses (2.2), (2.3) (pour plus de détails voir Seeley [26]), donc L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques.
3. D'après (3.1), on a $D(L_\omega) = D(M_\omega)$. D'autre part

$$L_\omega M_\omega \neq M_\omega L_\omega,$$

car

$$\begin{aligned} D(M_\omega L_\omega) &= \{\varphi \in D(L_\omega) : L_\omega\varphi \in D(M_\omega)\} \\ &= \left\{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi \in H^2(\mathbb{R})\right\} \\ &= \left\{\varphi \in H^3(\mathbb{R}) \ : \ \varphi'' + a\varphi \in H^2(\mathbb{R})\right\} \\ &= \left\{\varphi \in H^3(\mathbb{R}) \ : \ \varphi'' \in H^2(\mathbb{R})\right\} \\ &= H^4(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(M_\omega L_\omega)\varphi(y) &= M_\omega\left(L_\omega\varphi(y)\right)\\
&= \left(\varphi''(y)+a(y)\varphi'(y)-\omega^\alpha\varphi(y)\right)''\\
&\quad -\omega^\alpha\left(\varphi''(y)+a(y)\varphi'(y)-\omega^\alpha\varphi(y)\right)\\
&= \varphi^{(4)}(y)+a''(y)\varphi'(y)+a'(y)\varphi''(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)\\
&\quad +a'(y)\varphi''(y)-\omega^\alpha\varphi''(y)-\omega^\alpha\varphi''(y)-\omega^\alpha a(y)\varphi'(y)+\omega^{2\alpha}\varphi(y)\\
&= \varphi^{(4)}(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)+\left(2a'(y)-2\omega^\alpha\right)\varphi''(y)\\
&\quad +\left(a''(y)-\omega^\alpha a(y)\right)\varphi'(y)+\omega^{2\alpha}\varphi(y),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega)=H^4(\mathbb{R})\\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y)=\varphi^{(4)}(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)+\left(2a'(y)-2\omega^\alpha\right)\varphi''(y)\\ +\left(a''(y)-\omega^\alpha a(y)\right)\varphi'(y)+\omega^{2\alpha}\varphi(y) \quad y\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

De même

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega)=H^4(\mathbb{R})\\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y)=\varphi^{(4)}(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)-2\omega^\alpha\varphi''(y)\\ -a(y)\omega^\alpha\varphi'(y)+\omega^{2\alpha}\varphi(y) \;\; ; \;\; y\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{3.3}$$

D'après (3.2) et (3.3), on a

$$\begin{aligned}
[M_\omega;L_\omega]\varphi(y) &= \varphi^{(4)}(y)+a(y)\varphi^{(3)}(y)+\left(2a'(y)-2\omega^\alpha\right)\varphi''(y)\\
&\quad +\left(a''(y)-\omega^\alpha a(y)\right)\varphi'(y)+\omega^{2\alpha}\varphi(y)\\
&\quad -\varphi^{(4)}(y)-a(y)\varphi^{(3)}(y)+2\omega^\alpha\varphi''(y)\\
&\quad +a(y)\omega^\alpha\varphi'(y)-\omega^{2\alpha}\varphi(y)\\
&= 2a'(y)\varphi''(y)+a''(y)\varphi'(y),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} D([M_\omega;L_\omega])=H^4(\mathbb{R})\\ [M_\omega;L_\omega]\varphi(y)=2a'(y)\varphi''(y)+a''(y)\varphi'(y) \quad y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

4. $D((L_\omega+M_\omega)^2)\subset D((L_\omega-M_\omega)^2)$, car

$$\begin{cases} D(L_\omega+M_\omega)=H^2(\mathbb{R})\\ (L_\omega+M_\omega)\varphi(y)=\varphi''(y)+a(y)\varphi'(y)-\omega^\alpha\varphi(y)+\varphi''(y)-\omega^\alpha\varphi(y)\\ =2\varphi''(y)+a(y)\varphi'(y)-2\omega^\alpha\varphi(y); \quad y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = H^2(\mathbb{R}) \\ (L_\omega - M_\omega)\,\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi''(y) + \omega^\alpha\varphi(y) \\ = a(y)\varphi'(y) \quad\ \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} D((L_\omega + M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) : (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega)\} \\ &= \left\{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ 2\varphi'' + a\varphi' - 2\omega^\alpha\varphi \in H^2(\mathbb{R})\right\} \\ &= H^4(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D((L_\omega - M_\omega)^2) &= \{\varphi \in D(L_\omega - M_\omega) : (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D(L_\omega - M_\omega)\} \\ &= \left\{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ a\varphi' \in H^2(\mathbb{R})\right\} \\ &= H^3(R). \end{aligned}$$

Remarquons que $D((L_\omega - M_\omega)^2) \neq D((L_\omega + M_\omega)^2)$.

5. L'inversibilité de $L_\omega + M_\omega$ dans $\mathcal{L}(X)$. on pose

$$\begin{cases} D(P) = D(Q) = H^1(\mathbb{R}) \\ P\varphi = \ \varphi'(y) \ \ ; \ \ y \in \mathbb{R} \\ Q\varphi = a(y)\varphi'(y) \ \ ; \ \ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a
$$L_\omega + M_\omega = 2P + Q - 2\omega^\alpha I$$

D'après Engel-Nagel [10], Exemple 2.2, p. 169 et le Lemme 2.6, p. 173, on a

$$2\omega^\alpha \in \rho(2P^2 + Q)$$

et
$$\left\|(2P + Q - 2\omega^\alpha I)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{2\omega^\alpha}$$

autrement dit, $L_\omega + M_\omega$ est inversible à inverse borné.

6. L'inversibilité de Λ_ω^{-1}, on a

$$\Lambda_\omega := (M_\omega - H) + e^{L_\omega}e^{M_\omega}(H + L_\omega).$$

On fait preuve que $(M_\omega - H)$ est inversible. On a

$$\begin{cases} D(M_\omega - H) = H^2(\mathbb{R}) \\ (M_\omega - H)\,\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi'(y) = \psi(y). \end{cases}$$

Par la transformation de Fourier, on résout l'équation

$$(M_\omega - H)\,\varphi(y) := \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi'(y) = \psi(y) \quad \text{ou} \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

qui impliquera

$$\varphi(y) = (M_\omega - H)^{-1}\,\psi(y).$$

Soient $\varphi, \psi \in H^2(\mathbb{R})$, on appliquant la transformation de Fourier, on obtient

$$(2\pi i\xi)^2\widehat{\varphi}(\xi) - \omega^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) - 2\pi i\xi\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi),$$

d'où

$$\widehat{\varphi}(\xi) = -\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2\pi i\xi},$$

donc

$$\varphi(.) = -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2\pi i\xi}\right)(.),$$

telle que $\overline{\mathcal{F}}$ définit la transformation de Fourier inverse, d'où le résultat

$$\begin{aligned} \left[(M_\omega - H)^{-1}\,\psi\right](y) &= -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2\pi i\xi}\right)(y) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi iy\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2\pi i\xi}d\xi. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega &= (M_\omega - H) + e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H) \\ &= \left(I + e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\right)(M_\omega - H) \end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$\begin{aligned} (L_\omega + H)\left[(M_\omega - H)^{-1}\,\psi\right](y) &= L_\omega\left[(M_\omega - H)^{-1}\,\psi\right](y) + H\left[(M_\omega - H)^{-1}\,\psi\right](y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2\xi^2 e^{2\pi iy\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2\pi i\xi}d\xi \end{aligned}$$

$$-\left(a(y)+1\right)\int_{\mathbb{R}}\frac{2\pi i\xi e^{2\pi iy\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+\omega^\alpha+2\pi i\xi}d\xi$$
$$+\omega^\alpha\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{2\pi iy\xi}\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+\omega^\alpha+2\pi i\xi}d\xi.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left\|\left(L_\omega+H\right)\left[\left(M_\omega-H\right)^{-1}\psi\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+C\omega^\alpha\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= C\left(1+\omega^\alpha\right)\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)(M_\omega-H)^{-1}\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\left(1+\omega^\alpha\right)\left\|e^{L_\omega}\right\|\left\|e^{M_\omega}\right\|\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leq \frac{C}{\omega^{2\alpha}}\left(1+\omega^\alpha\right)\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour ω assez grand, on a l'inversibilité de Λ_ω

7. Maintenant, on montre que

$$\forall\varphi\in D(L_\omega)=H^2(\mathbb{R})\quad \Lambda_\omega^{-1}\varphi\in D((L_\omega+M)^2)=H^4(\mathbb{R}).$$

Soit $\Lambda_\omega^{-1}\varphi=\psi$, alors

$$\begin{cases}\psi\in D\left(\Lambda_\omega\right)=H^2(\mathbb{R})\\ \varphi=\Lambda_\omega\psi=\left[\left(M_\omega-H\right)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\right]\psi,\end{cases}$$

et

$$(M_\omega-H)\psi=(\psi''-\omega^\alpha\psi-\psi')\in D(L_\omega)=H^2(\mathbb{R}),$$

ce qui implique

$$\Lambda_\omega^{-1}\varphi=\psi\in H^4(\mathbb{R})=D((L_\omega+M_\omega)^2).$$

Pour le commutateur on a la proposition suivante

Proposition 3.1.1. ***([21], p. 120)*** *Il existe $C>0$ tel que pour tout $\omega>0$*

$$\left\|\left[L_\omega;M_\omega\right]\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-2}\right\|_{L(X)}\leq\frac{C}{\omega^\gamma}$$

où $\begin{cases}\gamma=2\alpha & si\quad 0<\omega<1\\ \gamma=\alpha & si\qquad\quad \omega\geq 1\end{cases}$

Ainsi, on peut appliquer nos résultats trouvés pour ω positif suffisamment grand, pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}(x,y) + a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{1}{2}a''(y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha a(y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ +\omega^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2\omega^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega^{2\alpha} u(x,y) = f(x,y), \ x \in (0,1) \quad y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = d_0(y) \qquad y \in \mathbb{R} \\ u(1,y) = u_1 \qquad y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

D'après les notations dans (3.1) , On a la forme abstrait de ce problème est donnée par (3) et (4) ; puisque tous les hypothèse (2.1) $\sim$ (2.11) sont vérifiées, alors on a la proposition suivante.

Proposition 3.1.2. *Soit* $f \in L^p(0,1;L^2(\mathbb{R}))$ *avec* $1 < p < \infty$ *: Alors, pour* $\omega > 0$, *suffisamment grand, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *Le problème* (3.5) *admet une unique solution classique* u

2) $u_1, \Lambda_\omega^{-1} d_0 \in D(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p}$;

tel que $(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p} = B_{2p}^{4\left(1-\frac{1}{2p}\right)}(\mathbb{R})$ *(Voir [[17], p. 680, 681]).*

Bibliographie

[1] **Bourgain J**. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ark. Mat. 21 (1983), pp.163-168.*

[2] **Brezis H.** : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[3] **Burkholder D.L**. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.

[4] **Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. and Medeghri A.** : *Complet Abstract differential Equations of Elliptic type with General Robin Boundary Conditions, in UMD Spaces, volume 4, number 3, June 2011, pp. 523-538.*

[5] **Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. and Medeghri A.** : *Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in General L^p Sobolev Spaces and Applications. Bulletin of the South Ural State University. Series : Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77.*

[6] **Cheggag M., Favini A., Labbas A., Maingot S. and Ould Melha K.** : *New results on complete elliptic equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case, Bulletin of the South Ural State University. Series : Mathematical Modelling,Programming and Computer Software, 2017, Volume 10, Issue 1, 70-96.*

[7] **Da Prato G. and Grisvard P.** : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), pp. 305-387.*

[8] **Dore G. and Venni. A.** : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.

[9] **Dore G.** : *L^p Regularity for Abstract Differential Equation. Functional Analysis and Related Topics, Kyoto 1991, Lect. Notes in Math. Volume 1540, Springer-Verlag, Berlin, 1993, p. 25-38*

[10] **Engel. K. J. and Nagel R.** : *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.*

[11] **Favini, A., Labbas, R., Tanabe, H. and Yagi A.** : *On the Solvability of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcial. Ekvac. 47 (2004), 205-224.*

[12] **Favini, A., Labbas, R., Maingot, S., Tanabe, H. and Yagi A.** : *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcial. Ekvac. 47 (2004), 423-452.*

[13] **Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. and Yagi A.** : *Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces. Funkcialaj Ekvacioj, 2006, vol. 49, no. 2, pp. 193-214.*

[14] **Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. and Yagi A.** : *A Simplifed Approach in the Study of Elliptic Differential Equation in UMD Space and New Applications. Funkcialaj Ekvacioj, 2008, vol. 51, no. 2, pp. 165-187.*

[15] **Favini A., Labbas R., Maingot S. and Meisner M.** : *Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non Commutative Cases. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, issue 8, pp. 1495-1510.*

[16] **Favini A., Labbas R., Maingot S. and Meisner M.** : *Boundary Value Problem For Elliptic Differential Equations in Non-commutative Cases, Discrete and continuous dynamical systems, Volume 33, Number 11 & 12, November & December 2013, pp. 4967-4990.*

[17] **Grisvard P**. : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[18] **Haase M.** : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods. Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).*

[19] **Krein S. G.** : *Linear differential equations in Banach spaces.* Moscou, (1967).

[20] **Lunardi A.** : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, (1995).

[21] **Meisner M.** : *Etude Unifiée d'Equations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique Régies par des Equations Différentielles à Coefficients Opérateurs dans un Cadre non Commutatif. Applications Concrètes dans les Espaces de Hölder et les Espaces L^p, Thèse de doctorat, Université du Havre, France, 2012.*

[22] **Ould Melha K.** : *Equations Différentielles Opérationnelles Complètes du Second Ordre de Type Elliptique Régies par deux Opérateurs L et M avec Condition de Robin, Cadre non Commutatif entre L et M dans Divers Espaces, Thèse de doctorat, Université de mostaganem, 2017.*

[23] **Pazy A.** : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).*

[24] **Prüss J. and Sohr H.** : *On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces, Math. Z. 203 (1990), 429-452.*

[25] **Prüss J. and Sohr H.** : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces.* Hiroshima Math. J.23 (1993), pp. 161-192.

[26] **Seeley R.** : *Norms and Domains of the Complex Powers* $(A_B)^z$ *, Amer. J. Math. 93 (1971), p. 299-309.*

[27] **Triebel H.** : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North Holland, amsterdam, (1978).*

Abstract

This thesis is a synthesis of article [6], where we give results on second order elliptical operational differential equations

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \tfrac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1)$$

with Robin-type boundary conditions

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

such that L_ω, M_ω and H are closed linear operators in the UMD X space, satisfying the hypothesis of ellipticity in the noncommutative case $[L_\omega, M_\omega] \neq 0$, f is a function belongs to $L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$ and $d_0, u_0 \in X$. We are looking for existence, uniqueness and optimal regularity of the classical solution,using the theory of semi-groups, interpolation spaces and results on the class of operators with bounded imaginary powers $BIP(X)$. An application to the theorem is given by an example.

Key words : Complete elliptical equations, Robin-type boundary conditions, noncommutativity, analytical semi-groups, maximal regularity, UMD space, interpolation spaces.

الملخص

هذا العمل يأتي في إطار دراسة على المقال [6] حيث ندرس النتائج المحصلة على المعادلات التفاضلية معاملاتها عبارة عن مؤثرات التالية:

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)u(x) = f(x), \quad p.p \quad x \in (0,1)$$

بشروط حدية عامة لروبن

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

حيث $L_\omega,\ M_\omega$ و H هي مؤثرات خطية مغلقة في الفضاء البناخي X بخاصية UMD،

و $d_0, u_0 \in X$

هذه الدراسة في الإطار غير التبادلي $[L_\omega, M_\omega] \neq 0$ و $f \in L^p(0,1;X)$ ، $1 < p < \infty$

نهتم في هذه الدراسة بوجود، وحدانية والانتظام الأقصى للحل الكلاسيكي، باستخدام نظرية الاستيفاء والنتائج على فئة المؤثرات ذات القوى التخيلية المحدودة $BIP(X)$ يتم إعطاء التطبيق على النظرية من خلال مثال.

الكلمات والعبارات الرئيسية: معادلات التفاضلية من الدرجة الثانية معاملاتها عبارة عن مؤثرات ، اطار غير تبديلي، نصف الزمر التحليلية، الانتظام الاقصى، فضاء UMD، فضاء L^p_*.