REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'études

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Master En Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

THEME : Les opérateurs non bornés et les extensions de Friedrichs

présentée par :

Faci Hayet

Juin 2021

M.**Berrabah Bendoukha**	**Président**	**Prof**	**UMAB**
Kheira Limam	**Examinatrice**	**M.C.A**	**UMAB**
Hafida Bendahmane	**Encadrante**	**M.C.B**	**UMAB**

Année Universitaire : 2020/2021

RÉSUMÉ

Ce mémoire dédié au théorème d'extension de Friedrichs qui décrit les extensions auto-adjointes d'opérateurs semi-bornés .Pour cela ,on comence par rappeller les notions élémentaires des opérateurs bornés et non-bornés, puis on décrit la théorie de Von Neumann pour finir par le théorème qui fait l'objet de notre étude.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier **Allah** Tout-Puissant de m'avoir donné la force, la santé et la volonté de terminer ce travail.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur Mme **Bendahmane Hafida**, enseignante au département de mathématiques à la faculté des sciences exactes et informatique de l'université Abdelhamid Ibnbadis de Mostaganem, pour m'avoir accompagnée et guidée pas à pas tout au long de la réalisation de ce mémoire et pour sa disponibilité, ses encouragements et sa patience .

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements et ma gratitude au jury de discussion, le professeur **Berrabah Bendoukha**, et **Mme Limam Kheira** pour avoir accepté l'évaluation et la discussion de ce travail et l'avoir enrichi de conseils et d'orientations.

Aussi, je n'oublie pas de remercier mes professeurs **M. Belaïdi**, **M. Medeghri**, **Mme Bensikadour**, **M. Hammou et Mme Lazergui.**

Enfin, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements et ma gratitude à ma famille, en particulier mes parents car ceci est le fruit de tant d'années de leur éducation, de leur attention et de leur efforts, et pour m'avoir encouragé à poursuivre mes études sans oublier de remercier mes collegues de la promotion de 2021.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des extensions des opérateurs symétriques et plus particulièrement des opérateurs semi-bornés inférieurement, joue un rôle important dans la mécanique quantique, le lecteur peut par exemple consulter les réferences [5] et [10] qui traitent des applications de cette théorie. L'objet de notre travail fournit justement une méthode inspirée majoritairement de [8] et [14] qui permet de construire une extension autoadjoint pour un opérateur positif puis un opérateur semi-borné inférieurement, cette méthode décrite dans le théorème appelé "théorème d'extension de friedrichs" a été enoncée pour la première fois par J Von Neumann [13], mais les démonstrations du théorème complet sont dûes à Stones [16] et Friedrichs [7].
Ce mémoire est composé de quatre chapitres
Dans le premier chapitre , on introduit les notions élémentaires des opérateurs linèaires bornés dans les espaces de Hilbert .
On a pris soin d'énoncer le théorème de completion, qui affirme que tout espace préhilbertien peut être complété à un espace de Hilbert, avec une démonstration détaillée, car celle-ci sera déterminante pour la suite de notre étude .
Dans le second chapitre ont étés introduites les définitions et propriétés des opérateurs linèaires non-bornés dans les espaces de Hilbert dont les opérateurs symétriques, auto-adjoints et semi-bornés infèrieurement, plus particulierement les opérateurs positifs.
Le troisième chapitre quant à lui consacré à la théorie de Von Neumann, théorie qui décrit le construction d'une extension auto-adjointe d'un opérateur symétrique, ainsi que les conditions de l'existance de cette dernière, cela nous permet de déduire que tout opérateur symétrique positif admet au moins une extension auto-adjointe.
Le quatrième et dernier chapitre présente le théorème d'extension de Friedrichs pour les opérateurs symetriques positifs de prime-abord, puis les opérateurs semi-bornés infèrieurement plus généralement . Nous verrons ainsi une méthode différente de celle de Von Neumann pour la construction d'une extension auto-adjointe par ces opérateurs et garantit que cette extension est aussi positive dans le premier cas et semi-bornée dans le second.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Tout au long de ce mémoire $\Bbbk$ désigne $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

1.0.1 Les espaces vectoriels normés

Définition 1.0.1 *Soit E un $\Bbbk$ espace vectoriel* $(\Bbbk = \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$. *On appelle* norme sur E *toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois conditions suivantes ;*

$$\begin{aligned} i)\ \forall x &\in E : N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E \ (séparation) \\ ii)\ \forall x &\in E, \forall \lambda \in \Bbbk : N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \ (homogénéité) \\ iii)\ \forall x, y &\in E : N(x+y) \leq N(x) + N(y) \ (inégalité\ triangulaire) \end{aligned}$$

Notation : *On note $N(x) = \|x\|_E$ ou plus simplement $N(x) = \|x\|$ lorsqu'il n'y a pas d'embiguïté. Ainsi, on peut réecrire les trois conditions citées comme suit,*

$$\begin{aligned} i)\forall x &\in E : \|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E \\ ii)\forall x &\in E, \forall \lambda \in \Bbbk : \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E \\ iii)\ \forall x, y &\in E : \|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \end{aligned}$$

Définition 1.0.2 *On appelle espace vectoriel normé (EVN) tout espace vectoriel muni d'une norme, ou encore, tout couple* $(E, \|\|_E)$.

1.0.2 Convergence dans les espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Définition 1.0.3 *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si,*

$$\forall\varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : [n_0 \leq n \leq m \Longrightarrow \|x_m - x_n\|_E \prec \varepsilon]$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers une limite* $l \in E$ *si ;*

$$\forall\varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : [n_0 \leq n \Longrightarrow \|x_n - l\|_E \prec \varepsilon]$$

ou encore,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - l\|_E = 0$$

Définition 1.0.4 (les espaces de Banach) *On appelle espace de Banach tout EVN complet par rapport à sa distance induite. Aurement dit c'est un espace vectoriel normé pour lequel toute suite de Cauchy est convergente selon sa norme (et donc sa distance).*

1.0.3 Applications linéaires bornés dans les espaces vectoriels normés

Définition 1.0.5 *Soient* $(E, \|\|_E)$ *et* $(F, \|\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés sur le même corps* $\mathbb{k}$, $A \subseteq E, x_0 \in A$ *et* $f : E \longrightarrow F$ *une fonction. On dit que* f *est continue en* x_0 *si,*

$$\forall\varepsilon \succ 0, \exists\delta \succ 0, \forall x \in E : [\|x - x_0\|_E \prec \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \prec \varepsilon]$$

On écrit,

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f *est continue sur* A *si elle est continue pour tout élement appartenant à* A.

On suppose dans tout ce qui suit que $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{k}$ et que $f : E \longrightarrow F$ est une application.

Définition 1.0.6 *Une application* $f : E \longrightarrow F$ *est dite linéaire si elle vérifie la condition suivante,*

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(t)$$

Définition 1.0.7 *Une application est bornée si,*

$$\exists C \succ 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

on dit aussi que f *est un* operateur borné.

Théorème 1.0.1 *Soit* $f : (E, \|\|_E) \longrightarrow (F, \|\|_F)$ *une application linéaire, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) f *est continue sur* E.

ii) f *est continue en* $x_0 = 0$

iii) $\exists c \succ 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c \|x\|_E$

1.1 Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert

Définition 1.1.1 *Soit* E *un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel et* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *une application. On dit que* φ *est un produit scalaire sur* E *si elle vérifie les trois conditions suivantes ;*

Proposition 1.1.1 *1.* φ *est linéaire par rapport à la 1ère variable,*

$$\forall x, y, z \in E; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \varphi(\alpha x + \beta z, y) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(z, y)$$

2. φ *est hermitienne,*

$$(x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

3. φ *est définie positive,*

$$\forall x \in E : \varphi(x, x) \geq 0 \text{ et } [\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E]$$

On note l'application φ *par* $\langle , \rangle$ *et le couple* $(E, \langle , \rangle)$ *est appelé "* $\mathbb{C}-$*espace préhilbertien".*

De même lorsque E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel,

Définition 1.1.2 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel et* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application. On dit que* φ *est un produit scalaire sur* E *si elle vérifie les trois conditions suivantes ;*

Proposition 1.1.2 *1. φ est linéaire par rapport à la 1ère variable,*

$$\forall x, y, z \in E; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \varphi(\alpha x + \beta z, y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(z, y)$$

2. φ est symétrique,

$$(x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

3. φ est définie positive,

$$\forall x \in E : \varphi(x, x) \geq 0 \text{ et } [\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E]$$

On note l'application φ par $\langle , \rangle$ et le couple $(E, \langle , \rangle)$ est appelé "$\mathbb{R}-$espace préhilbertien".

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *Soit V un $\mathbb{k}$ espace vectoriel, alors pour tout $x, y \in E$;*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Définition 1.1.3 (Proposition) *Soit E un $\mathbb{k}$ espace préhilbertien, alors ,*

$$\|\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+; x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ (ou } \|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}\text{)}$$

est une norme associée au $\mathbb{C}-$produit scalaire $\langle , \rangle$ (ou φ) souvent appelée "norme hermitienne" et "norme euclidienne" dans le cas d'un $\mathbb{R}-$produit scalaire $\langle , \rangle$. En effet, il est aisé de vérifier que cette application ainsi définie constitue une norme sur E, et par conséquent, tout espace préhilbertien est aussi un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.4 (les espaces de Hilbert) *On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet par rapport à sa norme induite. Aurement dit c'est un espace préhilbertien pour lequel toute suite de Cauchy est convergente selon sa norme associée.*

Il découle de cette définition que tout espace de Hilbert est aussi un espace de Banach.

Exemple 1.1.1 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *espace des fonctions* L^2 *sur* $\mathbb{R}$ *pour :*$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$

Exemple 1.1.2 $l^2(\mathbb{N})$ *espace des suites complexes* $(x_n)_{n\geq 0}$ *telles que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$ *munies de :* $\langle x_n, y_n\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{y_n}$

1.1.1 Completion ou completé d'un espace préhilbertien

Le théorème ci-dessous permet d'étendre tout espace péhilbertien à un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.1 *Soit $(E, \langle , \rangle_E)$ un espace préhilbertien quelconque, alors il existe un espace de Hilbert $(H, \langle , \rangle_H)$ et une transformation $U : V \longrightarrow H$ tels que*
i) U est linéaire
ii) U est isométrique ie : $\forall x, y \in E : \langle Ux, Uy \rangle_H = \langle x, y \rangle_E$.
iii) $U(V) = \{Ux \diagup x \in E\}$ est dense dans H , ie : $\overline{U(E)} = H$ et si E est complet alors $U(E) = H$..
H est alors appelé "complété" ou "completion" de E.

Nous allons démontrer cela pour un $\mathbb{C}$ espace préhilbertien, le cas d'un $\mathbb{R}$ espace préhilbertien est similaire, pour cela, nous allons suivre le principe décrit dans [[6]] ainsi que [[14]] et établir la série de résultats énoncés ci-dessous :
Nous commençons tout d'abord par définir l'ensemble,

$$V = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \diagup x \text{ est une suite de Cauchy dans } E \right\} \tag{1.1.1}$$

et on y définit le relation suivante,
Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans V ,on dit que x est équivalante à y et on note xRy si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_E = 0$

$$xRy \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_E = 0 \tag{1.1.2}$$

Proposition 1.1.4 *La relation* (1.1.2) *ainsi définie , est une relation d'équivalance sur* V.

Preuve. i) R est réflexive

$$\forall x \in V : xRx$$

Effectivement, $\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_n\|_E &= 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_n\|_E = 0 \end{aligned}$$

et donc xRx.

ii) R est symétrique c'est à dire,

$$\forall x, y \in V : xRx \Rightarrow yRx$$

Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans V

$$\begin{aligned} xRy &\iff \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_E = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \|y_n - x_n\|_E = 0 \\ &\iff yRx \end{aligned}$$

iii) R est transitive c'est à dire $\forall x, y, z \in V$:

$$[xRy \wedge yRz] \Longrightarrow xRz$$

soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans V

$$\begin{aligned} xRy &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_E = 0 \\ yRz &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|y_n - z_n\|_E = 0 \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n - z_n\|_E &= \|x_n - y_n + y_n - z_n\|_E \\ &\leq \|x_n - y_n\|_E + \|y_n - z_n\|_E \\ \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - z_n\|_E &\leq \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_E + \lim_{n\to+\infty} \|y_n - z_n\|_E \\ &\leq 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - z_n\|_E = 0 \\ &\Longrightarrow xRz \end{aligned}$$

de i), ii) et iii) : R est une relation d'équivalance sur V. $\square$

On peut désormais définir la classe d'équivalance d'un élément $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ par la formule classique,

$$\dot{x} = \{y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V : yRx\}$$

On obtient directement des propriétés de la relation d'équivalence.

Corollaire 1.1.1 *Soient $x, y \in V$ alors ;*

$$soit\ \dot{x} = \dot{y}\ soit\ \dot{x} \cap \dot{y} = \phi$$

On note par $H = V \diagup R$ l'ensemble de toute les classes d'équivalences des suites de cauchy dans V. Les classes définissent une de ce fait une partition de l'ensemble H.
On a donc ,

$$H = \{\dot{x} \diagup \dot{x} \text{ est la classe d'équivalence de } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E\}$$

Lemme 1.1.1 *Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans V alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E$ existe.*

Preuve. Soient $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle_E - \langle x_m, y_m\rangle_E| &= |\langle x_n - x_m + x_m, y_n\rangle_E - \langle x_m, y_m\rangle_E| \\
&= |\langle x_n - x_m, y_n\rangle_E + \langle x_m, y_n - y_m\rangle_E| \\
&\leq |\langle x_n - x_m, y_n\rangle_E| + |\langle x_m, y_n - y_m\rangle_E| \\
&\leq \|x_n - x_m\|_E \|y_n\|_E + \|x_m\|_E \|y_n - y_m\|_E \\
&\quad \text{(Cauchy-Schwartz)}
\end{aligned}$$

$(x_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $(E, \langle,\rangle_E)$ donc
$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$m \geq n \geq n_1 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon_1$$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$m \geq n \geq n_2 \Rightarrow \|y_n - y_m\|_E < \varepsilon_2$$

De plus ,du fait que $(x_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, elles sont bornées c'est à dire,

$$\begin{aligned}\exists C_1 &> 0; \forall m \in \mathbb{N} : \|x_m\|_E \leq C_1 \\ \exists C_2 &> 0; \forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\|_E \leq C_2\end{aligned}$$

On pose à présent $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on obtient pour $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle_E - \langle x_m, y_m\rangle_E| &\leq \|x_n - x_m\|_E \|y_n\|_E + \|x_m\|_E \|y_n - y_m\|_E \\ &< C_2\varepsilon_1 + C_1\varepsilon_2\end{aligned}$$

Ce qui veut dire $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C}, ||)$ qui est complet et donc $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle$ existe et est finie. $\square$

Lemme 1.1.2 *La limite définie dans le lemme (1.1.1) ne depent pas des suites de Cauchy choisies pourvu qu'elles soient équivalantes.*

Preuve. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y' = (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$] deux suites équivalantes dans V. Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\langle x_n, y_n\rangle_E &= \langle x_n - x'_n + x'_n, y_n - y'_n + y_n\rangle_E \\ &= \langle x_n - x'_n, y_n - y'_n\rangle_E + \langle x'_n, y_n - y'_n\rangle_E + \langle x_n - x'_n, y'_n\rangle_E + \langle x'_n, y'_n\rangle_E \\ &\leq \|x_n - x'_n\|_E \|y_n - y\|_E + \|x'_n\|_E \|y_n - y'_n\|_E + \|x_n - x'_n\|_E \|y'_n\|_E + \|x'_n\|_E \|y'_n\|_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E \leq \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x'_n\|_E \|y_n - y\|_E + C_1 \lim_{n\to+\infty} \|y_n - y'_n\|_E \\ &\quad +C_2 \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x'_n\|_E + \lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle_E \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E \leq 0 + 0 + 0 + \lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle_E \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E \leq \lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle_E\end{aligned}$$

Par symétrie on déduit aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle_E \leq \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E$$

et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle_E = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_E$$

$\square$

Corollaire 1.1.2 *l'application*

$$\begin{array}{rcl}\langle,\rangle_H & : & H\times H\longrightarrow\mathbb{C}\\ (\dot{x},\dot{y}) & \longmapsto & \langle\dot{x},\dot{y}\rangle_H=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_n,y_n\rangle_E\end{array}$$

est bien définie.

Lemme 1.1.3 *Pour* $\dot{x},\dot{y}\in H$ *et* $\alpha\in\mathbb{C}$,*les opérations*

$$\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}=\dot{\widehat{x+y}}\\ \alpha\dot{x}=\dot{\widehat{\alpha x}}\end{cases}$$

sont bien définies.

Preuve. Soient $(x_n)_{n\to+\infty}$et $(x'_n)_{n\to+\infty}$ $\left[\text{resp } (y_n)_{n\to+\infty} \text{ et } (y'_n)_{n\to+\infty}\right]$ deux suites équivalantes dans E.Alors,

$$\begin{array}{rcl}\|(x_n+y_n)-(x'_n+y'_n)\|_E & = & \|(x_n-x'_n)+(y_n-y'_n)\|_E\\ & \leq & \|x_n-x'_n\|_E+\|y_n-y'_n\|_E \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0\end{array}$$

de meme,pour $\alpha\in\mathbb{C}$:

$$\|\alpha x_n-\alpha x'_n\|_E=\|\alpha\,(x_n-x'_n)\|_E\leq|\alpha|\,\|x_n-x'_n\|_E\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$$

$\square$

Lemme 1.1.4 *L'application*

$$\begin{array}{rcl}\langle,\rangle_H & : & H\times H\longrightarrow\mathbb{R}_+\\ (\dot{x},\dot{y}) & \longmapsto & \langle\dot{x},\dot{y}\rangle_H=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_n,y_n\rangle_E\end{array}$$

est un produit scalaire sur H.

Preuve. i) $\forall\dot{x},\dot{y},\dot{z}\in H,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl}\langle\alpha\dot{x}+\beta\dot{z},\dot{y}\rangle_H & = & \langle\dot{\widehat{\alpha x+\beta}}z,\dot{y}\rangle_H=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle\alpha x_n+\beta z_n,y_n\rangle_E\\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha\langle x_n,y_n\rangle_E+\beta\langle z_n,y_n\rangle_E\right)\\ & = & \alpha\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_n,y_n\rangle_E+\beta\lim\limits_{n\to+\infty}\langle z_n,y_n\rangle_E\\ & = & \alpha\langle\dot{x},\dot{y}\rangle_H+\beta\langle\dot{z},\dot{y}\rangle_H\end{array}$$

ii) $\forall \dot{x}, \dot{y} \in H$:

$$\overline{\langle \dot{x}, \dot{y} \rangle_H} = \overline{\lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y_n \rangle_E} = \lim_{n \to +\infty} \overline{\langle x_n, y_n \rangle_E} = \lim_{n \to +\infty} \langle y_n, x_n \rangle_E = \langle \dot{y}, \dot{x} \rangle_H$$

iii) $\forall \dot{x} \in H$:

$$\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_H = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, x_n \rangle_E \geq 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N} : \langle x_n, x_n \rangle_E \geq 0$$

de plus,

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_H = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, x_n \rangle_E = 0 \quad & \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_n\|_E^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \left\| \lim_{n \to +\infty} x_n \right\|_E^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \left\| \lim_{n \to +\infty} x_n \right\|_E = 0 \\ & \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_n - 0\|_E = 0 \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente dans $(E, \langle , \rangle_E)$ vers 0.Sachant que la suite stationnaire nulle converge aussi vers 0.

On déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite stationnaire nulle sont équivalantes, et par conséqence appartiennes à la meme classe d'équivalance, d'où $\dot{x} = \dot{0}$. □

Proposition 1.1.5 $(H, \langle , \rangle_H)$ *est complet c'est à dire un espace de Hilbert .*

Preuve. On va montrer que toute suite de Cauchy est convergente dans $(H, \|\|_H)$.Soit $\left(\dot{x}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H. On rappelle que chaque élément de cette suite représente une classe d'équivalance de suites de Cauchy dans E qui sont équivalentes, ainsi pour $n \in \mathbb{N}$ (fixé), si $x^{(n)} = \left(x_l^{(n)}\right)_{l \in \mathbb{N}}, y^{(n)} = \left(y_l^{(n)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ sont des éléments dans V,

$$\dot{x}^{(n)} = \left\{ y^{(n)} \text{ dans } V : y^{(n)} R x^{(n)} \right\}$$

Il suffit donc de choisir une suite quelconque dans $\dot{x}^{(n)}$ pour la representer ,soit par exemple $x^{(n)} = \left(x_l^{(n)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ et on a,

$$\left(x_l^{(1)}\right)_{l \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ l_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall m, l \in \mathbb{N} : m \geq l_1 \text{ et } l \geq l_1 \Longrightarrow \left\| x_l^{(1)} - x_m^{(1)} \right\|_E < \varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$ et $m = l_1$:

$$\exists l_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall l \geq l_1 \Longrightarrow \left\| x_l^{(1)} - x_{l_1}^{(1)} \right\|_E < 1$$

de la même manière,

$$\begin{array}{lll}\left(x_l^{(2)}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} & \Longrightarrow & \exists\ l_2\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall\ l\in\mathbb{N}: l\geq l_2\geq l_1 \Longrightarrow \left\|x_l^{(2)}-x_{l_2}^{(2)}\right\|_E<\dfrac{1}{2} \\ \left(x_l^{(3)}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} & \Longrightarrow & \exists\ l_3\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall\ l\in\mathbb{N}: l\geq l_3\geq l_2\geq l_1 \Longrightarrow \left\|x_l^{(3)}-x_{l_3}^{(3)}\right\|_E<\dfrac{1}{3} \\ \left(x_l^{(n)}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} & \Longrightarrow & \exists\ l_n\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall\ l\in\mathbb{N}:\ l\geq l_n\geq ...\geq l_1 \Longrightarrow \left\|x_l^{(n)}-x_{l_n}^{(n)}\right\|_E<\dfrac{1}{n}\end{array} \tag{1.1.3}$$

(On peut toujours ordonner les éléments de $(\dot{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour que$l_n\geq ...\geq l_2\geq l_1$)

i) Soit à présent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_n=x_{l_n}^{(n)}$.On montre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que est une suite de Cauchy dans $(E,\|\|_E)$ .Soit $\epsilon>0$

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\|_E &= \left\|x_n-x_l^{(n)}+x_l^{(n)}-x_l^{(m)}+x_l^{(m)}-x_m\right\|_E \\ &\leq \left\|x_n-x_l^{(n)}\right\|_E+\left\|x_l^{(n)}-x_l^{(m)}\right\|_E+\left\|x_l^{(m)}-x_m\right\|_E \\ &\leq \left\|x_{l_n}^{(n)}-x_l^{(n)}\right\|_E+\left\|x_l^{(n)}-x_l^{(m)}\right\|_E+\left\|x_l^{(m)}-x_{l_m}^{(m)}\right\|_E \\ &\leq \left\|x_{l_n}^{(n)}-x_l^{(n)}\right\|_E+\left[\ \left\|x_l^{(n)}-x_l^{(m)}\right\|_E-\left\|\dot{x}^{(n)}-\dot{x}^{(m)}\right\|_H\ \right] \\ &\quad +\left\|\dot{x}^{(n)}-\dot{x}^{(m)}\ \right\|_H+\left\|x_l^{(m)}-x_{l_m}^{(m)}\right\|_E\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

de (1.1.3) :

$$\begin{aligned}\text{pour } l &\geq l_n: \left\|x_{l_n}^{(n)}-x_l^{(n)}\right\|_E<\frac{1}{n} \\ \text{et } l &\geq l_m:\ \left\|x_l^{(m)}-x_{l_m}^{(m)}\right\|_E<\frac{1}{m}\end{aligned}$$

De plus, par définition

$$\left\|\dot{x}^{(n)}-\dot{x}^{(m)}\right\|_H=\lim_{l\to+\infty}\left\|x_l^{(n)}-x_l^{(m)}\right\|_E$$

Alors

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_{(n,m)}\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall n,m\in\mathbb{N}:\left[N_{(n,m)}\leq n \text{ et } N_{(n,m)}\leq m\Longrightarrow\left|\left\|x_l^{(n)}\text{-}x_l^{(m)}\right\|_E\text{-}\left\|\dot{x}^{(n)}\text{-}\dot{x}^{(m)}\right\|_H\right|<\frac{\varepsilon}{4}\right]$$

Et par les propriétés de la valeur absolue

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_{(n,m)}\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall n,m\in\mathbb{N}:\left[N_{(n,m)}\leq n \text{ et } N_{(n,m)}\leq m\Longrightarrow\left\|x_l^{(n)}\text{-}x_l^{(m)}\right\|_E\text{-}\left\|\dot{x}^{(n)}\text{-}\dot{x}^{(m)}\right\|_H<\frac{\varepsilon}{4}\right]$$

Enfin, on a supposé que $\left(\dot{x}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H, \|\|_H)$ donc,

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon &> 0\ \exists\ \tilde{N}_{(n,m)} \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, m \in \mathbb{N} :\\ &\left[\tilde{N}_{(n,m)} \leq n \text{ et } \tilde{N}_{(n,m)} \leq m \Longrightarrow \left\|\dot{x}^{(n)} - \dot{x}^{(m)}\right\|_H < \frac{\varepsilon}{4}\right]\end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $N \geq \max\left\{\tilde{N}, \frac{4}{\varepsilon}\right\}$. Pour tout $n, m \geq N$ on a

$$\begin{cases} N \geq \frac{4}{\varepsilon} \\ n \geq N \text{ et } m \geq N \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n \geq \frac{4}{\varepsilon} \\ m \geq \frac{4}{\varepsilon} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{4} \end{cases}$$

et donc ,

$$\begin{aligned}\left\|x_{l_n}^{(n)} - x_l^{(n)}\right\|_E &< \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{4}\\ \left\|x_l^{(m)} - x_{l_m}^{(m)}\right\|_E &< \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

mais aussi,

$$\left[N \geq \tilde{N} \Longrightarrow \left\|x_l^{(n)} - x_l^{(m)}\right\|_E - \left\|\dot{x}^{(n)} - \dot{x}^{(m)}\right\|_H < \frac{\varepsilon}{4}\right]$$

Ainsi, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiants $n, m \geq N$ et pour $l \geq \max\{N_{(n,m)}, l_n, l_m\}$ on aura dans (1.1.4)

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|_E &\leq \left\|x_{l_n}^{(n)} - x_l^{(n)}\right\|_E + \left[\left\|x_l^{(n)} - x_l^{(m)}\right\|_E - \left\|\dot{x}^{(n)} - \dot{x}^{(m)}\right\|_H\right] + \left\|\dot{x}^{(n)} - \dot{x}^{(m)}\right\|_H + \left\|x_l^{(m)} - x_{l_m}^{(m)}\right\|_E\\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E.

ii)Soit $\dot{x}$ la classe d'équivalence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On montre que $\dot{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dot{x}^{(n)}$. Ici aussi on peut choisir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on a définie ci-dessus.

Soit $\varepsilon > 0$, on a par définition

$$\left\|\dot{x} - \dot{x}^{(n)}\right\|_H = \lim_{n\to+\infty} \left\|x_m - x_m^{(n)}\right\|_E = \lim_{m\to+\infty} \left\|x_{l_m}^{(m)} - x_m^{(n)}\right\|_E$$

ou bien encore,

$$\left\|x_{l_m}^{(m)} - x_m^{(n)}\right\|_E \leq \left\|x_{l_m}^{(m)} - x_{l_n}^{(n)}\right\|_E + \left\|x_{l_n}^{(n)} - x_m^{(n)}\right\|_E$$

(inégalité triangulaire)

et comme $x_n = \left(x_{l_n}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon &> 0, \exists\grave{N} \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, m \in \mathbb{N} : \\ &\left[n \geq \grave{N} \text{ et } m \geq \grave{N} \Longrightarrow \left\|x_{l_m}^{(m)} - x_{l_n}^{(n)}\right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}\right]\end{aligned}$$

D'autre part de (1.1.3), pour $m \geq l_n$ on a $\left\|x_{l_n}^{(n)} - x_m^{(n)}\right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$
On pose $N \in \mathbb{N} : N \geq \max\{\grave{N}, \frac{2}{\varepsilon}\}$.Alors pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geq N$ et tout $m \in \mathbb{N} : m \geq \max\{\grave{N}, l_n\}$ on aura (même principe que plus haut)

$$\begin{aligned}\left\|x_{l_m}^{(m)} - x_m^{(n)}\right\|_E &\leq \left\|x_m^{(m)} - x_{l_n}^{(n)}\right\|_E + \left\|x_{l_n}^{(n)} - x_m^{(n)}\right\|_E \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\|\dot{x} - \dot{x}^{(n)}\right\|_H = \lim_{n\to+\infty} \left\|x_m - x_m^{(n)}\right\|_E < \varepsilon$$

Ce qui veut dire que la suite $\left(\dot{x}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dot{x}$,et donc $(H, \|\|_H)$ est complet. □

Proposition 1.1.6 *On définit l'application,*

$$U : E \longrightarrow H, x \longmapsto Ux = \dot{x}$$

où $\dot{x}$ représente la classe d'équivalance de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$ [c'est à dire toutes les suites de Cauchy équivalentes à la suite stationnaire de terme général x].Alors
1) U est linéaire et vérifie

$$\forall x, y \in V : \langle Ux, Uy\rangle_H = \langle x, y\rangle_E$$

2)$U(E) = \{Ux/x \in E\}$ est dense dans H, c'est à dire

$$\left(\overline{U(E)}\right) = H$$

3) Si $(E, \|\|_E)$ est complet ,alors $U(E) = H$.

Preuve. 1-1\ U est une application linéaire :$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E$

$$U(\alpha x + \beta y) = \dot{\widehat{\alpha x + \beta y}} = \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} = \alpha Ux + \beta Uy$$

1-2\ U est isométrie c'est à dire

$$\forall x, y \in E : \langle Ux, Uy\rangle_H = \langle x, y\rangle_E$$

on a par définition :

$$\langle Ux, Uy\rangle_H = \langle \dot{x}, \dot{y}\rangle_H = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, y_n\rangle_E = \langle x, y\rangle_E$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\left[\text{resp } (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ est la suite stationnaire de terme général x [resp y] .

Il en découle que U est injective !

2\ $U(E)$ est dense dans H :

Il faut et il suffit de montrer que tout élément de H est la limite d'une suite de $U(E)$ .Pour cela, on montre que pour $\dot{x} \in H$ quelconque, la suite $(U(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans $(H, \|\|_H)$ vers $\dot{x}$. Soit $x \in \dot{x}$ [On rappelle que $\dot{x}$ est la classe d'équivalence de la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans V] et soit $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $y_m = U(x_m)$,$m \in \mathbb{N}$ [$\dot{y}_m$ est par la définition posée pour U, la classe d'équivalence de la suite stationnaire de terme général x_m]. On a,

$$\begin{aligned} \|\dot{x} - U(x_m)\|_H &= \|\dot{x} - \dot{y}_m\|_H \\ &= \lim_{n\to+\infty}\|x_n - x_m\|_E \end{aligned}$$

Or, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ,

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : \\ n &\geq n_0 \text{ et } m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon \end{aligned}$$

Enfin pour $m \geq n \geq n_0$

$$\|\dot{x} - U(x_m)\|_H = \lim_{n\to+\infty}\|x_n - x_m\|_E \underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3\ Si E est complet alors $U(E) = H$

Soit $\dot{x} \in H$, il nous faut trouver au moins un élément $x \in E$ tel que $Ux = \dot{x}$.De la partie (2) $\left(\overline{U(E)} = H\right)$

Pour tout $\dot{x} \in H$: $\dot{x} = \lim_{n\to+\infty} U(x_n)$

Mais par définition de U ,$(U(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et U est une isométrie ,en particulier

$$\|U(x_m)\|_H^2 = \langle U(x_m), U(x_m)\rangle_H = \langle x_m, x_m\rangle_E = \|x_m\|_E^2$$

Donc , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans E, mais $(E, \|\|_E)$ étant complet ,$\exists x \in E$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.Alors,

$$\begin{aligned} Ux &= U(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} U(x_n) = \dot{x} \\ &\quad (\ U \text{ isométrie donc continue}) \end{aligned}$$

□

Exemple 1.1.3 *La completé de* $C([a,b],\mathbb{C})$ *par rapport au produit scalaire* $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ *est confondu avec* $L^2([a,b],\mathbb{C})$.

Corollaire 1.1.3 *On déduit que* $U : E \longrightarrow U(V)$ *est bijective, unitaire et donc* V *et* $U(V)$ *sont isomorphes .On peut imaginer* E *comme un sous espace de* H*.*

Corollaire 1.1.4 *Dans le cas où* E *est complet ,* E *et* $U(E) = H$ *sont isomorphes.* E *devient son propre complété.*

1.2 Les opérateurs linéaires bornés

On suppose dans tout ce qui suit que $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{k}$ et que $f : E \longrightarrow F$ est une application.

Définition 1.2.1 *Une application* $f : E \longrightarrow F$ *est dite linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes,*

$$\begin{aligned} i)\forall x, y &\in E : f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ \textit{(additive)} \\ ii)\forall x &\in E, \forall\lambda \in \mathbb{k} : f(\lambda x) = \lambda f(x) \ \ \textit{(homogène)} \end{aligned}$$

Lorsque $F = \mathbb{k}$, f *est dite "fonctionelle linéaire"*

Définition 1.2.2 *Une application est bornée si,*

$$\exists c \succ 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c\,\|x\|_E$$

on dit aussi que f *est un* operateur borné.

Exemple 1.2.1 *On muni* $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ *deux normes suivantes, pour tout* $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(t)|\,dt, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi f^2(t)\,dt}$$

On pose

$$A : (E, \|\|_2) \longrightarrow (E, \|\|_1), f \longmapsto A(f)$$

avec $A(f)(t) = f(t)\sin t$, *alors* A *est un opérateur linéaire borné (application linéaire bornée).*

Théorème 1.2.1 *Soit* $f : (E, \|\|_E) \longrightarrow (F, \|\|_F)$ *une application linéaire, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) f *est continue sur* E.

ii) f *est continue en* $x_0 = 0$

iii) $\exists c \succ 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$

iv) f *est est lipschitzienne.*

Définition 1.2.3 *On définit (ou rappelle) les notions suivantes ;*

$\mathcal{L}(E,F)$ *est l'espace des applications continues de* E *dans* F.

Lorsque $E = F$: $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$

Proposition 1.2.1 *Soit* $f : (E, \|\|_E) \longrightarrow (F, \|\|_F)$ *une application linéaire continue. On pose,*

$$\begin{aligned} N_1 &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \left(\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\right) \\ N_2 &= \sup_{x \in S(0,1)} (\|f(x)\|_F) \\ N_3 &= \sup_{x \in B_f(0,1)} (\|f(x)\|_F) \\ N_4 &= \inf\{c \succ 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E\} \end{aligned}$$

Alors, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4$

Proposition 1.2.2 *L'application,*

$$\|\|_{\mathcal{L}(E,F)} : \mathcal{L}\left(E,F\right) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = N_1 = N_2 = N_3 = N_4$$

est une norme pour $\mathcal{L}\left(E,F\right)$ appelé "norme subordonnée à $\mathcal{L}\left(E,F\right)$"

Théorème 1.2.2 *Cette norme est aussi noté $|||\,|||$, et est appelée dans ce cas "triple norme" (notation souvent utilisée dans les espaces matriciels)*

Théorème 1.2.3 (Représentation de Riesz)

Soit $(H, \langle , \rangle_H)$ un $\Bbbk-$espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow \Bbbk$ une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f_y(x) = \langle y, x\rangle_H$ c'est à dire,

$$\exists! y \in H, \forall x \in H : f_y(x) = \langle y, x\rangle_H$$

et on a $\|f_y\|_{\mathcal{L}(H,\Bbbk)} = \|y\|_H$

Chapitre 2

Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce chapitre sont présentées les principales définitions et propriétés des opérateurs non bornés, fermés, symétriques, autoadjoints et semi-bornés.

2.1 Définitions des opérateurs non bornés

Définition 2.1.1 *Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert. Un opérateur T (non forcement borné) dans H est une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D\,(T) \subset H$ et dont l'image est contenue dans H. On suppose dans la suite que $D\,(T)$ est dense dans H, c'est à dire que $\overline{D\,(T)} = H$.*

– On appelle $G(T)$ "graphe de l'opérateur T" le sous-espace de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{(x,\ Tx) \text{ tel que } x \in D(T)\}\,.$$

– On appelle $N(T)$ "noyau de l'opérateur T " le sous-espace de H défini par :

$$N(T) = \{x \in D(T) \text{ tel que } Tx = 0\}$$

On appelle $R(T)$ "image de l'opérateur T " le sous-espace de H défini par :

$$R(T) = \{y \in H,\ \exists x \in D(T) :\ y = Tx\ \}$$

Exemple 2.1.1 (opérateur non borné) *On considère dans* $L^2(\mathbb{R})$ *l'opérateur* T *défini sur* $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / Tf \in L^2(\mathbb{R})\}$ *par l'équation,*

$$Tf = i\frac{df}{dx},$$

La majorité des propriétés décrites ci-dessous sont issues de [2], [14] et [18]

Définition 2.1.2 *Un opérateur* $T \in L(H)$ *est appelé isométrie si ,*

$$\forall\ x,\ y \in H : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

Il s'en suit directement que $\forall\ x \in H : \|Tx\| = \|x\|$ *.*

Définition 2.1.3 *Un opérateur* $T \in L(H)$ *est dit unitaire si* T *est une isométrie pour laquelle* $R(T) = H$ *(surjective).*

Définition 2.1.4 *Deux opérateurs* T *et* S *sont dits égaux, et on note* $T = S$*, si*

$$D(T) = D(S) \ \text{ et } Tx = Sx, \forall\ x \in H \quad (i.e.) \quad G(T) = G(S)$$

L'opérateur S *est une extension de l'opérateur* T *ou bien* T *est la restriction de* S *si*

$$D(T) \subset D(S) \quad \text{ et } \quad Tx = Sx,\ \forall\ x \in D(T) \qquad (i.e.)\ \ G(T) \subset G(S),$$

On écrit : $T \subset S$*.*

Opérations algébriques :

– La somme

$(S+T)(x) = Sx + Tx$ avec

$$D(S+T) = D(S) \cap D(T).$$

– Le produit :

$(S.T)(x) = S(T(x))$ avec

$$D(S.T) = \{x \in D(T) \text{ tel que} : T(x) \in D(S)\}.$$

– Les lois usuelles d'associativité

$$(R+S)+T=R+(S+T),\ (RS)T=R(ST)$$

– Les lois de distributivité

$$(R+S)T=RT+ST,\ T(R+S)\supset TR+TS$$

Remarque 2.1.1 *Il se peut que*$(R+S)x\in D(T)$ *même si* Rx *ou* Sx *n'est pas dans* $D(T)$.

– Multiplication par scalaire :

Si $\alpha=0$ Alors $D(\alpha T)=H$ et $\alpha T=0$.

Si $\alpha\neq 0$ Alors $D(\alpha T)=D(T)$ et $(\alpha T)x=\alpha(Tx)$ pour $x\in D(T)$.

2.2 Opérateurs fermés

Définition 2.2.1 1. *Un opérateur* T *défini dans un espace de Hilbert* H *est dit fermé si et seulement si son graphe* $G(T)$ *est un sous-espace fermé de* $H\times H$, *c'est à dire :* $G(T)=\overline{G(T)}$.

2. *L'opérateur* T *est dit fermable si* $\overline{G(T)}$ *représente le graphe d'un opérateur.*

Remarque 2.2.1 *Si* T *est un opérateur fermable, alors il existe d'aprés* 2.*de la définition 2.2.1 un opérateur* $\overline{T}$ *tel que* $G\left(\overline{T}\right)=\overline{G(T)}$, *ce dernier est unique et il est évident que* $\overline{T}$ *est fermé. Comme* $G(T)\subset\overline{G(T)}=G\left(\overline{T}\right)$, *on voit que* $\overline{T}$ *est une extension de* T, *c'est même la plus petite extension de* T *qu'on appelle "fermeture de* T*"*

Proposition 2.2.1

1. *On dit que* T *est fermé si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* $D(T)$ *convergente vers* x *telle que la suite des images* $(Tx_n)_n$ *converge vers* y *dans* H, *on a*

$$x\in D(T)\ \text{ et }\ y=Tx.$$

2. *Un opérateur* T *est fermable, si pour chaque suite :* $(x_n)_n\subset D(T)$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ *pour laquelle la suite des images* $(Tx_n)_n$ *soit convergente on a,*

$$\lim_{n\to+\infty}Tx_n=0.$$

Proposition 2.2.2 *Si l'opérateur* T *est fermé, alors tout opérateur* $(T-\lambda I)$ *est fermé pour* $\lambda\in\mathbb{C}$. *De plus, si l'opérateur* T *est fermé et* T^{-1}*existe, alors* T^{-1} *est fermé.*

2.3 Adjoint d'un opérateur non-borné.

Définition 2.3.1 *Soit T un opérateur linéaire défini sur $D(T)$ tel que $\overline{D(T)} = H$. On définit l'opérateur adjoint $T^* : H \to H$ comme suit, on pose*

$$D(T^*) = \{y \in H \ / \ \exists \ h \in H : \ \langle Tx, \ y\rangle = \langle x, \ h\rangle \, , \ \forall x \in D(T)\} \, .$$

Alors, la relation $T^*y = h$ définit ainsi un opérateur comme suit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \, , \ \forall x \in D(T), \ \forall y \in D(T^*).$$

On appelle T^* l'opérateur adjoint de T.

Théorème 2.3.1 *Soient S et T deux opérateurs non bornés densément définis. Alors :*

1. *si TS est densement défini alors on a $S^*T^* \subset (TS)^*$.*
2. *si S est borné alors $S^*T^* = (TS)^*$.*

Théorème 2.3.2 *Soint S et T deux opérateurs de H_1 dans H_2*

1. *Si T est densement défini, alors on a $(aT)^* = \overline{a}T^*, \overline{a}$ étant le conjugué de $a \in \mathbb{C}^*$.*
2. *Si $T + S$ est densement défini, alors $T^* + S^* \subset (T+S)^*$*
3. *Si S est borné et T dense dans H, alors on a $T^* + S^* = (T+S)^*$*

Proposition 2.3.1 *Si T est un opérateur linéaire densement défini dans H pour lequel T^{-1} existe et $\overline{D(T^{-1})} = H$. Alors,*

$$\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$$

Théorème 2.3.3 *Pour chaque opérateur T à domaine $D(T)$ dense dans H, le complèment orthogonal de l'image est le noyau de l'adjoint (i.e.) :*

$$R(T)^{\perp} = N(T^*) \quad et \quad \overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$$

si de plus $R(T)$ est fermé alors,

$$R(T) = N(T^*)^{\perp}$$

(i.e.) L'équation $Tx = y$ admet une solution x si et seulement si, $y \in N(T^*)^{\perp}$.

Preuve. Soit $z \in R(T)^{\perp}$, alors

$$\langle z,\ Tu\rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Et on a,

$$\langle Tu,\ z\rangle = \langle u, T^{*}z\ \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

D'où,

$$T^{*}z = 0 \quad \text{c'est à dire } z \in N(T^{*}).$$

Soit $z \in N(T^{*})$. Alors $T^{*}z = 0$ et,

$$\langle u, T^{*}z\ \rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Et on a

$$\langle u, T^{*}z\ \rangle = \langle Tu,\ z\rangle = 0, \forall u \in D(T)$$

Ce qui implique que

$$z \in R(T)^{\perp}$$

Si $R(T)$ est fermé alors : $R(T) = R(T)^{\perp\perp} = N(T^{*})^{\perp}$. □

2.4 Opérateurs symétriques, autoadjoints, semi-bornés inférieurement et positifs

Graphes et opérateur symétrique

Si H est un espace de Hilbert, alors $H \times H$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert en définissant le produit scalaire suivant, pour $(a, b)\,,\ (c, d) \in H \times H$ par :

$$\langle (a, b)\,, (c, d)\rangle_{H\times H} = \langle a, c\rangle + \langle b, d\rangle$$

En particulier la norme dans $H \times H$ donné par :

$$\|(a, b)\|^{2}_{H\times H} = \|a\|^{2} + \|b\|^{2}$$

A patir de ce dernier, on définit le produit scalaire suivant sur $D(T)$ comme suit ; pour tout $f,\, g \in D(T)$:

$$\begin{cases} \langle f,g\rangle_{D(T)} = \langle (f,T(f)),(g,T(g))\rangle_{H\times H} = \langle f,g\rangle + \langle Tf,Tg\rangle \\ \|f\|^2_{D(T)} = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \end{cases}$$

Théorème 2.4.1 *T est fermé si est seulement si $\left(D(T),\ \langle,\rangle_{D(T)}\right)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 2.4.2 *Tout opérateur borné est fermable. Un opérateur borné T est fermé si est seulement si $D(T)$ est fermé. Si T est borné alors $D\left(\overline{T}\right) = \overline{D(T)}$; $\overline{T}$ est une extension (d'opérateur borné) de T sur $\overline{D(T)}$.*

Théorème 2.4.3 *Un opérateur T est fermable si est seulement s'il admet une extension fermée.*

Remarque 2.4.1 *Par le théorème 2.4.3, Il arrive que l'on définisse un opérateur fermable comme étant un opérateur qui admet une extension fermée.*

Théorème 2.4.4 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, Alors T^* est un opérateur fermé. En particulier les opérateurs autoadjoints sont fermés.*

Théorème 2.4.5 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, alors : T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense dans H et $\bar{T} = T^{**}$.*

Définition 2.4.1 *Soit T un opérateur à domaine dense dans H.*
- On dit que T est symétrique si $T \subset T^*$, i.e. :

$$D(T) \subseteq D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x;\ \forall x \in D(T)$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(T),\ \forall y \in D(T)\ : \langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle .$$

- On dit que T est autoadjoint si $T = T^*$, i.e. :

$$D(T) = D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x;\ \forall x \in D(T)$$

Exemple 2.4.1 *On considère l'opérateur T défini par l'équation :* $Tf = if'$ *avec* $H = L^2[0,1]$ *et* $D(T) = \{f \in C_0[0,1] : f(0) = f(1) = 0\} \subset H^1$.

Montrons que l'opérateur T est symétrique c'est à dire, montrons que

$$\forall\ f,\ g \in D(T):\ \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$$

on a

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 Tf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 if'\overline{g(x)}dx$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \left(i\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)\right) - i\int_0^1 f(x)g'(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)\left(\overline{ig'(x)}\right)dx = \langle f, Tg\rangle .\end{aligned}$$

Donc, T est un opérateur symétrique.

Théorème 2.4.6 *Soit T un opérateur densement défini sur H, si T est symétrique alors $\langle Tf,\ f\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in D(T)$.*

Preuve. On a pour tout $f \in D(T)$;

$$\langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \overline{\langle Tf, f\rangle} \Rightarrow \langle Tf, f\rangle \in \mathbb{R}$$

□

Propriétiés 2.4.1

1. *Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque* $D(T) \subset D(T^*)$ *est dense.*
2. *Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T avec* $T \subset T^{**} \subset T^*$.
3. *Si T est un opérateur symétrique fermé alors $T = T^{**} \subset T$.*
4. *Si T est un opérateur autoadjoint alors $T = T^{**} = T^*$.*

[1] Cet ensemble est dense Dans H , (voir [2],[18])

Théorème 2.4.7 *Tout opérateur symétrique T est fermable, de plus $\overline{T}$ est aussi symétrique.*

Preuve. Comme $T \subset T^*$ et T^* est fermé. Alors T est fermable et $\overline{T}$ existe. On montre que $\overline{T}$ est symétrique.

Soient $f, g \in D(\overline{T})$, Alors ils existent deux suites $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ de $D(T)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \ ; \ \lim_{n\to+\infty} g_n = g$$

et

$$\overline{T}\ f = \lim_{n\to+\infty} Tf_n,\ \overline{T}\ g = \lim_{n\to+\infty} Tg_n.$$

Alors,

$$\left\langle \overline{T}\ f,\ g\right\rangle = \left\langle \lim_{n\to+\infty} Tf_n,\ \lim_{n\to+\infty} g_n \right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle Tf_n, g_n\ \right\rangle = \lim_{n\to+\infty} T\left\langle f_n,\ Tg_n\right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{n\to+\infty} f_n,\ \lim_{n\to+\infty} Tg_n \right\rangle = \left\langle f,\ \overline{T}\ g\right\rangle$$

□

Proposition 2.4.1 *Soient T est un opérateur symétrique, λ une valeur propre de T et $f \in D(T)$ son vecteur propre associé ; autrement dit f est non nul et vérifie : $Tf = \lambda f$. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve. En effet,

$$\langle Tf, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \lambda \langle f, f\rangle$$

et,

$$\langle f, Tf\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \bar{\lambda} \langle f, f\rangle$$

Or, T est symétrique,

$$\lambda \langle f, f\rangle = \langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \bar{\lambda} \langle f, f\rangle$$

c'est à dire,

$$\left(\lambda - \bar{\lambda}\right) \langle f, f\rangle = 0$$

Etant donné que f est un vecteur propre, il est non nul ce qui implique que $\langle f, f\rangle \neq 0$ et donc forcement $\lambda = \bar{\lambda}$. □

Définition 2.4.2 *Un opérateur densement défini sur D est semi-bornée inférieurement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\langle Tx, x\rangle \geq C \langle x, x\rangle \text{ pour tout } x \in D.$$

Définition 2.4.3 *Un opérateur T densement défini sur D est positif si,*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D$$

Remarque 2.4.2 *Les opérateurs positifs sont des opérateurs semi-bornés inférieurement.*

Proposition 2.4.2 *Si T est un opérateur symétrique et borné sur H alors T est auto-adjoint.*

Preuve. Si T est symétrique et bornée, alors il est défini partout et donc auto-adjoint. □

Proposition 2.4.3 *Soient T, S deux opérateurs autoadjoints tels que $T \subset S$, alors $T = S$.*

Théorème 2.4.8 *Soit T est un opérateur autoadjoint.*

a) Si T est inversible, alors son inverse T^{-1} est autoadjoint.

b) L'opérateur $T + \alpha I_H$ est autoadjoint $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Chapitre 3

Extension d'un opérateur symétrique

Ce chapitre traite de la construction des extensions d'un opérateur symétrique et présente la théorie de Von Neumann.

Rappel : Si B est une extension d'un opérateur symétrique T alors $T \subset B$ et par suite $B^* \subset T^*$

mais si B est un opérateur symétrique : $B \subset B^*$ donc :

$T \subset B \subset B^* \subset T^*$(i.e.) chaque extension symétrique d'un opérateur T est une restriction de l'opérateur T^*.

3.1 Espaces de défaut d'un opérateur symétrique

Définition 3.1.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. On note*

$$R(T - \lambda I) = R_\lambda \text{ et } R(T - \overline{\lambda} I) = R_{\overline{\lambda}}$$

R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont deux sous-espaces de H et on note par $\aleph_\lambda = H \ominus R_\lambda$, $\aleph_{\overline{\lambda}} = H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ les compléments orthogonaux de R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$, ces derniers sont appelé les espaces de défaut de l'opérateur T.

Proposition 3.1.1 *Les espaces de défaut $\aleph_\lambda$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$sont les espaces de solutions de l'opérateur T^* associés aux valeurs propres $\overline{\lambda}$et λ respectivement.*

Preuve. Si $x \in \aleph_\lambda$ alors pour chaque vecteur $y \in D(T)$, on a :$\langle Ty - \lambda y; x\rangle = 0$, donc :

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^* x\rangle$$

Alors,

$$\langle y, T^* x\rangle = \langle y, \overline{\lambda} x\rangle$$

Et par la définition de l'opérateur T^*

$$x \in D\left(T^*\right) \ et \ T^* x = \overline{\lambda} x$$

Si, inversement, l'équation $T^* x = \overline{\lambda} x$ est vérifie, alors pour un $y \in D(T)$ arbitraire on a :

$$\langle y, T^* x\rangle = \langle y, \overline{\lambda} x\rangle$$

Alors

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, \overline{\lambda} x\rangle$$

Donc :

$$\langle Ty - \lambda y; x\rangle = 0 \ (i.e) \ x \in \aleph_\lambda$$

□

3.2 Transformation de CAYLEY

Définition 3.2.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. L'opérateur :*

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$$

est appelé la transformation de CAYLEY de l'opérateur T.

Cette définition a un sens car : $\overline{\lambda}$ n'est pas une valeur propre (voir proposition 2.4.1) de T donc
$(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$ existe.

Proposition 3.2.1 *1. La transformation de CAYLEY V d'un opérateur symétrique T est un opérateur isométrique avec $D(V) = R_{\overline{\lambda}}$ et $R\left(V\right) = R_\lambda$.*

2. L'ensemble de $Vy - y$ (ou $y - Vy$) tel que $y \in D(V)$ est dense dans H.

3. Chaque opérateur V qui vérifie la $2^{ème}$ condition est la transformation de CAYLEY d'un opérateur symétrique $T = \left(\lambda I - \overline{\lambda} V\right)\left(I - V\right)^{-1}$.

Preuve. 1.-a-On montre que $D(V)=R_{\overline{\lambda}}$. On a

$$V=(T-\lambda I)(T-\overline{\lambda}I)^{-1}$$

pour chaque $y\in D(V)$ on a :

$$y\in R(T-\overline{\lambda}I)=R_{\overline{\lambda}}$$

Inversement, pour $y\in R_{\overline{\lambda}}$ on applique l'opérateur $(T-\overline{\lambda}I)^{-1}$, donc ;

$$\begin{aligned} x &= (T-\overline{\lambda}I)^{-1}y\in D(T-\overline{\lambda}I) \\ &= \left\{x\in H : x\in D(T)\cap D(\overline{\lambda}I)\right\} \\ &= \{x\in H : x\in D(T)\cap H\}=D(T) \end{aligned}$$

On applique l'opérateur $(T-\lambda I)$ (puisque $D(V)=D(T-\lambda I)$), donc ;

$$(T-\lambda I)x=(T-\lambda I)(T-\overline{\lambda}I)^{-1}y=Vy,$$

donc $y\in D(V)$ alors $R_{\overline{\lambda}}=D(V)$.

-b-On montre à présent que $R(V)=R_{\lambda}$. Soit $x\in D(T)$ posant :. $y=(T-\overline{\lambda}I)x$ donc $y\in R_{\overline{\lambda}}=D(V)$ et :

$$Vy=(T-\lambda I)(T-\overline{\lambda}I)^{-1}(T-\overline{\lambda}I)x\ =(T-\lambda I)x,$$

donc :

$$R(V)=R_{\lambda}.$$

Et de plus ; pour tous $y_1,y_2\in R_{\overline{\lambda}}=D(V)$,

$$\langle Ty_1,Ty_2\rangle=\langle (T-\lambda I)x_1,(T-\lambda I)x_2\rangle$$

$$=\langle Tx_1,Tx_2\rangle-\lambda\langle x_1,Tx_2\rangle-\overline{\lambda}\langle Tx_1,x_2\rangle+|\lambda|^2\langle x_1,x_2\rangle,$$

et

$$\begin{aligned} \langle y_1,y_2\rangle &= \left\langle (T-\overline{\lambda}I)x_1,(T-\overline{\lambda}I)x_2\right\rangle \\ &= \langle Tx_1,Tx_2\rangle-\lambda\langle x_1,Tx_2\rangle-\overline{\lambda}\langle Tx_1,x_2\rangle+|\lambda|^2\langle x_1,x_2\rangle \end{aligned}$$

Et comme ;

$$\langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle \ \ , \forall x_1, x_2 = D(T)$$

il advient que,

$$\langle Ty_1, Ty_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle$$

donc V est un opérateur isométrique.

2. On a : $y = (T - \overline{\lambda} I)x$ et $Vy = (T - \lambda I)x$, donc

$$y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x$$

alors :

$$R\left(I - V\right) = \left\{y - Vy \ : \ y \in D\left(V\right)\right\}$$

coïncide avec $D(T)$ (car $y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x$ et $x \in D(T)$) .

3. -a-Montrons que l'opérateur $(I-V)^{-1}$ existe.V est un opérateur vérifiant la $2^{ème}$ condition ce qui veut dire que l'ensemble des élements $y - Vy$ tels que $y \in D(V)$ est dense dans H.De plus, V n'admet pas $\lambda = 1$ comme valeur propre (i.e.) $y = Vy$ seulement pour $y = 0$. Démontrons-le. Si ce n'est pas le cas alors pour $z \in D\left(V\right)$:

$$\langle Vz - z, y\rangle = \langle Vz, y\rangle - \langle z, y\rangle = \langle Vz, Vy\rangle - \langle z, y\rangle = 0$$

donc $y \neq 0$ doit être orthogonal a $R(I - V)$ qui est d'après 2 dense dans H et cela est impossible.

On conclut que l'opérateur $(I - V)^{-1}$ existe.

-b- On pose

$$T = \left(\lambda I - \overline{\lambda} V\right)\left(I - V\right)^{-1}$$

Montrons que T est un opérateur symétrique dont la transformation de CAYLEY est V, posons :

$$D\left(T\right) = R\left(I - V\right)$$

pour tout $x \in D\left(T\right) : \exists y \in D\left(V\right) \ : x = y - Vy$, alors ;

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(y - Vy\right) = \left(\lambda I - \overline{\lambda} V\right)\left(I - V\right)^{-1}\left(y - Vy\right) \\ &= \left(\lambda I - \overline{\lambda} V\right)\left(I - V\right)^{-1}\left(I - V\right) y \\ &= \left(\lambda I - \overline{\lambda} V\right) y \end{aligned}$$

De la $2^{ème}$ condition $D(T)$ dense dans H et de plus $\forall\ x_1,\ x_2 \in D(T)$:

$$\begin{aligned}
\langle Tx_1, x_2\rangle &= \langle T(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2\rangle \\
&= \left\langle \lambda y_1 - \overline{\lambda} V y_1, y_2 - Vy_2\right\rangle \\
&= \left(\lambda + \overline{\lambda}\right)\langle y_1, y_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vy_1, y_2\rangle - \lambda\langle y_1, Vy_2\rangle
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\langle x_1, Tx_2\rangle &= \langle y_1 - Vy_1, T(y_2 - Vy_2)\rangle \\
&= \left\langle y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \overline{\lambda} V y_2\right\rangle \\
&= \left(\lambda + \overline{\lambda}\right)\langle y_1, y_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vy_1, y_2\rangle - \lambda\langle y_1, Vy_2\rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle Tx_1, x_2\rangle = \langle T(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2\rangle = \langle y_1 - Vy_1, T(y_2 - Vy_2)\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle$$

C'est à dire que T est un opérateur symétrique.

Pour tout $x \in D(T)$: $Tx = \lambda y - \overline{\lambda} V y$, alors

$$\left(T - \overline{\lambda} I\right) x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y$$

Et

$$(T - \lambda I)\, x = Tx - \lambda x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) Vy.$$

Donc ;

$$Tx - \lambda x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) Vy = V\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = V\left(Tx - \overline{\lambda} x\right)$$

Alors ;

$$(T - \lambda I)\, x = V\left(T - \overline{\lambda} I\right) x \text{ pour tout } x \in D(T)$$

ou bien,

$$(T - \lambda I) = V\left(T - \overline{\lambda} I\right)$$

Alors

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$$

donc V est la transformation de CAYLEY de l'opérateur symétrique T. $\square$

Théorème 3.2.1 *Soient T_1, T_2 deux opérateurs symétriques et V_1, V_2 respectivement leurs transformation de CAYLEY. Alors T_2 est une extension de T_1 si et seulement si V_2 est une extension de V_1.*

Remarque 3.2.1 *De ce théorème, le problème de l'extension d'un opérateur symétrique T se réduit au problème de l'extension d'un opérateur isométrique qui est sa transformation de CAYLEY ; plus précisement, la recherche d'une extension autoadjointe d'un opérateur symétrique revient à la recherche de l'extension unitaire de sa transformée de Cayley.*

Théorème 3.2.2 *Un opérateur symétrique T est fermé si et seulement si sa transformation de CAYLEY V est une isométrie fermée (c'est le cas si et seulement si $R_{\overline{\lambda}}$et $R_\lambda$sont fermés).*

Preuve. On suppose que T est fermé et $\{y_n\}$ une suite définie par ;

$$y_n = \left(T - \overline{\lambda} I\right) x_n$$

tel que $x_n \in D(T)$ converge vers y. Et tant que V est isométrique ; la suite $\{V y_n\}$ définie par : $V y_n = (T - \lambda I) x_n$ converge vers z. On a

$$y_n - V y_n = T x_n - \overline{\lambda} x_n - T x_n + \lambda x_n$$

donc :

$$y_n - V y_n = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x_n$$

On obtient

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y_n - V y_n\right) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y - z\right)$$

Et on a aussi

$$V y_n = T x_n - \lambda x_n \Rightarrow T x_n = V y_n + \lambda x_n$$

Donc

$$\begin{aligned} T x_n &= V y_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y_n - V y_n\right) = V y_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n - \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} V y_n \\ &= (1 - \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}}) V y_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n = \frac{-\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} V y_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y_n - \overline{\lambda} V y_n\right) \end{aligned}$$

Donc
$$Tx_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y_n - \overline{\lambda} V y_n\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y - \overline{\lambda} z\right)$$
Et T est fermé donc
$$y - z \in D(T) et T(y - z) = \lambda y - \overline{\lambda} z.$$
Par conséquent
$$y = \left(T - \overline{\lambda} I\right) \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} (y - z) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left[T (y - z) - \overline{\lambda} (y - z)\right]$$
donc ;
$$y \in R_{\overline{\lambda}} = D(V)$$
Et
$$\begin{aligned} Vy &= (T - \lambda I) \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} (y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} T (y - z) - \lambda (y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y - \overline{\lambda} z - \lambda y + \lambda z\right) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) z = z, \end{aligned}$$
donc ;
$$Vy = z$$
Cela montre que V est un opérateur fermé et aussi $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé ; alors R_λ est l'image par une isométrie du sous-espace fermé $R_{\overline{\lambda}}$, donc R_λ et aussi fermé.
De la même facon on peut montrer que si l'opérateur V (ou$R_{\overline{\lambda}}$) est fermé , alors l'opérateur T est fermé. □

3.2.1 Domaine de définition d'un opérateur adjoint

Définition 3.2.2 *On dit que les sous-espaces $M_1,\ M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants :*
Si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ pour $x_k \in M_k$ et $k = \overline{1, n}$ alors :
$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

- *Si les sous-espaces* $M_1,\ M_2, ...M_n$ *sont linéairement indépendants, il est possible de former leurs somme directe* $M_1 \oplus\ M_2 \oplus .... \oplus M_n$ *alors :*

chaque $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n$ *peut être représenté d'une façon unique sous la forme :*

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

tel que $x_k \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$.

- *S'il existe une autre représentation* $x = x_1^{'} + x_2^{'} + ... + x_n^{'}$ *tel que* $x_k^{'} \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$, *donc :*

$$0 = (x_1 - x_1^{'}) + (x_2 - x_2^{'}) + ... + (x_n - x_n^{'})$$

avec $x_k - x_k^{'} \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$.

Mais $M_1,\ M_2, ...M_n$ *sont linéairement indépendants alors :*

$(x_k - x_k^{'}) = 0$ *donc* $x_k = x_k^{'}$ *pour* $k = \overline{1, n}$.

Théorème 3.2.3 *Si* T *est un opérateur symétrique fermé, alors* $D(T), \aleph_{\overline{\lambda}}, \aleph_\lambda$ *sont linéairement indépendants et :*

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda.$$

Preuve. Montrons l'indépendance linéaire :

Soit $x + y + z = 0$ tel que $x \in D(T)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$, $z \in \aleph_\lambda$.

Appliquant l'opérateur $(T^* - \overline{\lambda} I)$ on obtient ;

$$(T^* - \overline{\lambda} I)(x + y + z) = 0$$

Donc :

$$Tx + \lambda y + \overline{\lambda} z - \overline{\lambda} x - \overline{\lambda} y - \overline{\lambda} z = 0$$

Alors

$$(T - \overline{\lambda} I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$$

Mais $(T - \overline{\lambda} I)x \in R_{\overline{\lambda}}$, et $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$ et on sait que $R_{\overline{\lambda}}$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont orthogonaux donc $(T - \overline{\lambda} I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$ est possible seulement si $(T - \overline{\lambda} I)x = 0$ et $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$.

Donc $x = 0$ et $y = 0$ ($x = 0$ car λ est non-réel ne peut pas être une valeur propre de T qui est symétrique), et aussi $z = 0$ car

$$x + y + z = 0, x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ impliquent } z = 0.$$

(*) Montrons que

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$$

1-On a $D(T),\ \aleph_{\overline{\lambda}},\ \aleph_\lambda$ sont inclus dans $D(T^*)$ donc $D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda \subset D(T^*)$

2-Soit $u \in D(T^*)$. Montrons que u peut être représenté sous la forme

$$u = x + y + z$$

où $x \in D(T),\ y \in \aleph_{\overline{\lambda}}, z\ \in R_{\overline{\lambda}}$.

Comme T fermé alors $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé. Sachant que$\aleph_\lambda$ est son complément orthogonal ; on peut écrire

$$R_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} = H$$

Chaque $\upsilon \in H$ peut alors être représenté sous la forme

$$\upsilon = \upsilon' + \upsilon'' \text{ où } \upsilon' \in R_{\overline{\lambda}} \text{ et } \upsilon'' \in \aleph_{\overline{\lambda}}$$

Sachant que les éléments de $R(T^* - \overline{\lambda}I)$ décrivent l'image de tous les élements de $D(T^*)$. On essaye de représenter υ sous forme

$$\upsilon = (T^* - \overline{\lambda}I)u$$

$\upsilon' \in R_{\overline{\lambda}}$ alors ;

$$\upsilon' = (T - \overline{\lambda}I)x \quad \text{où} \quad x \in D(T).$$

Posant $\upsilon'' = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y,\ y \in \aleph_\lambda$. On obtient

$$(T^* - \overline{\lambda}I)u = (T - \overline{\lambda}I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y$$

Et pour $T^*y = \lambda y,\ T^*x = Tx$ (car $x \in D(T)$)

$$\begin{aligned} (T^* - \overline{\lambda}I)u &= T^*x - \overline{\lambda}x + T^*y - \overline{\lambda}y \\ &= (T^* - \overline{\lambda}I)x + (T^* - \overline{\lambda}I)y \\ &= (T^* - \overline{\lambda}I)\,(x + y) \end{aligned}$$

Donc

$$(T^* - \overline{\lambda}I)\,(u - x - y) = 0$$

On pose

$$z = u - x - y$$

alors $z \in \aleph_\lambda$ et

$$u = x + y + z$$

où $x \in D(T),\ y \in \aleph_{\overline{\lambda}},\ z \in \aleph_\lambda$ ce qui nous donne

$$T^* u = Tx + \lambda y + \overline{\lambda} z$$

□

Corollaire 3.2.1 *Un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si* $\aleph_\lambda = \{0\}\,,\ \aleph_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ *dans ce cas :* $D(T) = D(T^*)$.

Théorème 3.2.4 ***Corollaire 3.2.2*** $D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$, *pour* $\lambda = -i$ *on obtient :*

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_i \oplus \aleph_{-i}$$

cette formule est appelée : ***"formule de Neumann"***. *Chaque* $x \in D(T^*)$ *a la représentation unique*

$$x = x^0 + x^- + x^+ \text{ où } x^0 \in D(T),\ x^- \in \aleph_i,\ x^+ \in \aleph_{-i}$$

Montrons que ;

$$\operatorname{Im}\langle T^* x, x\rangle = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2$$

$$\begin{aligned}
\langle T^* x, x\rangle &= \left\langle Tx^0 - ix^- + ix^+, x^0 + x^- + x^+\right\rangle \\
&= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^0\right\rangle + \left\langle Tx^0, x^- + x^+\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^- + x^+\right\rangle
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\left\langle Tx^0, x^- + x^+\right\rangle = \left\langle x^0, T^*\left(x^- + x^+\right)\right\rangle = \left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle T^* x, x\rangle &= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^0\right\rangle + \left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle - i\left\|x^-\right\|^2 + i\left\|x^+\right\|^2 \\
&\quad -i\left\langle x^-, x^+\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle \\
&= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + 2\operatorname{Re}\left[\left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle\right] + i\left(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{Im}\langle T^{*}x,x\rangle = \left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}$$

On décompose $D(T^{*})$ en trois sous-ensembles : ε^{+}, ε^{-}, ε^{0} tel que :$\mathrm{Im}\langle T^{*}x,x\rangle \succ 0,\ \prec 0,\ = 0$ respectivement donc : chaque $x\in D(T^{*})$ est dans ε^{+} ou ε^{-}ou ε^{0}.

Corollaire 3.2.3 $D(T)\subset\varepsilon^{0},\ \aleph_{i}\subset\varepsilon^{-}\cup\{0\},\ \aleph_{-i}\ \subset\varepsilon^{+}\cup\{0\}$.

Preuve. Pour $x\in D(T)$: $x^{-}=x^{+}=0$ donc :

$$\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}=0$$

Donc $x\in\varepsilon^{0}$.

Pour $x\neq 0$:

Si $x\in\aleph_{i}$ donc $x^{0}=x^{+}=0$ donc $x=x^{-}$. Alors :

$$\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}=-\left\|x^{-}\right\|^{2}\prec 0$$

Donc $x\in\varepsilon^{-}\subset\varepsilon^{-}\cup\{0\}$.

Si $x\in\aleph_{-i}$ donc $x^{0}=x^{-}=0$ donc $x=x^{+}$. Alors :

$$\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}=\left\|x^{+}\right\|^{2}\succ 0$$

Donc $x\in\varepsilon^{+}\subset\varepsilon^{+}\cup\{0\}$.

Enfin $0\in D(T)$, $0\in\varepsilon^{-}\cup\{0\}$, $0\in\varepsilon^{+}\cup\{0\}$.

Donc $D(T)\subset\varepsilon^{0},\ \aleph_{i}\subset\varepsilon^{-}\cup\{0\},\ \aleph_{-i}\ \subset\varepsilon^{+}\cup\{0\}$. □

Proposition 3.2.2 *Si $\alpha>0$ et $\beta\in R$ alors les espaces de défaut $\aleph_{-i},\ \aleph_{i}$ de l' opérateur T et $\aleph_{-i}^{\prime},\ \aleph_{i}^{\prime}$ de l'opérateur $S=\alpha T+\beta I$ ont les mêmes dimensions.*

Preuve. On a : $D(T)=D(S)$. Et aussi :

$$\begin{aligned}\langle S^{*}x,x\rangle &= \langle(\alpha T+\beta I)^{*}x,x\rangle\\ &= \langle\alpha T^{*}+\beta x,x\rangle\\ &= \alpha\langle T^{*}x,x\rangle+\beta\langle x,x\rangle,\end{aligned}$$

et

$$\beta \langle x, x\rangle = \beta \|x\|^2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$\operatorname{Im}\langle S^* x; x\rangle = \alpha \left(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 \right),$$

et $\alpha > 0$ donc ε^+, ε^- sont les mêmes pour les deux opérateurs T et S et $\dim \aleph_i = \dim \aleph_i'$ et $\dim \aleph_{-i} = \dim \aleph_{-i}'$. □

Théorème 3.2.5 *Pour chaque nombre complexe λ du demi-plan supérieur :*

$$\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i} \qquad et \qquad \dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_i$$

Preuve. On pose : $\lambda = a + ib$ et λ dans le demi-plan supérieur donc : $b > 0$, on note par $\aleph_i'$ et$\aleph_{-i}'$ les deux espaces de défaut de l'opérateur :

$$S = b^{-1}(T - aI)$$

Pour

$$\begin{aligned} x \in \aleph_i' &\Leftrightarrow x \in D(S^*) \ \textit{telque}\ S^* x = -ix \\ &\Leftrightarrow x \in D(S^*) \ \textit{telque}\ b^{-1}(T^* - aI)x + ix = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D(T^*) \ \textit{telque}\ b^{-1}(T^* x - ax + ibx) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D(T^*) \ \textit{telque}\ b^{-1}(T^* x - (a - ib)x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D(T^*) \ \textit{telque}\ b^{-1}\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D(T^*) \ \textit{telque}\ T^* x = \overline{\lambda} x \\ &\Leftrightarrow x \in \aleph_\lambda. \end{aligned}$$

Donc ;

$$\aleph_i' = \aleph_\lambda.$$

De la même façon on montre que $\aleph_{-i}' = \aleph_{\overline{\lambda}}$.

Et de la proposition précédente, les opérateurs T et $S = b^{-1}(T - aI) = b^{-1}T - b^{-1}aI$ où $b \succ 0$ et $b^{-1}a \in \mathbb{R}$ ont les mêmes indices de défaut, c'est à dire $\dim \aleph_i = \dim \aleph_i'$ et $\dim \aleph_{-i} = \dim \aleph_{-i}'$, en résumé

$$\dim \aleph_i \; = \dim \aleph_i^{'} \; = \dim \aleph_\lambda \; et \; \dim \aleph_{-i} \; = \dim \aleph_{-i}^{'} = \dim \aleph_{\overline{\lambda}},$$

donc

$$\dim \aleph_\lambda = \dim \aleph_i \;\; et \;\; \dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i}.$$

□

Définition 3.2.3 (Indices de défaut) *On pose : $m = \dim \aleph_i$, $n = \dim \aleph$, m, n sont appelés les indices de défaut de l'opérateur T.*

Du théorème précédent

$$: m = \dim \aleph_\lambda, n = \dim \aleph_{\overline{\lambda}} \;\; \text{si} \;\; Im\lambda > 0.$$

Proposition 3.2.3 *Un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si et seulement si $m = 0$ et $n = 0$.*

Théorème 3.2.6 *Si T est un opérateur symétrique fermé et si S est un opérateur borné, hermitien et défini sur toute H alors, les deux opérateurs T et $T + S$ ont les mêmes indices de défaut.*

Preuve. On a : $(T + S)^* = T^* + S$ donc :

$$D\left((T + S)^*\right) = D\left(T^*\right),$$

et pour $x \in D\left(T^*\right)$:

$$\begin{aligned} \left\langle (T + S)^* x, x \right\rangle &= \left\langle (T^* + S)\, x, x \right\rangle \\ &= \left\langle T^* x, x \right\rangle + \left\langle Sx, x \right\rangle \end{aligned}$$

et tant que $\langle Sx, x \rangle \in \mathbb{R}$ alors :

$$\operatorname{Im} \left\langle (T + S)^* x, x \right\rangle = \operatorname{Im} \left\langle T^* x, x \right\rangle.$$

Donc ε^+ des opérateurs T et $T + S$ coïncide et aussi ε^- donc de la proposition 3.2.2 : T et $T + S$ ont les même indices de défaut. □

3.2.2 Construction de l'extension d'opérateurs symétriques

Soit T un opérateur symétrique fermé et soit $\widetilde{T}$ une extension symétrique fermée de T .On note par V et $\widetilde{V}$: les transformations de CAYLEY de T et $\widetilde{T}$ respectivement :
On a : $V \subset \widetilde{V}$ alors :

$$D\,(V) \subset D(\widetilde{V}) \ et \ R\,(V) \subset R(\widetilde{V}).$$

On pose :

$$P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V) \ et \ Q = R(\widetilde{V}) \ominus R(V),$$

donc :

$$P \perp D(V) = R_{\overline{\lambda}} \ et \ Q \perp R(V) = R_{\lambda},$$

alors : $P \subset H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ donc $P \subset \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q \subset H \ominus R_{\lambda}$ donc $Q \subset \aleph_{\lambda}$.
Définissant l'opérateur U par :

$$U : x \to Ux = \widetilde{V}x \text{ pour } x \in P,$$

tant que $\widetilde{V} : D(\widetilde{V}) \ \to R(\widetilde{V})$ est une isométrie alors $\widetilde{V} : P \ \to Q$ est aussi une isométrie donc $U : P \to Q$ l'est aussi.

Inversement

On suppose un opérateur isométrique
$U\, : P \subset \aleph_{\overline{\lambda}} \to Q \subset \aleph_{\lambda}$ donné $(P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V))$ donc :

$$D(\widetilde{V}) = P \oplus D(V)$$

Si on pose pour $y \in D(V)\,;\, z \in P\,;\, \widetilde{V}(y+z) = Vy + Uz$ on obtient un opérateur isométrique $\widetilde{V}$ qui représente une extension de V et par conséquent $\widetilde{V}$ est la transformation de CAYLEY d'une certaine extension symétrique fermée de l'opérateur T.

Construction de $\widetilde{T}$ l'extension de T (à l'aide de U)

Du théorème concernant la transformation du CAYLEY (chaque opérateur isométrique V qui vérifie la $2^{\grave{e}me}$ condition, est la transformation de CAYLEY de certain opérateur symétrique),

$$\widetilde{T} = (\lambda I - \overline{\lambda}\widetilde{V})(I - \widetilde{V})^{-1} \text{ donc : } D(\widetilde{T}) = R(I - \widetilde{V}),$$

donc pour : $y+z \in D(\widetilde{V})$: $x^{'} \in D(\widetilde{T})$,

$$x^{'}=(y+z)-\widetilde{V}\,(y+z)=y+z-(Vy+Uz)$$

avec $\widetilde{V}=V$ sur $D(V),\ y\in D(V),\ z\in P$.

Posant :

$$x=y-Vy=\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\widetilde{x} \text{ tel que : } \widetilde{x}\in D\left(T\right),$$

$D(\widetilde{T})$ consiste en tous les vecteurs de la forme :

$$x^{'}=x+z-Uz \text{ tel que } x\in D\left(T\right),\ z\in P,\ Uz\in Q.$$

Et tant que : $\widetilde{T}\subset T^{*}$ où $z\in\aleph_{\overline{\lambda}}, Uz\in\aleph_{\lambda}$ donc :

$$\widetilde{T}x^{'}=Tx+\lambda z-\overline{\lambda}Uz,$$

et de la définition de $\widetilde{T}$, ces espaces de défaut sont donnés par ;

$$\aleph_{\overline{\lambda}}^{'}=\aleph_{\overline{\lambda}}\ominus P \ et\ \aleph_{\lambda}^{'}=\aleph_{\lambda}\ominus Q.$$

On a donc le théorème suivant

Théorème 3.2.7 *chaque extension symétrique fermé $\widetilde{T}$ d'un opérateur symétrique fermé T est déterminée par certain opérateur isométrique U tel que $D(U)=P$; un sous espace fermé de $\aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q=R(U)$ est un sous espace fermé de $\aleph_{\lambda}$. Et*

$$\begin{aligned} D(\widetilde{T}) &= \left\{x^{'}:\ x^{'}=x+z-Uz \ tel\ que\ x\in D\left(T\right),\ z\in P\right\} \\ &= D(T)\oplus\left(I-U\right)P \end{aligned}$$

avec ;

$$\widetilde{T}x^{'}=Tx+\lambda z-\overline{\lambda}Uz$$

Inversement : *Pour chaque opérateur U avec les formules ci-dessus détermine un extension symétrique fermée $\widetilde{T}$ de l'opérateur T, ses espaces de défaut sont :*

$$\aleph_{\overline{\lambda}}^{'}=\aleph_{\overline{\lambda}}\ominus P \ et\ \aleph_{\lambda}^{'}=\aleph_{\lambda}\ominus Q.$$

Remarque 3.2.2 *Pour $\lambda=-i$, on obtient la $2^{ème}$ formule de Neuman.*

Proposition 3.2.4 *Une extension $\widetilde{T}$ de T est autoadjointe si et seulement si,*

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \{0\}\,,\ \aleph'_{\lambda} = \{0\}$$

(i.e.) *Si et seulement si : $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q = \aleph_{\lambda}$.*

Donc pour que l'opérateur U existe, il est nécessaire et suffisant que $\aleph_{\lambda}$, $\aleph_{\overline{\lambda}}$ aient la même dimension.(i.e.) *si et seulement si :*

$$P = \aleph_{\overline{\lambda}} \text{ et } Q = \aleph_{\lambda}$$

Théorème 3.2.8 *Une extension $\widetilde{T}$ est autoadjointe si et seulement si ;*

$$D(U) = \aleph_{\overline{\lambda}} \text{ et } R(U) = \aleph_{\lambda}.$$

Théorème 3.2.9 *Un opérateur T admet une extension autoadjointe $\widetilde{T}$ si et seulement si : $\aleph_{\overline{\lambda}}$, $\aleph_{\lambda}$ ont la même dimension (i.e.) ces indices de défaut sont égaux.*

Chapitre 4

Extension de Friedrichs

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la condition nécesaire et suffisante pour qu'un opérateur symétrique ai une extension autoadjointe est que cet opérateur possède des indices de défauts égaux. Comme c'est évidement le cas pour les opérateurs positifs et semi-bornés inférieurement, on déduit que ces catégories d'opérateurs ont des extensions autoadjoints. Un exemple de construction est fournit par la théorie de Von Neunann décrite dans le chapitre précedent.
Nous allons explorer dans cette partie le théorème de Friedrichs et qui donne dans le cas d'opérateurs symétriques positifs ou plus généralement symétriques semi-bornés inférieurement une extension qui sera elle aussi positive ou semi-bornée inférieurement. Ce théoème, qui utilise la méthode de prolongement par clôture, peut s'enoncer de différentes manières selon la nature de l'opérateur en question.

4.1 Extension de Friedrichs pour les opéraeurs positifs

Théorème 4.1.1 (de Friedrishs) *Tout opérateur T densément défini symétrique et positif admet une extention auto-adjointe positive.*

On va suivre essentiellement [8] et [14] pour la démonstration . Le lecteur interréssé peut consulter [17] pour une variante de la démonstration dans le cas d'opérateurs semi-bornés inférieurement et [10] pour une démonstration qui utilise les formes quadratiques ainsi que le théorème de Lax-Milgram. On démontre au préalable les deux lemmes suivants.

Lemme 4.1.1 *On définit sur $D \times D$ l'application suivante,*

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x, y\rangle + \langle Tx, y\rangle, \forall x, y \in D$$

Alors, $(D, \langle , \rangle_1)$ est une space préhilbertien.

Preuve. On montre que $\langle , \rangle_1$ est une forme hermitienne.

a) $\langle , \rangle_1$ est lineaire par rapport à la 1ère variable. Soit $x_1, x_2, y \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle_1 &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle + \langle T(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle \\
&= \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle + \langle \alpha x_1 + \beta x_2, Ty\rangle \\
&= \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle + \alpha\langle x_1, Ty\rangle + \beta\langle x_2, Ty\rangle \\
&= \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle + \alpha\langle Tx_1, y\rangle + \beta\langle Tx_2, y\rangle \\
&= \alpha[\langle x_1, y\rangle + \langle Tx_1, y\rangle] + \beta[\langle x_2, w\rangle + \langle Tx_2, y\rangle] \\
&= \alpha\langle x_1, y\rangle_1 + \beta\langle x_2, y\rangle_1
\end{aligned}$$

b)$\langle , \rangle_1$ est hermitien,

$$\begin{aligned}
\langle y, x\rangle_1 &= \langle y, x\rangle + \langle Ty, x\rangle \\
&= \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, Tx\rangle \\
&= \overline{\langle x, y\rangle} + \overline{\langle Tx, y\rangle} \\
&= \overline{\langle x, y\rangle_1}
\end{aligned}$$

c) $\langle , \rangle_1$ est définie positive, soit $x \in D \ : \ \langle x, x\rangle_1 = \langle x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle$

On a

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle_1 = \langle x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle \geq \langle x, x\rangle \geq \|x\|^2 \geq 0$$

donc, $\langle x, x\rangle_1 \geq 0 \ \ \forall x \in D$.

de plus,

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle_1 &= 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \wedge \langle Tx, x\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \wedge \langle T(0), 0\rangle = \langle 0, 0\rangle \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

De a),b),c) on conclut que $\langle , \rangle_1$ est une forme hermitienne. $\square$

On note $\|.\|_1$ la norme correspondante à la nouvelle forme hermitienne $\langle , \rangle_1$. Il vient évidement que pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= \langle x, x\rangle_1 \\ &= \langle x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle Tx, x\rangle \end{aligned}$$

On note aussi par d_1 la distance induite de $\|.\|_1$.

Remarque 4.1.1 *pour tout $x \in D$*

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= \|x\|^2 + \langle Tx, x\rangle \geq \|x\|^2 \\ &\Longrightarrow \|x\| \leq \|x\|_1 \end{aligned}$$

Lemme 4.1.2 *Soit D_1 la fermeture de D par rapport à la métrique d_1 induite par la norme $\|\|_1$. Alors,D_1 est un d_1-complété de D .*

Preuve. $(D, \|\|_1)$ étant un espace préhilbertien, il existe un espace de Hilbert $(H, \|\|_H)$ et une isométrie $U_1 : D \longrightarrow H$ pour lesquels $\overline{U_1(D)} = H$ (voir la théorème 1.1.1)
Soit

$$D' = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy dans } D\}$$

tel que défini dans la formule (1.1.1).
On rappelle qu'insi , H représente l'ensemble de toutes les classes d'équivalances de suite de Cauchy équivalantes dans D.
Or, D_1 représent justement la fermeture de D par rapport à la métrique d_1 ,et donc, par définition chaque élément de D_1 représente la limite d'au moins une suite dans D',cette suite n'est par contre pas forcément unique. Maintenant,en prenant la classe d'équivalance de cette suite , nous pouvons définir une application de H sur D_1 qui est par construction, bijective.
Soit donc

$$\begin{aligned} U_2 \quad &: \quad H \longrightarrow D_1 \\ \dot{x} \quad &\longmapsto \quad U_2(\dot{x}) = x \end{aligned}$$

où, $\dot{x}$ représente la classe d'équivalance de la suite de Cauchy dans D dont la d_1-limite est x. comme il a été déja mentionné U_2 est bijective.
Or, par la même raisonnement suivi pour montrer le lemme 1.1.4 , il vient que l'application

$$\begin{array}{ccc} \langle , \rangle_{D_1} & : & D_1 \times D_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle_{D_1} = \langle \dot{x},\dot{y}\rangle_H = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x,y\rangle_1 \end{array}$$

est un produit scalaire sur D_1. Enfin, en appliquant la même démonstration éffectuée pour $(H, \langle , \rangle_H)$ (voir proposition 1.1.5), nous obtenons un espace de Hilbert $(D_1, \langle , \rangle_{D_1})$ vérifions à présent que U_2 est une isométrie linèaire.
i) U_2 est linèaire : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \dot{x}, \dot{y} \in H$

$$U_2(\alpha\dot{x} + \beta\dot{y}) = U_2(\dot{\widehat{\alpha x + \beta}} y) = \alpha x + \beta y = \alpha U_2(\dot{x}) + \beta U_2(\dot{y})$$

ii) U_2 est une isométrie. $\forall \dot{x}, \dot{y} \in H$

$$\langle \dot{x}, \dot{y}\rangle_H = \langle x, y\rangle_{D_1} = \langle U_2(\dot{x}), U_2(\dot{y})\rangle_D$$

Considérons à présent l'application

$$U = (U_2 \circ U_1) : (D, \langle , \rangle_1) \longrightarrow (D_1, \langle , \rangle_{D_1})$$

Alors,
i) U est une isométrie linèaire (composé de deux isométries linèaires)
ii) $\overline{U(D)} = H$
En effet $\overline{U_1(D)} = H$ alors $\forall \dot{y} \in H; \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} U_1(x_n) = \dot{y}$$

Soit à présent $z \in D_1$ quelconque. U_2 étant bijective,

$$\exists! \dot{y} \in H : U_2(\dot{y}) = z$$

Mais alors, $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D pour lequel

$$z = U_2(\dot{y}) = U_2(\lim_{n\to+\infty}(x_n)) \underset{U_2 \text{ est une isométrie donc continue}}{=} \lim_{n\to+\infty} U_2(U_1(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} (U_2 \circ U_1)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} U(x_n)$$

Donc

$$\overline{U(D)} = D_1$$

Enfin, sachant que $(D_1, \langle , \rangle_{D_1})$ est un espace de Hilbert, on conclut que les conditions du théorème 1.1.1 sont vérifiées et il résulte que D_1 est un d_1-complété de D. $\square$

Nous allons établir la preuve du théorème 4.1.1.

Preuve. On muni D du produit scalaire défini dans le lemme 4.1.1 et soit D_1 son d_1-complété. Pour $h \in H$ on définit la fonctionnelle suivante,

$$\lambda_h : D_1 \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto \lambda_h x = \langle x, h \rangle$$

Alors,

i) λ_h est linéaire. Soient $x_1, x_2 \in D_1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(D_1 \subset H)$

$$\begin{aligned} \lambda_h(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, h \rangle \\ &= \langle \alpha x_1, h \rangle + \langle \beta x_2, h \rangle \\ &= \alpha \langle x_1, h \rangle + \beta \langle x_2, h \rangle \\ &= \alpha \lambda_h x_1 + \beta \lambda_h x_2 \end{aligned}$$

ii) λ_h est bornée,

$$\begin{aligned} |\lambda_h x| &= |\langle x, h \rangle| \leq \|x\| \, \|h\| \\ &\leq \|x\|_1 \, \|h\| \\ &\leq C \, \|x\|_1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|\lambda_h\|_{\mathcal{L}(D_1, \mathbb{C})} \leq \|h\| \tag{4.1.1}$$

On déduit que λ_h est une fonctionnelle linéaire bornée sur D_1 d'après le théorème de représentation de Riesz 1.2.3, il existe un unique $b_h \in D_1$ pour lequel $\forall x \in D_1$ on a

$$\lambda_h x = \langle b_h, x \rangle_1 \text{ et } \|\lambda_h\|_{\mathcal{L}(D_1, \mathbb{C})} = \|b_h\|_1 \tag{4.1.2}$$

et de la remarque 4.1.1 ainsi que les formules (4.1.1) et (4.1.2)

$$\begin{aligned} \|b_h\| &\leq \|b_h\|_1 = \|\lambda_h\|_{\mathcal{L}(D_1, \mathbb{C})} \qquad (4.1.3) \\ &\leq \|h\| \end{aligned}$$

On considère à présent l'application

$$B : H \longrightarrow D_1, h \longmapsto Bh = b_h$$

Il découle directement de la formule (4.1.3) que

$$\|Bh\| = \|b_h\| \leq \|h\|$$

B est borné. D'autre part, B est injective[1]. En effet, soit $x_1, x_2 \in H$,

supposons que $Bx_1 = Bx_2$ alors pour tout $y \in D_1$

$$\begin{aligned} \langle Bx_1, y\rangle_1 = \langle Bx_2, y\rangle_1 &\iff \langle b_{x_1}, y\rangle_1 = \langle b_{x_2}, y\rangle_1 \\ &\iff \lambda_{x_1} y = \lambda_{x_2} y \\ &\iff \langle y, x_1\rangle = \langle y, x_2\rangle \\ &\iff \langle y, x_1 - x_2\rangle = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Car

$$D \subset D_1 \subset H \Longrightarrow H = \bar{D} \subset \bar{D}_1 \subset H$$

C'est à dire que $\bar{D}_1$ est dense dans H par rapport à d la métrique associée à la norme originelle $\langle , \rangle$.

B est aussi symétrique positif. En effet pour tout $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \langle Bx, y\rangle &= \lambda_y Bx = \langle b_y, Bx\rangle_1 \\ &= \langle By, Bx\rangle_1 = \overline{\langle Bx, By\rangle_1} \\ &= \overline{\lambda_x By} \\ &= \overline{\langle By, x\rangle} \\ &= \langle x, By\rangle \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

et pour $h \in H$ quelconque

$$\begin{aligned} \langle Bh, h\rangle &= \lambda_h Bh = \langle b_h, Bh\rangle_1 \\ &= \langle Bh, Bh\rangle_1 = \|Bh\|_1^2 \\ &\geq \|Bh\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

[1] L'auteur dans [[8]] mentionne que l'opérateur B est linéaire afin de démontrer plus tard son injectivité. Nous avons démontré l'injectivité par sa définition sans cette remarque

On montre que l'image de B est dense dans D_1 par rapport à $(D_1, \langle , \rangle_1)$. Pour tout $y \in D_1, h \in H$ tels que

$$\langle Bh, y\rangle_1 = \langle b_h, y\rangle_1 = \lambda_h y = 0$$

on trouve

$$0 = \lambda_h y = \langle h, y\rangle \quad (\forall h \in H)$$

Ainsi, $y = 0$ ce qui prouve la densité de l'image de B dans D_1.

Conclusion : $B : H \longrightarrow D_1$ est borné, positif (donc symétrique) on déduit de la proposition 2.4.2 que B est auto-adjoint. Comme B est injectif avec une image dense, il en découle que B est inversible et a un inverse densement défini, possiblement non borné et qui est aussi est auto-adjoint par le théorème 2.4.8 [2]

Il nous reste à montrer que A est positif, c'est à dire

$$\forall x \in D(A); \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

En effet, soit $x = By, y \in H$

$$\begin{aligned} \langle x, Ax\rangle &= \langle By, y\rangle = \lambda_y By \\ &= \langle By, By\rangle_1 \geq \langle By, By\rangle \\ &\geq \langle x, x\rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

ainsi $\langle x, Ax\rangle$ est réel et est égal à son conjugué et l'on obtient

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in D\,(A)$$

(Puisque $B : H \longrightarrow D_1$, le domaine de A est contenu dans D_1 car $B\,(H) \subset D_1$ et donc tout élement de la forme By $(y \in H)$ appartient à $D(A)$)

On conclut que A est un opérateur positif autoadjoint. On montre maintenant que $D(A)$ est dense en D_1 dans $(D_1, \langle , \rangle_1)$.

Remarquons en premier lieu que pour $x' = By', y' \in H$ et $x \in D_1$

$$\begin{aligned} \langle x, Ax'\rangle &= \langle x, y'\rangle = \lambda_{y'} x = \langle By', x\rangle_1 \\ \underset{B \text{ est autoadjoint}}{= \langle x, By'\rangle_1} &= \langle x, x'\rangle_1 \quad ; x' \in D(A) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

[2] L'auteur dans [[8]] démontre que cet opérateur inverse est autoadjoint, nous avons suivi [[14]] qui le déduit à partir du théorème cité.

Soit à présent un élement $x \in D_1$ orthogonal à $D\,(A)$ par rapport à $(D_1, \langle , \rangle_1)$,

$$\langle x, x' \rangle_1 = 0, \forall x' \in D(A)$$

et en utilisant l'identité (4.1.5)

$$\langle x, Ax' \rangle = \langle x, x' \rangle_1 = 0, \forall x' \in D(A)$$

or, $A : D(A) \longrightarrow H$ est surjective. Ainsi, si on pose $z = Ax'$ on obtient

$$\langle x, z \rangle =, \forall z \in H$$

ou bien encore $x \perp H$ et forcement $x = 0$.
Pour finir on montre que A est une extension de $S = I_H + T$. On rappelle que

$$D\,(S) = D\,(T) = D$$

D'une part, pour $x, y \in D$

$$\langle x, Sy \rangle = \lambda_{Sy} x = \langle b_{Sy}, x \rangle_1 = \langle BSy, x \rangle_1 = \langle x, BSy \rangle_1.$$

D'autre part, par la définition de $\langle , \rangle_1$

$$\langle x, Sy \rangle = \langle x, (I_H + T)\,y \rangle = \langle x, y \rangle_1 \ (x, y \in D)$$

Ainsi

$$\langle x, y - BSy \rangle_1 = 0 \ )$$

mais D est dense dans D_1 par rapport à $(D_1, \langle , \rangle_1)$ car par définition D_1 représente la fermeture de D par rapport à cet espace. D'où,

$$BSy = y \quad \forall y \in D.$$

Ainsi , $y \in D$ appartient à $R\,(B)$ (l'image de B), il est donc dans $D(A)$ et,

$$Ay = A(BSy) = Sy$$

Ainsi, le domaine de A contient celui de S (T et S sont tout deux définies dans D) et étend S.

On considère en tout dernier lieu $T^F = A - I_H$, on sait que,

$$D = D(T) = D(S) \subset D(A) = D\left(T^F\right)$$

et pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned} T^F x &= (A - I_H)\, x = Ax - x = Sx - x \\ &= (T + I_H)\, x - x = Tx \end{aligned}$$

ce qui veut dire que T^F est une extension de T. De plus, de 4.1.4 il vient que,

$$\left\langle T^F x, x\right\rangle = \langle (A - I)\, x, x\rangle \geq 0, \forall x \in D(A) = D\left(T^F\right)$$

T^F est donc positif et du théoème 2.4.8 autoadjoint. c'est l'extension recherchée. □

4.1.1 Extension de Friedrichs pour les opérateurs semi-bornés

Soit T un opérateur densement défini sur D symétrique et semi-borné inférieurement, c'est à dire pour lequel $\exists C \geq 0$,

$$\langle Tx, x\rangle \geq C \langle x, x\rangle, \forall x \in D$$

On considèrant l'opérateur $A = T - CI_H$, il vient tout d'abord que A est symétrique et positif, d'après le théorème 4.1.1 il admet une extension positive autoadjointe A^F; soit $T^F = A^F + CI_H$ alors T^F est aussi autoadjoint (théorème 2.4.8) et,

$$\begin{aligned} \left\langle A^F x, x\right\rangle &= \left\langle \left(T^F - CI_H\right) x, x\right\rangle \\ &= \left\langle T^F x, x\right\rangle - C\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in D\left(T^F\right) = D\left(A^F\right) \\ &\Longrightarrow \left\langle T^F x, x\right\rangle \geq C\langle x, x\rangle, \forall x \in D\left(A^F\right) \end{aligned}$$

d'où A^F est semi-bornée inférieurement par la même constante que celle de T. Enfin,

$$D = D(A) \subset D\left(A^F\right) = D\left(T^F\right)$$

et,

$$\begin{aligned} T^F x &= \left(A^F + CI_H\right) x = A^F x + Cx \\ &= Ax + Cx = (T - CI_H)\, x + Cx \\ & \quad Tx \end{aligned}$$

donc T^F est une extension de T. On peut énoncer le théorème suivant,

Théorème 4.1.2 (de Friedrishs) *Tout opérateur T densément défini symétrique semi-borné inférieurement admet une extention auto-adjointe semi-bornée inférieurement.*

CONCLUSION

Nous avons vu à travers ce mémoire qu'il est possible de construire pour tout opérateur positif au semi-borné inférieurement une extension auto-adjointe qui garde la même propriété que celle de l'opérateur original, en d'autre terme , cette dernière est positive dans le premier cas semi-bornée infèrieurement dans le second .

Neamoins, cette extension dite "extension de Friedrichs" ou "extension canonique" n'est pas unique ,nous avons déja vu la théorie de Von Neumann qui garantit à tout opérateur symétrique ayant des indices de défauts égout,dont les opérateurs sus-cités ont font partie ,une extension auto-adjointe.

Déja ,l'on pourait de posé la question suivant : Existe-il un lien entre les deux types d'extensions dans la cas d'opérateurs positifs ou semi-bornés ?

On pourait explorer encore d'autres méthodes d'extensions ,dont l'extension de Krein-Von Neumann.Il s'avère que l'extension de Friedrichs est la plus vaste extension propre,alors que celle de Krein-Von Neumann est la plus petite (voir [15] pour plus de détails).

Enfin, on pourait étudier l'inversibilité de l'extension de Friedrichs (voir[15]).

Bibliographie

[1] **S. Attal :** *Lecture 1 Operator and spectral theory,* Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, France. http ://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf

[2] **N. I. Akhiezer and I. M. Glazman** : *Theory of linear operators in Hilbert space*, vols 1 and 2, New York, Frederik Ungar 1961 and 1963.

[3] **W. Amroune** : *Sur les opérateurs non bornés dans les espaces de Banach,* Mémoire de Master, Spécialité Mathématiques Fondamentales et Appliquées,Université Mohamed Boudiaf De M'sila, Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique,Département de Mathématiques *(2017)***.** http ://dspace.univ-msila.dz :8080/xmlui/handle/123456789/1745

[4] **J Bell :** *Unbounded operators and the Friedrichs extension,* Department of Mathematics, University of Toronto *(May 26, 2014).* http ://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/friedrichs.pdf

[5] **B K. Driver :** *Analysis tools with applications*, springer (*June 9, 2003*) http ://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/PDE-Anal-Book/analpde1.pdf

[6] **J. Feldman** : *Completion, Department of Mathematics,*University of British Columbia,Vancouver, BC,Canada, *(september 6,2018)* https ://secure.math.ubc.ca/~feldman/m511/completion.pdf

[7] **K. Friedrichs :** *Spektraltheorie halbbeschrânkter Operatoren*, Math. Annalen, 109 *(1934)*, 465—487, 685—713 ; 110 *(1935)*, 777—779

[8] **P. Garrett :** *Unbounded operators, Friedrichs' extension theorem,* http ://www.math.umn.edu/e garrett/

[9] **B. Helffer :** *Spectral theory and applications. An elementary introductory course. Bucarest Version 2010,* Université Paris-Sud, Département de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Bat. 425, F-91405 Orsay Cedex, FRANCE, *(March 26, 2010).* https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~helffer/m2bucarest2010.pdf

[10] **A. Ibort and J.M. Perez–Pardo** : *On the theory of self-adjoint extensions of symmetric operators and its applications to quantum physics. (feb 18, 2015).* Source : ArXiv https ://arxiv.org/abs/1502.05229

[11] **S. Makhelouf :** *Sur la construction d'une extension autoadjointe d'un opérateur symétrique,* Mémoire de Master,Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, *(2015)* http ://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/7050

[12] **M.Nadir** : *Opérateurs Continus,* Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila ,Algérie 2004, Laboratory of Pure and Applied Mathematics and Laboratory of Signals Analysis and Systems,2800 ALGERIA http ://www.mostefanadir.com/Operators%20Theory_files/Operateurs%20Continus.pdf

[13] **J. Von Neumann** : *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin, 1932)*

[14] **F. Riesz et B. SZ-Naguy :** *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Académie des sciences de Hongrie. Cinquième édition *1968.*

[15] **Z. Sebestyén and E. Sikolya :** *On Krein-von Neumann and Friedrichs extensions*, Acta Sci. Math. (Szeged) *(2003)* https ://sikolyaesz.web.elte.hu/KreinNeumannFriedrich.pdf

http ://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary ?doi=10.1.1.706.8533

[16] **M. H. Stone** : *Linear transformations in Hubert space (New York, 1932)*

[17] **Di Wang :** *Friedrichs Extension*, **western university Canada, (***April 29, 2015***)**, https ://www.uwo.ca/math/faculty/khalkhali/files/Friedrichs.pdf

[18] **J. Weidmann** : *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer-Verlag, New York,Inc, *(1980).*