Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Amel Seri

ÉTUDE QUANTITATIVE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES IMPULSIVES

soutenu publiquement le jour Mois Année devant le jury composé de :

Président :	Mr Zoubir Dahmani	Pr. Université de Mostaganem
Examinateur :	Mme Khadidja Bechaoui	M.A.A. Université de Mostaganem
Encadreur :	Mme Amouria Hammou	M.C.B. Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère.

A mon cher père qui m'ont toujours soutenu.

Qui m'ont aide à affronter les difficultés.

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

A mes trés chères sœurs et mes frères.

A tout ma famille.

A tous les amis.

Enfin à toute(es) les étudiants de la promotion Master 2 Mathématiques.

Remerciements

Je remercie Allah Tout-Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience pour faire ce modeste travail.
Je remercie mon encadrante **Mme Amouria Hammou**, MCB à l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, pour son encadrement, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.
Je remercie vivement mon ensiegnant **Professeur Dahmani Zoubir**, professeur à l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.
Je tiens à remercier aussi **Mme Bechaoui Khadidja**, MAA à l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, d'avoir accepté d'examiner ma mémoire et faire partie de jury.
Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de cette mémoire.

Table de matière

Notations

$\mathbb{N}$	: Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	: Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
$Re(.)$	: Partie réele d'un nombre complexe.
$C([a,b],\mathbb{R})$	: Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\Gamma(.)$	: La fonction Gamma.
$\beta(.)$	: La fonction Bêta.
I_a^α	: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.
${}^{RL}D_a^\alpha$	: Derivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville.
${}^{c}D_a^\alpha$	: Derivée fractionnaire au sens de Caputo.

Abstract

Existence And Uniqueness Of Solutions To Impulsive Fractional Differential Equations

In this paper, we establish sufficient conditions for the existance of solutions for a class of initial value problem for impulsive fractional differential equations involving the caputo fractional derivative .

These results were obtained by using the fixed point theorem of Banach , Scheafer and l'alternative Non Linéaire de Leray- Schauder .

Key words and phrases : Fractional differential equations, impulsive existence of solutions, Caputo fractional derivative, the fractional order integral, fixed point.

Résumé

Étude Quqntitqtive Pour Les Éauqtions Différentielles Fractionnaires Impulsives

Dans ce mémoire, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour une classe de problème de valeur initiale pour les équations différentielles fractionnaires impulsives impliquant la dérivée fractionnaire de Caputo.

Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorèmes de point fixe de Banach , Scheafer et l'alternative Non Linéaire de Leray- Schauder .

Phrases et mots clés : Équations différentielles fractionnaires, impulsive, existence de solution, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe.

Introduction

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre réel ou complexe d'une fonction différentiable f soit :

$$(D^{\alpha}f)(t) = \frac{d^{\alpha}f(t)}{dt^{\alpha}}. \tag{1}$$

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Par ailleurs, les équations différentielles fractionnaires impulsives constituent un domaine de recherche d'actualité fort intéressant. En effet, l'étude de ces équations connait une popularité croissante parmi les chercheurs, le nombre d'articles parus, traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la dépendance des solutions de ce type d'équations, témoigne de la vitalité de la recherche dans ce domaine.

Le but de ce mémoire est de contribuer au développement de cette théorie émergente, et ce en étudiant une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires multiples soumises à des conditions impulsives dans des espaces de Banach.

Ce mémoire consiste à étudier un problème à valeur initiale pour les équations différentielles fractionnaires. Notre approche est basée sur la théorie du point fixe (théorème du Banach, Schaefer et l'alternative Non Linéaire de Leray- Schauder).

Ce mémoire est composé en deux chapitres.

Le premier chapitre intitulé " Préliminaires ", dans ce chapitre, on va donner notations, définitions, quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires aux sens de Riemann Liouville et aux sens de Caputo, et la dernière section est consacré quelque théorème du point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé " Étude quantitative pour un problème concernant les équations différentielles fractionnaires impulsives ", on traitera l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire impulsive.

On considère le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t,y), \quad \text{pour tout } t \in J=[0,T], \quad t \neq t_k, \tag{2}$$

$$\Delta y\,|_{t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), \tag{3}$$

$$y(0) = y_0, \tag{4}$$

où $k=1,...,m$, $0<\alpha\leq 1$, ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $I_K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $y_0 \in \mathbb{R}$, $0=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}=T$, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+)-y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} y(t_k+h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} y(t_k+h)$ représentent les limites droite et gauche de $y(t)$ à $t=t_k$.

Nous terminons ce chapitre par un exemple pour voir l'utilité du notre résultat.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggére les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Chapitre 1

Préliminaires

1 Introduction

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions, préliminaires et théorèmes nécessaires pour cette étude.

Soit f une fonction réelle, α appartient au domaine de définition de f et α un nombre réelle strictement positif.

Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \to \mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty := sup\{|y(t)|, t \in J\}.$$

2 Notations et définitions

Dans cette section, on donne quelques définitions, théorèmes et propriétés.

Espace L^p : Les espaces L^p sont des espaces des fonctions dont la puissance $p^{ième}$ de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

Soit $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1. *[16] Soit $\Omega = [a, b](-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace L^p comme suit :*

Pour $1 \leq p \leq +\infty$:

$L^p(\Omega)$ *est un espace des fonctions mesurables de puissance* $p^{ième}$ *intégrables sur* Ω *c'est à dire :*

$$\begin{aligned} f \;\; &\in \;\; L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_{\Omega} |(f)|^p \, dt < \infty, \;\; f \;\; est \;\; mesurable. \\ \|f\|_p \;\; &= \;\; (\int |f|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \;\; est \;\; une \;\; norme \;\; sur \;\; L^p(\Omega). \end{aligned}$$

$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Pour $p = +\infty$ ***on a :***

$$\|f\|_{+\infty} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(t)|\,,$$

où $L^\infty(a, b)$ *est l'espace des fonctions bornées sur* $[a, b]$.

Définition 2. *[9] On dit que* X *est complet pour la norme* $\|.\|$ *si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Exemple 3. $((C([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_{+\infty})$ *est un espace de Banach.*

Définition 4. *[16] L'opérateur* T *est dit complètement continu, si il est continu et compact.*

Définition 5. *[16] Soit* $f : J \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *une fonction continue, on dit que* f *est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si :*

$\forall (t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^d$*, il existe un voisinage* U *de* (t_0, y_0) *et une constante* $C_{t_0,y_0} > 0$ *telle que,* $\forall (t, x), (t, y) \in U$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C_{t_0,y_0} \|x - y\|\,.$$

Proposition 6. *[9] Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* ϕ *de* X *dans* X *est dite contractante s'il existe un nombre positive* $K \in]0, 1[$*, tel que pour tout* $x, y \in X$*, on a :*

$$\|f(x) - f(y)\|_X \;\; \leq \;\; k \|x - y\|_X\,. \tag{1.1}$$

Définition 7. *[9] Soit* (f_n) *une suite de fonctions définies sur un intervalle* I *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

On dit que la suite est équicontinue si quelque soient $t_1 \in I$*,* $\epsilon > 0$*, il existe un* $\delta > 0$*, tel que quelque soient* $t_2 \in I$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $| t_1 - t_2 | < \delta$*, alors* $| f_n(t_1) - f_n(t_2) | < \epsilon$.

La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Arzelà-Ascoli :

Théorème 8. *[9] (Arzelà-Ascoli) :*

Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Ω est équicontinu.
2. Ω est uniformément borné.

3 Fonctions Spéciales

Dans cette section, on présente la fonction Gamma et la fonction Bêta qui sont les plus importantes outils dans la théorie du calcul fractionnaire. Pour plus de détails voir [12, 14, 15].

3.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ est considéré comme étant l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire. Elle est donnée par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad x > 0, \tag{1.2}$$

avec $\Gamma(1) = 1$.

La fonction Gamma possède une propriété importante donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.3}$$

On peut démontrer (1.3) par une intégration par partie

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \tag{1.4}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad n \in N^*. \tag{1.5}$$

La relation de récurrence (1.3) permet de définir $x \mapsto \Gamma(x)$ pour les valeurs négatives de x, tels que pour : $-1 < x < 0$, on aura : $0 < x + 1 < 1$. Alors $\Gamma(x+1)$ est bien défnie par la formule (1.2).
On peut définir $\Gamma(x)$ par la relation :

$$\Gamma(x) = \tfrac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{1.6}$$

Ainsi pour
$-(n+1) < x < -n;\ n \in \mathbb{N}^*$, on aura

$$\Gamma(x) = \tfrac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)...(x+n)}. \tag{1.7}$$

Exemple 9.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1. \tag{1.8}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{1.9}$$

Preuve

1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$

2) $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$

Comme une deuxième méthode on utilise la formule :

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Alors

$$\Gamma(1) = 0! = 1.$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1.$$

3) Soit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,$$

on pose $u = \sqrt{t}$, donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Sachant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (l'intgrale\ \ de\ \ Gauss),$$

on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

3.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta(x, y) = \int_0^{\infty} (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \qquad x, y \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.10}$$

La relation entre la fonction Gamma et Bêta est donnée par l'éxpression :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(y, x). \tag{1.11}$$

Preuve

Pour $Re(x), Re(y) > 0$, on a :

$$\Gamma(x)\ \ \Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} dt ds.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} z = t + s, \\ t = zw, \end{cases} \tag{1.12}$$

alors

$$0 \leq z \quad , \quad 0 \leq w \leq 1,$$

et

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(w,z)} = \begin{vmatrix} z & w \\ -z & 1-w \end{vmatrix} = z,$$

ainsi

$$dtds = zdwdz,$$

alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\ \Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 zw^{x-1}(z(1-w))^{y-1}e^{-z}dwdz \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 z^{x+y-1}w^{y-1}(1-w)^{y-1}e^{-z}dwdz \\
&= (\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}e^{-z}dz)(\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw) \\
&= \Gamma(x+y)\ \beta(x,y)\,.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Donc

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.14}$$

□

Définition 10. *La fonction Dalta est définie par :*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0, \\ +\infty & si \quad t = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.16}$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0). \tag{1.17}$$

4 Le calcul fractionnaire

4.1 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

Définition 11. *[11, 13] . L'intégrale d'ordre fractionnaire (arbitraire) de la fonction $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}^+)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est défini par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \int_a^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)ds, \tag{1.18}$$

où Γ est la fonction Gamma.

Quand $a = 0$, nous écrivons

$$I_a^\alpha f(t) = [h * \varphi_\alpha](t), \tag{1.19}$$

où

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & pour \quad t > 0, \\ 0 & pour \quad t \leq 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

et $\varphi_a \to \delta(t)$ comme $\alpha \to 0$, où δ est la fonction delta.

Proposition 12. *[11] Soit $f \in C([a,b))$, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :*

1. $I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f$.
2. $I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^\beta I_a^\alpha f$.

Preuve

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in C([a,b))$, pour (1), la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Béta.

En effet

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\int_0^t (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)d\tau)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau)(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds)d\tau. \end{aligned} \tag{1.21}$$

En posant

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}, \tag{1.22}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\beta(\alpha,\beta) \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

En remplaçant (1.23) dans (1.21), on aura

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)d\tau = I_a^{\alpha+\beta}f(t), \tag{1.24}$$

d'où le résultat.

Maintenant pour démontrer (2), en utilisant la propriété précédente (1).

Alors

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta}f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t). \tag{1.25}$$

$\square$

4.2 Dérivation Fractionnaire

La différentiation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la différentiation d'ordre entière. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter deux approches : de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Approche de Riemann-Liouville

Définition 13. *[12, 14, 15] Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C([a,+\infty),\mathbb{R})$, est donnée par :*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m I_a^{m-\alpha}f(t) = \dfrac{d^m}{dt^m}\Big(\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau\Big), & m-1<\alpha<m, \\ \dfrac{d^m}{dt^m}f(t), & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.26}$$

Proposition 14. *[11] Soient $f \in C([a,b))$ et $m-1<\alpha<m, m \in \mathbb{N}^*$.*

Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^\alpha$ possède les propriétés suivantes :

1. ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ *est un opérateur linéaire.*

2. $({}^{RL}D_a^{\alpha})(I_a^{\alpha}f)(t) = f(t)$.

3. Si $({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t) = 0, alors\ f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}, (c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}$.

Propriétés :[11] Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on a :

1. ${}^{RL}D_a^{\alpha}(I_a^{\alpha}f)(t) = f(t), \alpha > 0$.
2. ${}^{RL}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha}f)(t) = I_a^{\alpha-\beta}f(t),\ \alpha > 0,\ \beta > 0$.
3. $I_a^{\alpha}({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t) \neq f(t)$.
4. ${}^{RL}D_a^{\alpha}({}^{RL}D_a^{\beta}f)(t) \neq^{RL} D_a^{\beta}({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t)$.
5. ${}^{RL}D_a^{\beta}({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t) \neq^{RL} D_a^{\beta+\alpha}f(t)$.

Approche de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une application de $I_a^{m-\alpha}$ a suivie d'une dérivation classique d'ordre m. Tandis que la dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 15. *[12, 14, 15] pour* $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, *et* $f \in C^m([a,+\infty))$, *la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$
{}^{C}D_a^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} f(s)ds = I_a^{m-\alpha}D^m f(t), & m-1 < \alpha < m, \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.27}
$$

4.3 Lien Entre Riemann-Liouville et Caputo

Pour $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, et $f \in C^m([a,+1))$, la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville à celle de Caputo est donnée par :

$$
({}^{C}D_a^{\alpha})f(t) = ({}^{RL}D_a^{\alpha})(f(t) - \textstyle\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^j}{j} f^{(j)}(a)). \tag{1.28}
$$

Proposition 16. *[11] Pour* $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, *et* $f \in C^m([a,+1))$, *l'opérateur de dérivation de Caputo* $({}^{C}D_a^{\alpha})$ *a les propriétés suivantes :*

1. $({}^C D_a^\alpha)$ *est un opérateur linéaire.*

2. $({}^C D_a^\alpha)(I_a^\alpha f)(t) = f(t).$

3. $Si({}^C D_a^\alpha f)(t) = 0,$ *alors* $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j, (c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}.$

4. $I_a^\alpha({}^C D_a^\alpha f)(t) = f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j, (c_j)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}.$

4.4 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Théorème 17. *[10] Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $f : X \to X$, *(*X *est un fermé de* E *) une application contractante alors f admet un point fixe unique,*

$$\exists! x_0 \in X, f(x_0) = x_0.$$

Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 18. *[10] Soient* X *un espace de Banach et* $f : X \to X$ *une application continue et compact sur* X, *si l'ensemble*

$$B = \{x \in X;\ telle\ que\ \ \exists \lambda \in [0,1]\ \ tq\ \ x = \lambda f(x)\} \tag{1.29}$$

est bornée, alors l'application f *admet au moins un point fixe.*

Théorème 19. ***(Alternative Non Linéaire de Leray- Schauder)****[2] Soit* X *un espace de Banach et* K *un sous ensemble convexe non vide, soit* U *un sous ensemble ouvert non vide de* K, $0 \in U$ *et* $T : \overline{U} \to K$ *un opérateur complètement continu, alors*

1. *L'opérateur* T *admet un point fixe dans* $\overline{U}$.
2. $\exists \lambda \in (0,1)$ *et* $x \in \partial U$ *tel que* $x = \lambda T(x)$.

Chapitre 2

Étude quantitative pour un problème concernant les équations différentielles fractionnaires impulsives

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unucité des solutions du problèmes à valeur initiale d'équations différentielles d'ordre fractionnaire avec impulsion.

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= f(t,y), \quad \text{pour tout } t \in J=[0,T], \quad t \neq t_k, & (2.1)\\ \Delta y\mid_{t=t_k} &= I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), & (2.2)\\ y(0) &= y_0. & (2.3)\end{aligned}$$

Où $k=1,...,m, 0<\alpha\leq 1$, ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo , $f: J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donnée, $I_K:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, et $y_0\in\mathbb{R}$, $0=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}=T$, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+)-y(t_k^-)$, $y(t_k^+)=\lim_{h\longrightarrow 0^+} y(t_k+h)$ et $y(t_k^-)=\lim_{h\longrightarrow 0^-} y(t_k+h)$ représentent les limites droite et gauche de $y(t)$ à $t=t_k$.
Dans tout ce chapitre,
$PC(J,\mathbb{R})$ designe l'espace de Banach défini par :

$$\begin{aligned} PC(J,R) = \{y : J\to\mathbb{R} : y\in C((t_k,t_{k+1}],\mathbb{R}), k=0,\dots,m \;\; et \;\; il \;\; existe \\ y(t_k^-) \;\; et \;\; y(t_k^+), \quad k=1,\dots,m \;\; avec \;\; y(t_k^-)=y(t_k)\}\end{aligned}$$

avec la norme

$$\|y\|_{PC} = \sup_{t \in J} |y(t)|.$$

Notons $J^{'} := [0,T] \backslash \{t_1, ..., t_m\}$.

Définition 20. *Une fonction $y \in PC(J, \mathbb{R})$ est dite une solution de (2.1)-(2.3) si y satisfait l'équation ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur $J^{'}$, et les conditions $\Delta y\left|_{t=t_k}\right. = I_k(y(t_k^-)), k = 1, ..., m;$ et $y(0) = y_0$.*

Pour prouve l'éxistence des solutions à $(2.1) - (2.3)$, nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivantes :

Lemme 21. *[17] Soient $\alpha > 0$, $t > 0$, alors l'équations différentielle*

$${}^cD^\alpha h(t) = 0,$$

a des solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in R$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 22. *[17] Soient $\alpha > 0$, $t > 0$ alors*

$$I^{\alpha c} D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}.$$

Pour certains $c_i \in R$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$.
Comme conséquence du lemme (20) et du lemme (21) nous avons le résultat suivant qui est utile dans ce qui suit :

Lemme 23. *Soient $0 < \alpha \leq 1$, et soit $h : J \to \mathbb{R}$ continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds & si \quad t \in [0, t_1], \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds & \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) & si \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \tag{2.4}$$

où $k = 1, ..., m$ si et seulement si y est une solution de problème de valeur initiale fractionnaire

$${}^cD^\alpha y(t) = y(t), \qquad t \in J^{'}. \tag{2.5}$$

$$\Delta y\left|_{t=t_k}\right. = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), \quad k = 1, ..., m, \tag{2.6}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.7}$$

Preuve

Si $t \in [0, t_1]$, supposons que y est une solution du problème (2.5)-(2.7).

D'aprés le lemme 22, on a :

$$y(t) = \ I^{\alpha c} D^{\alpha} h(t) - c_0$$

où c_0 est une constante réel.

La condition (2.7) donne

$$c_0 = y_0$$

donc, nous obtenons le résultat suivante

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Si $t \in [t_1, t_2]$, alors d'aprés le lemme 22

$$y(t) = y(t_1^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

on a $\quad y(t_1^+) = I_1 \left(y \left(t_1^- \right) \right) + y(t_1^-) \quad$ et $\quad y(t_1^-) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$

Alors

$$y(t) = I_1 \left(y \left(t_1^- \right) \right) + y(t_1^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

ainsi

$$y(t) = I_1 \left(y \left(t_1^- \right) \right) + \ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Si $t \in [t_2, t_3]$, d'aprés le lemme 22 on a

$$y(t) = y(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

on a $\quad y(t_2^+) = I_2 \left(y \left(t_2^- \right) \right) + y(t_2^-),$

et $\qquad y(t_2^-) = I_1 \left(y \left(t_1^- \right) \right) + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$

Alors

$$\begin{aligned}
y(t) &= I_2\left(y\left(t_2^-\right)\right) + y(t_2^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
y(t) &= I_2\left(y\left(t_2^-\right)\right) + I_1\left(y\left(t_1^-\right)\right) + \ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.
\end{aligned}$$

Si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, d'aprés le lemme 22 on obtient

$$y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}h(s)ds \ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \sum_{i=1}^{k} I_i\left(y\left(t_i^-\right)\right).$$

Inversement, supposons que y satisfait l'équation intégrale fractionnaire impulsive (2.4).

Si $t \in [0, t_1]$ alors $y(0) = y_0$ et en utilisant ${}^cD^\alpha$ qui est l'inverse gauche de I^α, on obtient

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad \text{pour chaque } t \in [0, t_1].$$

Si $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1, ..., m$ et en utilisant le fait que, où c est constant, on obtient

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad \text{pour chaque } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Ainsi, nous pouvons facilement montrer que

$$\Delta y\,|_{t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), \quad k = 1, ..., m.$$

$\square$

1.1 Premier Résultat

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 24. *Supposons que :*

$(H1)$ *Il existe une constante $l > 0$, tel que*

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq l\,|u - \overline{u}|\,,\ \textit{pour chaque } t \in J \textit{ et chaque } u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

$(H2)$ *Il existe une constante $l^* > 0$, tel que*

$$|I_k(u) - I_k(\overline{u})| \leq l^*\,|u - \overline{u}|\,,\ \textit{pour chaque } u, \overline{u} \in \mathbb{R} \textit{ et } k = 1, ..., m.$$

Si

$$\left[\frac{T^\alpha l(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + ml^*\right] < 1, \tag{2.8}$$

alors (2.1)-(2.3) a une solution unique sur J.

Preuve

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.3), il suffit de vérifier les hyphothèses de point fixe de Banach.

On définit l'opérateur $F : PC(J,\mathbb{R}) \to PC(J,\mathbb{R})$ par :

$$F(y)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds$$
$$+ \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right).$$

En clair, les points fixes de l'opérateur F sont solution du problème (2.1)-(2.3). Nous utilisons le principe de contraction de Banach pour prouver que F a un point fixe. Nous montrons que F est une contraction.

Soient $x, y \in PC(J, \mathbb{R})$, pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|\, ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|\, ds + \sum_{0<t_k<t} \left| I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right) - I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\alpha-1} |x(s)-y(s)|\, ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |x(s)-y(s)|\, ds + \sum_{k=1}^{m} l^* \left| x\left(t_k^-\right) - y\left(t_k^-\right)\right| \\
&\leq \frac{mlT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty + \frac{T^\alpha l}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty + ml^* \|x-y\|_\infty .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{T^\alpha l\,(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + ml^*\right] \|x-y\|_\infty .$$

D'aprés (2.8), F est une contraction. Comme conséquence du théorème du point fixe de Banach. □

1.2 Deuxième Résultat

On va utiliser le théorème de point fixe de Schaefer pour démontrer que F admet au moins un point fixe.

Théorème 25. *Supposons que :*

$(H3)$ *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

$(H4)$ *Il existe une constante $M > 0$, tel que*

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour chaque } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathbb{R}.$$

$(H5)$ *Les fonctions $I_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continuons et il existe une constante $M^* > 0$, tel que*

$$|I_k(u)| \leq M^* \text{ pour chaque } u \in \mathbb{R},\ k = 1, ..., m.$$

Alors (2.1)-(2.3) a au moins une solution sur J.

Preuve

Le preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Etape 1 : F est continue,

soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ en $PC(J,\mathbb{R})$. Puis pour chacun $t \in J$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} \left| I_k\left(y_n\left(t_k^-\right)\right) - I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right) \right|.
\end{aligned}$$

Puisque f et $I_k, k = 1, ..., m$ sont des fonctions continues, on a

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \to 0 \quad comme \quad n \to \infty.$$

Etape 2 : F transforme ensemble bornés en un ensemble nom bornés dans $PC(J,\mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que pour chaque $y \in B_{\eta^*} = \{y \in PC(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq \ell$. Par (H4) et (H5) nous avons pour chacun $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq |y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds + \sum_{0<t_k<t} \left| I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right) \right| \\
&\leq |y_0| + \frac{mMT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^*.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq |y_0| + \frac{MT^\alpha(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^* := \ell.$$

Etape 3 : F transforme un ensemble bornée en un ensemble équicontinue dans $PC(J,\mathbb{R})$.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2, \beta_{n^*}$ être un ensemble borné de $PC(J,\mathbb{R})$ comme a l'étape 2, et soit $y \in \beta_{n^*}$. Alors

$$\begin{aligned}|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_1} \left|(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\|f(s,y(s))\right| ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|(\tau_2 - s)^{\alpha-1}\|f(s,y(s))\right| ds + \sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1} \left|I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)\right|. \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[2(\tau_2 - \tau_1)^\alpha + \tau_2^\alpha - \tau_1^\alpha\right] + \sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1} \left|I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)\right|.\end{aligned}$$

$\tau_1 \to \tau_2$, le coté droite de l'inégalité ci dessus tend vers à zéro. En coséquence des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzelà-Ascoli, nous pouvons conclure que $F : PC(J,\mathbb{R}) \to PC(J,\mathbb{R})$ est complètement continue.

Etape 4 : Des limites a priori.

Il reste maintenant à montrer que l'ensemble

$$\varepsilon = \{y \in PC(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour un certaine } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour un certaine $0 < \lambda < 1$. Ainsi, pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}y(t) &= \lambda y_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k - s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \\ &+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds + \lambda\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)).\end{aligned}$$

Par $(H4)$ et$(H5)$ (comme étape (2)) on a

$$|y(t)| \leq |y_0| + \frac{mMT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^*.$$

et

$$\|y\|_\infty \leq |y_0| + \frac{mMT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + mM^* := R.$$

Cela montre que l'ensemble ε est borné. Alors F admet au moins un point fixe qui solution du problème (2.1)-(2.3). □

1.3 Troisième Résultat

Dans le théorème suivant, nous donnons un résultat d'éxistance pour le problème (2.1)-(2.3) par appliquant l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder et dont les conditions $(H4)$ et$(H5)$ sont affaiblis.

Théorème 26. *Supposons que* $(H2)$ *et les conditions suivantes sont vérifiées :*

$(H6)$ Il existe $\phi_f \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ continue et non décroissante de telle sorte que

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|) \quad t \in J,\ u \in \mathbb{R}.$$

$(H7)$ Il existe $\psi^* : [0, \infty) \to (0, \infty)$ continue et non décroissante tel que

$$|I_K(u)| \leq \psi^*(|u|), \quad u \in \mathbb{R}.$$

$(H8)$ Il existe un nombre $\overline{M} > 0$, tel que

$$\frac{\overline{M}}{|y_0| + \psi(\overline{M})\frac{mT^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \psi(\overline{M})\frac{T^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + m\psi^*(\overline{M})} > 1.$$

Où $\phi_f^0 = \sup\{\phi_f(t) : t \in J\}$. Alors (2.1)-(2.3) a au moins une solution sur J.

Preuve. Considérons l'opérateur F défini dans les théorèmes 24 et 25. Cela peut être facilement montré que F est continue.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, soit y que pour chaque $t \in J$ on a $y(t) = \lambda(Fy)(t)$. Alors de $(H6)-(H7)$ nous avons pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1}\phi_f(s)\psi(|y(s)|)ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\phi_f(s)\psi(|y(s)|)ds + \sum_{0<t_k<t} \psi^*(|y(s)|) \\
&\leq |y_0| + \psi(\|y\|_\infty)\frac{mT^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \psi(\|y\|_\infty)\frac{T^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + m\psi^*(\|y\|_\infty).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\|y\|_\infty}{|y_0| + \psi(\|y\|_\infty)\frac{mT^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \psi(\|y\|_\infty)\frac{T^\alpha \phi_f^0}{\Gamma(\alpha+1)} + m\psi^*(\|y\|_\infty)} \leq 1.$$

Alors pour condition $(H8)$, il existe $\overline{M}$ tel que $\|y\|_{\infty} \neq \overline{M}$.

Soit

$$U = \{y \in PC(J, \mathbb{R}) : \|y\|_{\infty} < \overline{M}\}.$$

l'opérateur$F : \overline{U} \to PC(J, \mathbb{R})$ est continu et complètement continu. De le choix de U, il n'ya pas de $y \in \partial U$ tel que $y = \lambda F(y)$ pour certains $\lambda \in [0, 1]$. Comme conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder [10] , on en déduit que F a un point fixe y dans $\overline{U}$ qui est solution du problème (2.1)-(2.3). Cette complète la preuve.

$\square$

1.4 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t|y(t)|}}{(9+e^{t})(1+|y(t)|)}, \; t \in J := [0,1], t \neq \tfrac{1}{2}, \; 0 < \alpha \leq 1, \tag{2.9}$$

$$\triangle y|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{\left|y(\frac{1}{2}^{-})\right|}{3+\left|y(\frac{1}{2}^{-})\right|}, \tag{2.10}$$

$$y(0) = 0. \tag{2.11}$$

L'ensemble

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^{t})(1+x)}, \; (t,x) \in J \times [0, \infty),$$

et

$$I_k(x) = \frac{x}{3+x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Soient $x, y \in [0, \infty)$, et $t \in [0, 1]$. Alors on obtient

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})} \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^{t})(1+x)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})} |x-y| \\ &\leq \frac{1}{10} |x-y| . \end{aligned}$$

Donc la condition $(H1)$ est vérifiée avec $l = 1/10$.

Soient $x, y \in [0, \infty)$. Alors nous avons

$$|I_k(x) - I_k(y)| = \left| \frac{x}{3+x} - \frac{y}{3+y} \right| = \frac{3\,|x-y|}{(3+x)(3+y)} \leq \frac{1}{3}\,|x-y|\,.$$

D'où la condition $(H2)$ est vérifiée avec $l^* = \frac{1}{3}$. On vérifiera que la condition (2.8) est satisfaite avec $T = 1$ et $m = 1$.

En effet

$$\left[\tfrac{T^{\alpha} l(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + ml^* \right] < 1 \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \tfrac{3}{10}, \tag{2.12}$$

ce qui est satisfait pour certains $\alpha \in (0,1]$. Alors par le théorème (24) le probléme (2.9)-(2.11) a une solution unique sur $[0,1]$ pour des valeurs de α satisfaisant (2.12).

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème à valeur initiale pour les équations différentielles fractionnaires.
Les résultats obtenus sont basés sur l'argument du point fixe, en particulier on a utilise le théorème du point fixe de Banach , Scheafer et l'alternative Non Linéaire de Leray-Schauder .
Dans le futur, on va étudier les problèmes aux limites pour les équations différentielles fractionnaires impulsive.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani ; Boundary value problems for fractional differential equations, Adv. Stud. Contemp. Math. 16 (2) (2008), 181-196.

[2] R. P. Agarwal , M. Meehan , D. ORegan , Fixed Point theory and Applications , cambridge Tracts in Mathematics , Cambridge University Press , 141 ,2001

[3] A. Babakhani and V. Daftardar-Gejji ; Existence of positive solutions for multi-term non-autonomous fractional differential equations with polynomial coefficients. Electron. J. Differential Equations 2006(2006), No. 129, 12 pp.

[4] D. D. Bainov, P. S. Simeonov ; Systems with Impulsive effect, Horwood, Chichister, 1989.

[5] M. Belmekki and M. Benchohra ; Existence results for Fractional order semilinear functional differential equations, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 146 (2008), 9-20

[6] M. Benchohra, J. R. Graef and S. Hamani ; Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Appl. Anal. 87 (7) (2008), 851-863.

[7] M. Benchohra, J. Henderson and S. K. Ntouyas ; Impulsive Differential Equations and Inclu-sions, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2, New York, 2006.

[8] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas and A. Ouahab ; Existence results for fractionalorder functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008),1340-1350.

[9] Z.Dahmani, New inequalities in fractional integrals. Int. J. Nonlinear Sci, 9(4). (2010). 493-497.

[10] A. Granas and J. Dugundji ; Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[11] A. A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo ; Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Am-sterdam, 2006.

[12] K.S. Miller, B. Ross : An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Diferential Equations, Wiley, New York, (1993).

[13] I. Podlubny, Fractional Differential Equation,Academic Press, San Diego, 1999.

[14] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev : Fractional Integrals And Derivatives : Theory And Applications, Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).

[15] J. Spanier, K.B. Oldham : The Fractional Calculus, Academic Press., New York, (1974).

[16] A. Taïeb, étude analytique des équations différentielles fractionnaires et applications. thèses de doctorat LMD, Juin 2016, Université de Mostaganeme-bibio.univ-mosta.dz.

[17] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations, Electron. J. Differential Equations vol. 2006 (2006), No. 36, pp, 1-12.