UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD

Option : **Modélisation Contrôle et Optimisation**

Thème :
Observabilité des systèmes linéaires à temps continu de Lyapunov

Etudiante :

‹‹ M^{elle} **DRIA IKRAM** ››
Soutenu le .

Devant les membres du jury

Président	‹‹ **M^{me} DIALA HORIYA** ››	M A A	**U.de Mostaganem**
Examinateur	‹‹ **M^{me} HAMMOU AMOURIA** ››	M C B	**U. de Mostaganem**
Encadreur	‹‹ **M^{me} BECHAOUI KHADIDJA** ››	M A A	**U. de Mostaganem**

Résumé

Le but de notre travail est l'édude de l'observabilité des systèmes linéaires à temps continu de Lyapunov, en fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité de cette classe des systèmes, tout en basant sur les critères d'observabilité des systèmes linéaires standards.

Tout au long de ce mémoire, le travail est illustré par des exemples numériques.

Abstract

The aim of our work is the study of the observability of linear continuous time Lyapunov systems, providing necessary and sufficient condition for the observability of this class of systems, while basing on the observability criteria of the systems linear standards.

Throughout this thesis, the work is illustrated by digital examples.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude à toute ma famille, notamment les parents qui m'ont toujours conseillé et pensé à moi, et qui m'ont fait une bonne éducation.

Je dédie ce travail à celle qui ma soutenue avec toute sa tendresse et son affection, pour ma mère

je dédie aussi à tout mes amis ainsi que le chef de département de mathématiques

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2020 et 2021.

Remerciements

Tous d'abord, Louange A Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce travail.

Je tiens à remercier mes parents qui ont toujours prié pour me voir réussir. Et à leurs conseils judicieux durant cette année.

Je tiens à remarcier **M**^{me} **BECHAOUI KHADIDJA**, mon encadrante pour son aide précieuse, et ces critiques constructives.

Ainsi, je remercie du fond du coeur **les membres du jury** d'avoir accepter de porter un jugement sur mon travail et de faire partie du jury de soutenance de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Mes remerciements sont adressés également à tous les enseignants de département de mathématiques.

Enfin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail et toute la famille de département de mathématiques et la promotion 2020-2021

Notation

I_n	:	Matrice identité de dimension n.
$\otimes$	:	Produit de Kronecher.
A^T	:	Transposée de A.
A^*	:	Opérateur adjoint de A.
$A^\perp$	:	Orthogonale de A.
e^A	:	Matrice exponentielle de A.
$\det(A)$	:	Déterminant de A.
$rg(A)$	:	Rang de A.
$\ker(A)$	:	Noyau de A.
$\mathrm{Im}(A)$	:	Image de A.
$P_\lambda(A)$	:	Le polynôme caractéristique de A.
$\langle\ ;\ \rangle$	:	Le produit scalaire.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	:	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des valeurs à n entiers réels.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	Espace des matrices carrées de dimension n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	:	Espace des matrices carrées de dimension $m \times n$.

Abréviation

L.T.I	:	linéaires à temps invariant
C.H	:	Cayley-Hamilton

Table des matières

INTRODUCTION

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de trés nombreux champs d'applications : les sciences de l'ingénieur, la physique, éléctronique, biologie,...
La théorie du contrôle fournit un cadre commun à tous ces univers. Il est donc remarquable que l'on parvient à obtenir des résultats généraux, qui pourront s'appliquer dans de nombreux domaines.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires à temps continu de Lyapunov. La notion de l'observabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle, c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques.

Tout au long de ce travail, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire de Lyapunov tous deux à temps continu a été faite pour déduire que tous les résultats sur l'observabilité des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes linéaires de Lyapunov. Nous basons pour ce faire sur les références suivantes [1], [2], [6] et [10].
Le mémoire que nous présentons est composé de trois chapitres :
Le premier chapitre est consacré à la présentations des préliminaires et notions de base quand aurra besoin dans notre travail.
Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'observabilité des systémes linéaires à temps continu.
Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'observabilité des systémes linéaires de Lyapunov à temps continu, pour ce faire nous nous somme basés sur les résultats donnés dans le chapitre précédent .
Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion qui couvre tous les éléments de ce mémoire .

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base :

Dans ce chapitre, nous porposons quelques notions de base qui représentent des outils d'agèbres linéaires qui sont trés utiles dans notre travail et présenter quelques rappels sur les systèmes linéaires invariants en temps continu.
Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes : [5], [7] et [9].

1.0.1 Notion sur le produit de Kronecher

Le produit de Kronecker est une opération portant sur les matrices, jôue un rôle important dans les mathématiques et dans les applications trouvées en physique théorique. . . etc, il se note par le symbole $\otimes$.

Définition 1.0.1 *Soient A=[aij] une matrice $n \times m$ et B =[bij] une matrice $p \times q$, alors le produit de Kronecker de A par B est la matrice $mp \times nq$ notée $A \otimes B$, définie par :*

$$A \otimes B = [aijB] = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{np}B \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.0.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
A\otimes B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.0.2 Propriétés

Le produit de Kronecher possède un certain nombre de propriétés importantes
∗ Pour tout matrice A et B, avec $\alpha \in \Bbbk$, on a :

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$$

∗ Le produit de Kronecher est associatif : pour tout triplet de matrices A, B, C

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C$$

∗ Soient A et B deux matrices du même dimension, C et D deux matrices deux même dimension, alors :

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

∗ Le produit de Kronecher n'est pas commutatif :

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

∗ On a aussi :

$$I_{np} = I_n \otimes I_p = I_p \otimes I_n$$

∗ Pour toute matrice A et B, on a :

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

∗ Le produit de Kronecher est également distributif par rapport au produit matriciel standard : pour tout quadruplet A, B, C, tels que, $A.B$ et $C.D$ existent, on a :

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$$

∗ Soient A, B deux matrices régulières :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$*$ Soient A, B deux matrices carrées, alors :

$$tr\,(A \otimes B) = tr\,(A)\,tr\,(B)$$

$*$Si $A \in R^{n\times n}$ et $B \in R^{p\times p}$, alors

$$\det(A \otimes B) = (\det(A))^p\,(\det(B))^n$$

1.1 Outils d'algèbre linéaire

1.1.1 Polynôme caractéristique

Définition 1.1.1 *On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par :*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1.1 ***(Cayley-Hamilton)***

Toute matrice non constante A satisfait son équation caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0, \tag{1.1}$$

et

$$P_A(\lambda) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Où $\lambda \in \mathbb{k}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Exemple 1.1.1 *Considérons la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2, \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= A^2 - 5A - 2I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *Soit la matrice B suivante :*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B est :

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice B sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -3$.

1.2 L'opérateur *vec*

Définition 1.2.1 *Soit $A = [A^1 ... A^p]$ une matrice $n \times p$. On définit l'opérateur vec d'empilement des colonnes de A par :*

$$vec\,(A) = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A^p \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{np}$$

Exemple 1.2.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

alors

$$vec(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.2.1 Propriétés

• Soient A, B deux matrices de même dimension, telles que $A + B$ existe, alors :

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B)$$

•Soient A, B et C des matrices, telles que ABC existe, alors :

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B)$$

Cas particulier :

$$\begin{aligned} vec(AB) &= (I_p \otimes A)vec\,(B) \\ &= (B^T \otimes I_n)vec(A) \end{aligned}$$

1.3 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.3.1 *L'exponentielle d'une matrice carrée M de* dim n *se définit par son développement en série entière*

$$e^M = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!M^i} = I_n + M + \frac{1}{2!M^2} + \frac{1}{3!M^3} + \cdots\cdots + \cdots \tag{1.3.1}$$

Où I_n est la matrice identité de dimension n. Il est clair que e^M est de même dimension que M. Voici quelques propriétés importantes concernant l'exponentielle d'une matrice.
Soient M et N deux matrices de dimension $n \times n$,
$*$ si la matrice M et N commutent i.e $MN = NM$, alors

$$e^M e^N = e^{M+N}.$$

$* \frac{d}{dt}\left(e^M\right) = Me^{Mt}$.
$* \left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}$.
$* \det(e^A) = e^{tr(A)}$.

1.3.1 Qelques méthodes de calcul de l'exponentielle d'une matrice

Plusieurs techniques existent pour calculer e^M, parmis elles, citons les méthodes suivantes :
$*$**Le cas d'une matrice diagonale**
Si D une matrice diagonale, c'est à dire

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

alors, son exponentielle est obtenue en calculant l'exponentielle de chacun des termes de la diagonale principale

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

alors

$$e^D = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^5 & 0 \\ 0 & 0 & e^6 \end{bmatrix}$$

∗Le cas d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable, i.e (il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ telles que, A s'écrit sous la forme $A = PDP^{-1}$), alors son exponentielle est donnée par :

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Exemple 1.3.2 *Considérons la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer les valeurs propres de cette matrice, on doit d'abord calculer son polynôme caractéristique,

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 3)$$

Aprés le calcul des valeurs propres et leurs vecteurs propres associés, on obtient la matrice de passage et son inverse

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^D P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\ast$**Le cas d'une matrice nilpotente**
Soit A une matrice nilpotente d'indice de nilpotence m, i.e $A^m = [0]$, alors :

$$A^k = [0]\,, \text{ pour } \ k \geq m$$

Si on revient a la formule (1.1), on s'aperçoit, alors que cette dernière ne contient qu'un nombre fini de termes, et on a donc

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!}.$$

Exemple 1.3.3 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A est nilpotente d'indice de nilpotence 2, alors son exponentielle est donnée par

$$e^A = I_3 + A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.3.2 *Le produit scalaire sur un espace vectoriel E est une application notée $\langle \ ; \rangle$, défini de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$\ast$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (commutativité)
$\ast$ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (linéairité)
$\ast$ $\langle x, x \rangle \succ 0$ (positivité)

Proposition 1.3.1 *La matrice A est symétrique semi définie positive si et seulement si*

$$A^T = A,$$

et

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

Définition 1.3.3 *Soit A une matrice de dimension $m \times n$. Son noyau et son image sont les sous espaces définis respectivement par*

$$\ker A = \left\{ X = (x_1 \dots x_n)^T \in \Bbbk^n / \ AX = 0 \right\} .$$

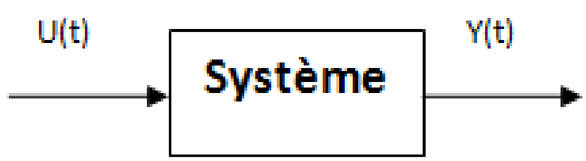
Et

$$\operatorname{Im} A = \left\{ Y = (y_1 \cdots y_m)^T \in \Bbbk^m ; \exists X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \Bbbk^n / \ Y = AX \right\} .$$

1.4 Notion du système

Définition 1.4.1 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalisent une opération spécifique, il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extèrieur .*

Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extèrieur.



1.4.1 Système et représentation d'état

Tout système dynamique peut être représenté par ses équations d'état définies comme un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamiques et un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sorties ou de mesures.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ équation dynamique} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ équation de mesure} \end{cases}$$

Remarque 1.4.1 *f et h sont suceptibles de prendre n'importe quelle forme.*

Dans notre cas, on intéresse au cas des systèmes qui peuvent être d'écrit par des équations linéaires à coefficients constants, qui veut dire des systèmes $L.T.I$ (linéaires à temps invariant).

1.5 Description d'un système L.T.I à temps continu

Définition 1.5.1 *La représentation d'état d'un système L.T.I à temps continu est représentée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.2}$$

où

$$\begin{array}{rcl} x(t) & \in & \mathbb{R}^n : \text{le vecteur d'état} \\ y(t) & \in & \mathbb{R}^m : \text{le vecteur de sortie} \\ u(t) & \in & \mathbb{R}^m : \text{le vecteur de commande} \\ A & \in & \mathbb{R}^{n\times n} : \text{la matrice d'état} \\ B & \in & \mathbb{R}^{n\times m} : \text{la matrice d'entrée} \\ C & \in & \mathbb{R}^{p\times n} : \text{la matrice de sortie} \\ D & \in & \mathbb{R}^{p\times m} : \text{la matrice de transmission.} \\ t & : & \text{le temps} \end{array}$$

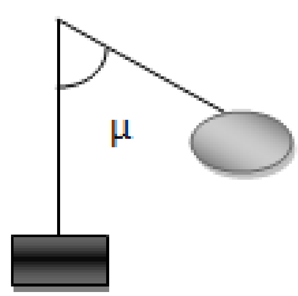
L'état du système est :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

La sortie, sera donc

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \tag{1.3}$$

Exemple 1.5.1 *Soit le pendule donné par la figure ci -dessous*



L'application de la relation fondamentale de la dynamique est représentée par l'équation linéaire suivante :

$$ml^2u^{''} + ku' + mg\sin u = 0. \tag{1.4}$$

Où : g est la constante gravitionnelle, l est la longueur de la pendule, m sa masse et k sa constante de raideur.

Si on suppose que : $\sin u \simeq u$. L'équation (1.4) devient une équation linéaire qui peut être décrit par :

$$ml^2u^{''} + ku' + mgu = 0. \tag{1.5}$$

On peut transformer l'équation (1.5) à un système d'équations différentielles d'ordre 1 de type

$$X^{'} = AX + B$$

Soit

$$X_1 = u,$$

et

$$X_2 = u^{'}.$$

Alors,

$$X_1^{'} = u^{'} = X_2. \tag{1.6}$$

Et

$$X_2^{'} = u^{''} = -\frac{k}{ml^2}X_2^{'} - \frac{g}{l}X_1 \tag{1.7}$$

Les équations (1.6) et (1.7) donnent le système suivant :

$$\begin{bmatrix} X_1^{'} \\ X_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tel que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et

$$X^{'} = \begin{bmatrix} X_1^{'} \\ X_2^{'} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Chapitre 2

Observabilité des systèmes linéaires à temps continu

2.1 Définitions et caractérisations d'observabilité

Les critères d'observabilité d'un système linéaire à temps continu sont décrits dans nombreuses références [1], [6], [10].
Considérons le système dynamique linéaire à temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) & \end{cases}, \tag{2.1.1}$$

où

$$\begin{array}{rcl} t & \geq & 0 \\ x(t) & \in & \mathbb{R}^n : \text{le vecteur d'état} \\ u(t) & \in & \mathbb{R}^m : \text{le vecteur de commande (entrée)} \\ y(t) & \in & \mathbb{R}^p : \text{le vecteur de sortie} \\ A & \in & \mathbb{R}^{n\times n} : \text{la matrice d'état} \\ B & \in & \mathbb{R}^{n\times m} : \text{la matrice d'entrée} \\ C & \in & \mathbb{R}^{p\times n} : \text{la matrice de sortie} \\ x(t_0) & = & x_0 : \text{la condition initiale} \end{array}$$

Rappelons certaines définitions et certains résultats de l'observabilité.

Définition 2.1.1 *[11]*

Le système (2.1.1) est dit observable s'il existe un temps $t_f \geq t_0$, tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur l'ntervalle $t \in [t_0\ t_f]$ suffit pour déterminer de manière unique la condition initiale x_0.

Pour les systèmes linéaires l'information produit en sortie est la superposition de celle générée par l'entrée et de celle générée par la condition initiale. Si on suppose le régime libre ($u = 0$), alors on peut adopter la définition suivante :

Définition 2.1.2 *[11]*

Le système (2.1.1) est observable, si et seulement si, en régime libre ($u(t) = 0, \forall t \geq t_0$), l'observation d'une sortie $y(t)$ uniformément $t \in [t_0\ ,\ t_f]$ n'est possible que pour un état initial $x(t_0)$ nul.

Remarque 2.1.1 *Lorsque toutes les variables d'état sont observables, alors le système est dit complétement observable, si non il est dit partiellemet observable.*

La condition d'observabilité est une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir estimer l'état du système à partir des informations recueillies sur les entrées et les sorties. Remarquons que la connaissance de x_0 et du modèle d'état du système suffit pour reconstruire l'état $x(t)$ à n'importe quel instant $t \geq t_0$. La propriété d'observabilité d'un système linéaire à temps invariant est une propriété structurelle et ne dépend que des matrices A et C du modèle. Le critère le plus utilisé pour vérifier cette propriété est le critère de rang de Kalman formulé par la matrice d'observabilité ci-dessous.

2.2 Critère d'observabilité de Kalman

Théorème 2.2.1 *[8]**(Critère de Kalman)***
Le système décrit par (2.1.1) est complètement observable si le seulement si le rang$(O) = n$, tel que O est la matrice d'observabilité définie par :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Preuve [8]
Considérons le système (2.1.1).
Dérivons y et,utilisons l'équation d'état. Une première dérivation donne .

$$\frac{dy}{dt} = C\frac{dx}{dt} = CAx + CBu$$

Donc x est nécessairement solution du système (les fonctions y et u sont connues)

$$\begin{aligned} Cx &= y \\ CAx &= \frac{dy}{dt} - CBu \end{aligned}$$

À ce niveau, tout se passe comme si la quantité

$$y_1 = \frac{dy}{dt} - CBu,$$

était une nouvelle sortie.
En la dérivant de nouveau, nous obtenons

$$CA^2x = \dot{y}_1 - CBu.$$

Maintenant x est nécessairement solution du système étendu :

$$\begin{array}{rcl} Cx & = & y_0 \\ CAx & = & y_1 = \dfrac{dy}{dt} - CBu \\ CA^2x & = & y_2 = y_1 - CABu \end{array}$$

Il est facile de voir qu'ainsi de suite, x est nécessairement solution des équations

$$CA^kx = y_k,$$

où les équations connues y_k sont définies par la relation de récurrence suivante :

$$y_k = \frac{dy_{k-1}}{dt} - CA^{k-1}Bu \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } y_0 = y.$$

Si le rang de la matrice d'observabilité est maximal et égal à n, alors elle admet un inverse à gauche (non nécessairement unique), P matrice $n \times pn$, vérifiant

$$P \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = I_n.$$

Ainsi

$$x = P \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La condition du rang est donc suffisante.

Supposons maintenant que la matrice d'observabilité de taille $pn \times n$, soit de rang $\prec n$. Nous allons montrer qu'il existe,au moins deux trajectoires différentes avec les mêmes commandes, donnant la même sortie, cella montera que la conditio est aussi nécessaire.
Soit $w \in \mathbb{R}^n$, un élément non nul du noyau de la matrice d'observabilité. Alors

$$k = 0, ..., n-1, \;\; CA^k w = 0$$

Par un raisonnement identique à celui fait lors de la preuve de la proposition (matrice d'observabilité) avec les noyaux à gauche de $A^k B$ on a nécessairement

$$CA^k w = 0,$$

pour toute $k \geq n$. Donc w est dans le noyau de toute les matrices CA^k.
Prenons comme première trajectoire

$$[0,T] \ni t \longrightarrow (x,u) = 0.$$

Il vient

$$y = 0.$$

Prenons maintenaint comme second trajectoire, celle qui a commande nulle, démarre en

$$w : [0,T] \ni t \longrightarrow (x,u) = \left(e^{At}w, 0\right).$$

Sa sortie vaut

$$Ce^{At}w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} CA^i w = 0,$$

car chaque terme de la série est nul. Ceci conclut la preuve.

Exemple 2.2.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} O &= \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\det O \neq 0$, alors O est observable.

Exemple 2.2.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

tel que :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\begin{aligned} O &= \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det O &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Donc le système est observable car $\det(O) \neq 0$

Exemple 2.2.3 *Soient*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, la matrice d'observabilité est

$$\begin{aligned} O &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque $\det(O) = 0$, donc le système n'est pas observable.

Remarque 2.2.1 *L'observabilité d'un système caractéristique (A, C) sera appelée observabilité de la paire (A, C).*

Proposition 2.2.1 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$\underset{t\in[0,\tau]}{\cap} \ker Ce^{At} = \{0\}$$

Proposition 2.2.2 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$\underset{t\geq 0}{\cap} \ker Ce^{At} = \{0\}$$

Théorème 2.2.2 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$ker(O) = \{0\}$$

Preuve : On démontre ce résultat par l'absurdre.
Supposons que (C, A) est observable, selon la proposition (2.2.2), on a :

$$\underset{t\geq 0}{\cap} \ker Ce^{At} = \{0\} .$$

Supposons aussi que :

$$ker(O) \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists x \neq 0/Ox = 0. \tag{2.2.1}$$

On sait que

$$Ce^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} CA^i \frac{t^i}{i!}.$$

Soit

$$x \in \underset{t\geq 0}{\cap} \ker Ce^{At},$$

alors

$$CA^i \frac{t^i}{i!} x = 0, \forall t \geq 0, \forall i = 0, \cdots, n-1.$$

On a

$$\cap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\}$$

$x \in \cap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\}$, alors

$$x = 0.$$

Et donc

$$x \in \bigcap_{t \geq 0} \ker Ce^{At},$$

implique que

$$x = 0.$$

Contradiction avec l'équation (2.2.1).
Inversement, supposons que

$$kerO = \{0\},$$

d'où

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i = \{0\}.$$

Alors

$$\bigcap_{t \geq 0} \ker Ce^{At} = \{0\}.$$

Donc la paire (C, A) est observable.

Proposition 2.2.3 *La paire* (C, A) *est observable si et seulement si,*

$$W_0 = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

est inversible.

Où W_0 est le grammien d'observabilité qui est une matrice symétrique, semi définie positive.

Preuve : Supposons que le système est observable. D'aprés la proposition (2.2.1), on a :

$$\bigcap_{t \in [0,\tau]} \ker Ce^{At} = \{0\}$$

Supposons aussi que W_0 n'est pas inversible i.e

$$\exists\ x \neq 0 \text{ tel que } W_0 x = 0.$$

Soit $x \in \ker W_0$, cela veut dire que :

$$\begin{aligned}
W_0 x &= x^T W_0 x \\
&= \langle W_0 x, x \rangle \\
&= \int_0^t \left\langle C e^{A\tau} e^{A^T \tau} C^T x, x \right\rangle d\tau \\
&= \int_0^t \left\langle C e^{A\tau} x, C e^{A\tau} x \right\rangle d\tau \\
&= \int_0^t \left| \left| C e^{A\tau} x \right| \right|^2 d\tau \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\left| \left| C e^{A\tau} x \right| \right|^2 = 0.$$

La fonction $Ce^{A\tau}x$ est continue, donc

$$Ce^{A\tau}x = 0 \text{ presque partout } t \in [0, \tau],$$

alors

$$x \in \bigcap_{t \in [0,\tau]} \ker C e^{At} \Longrightarrow x = 0,$$

on a une contradiction.
Inversement, supposons que W_0 est inversible, i.e :

$$\forall x, \; W_0 x = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Supposons aussi que le système n'est pas observable, selon la proposition(2.2.1), on a :

$$\bigcap_{t \in [0,\tau]} \ker C e^{At} \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists \; x \neq 0 \text{ tel que } x \in \ker C e^{At}, \; \forall t \in [0, \tau]$$

Contradiction.

Exemple 2.2.4 *Considérons le système* (2.1.1), *avec les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme A est une matrice nilpotente d'indice 2, alors,

$$e^{A\tau} = I_3 + A\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \end{bmatrix},$$

et

$$e^{A^T\tau} = I_3 + A^T\tau = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où le grammien d'observabilité est la matrice suivante :

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} \tau^2 & \tau & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t+\frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{t^2}{2} & t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\det W_0 = \frac{1}{36}t^7 + \frac{1}{12}t^5 \neq 0, \forall t > 0$, alors le système est observable.
$*$ Pour un système linéaire autonome, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps t.
$*$ La notion d'observabilité par un système linéaire autonome ne dépend pas de la matrice B.

Proposition 2.2.4 ***(Test par les valeurs propres)***

Considérons le système (2.1.1). La paire (A, C) est observable, si et seulement si, la matrice

Théorème 2.2.3

$$\begin{bmatrix} I_n s - A \\ C \end{bmatrix}$$

est de rang n pour toute valeur propre s de A.

Exemple 2.2.5 *Considérons le système* (2.1.1), *avec les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont 2 et 0.
• Pour la valeur propre 2, on a

$$\begin{bmatrix} 2I_2 - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour la valeur propre 0, on a

$$\begin{bmatrix} 0I_2 - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les deuxs matrices sont de rang 2, alors la paire (A, C) est observable.

Chapitre 3

Observabilité des systèmes linéaires à temps continu de Lyapunov

Dans ce chapitre, on va étudier l'observabilité des systèmes linéaires à temps continu de Lyapunov. Dans un premier temps nous aurons à réécrire le système de Lyapunov sous forme d'un système $L.T.I$, pour faciliter l'étude des propriétés de cette classe de systèmes par la suite, nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes : [1], [2], [10]

Définition 3.0.1 *Un système décrit par les deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

est appelé système linéaire de Lyapunov à temps continu, où $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est l'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est le contrôle, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la sortie , $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices de dimensions appropriées .
La technique utilisée pour étudier le système de Lyapunov en temps continu est la vectorisation moyennant la produit de Kronecher. Cette technique nous permettera de réécrire le système sous forme d'un système $L.T.I$.
Maintenant, en appliquant l'opérateur vec au système de Lyapunov (3.1), nous aurons :

$$\begin{aligned} vec(\dot{x}(t)) &= vec(Ax(t)) + vec(x(t)B) + vec(Fu(t)) \\ &= (I_n \otimes A)vec(x(t)) + (B^T \otimes I_n)vec(x(t)) + (I_n \otimes F)vec(u(t)) \\ &= \left[(I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n)\right] vec(x(t)) + (I_n \otimes F)vec(u(t)). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} vec(y(t)) &= vec(Cx(t)) \\ &= (I_n \otimes C)vec(x(t)) \end{aligned}$$

Finalement, le système (3.1) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \bar{A}\widetilde{x}(t) + \bar{B}\widetilde{u}(t) \\ \widetilde{y}(t) = \bar{C}\widetilde{x}(t) \\ \widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= vec(x(t)) \\ \widetilde{u}(t) &= vec(u(t)) \\ \widetilde{y}(t) &= vec(y(t)) \\ \dot{\widetilde{x}}(t) &= vec(\dot{x}(t)) \\ \bar{A} &= (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n) \\ \bar{B} &= (I_n \otimes F) \\ \bar{C} &= (I_n \otimes C) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &\in \mathbb{R}^{n^2} \\ \widetilde{u}(t) &\in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \widetilde{y}(t) &\in \mathbb{R}^{p\times n} \\ \bar{A} &\in \mathbb{R}^{n^2\times n^2} \\ \bar{B} &\in \mathbb{R}^{n^2\times nm} \\ \bar{C} &\in \mathbb{R}^{np\times n^2} \end{aligned}$$

3.1 Trajectoire d'état et réponse du système de Lyapunov en temps continu

Notre objectif est d'analyser cette classe de système et nous limitons notre attention sur l'équation homogène correspondante à (3.2) qui est donnée par :

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \bar{A}\widetilde{x}(t)$$

Proposition 3.1.1 *On appelle une matrice de transition, l'unique solution du système différentielle*

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \bar{A}\widetilde{x}(t), \tag{3.1.1}$$

satisfaisant la condition initiale $\widetilde{x}(t_0)$, *et qui est donnée par :*

$$\Phi(t,t_0) = \Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0),$$

avec

$$\Phi_1(t,t_0) = \exp((I_n \otimes A)(t-t_0)).$$

Donc toute solution de (3.1.1) *est de la forme :*

$$\widetilde{x}(t) = \Phi(t,t_0)\widetilde{x}(t_0),$$

avec $\widetilde{x}(t_0)$ *est un vecteur constant d'ordre* n^2.

Propriétés de la matrice de transition

La matrice de transition Φ vérifie :
$*\Phi(t,t) = I$.
$*(\Phi(t,t_0))^{-1} = \Phi(t_0,t)$.
$*\ \dot{\Phi}(t,t_0) = \bar{A}\Phi(t,t_0)$.
$*\Phi(t_0,t_1)\Phi(t_1,t) = \Phi(t_0,t).\forall(t,t_0,t_1) \in \mathbb{R}^3$.
Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t,t_0) &= \dot{\Phi}_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) + \Phi_1(t,t_0)\dot{\Phi}_2(t,t_0)\\
&= (I_n \otimes A)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) + (B^T \otimes I_n)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0)\\
&= (I_n \otimes A + B^T \otimes I_n)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\dot{\Phi} = \bar{A}\Phi$$

$$\Phi(t,t) = \Phi_1(t,t)\Phi_2(t,t) = I_{n^2}I_{n^2} = I_{n^2}.$$

Alors Φ est la matrice de transition de (3.1.1) et chaque solution de (3.1.1) est de cette forme.

Théorème 3.1.1 *Soit* $\Phi(t,t_0)$ *la matrice de transition de* (3.2), *alors la solution unique de* (3.2) *satisfisant la condition initiale* $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$*est :*

$$\widetilde{x}(t) = \Phi(t,t_0) = \left[\widetilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes F)\widetilde{u}(\tau)d\tau\right] \tag{3.1.2}$$

Preuve : Nous passons par deux étapes
La première étape : la solution de l'équation homogène qui est donnée par :

$$\widetilde{x}(t) = \Phi(t, t_0)\widetilde{x}(t_0)$$

La deuxième étape : la solution de l'équation complète (non homogène)

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \bar{A}\widetilde{x}(t) + \bar{B}\widetilde{u}(t). \tag{3.1.3}$$

Par la méthode de la variation de la constante, on a donc

$$\widetilde{x}(t) = \Phi(t, t_0)h(t),$$

avec

$$h(t) = \widetilde{x}(t_0).$$

Par dérivation, on obtient :

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)h(t) + \Phi(t, t_0)\dot{h}(t).$$

L'équation (3.1.3) devienne

$$(I_n \otimes A + B^T \otimes I_n)\Phi(t, t_0)h(t) + \Phi(t, t_0)\dot{h}(t) = \bar{A}\Phi(t, t_0)h(t) + \bar{B}\widetilde{u}(t).$$

Aprés simplification,

$$\Phi(t, t_0)\dot{h}(t) = \bar{B}\widetilde{u}(t).$$

On obtient, alors

$$\dot{h}(t) = \Phi(t_0, t)\bar{B}\widetilde{u}(t),$$

et après intégration, nous obtenons :

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\bar{B}\widetilde{u}(\tau)d\tau.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(t) &= \Phi(t, t_0)(h(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\bar{B}\widetilde{u}(\tau)d\tau) \\
&= \Phi(t, t_0)(\widetilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\bar{B}\widetilde{u}(\tau)d\tau).
\end{aligned}$$

La réponse du système (3.2) est donnée par :

$$\widetilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t,t_0)\left[\widetilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes F)\widetilde{u}(\tau)d\tau\right] \tag{3.1.4}$$

3.2 Observabilité des systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu

Définition 3.2.1 *Le système* (3.2) *est dit observable si* $\widetilde{x}_0$*est déterminée d'une manière unique connaissant* $\widetilde{y}(t)$ *et* $\widetilde{u}(t)$.

Définition 3.2.2 *Le système* (3.2) *est dite complètement observable si et seulement si tout les états sont observables.*

Voici un test d'observabilité adapté au système de Lyapunov et en relation avec la matrice grammienne.

Théorème 3.2.1 *Le système* (3.2) *est observable si et seulement si la matrice symétrique d'observabilité*

$$\widetilde{W}(t_0,t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau,t_0)(I_n \otimes C)^T(I_n \otimes C)\Phi(\tau,t_0)d\tau \tag{3.2.1}$$

est inversible.
La matrice $\widetilde{W}$ est appelée grammien d'observabilité.

Preuve : Supposons que $\widetilde{W}(t_0,t_f)$ est inversible. Nous avons

$$\widetilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\widetilde{x}(t).$$

Comme

$$\widetilde{x}(t) = \Phi(t,t_0)\widetilde{x}(t_0) + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)\widetilde{u}(\tau)d\tau,$$

on a

$$\widetilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t,t_0)\widetilde{x}(t_0) + (I_n \otimes C)\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)\widetilde{u}(\tau)d\tau,$$

en posant

$$y(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)\widetilde{u}(\tau)d\tau$$

et

$$\hat{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t, t_0)\widetilde{x}(t_0) \tag{3.2.2}$$

avec

$$\hat{y}(t) = \widetilde{y}(t) - y(t).$$

En multipliant (3.2.2) par $\Phi^T(t, t_0)(I_n \otimes C)^T$ et aprés intégration , on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T \hat{y}(\tau)d\tau = \widetilde{W}(t_0, t_f)\widetilde{x}(t_0),$$

ceci implque que

$$\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{W}(t_0, t_f)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T \hat{y}(\tau)d\tau.$$

D'où le système (3.2) est observable.
Inversement, supposons que (3.2) est observable, nous montrons que $\widetilde{W}(t_0, t_f)$ est inversible .
$\widetilde{W}$ est symétrique car

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^T &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)d\tau\right]^T \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(\tau, t_0)^T (I_n \otimes C)^T ((I_n \otimes C)^T)^T (\Phi^T(\tau, t_0))^T d\tau \\
&= \widetilde{W}.
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{W}(t_0, t_f)$ est symétrique, nous pouvons construire la forme quadratique

$$\begin{aligned}
\alpha^T \widetilde{W} \alpha &= \int_{t_0}^{t_f} [(I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha]^T [(I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha]\, d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \|\eta(\tau, t_0)\|_e^2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où α est un vecteur colonne constant arbitraire de dimension n^2 et

$$\eta(\tau, t_0) = (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha.$$

De (3.2.3),la matrice $\widetilde{W}(t_0, t_f)$ est semi définie positive. Supposons qu'il existe un certain β, tel que $\beta^T V \beta = 0$. À partir de l'équation (3.2.3) avec $\eta = \theta$ quand $\alpha = \beta$, ce qui résulte

$$\int_{t_0}^{t_f} \|\theta(\tau, t_0)\|_e^2 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \theta(\tau, t_0) = 0, \ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ &\Rightarrow \ (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\beta = 0, \ t_0 \leq \tau \leq t_f. \end{aligned}$$

De (3.2.2), on déduit que, lorsque $\widetilde{x}(t_0) = \beta$, la sortie est identiquement nulle sur tout l'intervalle, alors $\widetilde{x}(t_0)$ ne peut pas être déterminer d'une manière unique, c'est une contradiction avec le système (3.2) est observable. Donc $\widetilde{W}(t_0, t_f)$ est symétrique et définie positive, et donc inversible.

Théorème 3.2.2 ***(Le Critère de Kalman)***
le système (3.2) *est observable, si et seulement si, la matrice* $\widetilde{O}$ *définie par :*

$$\widetilde{O} = \begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n^2-1} \end{pmatrix},$$

est de rang plein i.e $rg(\widetilde{O}) = n^2$*, avec*

$$\bar{A} = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n),$$

et

$$\bar{C} = (I_n \otimes C).$$

On appelle $\widetilde{O}$ la matrice d'observabilité et dans ce cas, la paire $(\bar{A}, \bar{C})$ est dite observable.

Exemple 3.2.1 *On considère le système linéaire de Lyapunov suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right. ,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ \text{et } C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les matrices du système transformé sont les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice de Kalman est donnée par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{O} &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \bar{C}\bar{A}^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 16 & -12 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 9 & -8 \\ -64 & 56 & 0 & 0 \\ 37 & -30 & -27 & 26 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $rg(\widetilde{O}) = 4$, alors le système de Lyapunov (3.2) est observable.

Proposition 3.2.1 ***(Test par les valeurs propres pour l'observabilité)***

Théorème 3.2.3 *Considérons la matrice*

$$\begin{bmatrix} I_{n^2}s - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$$

La paire $(\bar{A}, \bar{C})$ *du système* (3.2) *est observable si et seulement si*

$$rg\left(\begin{bmatrix} I_{n^2}s - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}\right) = n^2.$$

Pour toute les valeurs propres s de $\bar{A}$.
Ou en d'autres termes, la paire $(\bar{A}, \bar{C})$ n'est pas observable si et seulement si

$$rg\left(\begin{bmatrix} I_{n^2}s - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}\right) < n^2,$$

pour certaines valeurs propres s de $\bar{A}$.

Exemple 3.2.2 *Considérons le système* (3.2), *avec les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ et \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\bar{A}$ sont: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ (racines simples), $\lambda_3 = 2$ (racine double)
•Pour $\lambda_1 = 1$ on a :

$$\begin{bmatrix} I_4 - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

•Pout $\lambda_2 = 0$ on a :

$$\begin{bmatrix} 0I_4 - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

•Pour $\lambda_3 = 2$ on a :

$$\begin{bmatrix} 2I_4 - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aprés calcul, le rang de chaque matrice est égale à 4, donc la paire $(\bar{A}, \bar{C})$ est observable.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudier l'observabilité des systèmes linéaires à temps continu, on basons sur trois critères importants : critère de Kalman ; la matrice grammienne d'observabilité et le test par les valeurs propres et une intention particulière était donnée à la classe des systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu .
Tout ce travail était illustré par des exemples numériques .

Bibiographie

[1] P.J.Antsaklis, and ,A.N.Michel, A linear systems primer,Birkhauser, 2007.
[2] B.V.Appa Rao, M.S.N. Murty, Controllability and observability of Lyapunov systems, Ranich University Mathematical Journal 2005, vol. 32, pp. $55-65$.
[3] D.Arzelier, Représentation et analyse des système linéaires. Notes de cours, Version 6, 2010.
[4] K. Aström, and , R.Muray, Feedbach Systems : An Introduction for scientists and Engineers,
Princeton University Press, 2008 .
[5] B. Browson, The Kronecher product, UNF Thesis, 2006.
[6] D. Bouagada : cours de théorie de contrôle, année $2019-2020$
[7] Frédéric. Gouaisbaut, Résolution des Equations Différentielles Ordinaires. 1.2.LAASCNRS, Université de Toulous , 2009.
[8] E. Trélat et T. Haberkom, cours d'automatique , Master de mathématique , Université d'Oréancs , Premier trimestre.
[9] F.R. Chang and H.C.Chen : The generalized Cayley-Hamilton theorem for standard pencils . Systems and Control Letters 18 (1992) $179-182$, North-Holland.
[10] MSN. Murty, B.V App Rao and G.Suresh Kumar , Contrôlability, Observability, and realizability of matrix Lyapunov systems, Bull Koream Math soc.43/pp $149-159$, 2006.
[11] P.Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, Modélisation et identification des processus, tome 1. Edition Technip, Paris, 1992.
[12] R.E Kalman and E. Evangelisti : Controlability and observability . 2011
[13] L. Dai, Singular control System, Volume 118 of lecture Notes in control and Information Sciences, Springer-verlag, New York, 1989.
[14] Jean-Michel Coron : Controllability and nonlinearity. In CANUM 2006 Congrès National d'Analyse Numérique, volume 22 de ESAIM Proc., pages 21 39. EDP Sci., Les Ulis, 2008.
[15] Jean. Paul ING, Contrôlabilité, stabilité, observabilité, le cas des systèmes linéaires. Paris, 2014.