Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

OULD CHAREF Salima

Une contribution sur les équations différentielles fractionnaires

Devant le jury composé de :

Présidente :	**Mme** Kheira	Limam	U. MOSTAGANEM
Examinateur :	**Mme** Horiya	Diala	U. MOSTAGANEM
Encadreur :	**Mme** Amouria	Hammou	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2020 / 2021

Dedicaces

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études.

A toute ma famille aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements. Je vous dédie ce travail en reconnaissance de l'amour que vous m'offrez quotidiennement et votre bonté exceptionnelle. Que Dieu le tout puissant vous garde et vous procure santé et bonheur.

A mes amies je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des sœurs et des amies sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

REMERCIEMENTS

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lingne en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à lélaboration de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier **Mme Amouria Hammou** d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été trés précieux.

je remercie vivement **Mme kheira Limam** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

je remercie également **Mme Horiya Diala** membre de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail et pour leurs conseils durant la réalisation de ce mémoire.

Il máurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mon père et mon mère.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo-Hadamard. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe (théorème de Banach pour montrons l'existence et l'unicité des solutions, de Scheafer, et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour montrons l'existence des solutions).

Mots-clés : équation différentielle, dérivée fractionnaire, point fixe, Banach, Caputo-Hadamard, Schauder.

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires sont devenus importantes, ces dernières années dans différentes branches mathématiques appliquées telle que les phénomènes physiques, la technologie, l'énergie et la biologie ... etc.

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel.

Ce mémoire consiste à étudier l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo -Hadamard. Notre approche est basé sur la théorie du point fixe (théorème de Banach, Scheafer et l'alternative non linéaire de Leary-Schauder).

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Il est organisé comme suit :
Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant notations et définitions, les espaces de Banach, les fonctions spéciales, la compacité, quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires aux sens de Caputo, aux sens de Hadamard, et aux sens de Caputo-Hadamard, lemmes Auxiliaires et quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxiéme chapitre est consacré à l'existence et l'unicité pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo - Hadamard où l'ordre $\alpha \in]0, 1[$. Notre approche est basé sur les théories du point fixe de Banach, de Schaefer et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, et on termine avec un exemple qui illustre le cas théorique.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions, préliminaires, et théorèmes nécessaires pour cette étude.

1.1 Notations et définitions

Soit $J := [0, T]$, $T > 0$ et E est un espace de Banach, muni de la norme$\|.\|$.

- Notons $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \longrightarrow E$, muni de la norme :

$$\| y \|_{\infty} := sup\| y(t) \|, \quad t \in J.$$

- Soit $L^1(J, E)$ est l'espace de Banach des fonctins $y : J \longrightarrow E$ intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue muni de la norme :

$$\|y\|_{L^1} := \int_0^T |y(t)|dt.$$

- Soit $L^{\infty}(J, E)$ est l'espace de Banach des fonctions mésurables $y : J \longrightarrow E$ qui sont bornées, muni de la norme :

$$\|y\|_{L^{\infty}} := inf\{c > 0, \|y(t)\| \leq c\} \quad \text{p.p} \quad t \in J.$$

Soient les espaces suivants :

$AC^n(J,E) = \{f : J \longrightarrow E; f^{(k)} \in C(J,E), k = 0,1,...,n-1, f^{(n-1)} \in AC(J,E)\}$, et
$AC^n_\delta(J,E) = \{y : J \longrightarrow E; \delta^{n-1}y \in AC(J,E)\}$,

où $\delta = t\dfrac{d}{dt}$ est l'opérateur de dérivation de Hadamard et $AC(J,E)$ L'espace des fonctions absolument continues.

Définition 1.1.1. *[14] Une fonction $f : J :\longrightarrow E$ est dite absolument continue, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie $[a_i, b_i]_{i=1}^{p}$vérifiant :*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i) < \delta,$$

alors

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p} \parallel y(b_i) - y(a_i) \parallel < \delta.$$

On note par $AC^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : J \longrightarrow E$ dont la première dérivée est absolument continue.

1.2 Les espaces de Banach

Définition 1.2.1. *Un espace vectoriel $(E,+,.)$ est un espace normé si pour tout $x,\ y \in\ S$ il existe une fonction continue de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. *$\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
2. *$\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et*
3. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Définition 1.2.2. *Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.*

Proposition 1.2.1. *Soit (X,d) un espace métrique compact, et (X',d') un espace métrique. Soit E une partie de $C^0(X,X')$.*

- *E est équicontinue si :*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in X,\ \forall f \in E,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- *E est uniformément équicontinue si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,\ y \in X,\ \forall f \in E,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- *E est ponctuellement truc si :*

$$\forall x \in X,\ \{f(x),\ f \in E\} \text{ est truc .}$$

On rappelle que dans notre cas où X est compact, équicontinue est équivalent à uniformément équicontinue.

Preuve 1.2.1. *Il est évident que uniformément équicontinue implique équicontinue.*
Supposons E équicontinue.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que :

$$\forall y \in X,\ \forall f \in E,\ d(x,y) < \eta_x \Rightarrow d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On prend $\bigcup_{x \in X} B(x, \frac{\eta_x}{2})$ est un recouvrement d'ouverts de X, et X est compact, donc il existe $x_1 \cdots x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2})$.
On pose $\eta := \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\eta_{x_i}}{2}$.

Soit $f \in E$ et $x,\ y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$.

Soit $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $x \in B(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2})$.

Alors $d(x, x_i) < \eta_{x_i}$, donc $d^{'}(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$ et :

$$d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i) < \eta + \frac{\eta_{x_i}}{2} \leq \eta_{x_i},$$

donc $d^{'}(f(y), f(x_i)) < \varepsilon$.
Finalement :

$$d^{'}(f(x), f(y)) \leq d^{'}(f(x), f(x_i)) + d^{'}(f(x_i), f(y)) < 2\varepsilon\ .$$

Donc E est uniformément équicontinue.

La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Arzela-Ascoli :

Théorème 1.2.1. *(**Arzela-Ascoli**) [10] Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$; est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifées :*

1. *L'ensemble A est borné c'est à dire :*
$$\exists k > 0 : \|f(x)\| \leq k; \qquad \forall x \in J\,; \quad et\ f \in A.$$
2. *L'ensemble A est équicontinu.*

1.3 Les Fonctions Spéciales

La fonction Gamma joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.3.1. *On appelle fonction Gamma Euler notée Γ définie par :*
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt,$$
où x est un nombre complexe quelconque tel que $Re(x) > 0$.

Propriété 1.3.1.

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

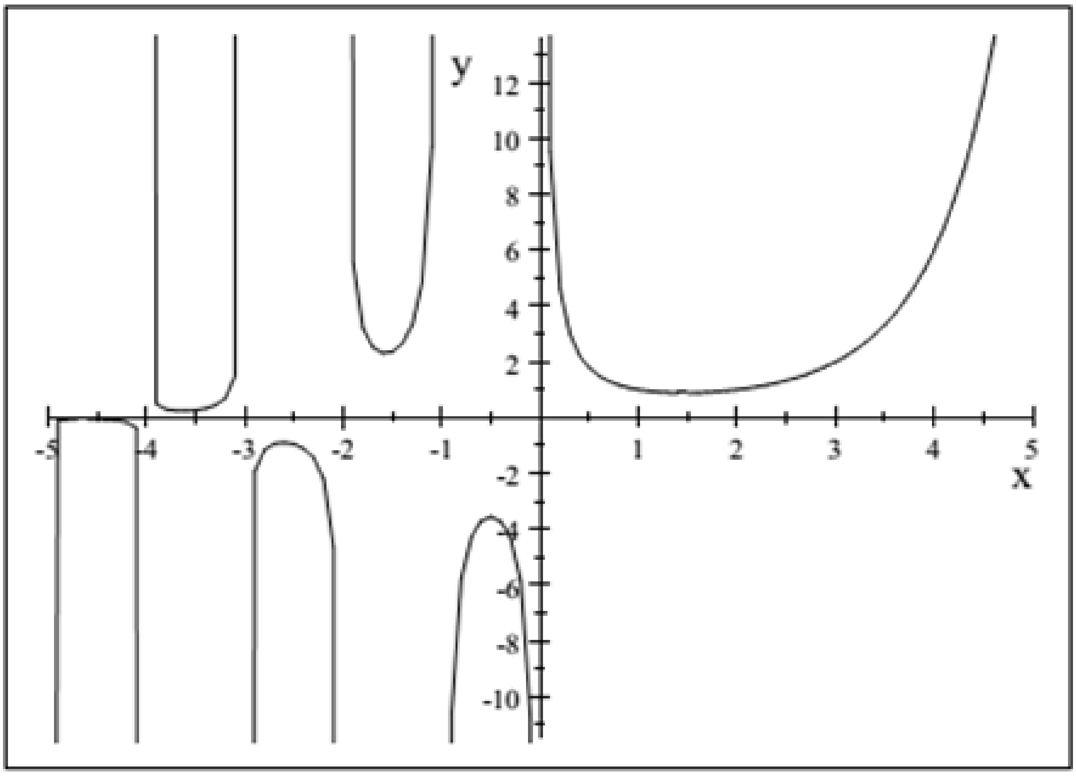
1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(x+n) = x(x+1)...(x+n-1)\Gamma(x)$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$.

Quelque valeurs particulières de la fonction Gamma

1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
3. $\Gamma(-1) = (-1)! = +\infty$.

4. $\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.
5. $\Gamma(\frac{3}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
6. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$
7. $\Gamma(\frac{5}{2}) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$.
8. $\Gamma(1) = 0! = 1$.

Graphe de la fonction $\Gamma(x)$



Graphe de la fonction Γ d'Euler

1.4 La compacité

Définition 1.4.1. *(**Les espaces métriques compacts**) : On dit que (E, d) est un espace métrique compact si toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une suite extraite converge vers un point de E.*

Définition 1.4.2. *(**Les parties compactes**) : Une partie S de E est dite compacte si le sous-espace métrique (S, d) est compact.*

Définition 1.4.3. *(**Les parties relativement compactes**) : Une partie S d'un espace métrique (E, d) est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de E. Par exemple, les parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties bornées.*

1.5 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

Définition 1.5.1. *[11] L'opérateur intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \geqslant 0$; pour une fonction $h \in C([a, b])$ est définie par :*

$$
{}_HI_a^\alpha h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds; & \alpha > 0 \\ \qquad\qquad h(t); & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1.1}
$$

Remarque 1.5.1. *Dans la formule (1.1), en prennant $a = 1$, ${}_HI_a^\alpha$ sera notée ${}_HI^\alpha$.*

1.6 Dérivation Fractionnaire

Il existe plusieurs définitions mathématiques concernant la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter les trois célèbres approches de la dérivée fractionnaire :

dérivée de Caputo (1967), et de Hadamard (1891) et enfin, dérivée de Caputo-Hadamard (2012).

1.6.1 Dérivée au sens de Caputo

Définition 1.6.1. *[12] soit $h \in C^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction h par :*

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{\alpha}h(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{(n-\alpha-1)}h^{(n)}(s)ds; \qquad n-1<\alpha<n \\
&= I_a^{n-\alpha}D^n h(t),
\end{aligned}$$

telle que $n=[\alpha]+1$ et $[\alpha]$ désignent la partie entier de α.

cas particuliers

- $(0<\alpha<1)$:
$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{\alpha}h(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}h^{'}(s)ds \\
&= I_a^{1-\alpha}D^1 h(t)
\end{aligned}$$
- $(1<\alpha<2)$:
$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{\alpha}h(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{1-\alpha}h^{''}(s)ds \\
&= I_a^{2-\alpha}D^2 h(t).
\end{aligned}$$

Propriété 1.6.1.

1. ${}^cD_a^{\alpha}c=0$; *c est une constante.*
2. $${}^cD_a^{\alpha}t^{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\beta-\alpha}; & \beta>\alpha-1 \\ 0; \quad \beta \le \alpha-1 \end{cases}$$

1.6.2 Dérivée au sens de Hadamard

Définition 1.6.2. *[11] Soit une fonction $h \in C([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Hadamard de h est :*

$$\begin{aligned} {}_H D_a^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds; \qquad n-1 < \alpha < n \\ &= \delta^n ({}_H I^{n-\alpha} h)(t), \end{aligned}$$

tel que $n = [\alpha] + 1$.

1.6.3 Dérivée au sens de Caputo - Hadamard

Définition 1.6.3. *[11], [13] Soit $h \in AC_\delta^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo-Hadamard de la fonction h est définie comme suite :*

$$\begin{aligned} ({}_H^c D_a^\alpha h)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \frac{h(s)}{s} ds; \quad n-1 < \alpha < n \\ &=_H I^{n-\alpha} (\delta^n h)(t), \end{aligned}$$

tel que $\delta = t\dfrac{d}{dt}$.

Proposition 1.6.1. *[10] Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b])$, alors*

$${}_H^c D_a^\beta ({}_H I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$ alors

$${}_H^c D_a^\alpha ({}_H I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

1.7 Lemmes Auxiliaires

Lemme 1.7.1. *[11] Soient* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $h \in AC_\delta^n$, *alors on a :*

$$ {}_H I^\alpha ({}_H^c D h)(t) = h(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i y(1)}{i!} (\log t)^i, \tag{1.2}$$

tel que δ^i *est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre* i, *où* $i = 0, 1, ..., n-1$.

1.8 Quelque théorèmes du Point Fixe

Les théorèmes du point fixe sont trés utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour les quelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donnée en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Alors on commence cette section par les définitions suivantes :

Définition 1.8.1. *On dit que* X *est complet pour la norme* $\|.\|$ *si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach .*

Définition 1.8.2. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace normé. Un sous-ensemble* $\Omega \subset X$ *est dit borné s'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Omega$ *on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

La définition suivante va être utilisée dans le théorème de Schaefer pour les équations différentielles fractionnaires .

Définition 1.8.3. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* Φ *de* X *dans* X *est dite contractante s'il existe un nombre positive* $k \in]0; 1[$, *tel que pour tout* $x,\ y \in X$, *on a :*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Définition 1.8.4. *[14] Soit E un espace de Banach muni de la norme $||.||$ et $T : E \longrightarrow E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si*

$$Tx = x.$$

Définition 1.8.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continu $\Phi : X \to Y$ est complétement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compact dans Y.*

Introduisons maintenant le principe de contraction de Banach.

Théorème 1.8.1. *(**point fixe de Banach :** [9]) Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : X \subset E \to X$ telle que X est un fermé de E est une application contractante. Alors f admet un point fixe unique ie :*

$$\exists! x_0 \in X : f(x_0) = x_0.$$

Théorème 1.8.2. *(**point fixe de Schaefer :** [9]) Soient X un espace de Banach et $\Phi : X \to X$une appllication continue et compact sur X.*
Si l'ensemble

$$A = \{x \in X; x = \lambda\Phi(x), 0 < \lambda < 1\},$$

est bornée, alors l'application Φ admet au moins un point fixe.

Théorème 1.8.3. *(**Alternative Non Linéaire de Leray- Schauder :**[1]) Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble convexe non vide, soit U un sous ensemble ouvert non vide de K, $0 \in U$ et $T : \overline{U} \to K$ un opérateur complètement continu, alors soit*

1. *L'opérateur T admet un point fixe dans $\overline{U}$, sinon*
2. *$\exists \lambda \in (0, 1)$ et $x \in \partial U$ tels que $x = \lambda T(x)$.*

Chapitre 2

Existence des solutions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques résultas d'existence et d'unicité des solutions du problèmes aux limites concernant des équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo-Hadamard .

On considère le problème aux limites pour les équations différentielles fractionnaires suivant :

$$D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in J = [0, T]$$

$$ay(0) + by(T) = c.$$

Où ${}^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a, b et c sont des constantes réels tels que $a + b \neq 0$.

On va convertir le travail ci-dessus, avec le problème différentielle fractionnaire suivant :

$$ {}^{c}_{H}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in J = [0, T] \tag{2.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{2.2}$$

où ${}^{c}_{H}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard, a, b et c sont des constantes réels tels que $a + b \neq 0$, et $f : [1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

2.2 Existence des Solutions

Définition 2.2.1. *Une fonction $y \in AC^1_\delta([1, T], \mathbb{R})$ est dite une solution du problème (2.1) - (2.2) si elle satisfait l'équation différentielle ${}^{c}_{H}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$, pour $t \in J$, ainsi que la condition (2.2).*

Pour l'existence des solutions pour le problème (2.1) -(2.2), nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.1. *Soit $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction y est une solution de l'équation d'intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} + \frac{c}{(a+b)} \tag{2.3}$$

si et seulement si y est une solution du problème

$$ {}^{c}_{H}D^{\alpha}y(t) = h(t); \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.4}$$

$$ay(1) + by(T) = c. \tag{2.5}$$

Preuve 2.2.1. *En utilisant (2.4) et le lemme (1.7.1) on a :*

$$\begin{aligned} {}^c_H D^\alpha y(t) &= h(t) \\ {}_H I^\alpha ({}^c_H D^\alpha y(t)) &= {}_H I^\alpha h(t) \\ y(t) - y(1) &= {}_H I^\alpha h(t) \end{aligned}$$

donc

$$y(t) = {}_H I^\alpha h(t) + y(1),$$

et pour $y(1) = c_1$ *on trouve :*

$$y(t) = {}_H I^\alpha h(t) + c_1$$

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} + c_1. \tag{2.6}$$

La condition (2.5) permet d'éffectuer le calcul de $y(1)$*, on a :*

$$\begin{aligned} ay(1) + by(T) &= ay(1) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds + by(1) = c \\ &= ay(1) + by(1) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds + by(1) = c \\ &= (a+b)y(1) + b\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} = c, \end{aligned}$$

ainsi

$$y(1) = \frac{c - b\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s}}{(a+b)},$$

et comme $y(1) = c_1$ alors :

$$c_1 = \frac{c - b\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s}}{(a+b)}.$$

En remplaçant c_1 dans (2.6) et on trouve la formule (2.3) :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} + \frac{c}{(a+b)}.$$

Inversement, on suppose que y satisfait (2.3). En suite, en utilisant le fait que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'une constante est nulle, et on obtient :

$$ {}_{H}^{c}D^{\alpha}y(t) = {}_{H}^{c} D^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}h(s)\frac{ds}{s}\right], $$

grâce à la propriété ${}_{H}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t) = h(t)$, on obtient :

$$ {}_{H}^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t). $$

Par conséquent, l'équation intégrale (2.3) est équivalente au problème (2.4)-(2.5).

2.3 Le premier Résultat

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.3.1. *On suppose que :*

(H_1) *Il existe une constante* $k > 0$ *telle que :*

$$ |f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y| \qquad \text{pour tout} \quad t \in J \quad \text{et} \quad x,y \in \mathbb{R}. $$

Si

$$ \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right]\frac{k(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. $$

Alors le problème (2.1) -(2.2) admet une solution unique sur $[1,T]$.

Preuve 2.3.1. *On transforme le problème (2.1)-(2.2) au un problème de point fixe.*

On considère l'opérateur $N : C([1,T],\mathbb{R}) \to C([1,T],\mathbb{R})$ *définie par :*

$$ \begin{aligned} (Ny)(t) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\ & - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{T}\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s} + \frac{c}{(a+b)}. \end{aligned} \tag{2.7} $$

Clairement, les points fixes de l'opérateur N sont solution du problème (2.1)-(2.2).
On utilise la théorème de Banach pour montrer que N admet un point fixe unique.
Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [1,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t) - (Ny)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{k(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$\|N(x) - N(y)\|_\infty \leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{k(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty.$$

Puisque, N est une contraction et d'aprés le théorème de Banach, N admet un seul point fixe qui l'unique solution du problème (2.1)-(2.2).

2.4 Le deuxième Résultats

Le deuxiéme résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 2.4.1. *Supposons que :*
(H_2) *La fonction $f : [1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*
(H_3) *Il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$|f(t,u)| \leq M \qquad \textit{pour chaque} \quad t \in [1,T] \quad \textit{et toutes} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Alors le problème (2.1) -(2.2) admet au moins une solution sur $[1,T]$.

Preuve 2.4.1.

Nous allons utiliser le théorème de point fixe de Schaefer pour prouver que N définie par (2.7) a un point fixe.

La preuve sera donnée en 4 étapes :

Étape 1 :" N est continue."

Soit y_n une suite telle que $y_n \to y$ dans $C([1,T],\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in [1,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \sup_{s\in[1,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} \sup_{s\in[1,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{\|f(.; y_n(.)) - f(.; y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} . \left[\int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} + \frac{|b|}{|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s}\right] \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\right] \frac{(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Comme f est continue, on a

$$\|(N(y_n) - N(y)\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Étape 2 :"N transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans $C([1,T],\mathbb{R})$"

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\mu^* > 0$, il existe une constante positive l telle que pour chaque $y \in B_{\mu^*} = \{y \in C([1,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \mu^*\}$, alors il faut montrer que $\|N(y)\|_\infty < l$, on a $\forall t \in [1,T]$.

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|N(y)\|_\infty \leq \frac{M\,(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{|b|}{|a+b|}\right]+\frac{|c|}{|a+b|}:=l.$$

Étape 3 :"N transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue dans $C([1,T],\mathbb{R})$".

Soient $t_1,\ t_2 \in [1,T],\ t_1 < t_2,\ B_{\mu^*}$ est un ensemble borné de $C([1,T],\mathbb{R})$ comme dans étape 2, et soit $y \in B_{\mu^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}|(Ny)(t_2)-(Ny)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}\right]|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(\log t_2)^\alpha-(\log t_1)^\alpha\right].\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le second membre de cette dernière inégalité tend vers zéro. Ainsi les étapes 1 à 3 et d'aprés le théorème Arzela- Ascoli, on conclut que N est complétement continu.

Étape 4 :"Les limites à priori".

Maintenant il reste montrer que l'ensemble :

$$\varepsilon := \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y=\mu N(y) \quad \textit{pour certain} \;\; 0<\mu<1\}$$

est borné.

$$y(t)=\mu\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}-\frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\right.$$
$$\left.+\frac{c}{(a+b)}\right].$$

Soit $y \in \varepsilon$. Alors $y = \mu N(y)$, pour un certain μ compris strictement entre 0 et 1 on a :

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&:= R.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|N(y)\|_\infty \leq R.$$

Cela montre que l'ensemble ε est borné. Comme une conséquence de point fixe le théorème de Schaefer, nous en déduire que N a un point fixe qui est une solution du problème (2.1) - (2.2).

2.5 Le troisième Résultats

Le toisième résultat est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 2.5.1. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H_4) *Il existe* $\phi_f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ *et* $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *continue et croissante tel que :*

$$|f(t, u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|) \quad \text{pour tout} \quad t \in J \text{ et } u \in \mathbb{R}.$$

(H_5) *Il existe un nombre* $M^* > 0$ *tel que :*

$$\frac{M^*}{\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \psi(M^*)_H I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}} > 1.$$

Alors le problème (2.1) - (2.2) admet au moins une solution dans $C([1, T], \mathbb{R})$.

Preuve 2.5.1.

D'aprés le théorème (2.4.1), l'opérateur N est continu, compact, et envoie les ensembles bornés dans des ensembles équicontinus. Donc, une application du théorème d'Arzela- Ascoli mène à déduire que N est un opérateur complètement continu.
$\forall t \in [1, T]$, on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)(|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s} + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \psi(\|y\|_\infty) I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\|y\|_\infty}{\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \psi(\|y\|_\infty) I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}} \leq 1.$$

D'aprés la condition (H_5), il existe M^* tel que $\|y\| \neq M^*$,
et soit

$$B_{M^*} := \{y \in C([1, T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M^*\},$$

ce qui contredit le fait que $y \in \partial B_{M^*}$ tel que $y = \mu N(y)$, pour certain $\mu \in (0, 1)$. D'aprés l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on peut conclure que N admet au moins un point fixe qui est une solution de problème (2.1) - (2.2).

2.6 Exemple

Dans cette section, on présente un exemple pour illustrer non résultats.

Exemple 2.6.1. *On considère le problème suivant :*

$$ {}_H^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{\cos^2 t}{(e^{-t}+3)^2|y(t)|}, \quad \forall (t,y) \in ([1,e],\mathbb{R}_+), \tag{2.8}$$

$$ y(1)+y(e)=0, \tag{2.9}$$

où $\alpha = \frac{1}{2},\ T=e,\ a=b=1$ et $c=0$, et $f(t,y) := \dfrac{\cos^2 t}{(e^{-t}+3)^2|y(t)|}$.
On a

$$ |f(t,y)| = |\frac{\cos^2 t}{(e^{-t}+3)^2|y(t)|}| \leq \frac{1}{9}. $$

On pose $M = \frac{1}{9}$ et on obtient :

$$ \begin{aligned} \|N(y)\|_\infty &\leq \frac{M(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{|b|}{|a+b|}\right]+\frac{|c|}{|a+b|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{\pi}} < 1. \end{aligned} $$

Alors par le théorème (2.4.1), le problème (2.8) - (2.9) admet des solution sur $[1,e]$.

Exemple 2.6.2. *On considère le problème suivant :*

$$ {}_H^cD^{\frac{3}{2}}y(t) = (\log t)^4\,\frac{y^2e^{-y}}{2|y|\left(e^{-y}+2\right)^2}, \quad \forall (t,y) \in ([1,e],\mathbb{R}_+), \tag{2.10}$$

$$ y(1)+2y(e)=-1, \tag{2.11}$$

où $\alpha = \frac{1}{2},\ T=e,\ a=1,\ b=2$ *et* $c=-1,$ *et* $f(t,y) := (\log t)^4\,\dfrac{y^2e^{-y}}{2|y|\left(e^{-y}+2\right)^2},$
alors

$$ |f(t,y)| := |\,(\log t)^4\,\frac{y^2e^{-y}}{2|y|\left(e^{-y}+2\right)^2}| \leq (\log t)^4\,\frac{|y|}{8}. $$

On pose $\psi(|y|) = \dfrac{|y|}{8}$, $\phi_f(t) = (\log t)^4$, *et* ${}_H I^{\frac{1}{2}}\phi_f(e) = \frac{256}{63\sqrt{\pi}}$. *Si*

$$\frac{M^*}{\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right]\psi(M^*)_H I^{\alpha}\phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}}$$

$$= \frac{M^*}{\frac{5}{24}M^*\frac{256}{63\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{M^*}{M^*\frac{1280}{1512\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3}} > 1,$$

on trouve que pour $M^* \approx 0.638$ *les conditions de théorème (2.5.1) sont verifiées, alors il exist ou moin une solution de problème (2.10)- (2.11) sur* $[1,\ e]$.

Conclusion et perspectives

L'objectif de cette mémoire est de présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes des problèmes concernant les équations différentielles d'ordre fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard.
Les résultats obtenus sont basés sur l'argument du piont fixe, en particulier on a utilise trois théorèmes de point fixe bien connus (Banach, Schaefer et Leray-Schauder).

Dans le future, on peut utilisé Théorème de Mönich.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. ORegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] M. Benchohra, J. R. Graef and S. Hamani, Existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with integral conditions, Appl. Anal. 87, No. 7 (2008), 851-863.

[3] M. Benchohra and S. Hamani, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2391-2396.

[4] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[5] W. Benhamida, J. R. Graef, and S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations with integral and anti-periodic conditions in a Banach space, Prog. Frac. Differ. Appl. 4, No. 2 (2018), 1-7.

[6] W. Benhamida, J. R. Graef and S. Hamani, Boundary value problems for Hadamard fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions, Frac - Diff Cal, 2, N 3 (2018) - 138 - 145 .

[7] W. Benhamida, S. Hamani, and J. Henderson, A boundary value problems for fractional differential equations with Hadamard derivative and nonlocal conditions, PanAmerican Math. J. 26 (2016), 1-11.

[8] W. Benhamida, S. Hamani, and J. Henderson, Boundary value problems for caputo-Hadamard fractional differential equations, advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application 2 (2018) No.3, 138-145.

[9] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Sringer-Verlas, New York, 2003.

[10] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to functional dierential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science.

[12] A.A. Kilbas, S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. Diff. Equ. 41 (2005) 84-89.

[13] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, Caputo-type modication of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ. 2012, No.1 (2012), 1-8.

[14] K . Yosida, Fonctional Analysis, 6th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.