MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation
Présenté par :

MERZOUK NADJAT

THEME :

Équations Différentielles Fractionnaires de Sturm-Liouville

Soutenue : Juin 2021
Devant le jury composé de :

Mr. Zoubir DAHMANI	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Président**
Mr. Houari FETTOUCH	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mr. Mohammed KAID	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Encadreur**

Résume:

Dans cette mémoire de Master, On s'intéresse aux équations différentielles fractionnaire de Sturm-Liouville.Le mémoire est divisé en deux chapitres, Dans le premier chapitre on va donner certains définitions,quelques propriétés et des théorèmes dont on aura besoin dans le chapitre suivantes.Dans le deusiéme chapitre, Nous avons présente l'existence et unicite, l'existence sans unicite de solution par le théorème de point fixe.

Table des matières

Remerciements

Je remercie Dieu **ALLAH** de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents.

Tout d'abord, J'ai le plaisir de remercier infiniment Monsieur **Zoubir DAHMANI**, Professeur à l'université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude mon encadreur monsieur **Mohammed KAID** Mâitre de conférences à l'Université de Mostaganem, qui a accepté d'encadrer ce travail. Je le remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire.

J'adresse aussi mes très sincère remerciement à monsieur **Houari FETTOUCH**, Mâitre de conférences à l'Université de Mostaganem, pour l'intérêt qu'il est porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Je remercie mes sœurs et mes amis pour leur encouragement et j'adresse aussi mon remerciements les plus vifs aux personnes qui m'aient apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicace

Ce modeste travail est dédié :
À mes chèrs parents ma mère et mon père, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.
À mes soeurs, mes oncles et mes tantes.
À tous membres de ma grande famille " Merzouk ", chacun en son nom petit et grand.
À tous mes chèrs amis surtout "k.berrahmon,hamdi cherif et boulabbas " et mes compagnons de ce long chemin et
tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Introduction

En mathématiques, la théorie de Sturm-Liouville étudie le cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux de la forme :

$$\frac{d}{dx}(r(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda p(x))y = 0, \quad \text{où} \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

avec en plus des conditions aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$ de la forme :

$$\begin{cases} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0, \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

avec k_1, k_2, $l1$ et l_2 sont deux nombres réels tels que k_1, k_2, $l1$ et l_2 non nuls et λ est un paramètre quelconque (Une solution d'un problème de Sturm-Liouville est une fonction qui satisfait a la fois l'équation de Sturm-Liouville (1) et les conditions (2). La fonction triviale $y = 0$ est clairement une solution pour tout problème de Sturm-Liouville. Les solutions $y \neq 0$ (si elles existent) sont dites être les fonctions caractéristiques ou encore fonctions propres du problème et, dans ce cas, la valeur λ pour laquelle une telle solution existe est la valeur propre ou caractéristique de cette solution (voir [4], [26], [30] et [35]).

D'autre part, les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires sont utilisés pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme polymères et la théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17 ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral (voir [?], [6], [7], [9] et [17]) .

0.1 Aperçu historique :

Dans une série d'articles à partir de 2014, les auteurs Z. Dahmani et M. Houas (voir [23], [24] et [25]) se sont intéressés au système d'équations différentielles fractionnaires :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}x(t) = f_1(t, y(t), D^{\alpha_2}y(t), D^{\alpha_3}y(t), ..., D^{\alpha_n}y(t)), \quad t \in [0, T], \\ D^{\beta_1}x(t) = f_1(t, y(t), D^{\beta_2}y(t), D^{\beta_3}y(t), ..., D^{\beta_n}y(t)), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x^*, \ x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0, \\ y(0) = y^*, \ y'(0) = y''(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0, \\ D^p x(1) = \lambda_1 D^p x(\eta), \qquad D^q y(1) = \lambda_2 D^q y(\xi), \end{cases}$$

où D^{α_i}, D^{β_i}, $i = 1, .., n$ représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α_i, β_i respectevement.

En 2016, les auteurs C. Kiataramkul et al. (voir [30]) ont étudié l'existence et l'unicité de solution pour le problème différentielle fractionnaire de Sturm-Liouville soumis à l'approche de Hadamard. Durant les dernières années (voir [35]) plusieurs auteurs se sont penchés sur les problèmes fractionnaires avec conditions aux limites de Sturm-Liouville.

Ce manuscrit s'organise en deux chapitre : Le premier chapitre contient la base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour la bonne compréhension et le développement des chapitre qui suivent.

Dans le chapitre deux, on va discuter l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites de Sturm-Liouville pour une équation différentielle fractionnaire, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} D^{\alpha_2}\left(p(t)D^{\alpha_1}x(t)\right) = f\left(t, x(t), D^{\beta_1}x(t), D^{\beta_2}x(t), ..., D^{\beta_n}x(t)\right), \quad 1 < t < e, \\ x(1) + x(e) = 0, \qquad D^{\alpha}x(1) + D^{\alpha}x(e) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où D^{λ} est la dérivé fractionnaire d'ordre $\lambda \in \left\{\alpha_i, \beta_j\right\}$ avec $i = 1, 2$ et $j = 1, ..., n$ au sens d'Hadamard et $f : [1, e] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. Aussi p est une fonction continue sur $[1, e]$.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on présente quelques fonctions spéciales et des opérateurs, qui seront utilisées dans les autres chapitres, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Opérateurs de Hadamard :

Définition 1.1 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables ie :*

$$.f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]),$$

telle que

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, c'est -à-dire :*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \ \mathbb{C} \ et \ f^{\ (n-1)}(x) \in AC[a,b] \right\}.$$

En prticulier on a $AC^n[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.3 *L'espace noté $AC^n_\delta[a,b]$défini par :*

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \quad et \ \delta^{n-1} f(x) \in AC[a,b], \delta = xd/dx \right\},$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale1.

1.2 Intégration fractionnaire au sens de Hadamard :

Définition 1.4 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < \ \ a < b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. Alors,l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f définie par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt; \qquad a < x < b,$$

où Γ est une fonction Gamma d'Euler.

1.2.1 Quelques propriétés :

Proposition 1.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$ on a :*

$$J_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 J_a^\alpha f(x) + \lambda_2 J_a^\alpha g(x).$$

Proposition 1.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\log \frac{x}{t})$ une fonctions continues ,$f \in L^P([a,b]).\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$J_a^\alpha J_a^\beta fx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t},$$

telle que $a \leq t \leq x; a \leq s \leq t$.

Proposition 1.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $f \in L^p([a,b])$. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= J^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= J_\alpha^\beta J_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons ■

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}.$$

Puisque

$$a \leq t \leq x,$$

et

$$a \leq s \leq t,$$

ce qui implique

$$s \leq t \leq x.$$

Posons

$$y = \frac{\log(t/s)}{\log(x/s)},$$

il vient

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \int_s^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \\ = & \int_0^1 \left[\log x - y \log \frac{x}{s} - \log s \right]^{\alpha-1} \left[y \log \frac{x}{s} + \log s - \log s \right]^{\beta-1} \log\left(\frac{x}{s}\right) dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_s^t (\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{s})^{\beta-1}f(s)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\right)\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}dy\\ &= B(\alpha,\beta)(\log\frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &= J_a^{\alpha+\beta}f(x).\end{aligned}$$

En utilise les memes techniques, on obtient

$$J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

Exemple Soient $\alpha>0,\beta>0$ et

$$f(t)=\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}.$$

Alors

$$J_a^\alpha\left[\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}\right]=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve. On a

$$J_a^\alpha\left(\log(\frac{t}{a})^{\beta-1}\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\log\frac{s}{a})^{\beta-1}\frac{ds}{s}.$$

Soit le changement de variable suivant : ■

$$u=\frac{(\log s/a)}{(\log t/a)},$$

on trouve

$$\begin{aligned}J_a^\alpha(\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} &= \frac{(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\\ &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

Remarque 1.1 *En particulier, si $\beta=1$ et $\alpha>0$. Alors , on a*

$$J_a^\alpha(1)(t)=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^\alpha.$$

1.3 Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard :

Définition 1.5 *La dérivée fractionnaire au sens Hadamard de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^H D_a^\alpha f(x) &= \delta^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .(x\frac{d}{dx})^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(x\frac{d}{dx})^n \int_a^x (\log\frac{x}{t})^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

où $n-1<\alpha<n,\ \ n=[\alpha]+1.$

Proposition 1.4 *Pour* $\alpha>0$ *et* $f\in C[a,b]$,*on a :*

$${}^H D_a^\alpha J^\alpha f(t) = f(t),$$

mais

$$J^{\alpha H} D_a^\alpha f(t) \neq f(t).$$

Exemple 1.1 *Soient f une fonction définie comme suite :*

$$f(t) = (\log\frac{t}{a})^{\beta-1} \quad avec \ \ \beta>0.$$

Alors

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ \log\frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1} \quad avec \ \ \alpha>0 \quad et \quad \beta>0.$$

On a

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \delta^n(J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1}),$$

*d'après (**??**), on trouve*

$$J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(\log\frac{t}{a})^{n-\alpha+\beta-1},$$

d'où le résultat.

Remarque 1.2 *En particulier, si*

$$\beta=1 \quad et \ \ \alpha>0.$$

Alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une fonction constante est en général non nulle, c'est-à-dire

$${}^H D_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{t}{a})^{-\alpha}.$$

1.4 Lien entre la dérivée fractionnire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard

Pour tout $y \in AC_\delta^n[a,b]$, Nous avons :

$$^{c}D_a^\alpha y(x) = D_a^\alpha \left\{ y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i y(a)}{i!} (\log \frac{x}{a}) \right\},$$

où $n = [\alpha] + 1$.

1.5 Lemmes auxilliares :

Lemme 1.1 *Soient* $f \in AC_\delta^n([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$, *on a :*

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (\log x)^k.$$

où $C_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2.........n-1$ *et* $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha] + 1$.

1.6 Théorèmes des Points Fixes

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode de point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés.

1.6.1 Concepts Essentiels

Définition 1.6 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé ; une application linéaire* A *de* E *dans lui-même est appellé un opérateur linéaire dans* X*. On appelle domaine de* A *et on désigne par* D_A *tel que*

$$D_A = \{x \in E : Ax \in E\}.$$

Définition 1.7 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble* $\Omega \subset X$ *est dite borné s'il existe* $M > 0$ *telle que pour tout* $x \in \Omega$ *on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

Définition 1.8 *Une sous-ensemble* Ω *d'un espace vectoriel* X *est dit convexe ssi*

$$\forall (x,y) \in X, \forall \alpha \in [0,1], (1-\alpha)x + \alpha y \in X.$$

Autrement dit un ensemble est convexe s'il contient toute droite passant par deux de ses points.

Si $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel X. Pour tout $x \in X$ et $r \geq 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe :

$$B(x, y) = \{y \in X \ \|x - y\| \leq r\}.$$

Pour tout forme linéaire $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau

$$P = \{x \in X; \Phi(x) \leq b\},$$

est un ensemble convexe est appelé demi-espace.

Définition 1.9 *On dit que Ω est une partie compacte de X si de toute suite de points de Ω on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.*

Définition 1.10 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de X. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall p \geq N; \quad \|u_{N+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.11 *On dit que l'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est complet si toute suite de Cauchy $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, d'élément de X est convergente dans X. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.12 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et φ une application d'un élement de X dans lui même. On appelle point fixe de φ tout point $x \in X$ tel que :*

$$\varphi x = x.$$

Définition 1.13 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une application f de X dans X dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie :*

$$\forall x, \, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_X \leq L\|x - y\|_X.$$

Définition 1.14 *L'application Lipschitzienne f est dite une contraction si $L \in]0, 1[$.*

Définition 1.15 *Soit Ω un sous ensemble de $X = C([a, b], E)$. On dit que Ω est équi-continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Longrightarrow |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall t_1, \, t_2 \in [a, b], \, \psi \in \Omega.$$

1.6.2 Principe de Contraction de Banach

Définition 1.16 *Soit X un espace de Banch et $f : X \longrightarrow X$ une contraction. Alors, f admet un point fixe unique.*

Définition 1.17 *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continue $\phi : X \longrightarrow Y$ est complètement continue s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

1.6.3 Théorème du point fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.1 *Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ on opérateur complètement continue. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu Tx, \quad 0 < \mu < 1\},$$

est borné, alors T possède au moins un poit fixe.

1.6.4 Théorème du point fixe de Schauder

Notre troixième résultat du poit fixe est le théorème du poit fixe de Schauder :

Théorème 1.2 *Soit X un espace de Banach. U un fermé, convexe et non vide de X tel que l'application $T : U \longrightarrow U$ est relativement compact dans X. Alors, T possède au moins un poit fixe dans U.*

1.6.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.3 *Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Ω uniformément borné.*
2. *Ω est équi-continue.*

1.6.6 Théorème du point fixe Krasnoselskii

Théorème 1.4 *Soient X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X. On suppose que les opérateurs S et T vérifient :*

1. *$Tx + Sy \in \Omega, \quad \forall x, y \in \Omega$.*
2. *S est continue et compact.*
3. *T est contractant.*

Alors, il exsite au moins un élément $z \in \Omega$ tel que $Sz + Tz = z$.

Chapitre 2

EDFs avec conditions de Sturm-Liouville

2.1 Introduction

On considère le problème :

$$\begin{cases} D^{\alpha_2}\left(p(t)D^{\alpha_1}x(t)\right) = f(t, x(t), D^{\beta_1}x(t), D^{\beta_2}x(t), ..., D^{\beta_n}x(t)\right), \quad 1 < t < e, \\ x(1) + x(e) = 0, \qquad D^{\alpha}x(1) + D^{\alpha}x(e) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où D^{λ} est la dérivé fractionnaire d'ordre $\lambda \in \left\{\alpha_i, \beta_j\right\}$ avec $i = 1, 2$ et $j = 1, ..., n$ au sens d'Hadamard et $0 < \lambda < 1$. Ainsi que $f : [1, e] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. Aussi p est une fonction continue sur $[1, e]$ avec

$$\left|p^{-1}(t)\right| \geq K > 0. \tag{2.2}$$

2.2 Problème intégral :

Lemme 2.1 *Soient $0 < \alpha, \beta < 1$. La représentation intégrale du problème au limite fractionnaire (2.1) est donnée par :*

$$\begin{aligned} & x(t) \\ = \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\ & \times \left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1}x(\tau), D^{\beta_2}x(\tau), ..., D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\ & - \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), D^{\beta_2}x(s), ..., D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\ & \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \\ & \times \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1}x(\tau), D^{\beta_2}x(\tau), ..., D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \end{aligned}$$

$$+\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).$$

où

$$\varphi(t)=f(t,x(t),D^{\beta_1}x(t),D^{\beta_2}x(t),...,D^{\beta_n}x(t).$$

Preuve. *Pour tout* $1<t<e$, *on a*

$$D^{\alpha_2}(p(t)D^{\alpha_1}x(t))=f(t,x(t),D^{\beta_1}x(t),D^{\beta_2}x(t),...,D^{\beta_n}x(t),\quad 1<t<e.$$

On pose

$$\varphi(t)=f(t,x(t),D^{\beta_1}x(t),D^{\beta_2}x(t),...,D^{\beta_n}x(t),$$

il vient

$$D^{\alpha_2}\left(p(t)D^{\alpha_1}x(t)\right)=\varphi(t),\quad 1<t<e. \tag{2.3}$$

Maintenant, en appliquant l'opérateur J^{α_2} *à l'équation (2.3), nous avons*

$$J^{\alpha_2}D^{\alpha_2}\left(p(t)D^{\alpha_1}x(t)\right)=J^{\alpha_2}\varphi(t),$$

et on utilise le Lemme 1.1, il vient

$$p(t)D^{\alpha_1}x(t)=J^{\alpha_2}\varphi(t)+k_0,\qquad (n=[\alpha_2]+1=1).$$

où k_0 *est une constante. Puisque* $p\neq 0$, *on trouve*

$$D^{\alpha_1}x(t)=\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(t)+k_0p^{-1}(t) \tag{2.4}$$

Maintenant, en utilisant la condition $D^{\alpha}x(1)+D^{\alpha}x(e)=0$, *on trouve*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}x(1)=(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi)(1)+k_0p^{-1}(1),\\ D^{\alpha_1}x(e)=(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi)(e)+k_0p^{-1}(e),\end{cases}$$

en additionnant les deux équations de cet system, on a

$$\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(1)+k_0p^{-1}(1)=-\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e)-k_0p^{-1}(e),$$

d'où

$$\left[p^{-1}(1)+p^{-1}(e)\right]k_0=-\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(1)-\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e).$$

On sait que $J^{\beta}\varphi(1)=0$, *il vient*

$$\left[p^{-1}(1)+p^{-1}(e)\right]k_0=-\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e),$$

et grace l'hypothèse (2.2), on trouve

$$\begin{aligned} k_0 &= -\frac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)+p^{-1}(e)}J^{\alpha_2}\varphi(e)\\ &= -\frac{\dfrac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)}}{1+\dfrac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)}}J^{\alpha_2}\varphi(e).\end{aligned}$$

Posons

$$\mu = \frac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)}.$$

On obtient

$$k_0 = -\frac{\mu}{1+\mu} J^{\alpha_2}\varphi(e).$$

On applique l'opérateur J^{α_1} *à l'équation (2.4), nous avons*

$$\begin{aligned} J^{\alpha_1} D^{\alpha_1} x(t) &= J^{\alpha_1}\left[\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(t) + k_0 p^{-1}(t)\right] \\ &= J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(t) + k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(t), \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(t) + k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(t) + k_1, \tag{2.5}$$

tel que k_1 *est une constante. D'autre part, on a*

$$\begin{cases} x(1) = J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(1) + k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(1) + k_1, \\ x(e) = J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e) + k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(e) + k_1. \end{cases}$$

On utilise la condition initiale $x(1)+x(e)=0$, *on obtient*

$$\begin{gathered} J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(1) + k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(1) + k_1 \\ = -J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e) - k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(e) - k_1, \end{gathered}$$

et puisque

$$J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(1) \qquad et \qquad k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(1),$$

sont nuls, on trouve

$$2k_1 = -J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e) - k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(e),$$

Enfin

$$k_1 = -\frac{1}{2}J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e) - \frac{1}{2}k_0\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(e).$$

Finalement, en remplaçant k_0 *et* k_1 *par leurs exepressions dans l'équation (2.5), on a*

$$\begin{aligned} x(t) &= J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(t) \\ &\quad -\frac{\mu}{1+\mu}J^{\alpha_2}\varphi(e)\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(t) \\ &\quad -\frac{1}{2}J^{\alpha_1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(e) + \frac{\mu}{2(1+\mu)}J^{\alpha_2}\varphi(e)\left(J^{\alpha_1}p^{-1}\right)(e), \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & x(t) \\ = \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(s)\frac{ds}{s} \\ & -\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\cdot\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) \\ & -\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(p^{-1}J^{\alpha_2}\varphi\right)(s)\frac{ds}{s} \\ & +\frac{\mu}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\cdot\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right), \end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& -\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right).\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ■

2.3 Problème de point fixe :

Tout dabord, on introduit l'espace de Banach X défini par :

$$
X=\left\{x/x\in C([1,T],\mathbb{R});\; D^{\beta_1}x, D^{\beta_2}x, ..., D^{\beta_n}x\in C([1,T],\mathbb{R})\right\},
$$

muni de la norme :

$$
\|x\|_X=\|x\|_\infty+\left\|D^{\beta_1}x\right\|_\infty+\left\|D^{\beta_2}x\right\|_\infty+...+\left\|D^{\beta_n}x\right\|_\infty, \tag{2.6}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \sup_{x\in[1,T]}|x(t)|,\; \left\|D^{\beta_1}x\right\|_\infty=\sup_{x\in[1,T]}\left|D^{\beta_1}x(t)\right|, \\
\left\|D^{\beta_2}x\right\|_\infty &= \sup_{x\in[1,T]}\left|D^{\beta_2}x(t)\right|, ..., \left\|D^{\beta_n}x\right\|_\infty=\sup_{x\in[1,T]}\left|D^{\beta_n}x(t)\right|.
\end{aligned}
$$

On considère l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par :

$$
\begin{array}{rccc}
\mathcal{H}: & X & \rightarrow & X \\
 & x & \rightarrow & \mathcal{H}x
\end{array}
$$

tel que, pour tout $t\in[1,e]$, on a

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{H}x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)$$
$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s}$$
$$+\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right),$$

2.4 Existence et unicité :

On considère les hypothèses suivantes :
– (H_1) : La fonction $f:[1,e]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.
– (H_2) : Pour tout $t\in[1,e]$ et $x_1,x_2,...,x_n,\ y_1,y_2,...,y_n\in\mathbb{R}$, on a

$$\left|f\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right)-f\left(t,y_1,y_2,...,y_n\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}L_i\left|x_i-y_i\right|,$$

et

$$L=\max(L_i),\ i=1,..,n.$$

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse H_2, le problème (2.1) possède une solution unique si*

$$\delta_1+\delta_2<1,$$

Où

$$\delta_1=\frac{3(1+M)SL}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\qquad et\qquad \delta_2=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)}\left(S+\frac{\mu}{(1+\mu)}\right),$$

Avec

$$S=\sup_{t\in[1,e]}\left|p^{-1}(t)\right|\ ,$$

Aussi

$$M=\frac{\mu}{1+\mu}\qquad et\qquad \mu=\frac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)}.$$

Preuve.
Etape 1 : Tout d'abord, on montre qu'il existe Ω_1 tel que :

$$\left\|\mathcal{H}x-\mathcal{H}y\right\|_\infty\leq\delta_1\left\|x-y\right\|_X.$$

Soient $x,\, y \in X$. Pour tout $t \in [1,e]$, on a

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t) - \mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \sup_{t\in[1,e]} \left\{ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \right.\right. \\
& \times \left(p^{-1}(s) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} \left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)) \\ -f(\tau,y(\tau),D^{\beta_1}y(\tau),D^{\beta_2}y(\tau),...,D^{\beta_n}y(\tau)) \end{array} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right\} \right) \frac{ds}{s} \\
& - \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} \left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)) \end{array} \right] \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \\
& \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} \left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)) \\ -f(\tau,y(\tau),D^{\beta_1}y(\tau),D^{\beta_2}y(\tau),...,D^{\beta_n}y(\tau)) \end{array} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
& + \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))} \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} \left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)) \\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)) \end{array} \right] \frac{ds}{s} \right) \\
& \left.\left. \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) \right| \right\}.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\\ -f(\tau,y(\tau),D^{\beta_1}y(\tau),D^{\beta_2}y(\tau),...,D^{\beta_n}y(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right) \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right| \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\,|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Posons

$$M=\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\qquad \text{et}\qquad S=\sup_{t\in[1,e]}\left|p^{-1}(t)\right|.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times S\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau) \\ -f(\tau,y(\tau),D^{\beta_1}y(\tau),D^{\beta_2}y(\tau),...,D^{\beta_n}y(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +M\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s) \\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times S\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)+\frac{S}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\right) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau) \\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{M}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s) \\ -f(s,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times S\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{S}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[L_1\left|x-y\right|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(\tau)-D^{\beta_i}y(\tau)\right|\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +SM\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[L_1\left|x-y\right|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(s)-D^{\beta_i}y(s)\right|\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{S}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[L_1\left|x-y\right|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(\tau)-D^{\beta_i}y(\tau)\right|\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{SM}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[L_1\left|x-y\right|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(s)-D^{\beta_i}y(s)\right|\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3S}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\beta_i}x(\tau)-D^{\beta_i}y(\tau)\right|\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{3SM}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\beta_i}x(s)-D^{\beta_i}y(s)\right|\right]\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3S\sup_{\tau\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\beta_i}x(\tau)-D^{\beta_i}y(\tau)\right|\right]}{2\Gamma(\alpha_1)} \\
&\times\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{3SM\sup_{s\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^n L_i\left|D^{\beta_i}x(s)-D^{\beta_i}y(s)\right|\right]}{2} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que d'après la remarque 1.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau} &= I_{\alpha_2}(1)(e) \\
&= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_2)}(\log\frac{e}{1})^{\alpha_2} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_1)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3S}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(\tau)-D^{\beta_i}y(\tau)\right|\right] \\
&+\frac{3SM}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\sup_{s\in[1,e]}\left[L_1|x-y|+\sum_{i=2}^{n}L_i\left|D^{\beta_i}x(s)-D^{\beta_i}y(s)\right|\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3SL}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\left[\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}\left\|D^{\beta_i}x-D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right] \\
&+\frac{3SML}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\left[\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}\left\|D^{\beta_i}x-D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right].
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)| \\
\leq\ & \frac{3(1+M)SL}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\left(\|x-y\|_\infty+\sum_{i=2}^{n}\left\|D^{\beta_i}x-D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right) \\
\leq\ & \frac{3(1+M)SL}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\|x-y\|_X.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\|\mathcal{H}x-\mathcal{H}y\|_\infty\leq\delta_1\|x-y\|_X. \tag{2.7}$$

<u>**Etape 2 :**</u> On a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}x(t) \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&-\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{\mu}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Où

$$\mu=\frac{p^{-1}(e)}{p^{-1}(1)}\quad\text{et}\quad\varphi(t)=f(t,x(t),D^{\beta_1}x(t),D^{\beta_2}x(t),...,D^{\beta_n}x(t)).$$

Pour tout $i = 1, .., n$ nous avons

$$\begin{aligned}
& D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) \\
= \;& D^{\beta_i}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s}\right] \\
& -D^{\beta_i}\left[\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right].
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) \\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\varphi(s)\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
& D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) \\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)-D^{\beta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq \;& \sup_{t\in[1,e]}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\right. \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{\tau})^{\alpha_2-1}\left\{\begin{array}{c} f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau) \\ -f(\tau,y(\tau),D^{\beta_1}y(\tau),D^{\beta_2}y(\tau),...,D^{\beta_n}y(\tau)\end{array}\right\}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\left\{\begin{array}{c} f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s) \\ -f(\tau,y(s),D^{\beta_1}y(s),D^{\beta_2}y(s),...,D^{\beta_n}y(s)\end{array}\right\}\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) - D^{\beta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & S\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\right. \\
& \times\left[\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right]\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{\mu}{1+\mu}\left[\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right]\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) - D^{\beta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{S\left(\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right)}{\Gamma(1+\alpha_2)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{\mu\left(\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right)}{(1+\mu)\,\Gamma(1+\alpha_2)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) - D^{\beta_i}\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{S\left(\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right)}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)} + \frac{\mu\left(\|x-y\|_\infty + \sum_{i=2}^n \left\|D^{\beta_i}x - D^{\beta_i}y\right\|_\infty\right)}{(1+\mu)\,\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)} \\
\leq\ & \left[\frac{S}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)} + \frac{\mu}{(1+\mu)\,\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)}\right]\|x-y\|_X \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)}\left(S+\frac{\mu}{(1+\mu)}\right)\|x-y\|_X \\
\leq\ & \delta_2\,\|x-y\|_X\,.
\end{aligned}
$$

Enfin

$$\left\|D^{\beta_i}\mathcal{H}x - D^{\beta_i}\mathcal{H}y\right\|_\infty \leq \delta_2\,\|x-y\|_X\,. \tag{2.8}$$

En utilisant (2.7) et (2.8), il vient

$$\|\mathcal{H}x - \mathcal{H}y\|_\infty \leq (\delta_1+\delta_2)\,\|x-y\|_X\,.$$

D'où le résultat. ■

2.5 Existence sans unicité :

Théorème 2.2 *On supppse que l'hypothèse* (H_1) *est vérifie et l'hypothèse suivante :*
(H_3) : *Il existe une constante* $N > 0$ *tel que la fonction* f *est borné par* N.
Donc, notre problème admet au moins une solution sur $[1, e]$

Preuve. On considère une suite $(x_n)_{n\in N}$ de X tel que

$$x_n \to x \subset X.$$

Pour tout $t \in [1, e]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t)| \\
= \ & \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1 - 1} \\
&\times \left(p^{-1}(s) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1} x_n(\tau), D^{\beta_2} x_n(\tau), ..., D^{\beta_n} x_n(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \right) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1 - 1} \\
&\times \left(p^{-1}(s) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1} x(\tau), D^{\beta_2} x(\tau), ..., D^{\beta_n} x(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \right) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x_n(s), D^{\beta_1} x_n(s), D^{\beta_2} x_n(s), ..., D^{\beta_n} x_n(s) \frac{ds}{s} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \\
&\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1} x_n(\tau), D^{\beta_2} x_n(\tau), ..., D^{\beta_n} x_n(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x(s), D^{\beta_1} x(s), D^{\beta_2} x(s), ..., D^{\beta_n} x(s) \frac{ds}{s} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \\
&\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1} x(\tau), D^{\beta_2} x(\tau), ..., D^{\beta_n} x(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x_n(s), D^{\beta_1} x_n(s), D^{\beta_2} x_n(s), ..., D^{\beta_n} x_n(s) \frac{ds}{s} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) \\
&- \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x(s), D^{\beta_1} x(s), D^{\beta_2} x(s), ..., D^{\beta_n} x(s) \frac{ds}{s} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) \Bigg|.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x_n(t)-\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \sup_{t\in[1,e]}\left\{\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\right.\right. \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau)\\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s)\\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau)\\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s)\\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right|\right\},
\end{aligned}
$$

Encore

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x_n(t)-\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\times\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right| \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau) \\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s) \\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s))\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right| \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau) \\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\,|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s) \\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x_n(t)-\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{S}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau) \\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s) \\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s))\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)+\frac{S}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau) \\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{MS}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s) \\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Puisque la fonction f est continue, alors, on déduit que

$$\| \mathcal{H}x_n(t) - \mathcal{H}x(t) \|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \left| D^{\beta_i}\mathcal{H}x_n(t) - D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t) \right| \\
= & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \right. \\
& \times \left(p^{-1}(s) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1}x_n(\tau), D^{\beta_2}x_n(\tau), ..., D^{\beta_n}x_n(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \right) \frac{ds}{s} \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
& \times \left(p^{-1}(s) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1}x(\tau), D^{\beta_2}x(\tau), ..., D^{\beta_n}x(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \right) \frac{ds}{s} \\
& - \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x_n(s), D^{\beta_1}x_n(s), D^{\beta_2}x_n(s), ..., D^{\beta_n}x_n(s) \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \\
& \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1}x_n(\tau), D^{\beta_2}x_n(\tau), ..., D^{\beta_n}x_n(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
& + \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), D^{\beta_2}x(s), ..., D^{\beta_n}x(s) \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) - \frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \\
& \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^s (\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1} f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1}x(\tau), D^{\beta_2}x(\tau), ..., D^{\beta_n}x(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
& + \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x_n(s), D^{\beta_1}x_n(s), D^{\beta_2}x_n(s), ..., D^{\beta_n}x_n(s) \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) \\
& - \frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1} f(s, x(s), D^{\beta_1}x(s), D^{\beta_2}x(s), ..., D^{\beta_n}x(s) \frac{ds}{s} \right) \\
& \left. \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)} \int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} p^{-1}(s) \frac{ds}{s} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x_n(t)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\;& \sup_{t\in[1,e]}\left\{\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\right.\right. \\
&\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau)\\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&-\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s)\\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s) \\
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau)\\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s)\\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
&\left.\left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right|\right\}.
\end{aligned}
$$

Ou bien

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x_n(t)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
&\times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(\tau,x_n(\tau),D^{\beta_1}x_n(\tau),D^{\beta_2}x_n(\tau),...,D^{\beta_n}x_n(\tau)\\ -f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\end{array}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right.\right. \\
&+\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}\left[\begin{array}{c} f(s,x_n(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x_n(s),...,D^{\beta_n}x_n(s)\\ -f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s))\end{array}\right]\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|
\end{aligned}
$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2 - 1} \sup_{\tau \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1} x_n(\tau), D^{\beta_2} x_n(\tau), ..., D^{\beta_n} x_n(\tau) \\ -f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1} x(\tau), D^{\beta_2} x(\tau), ..., D^{\beta_n} x(\tau) \end{array} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s}$$

$$+ \frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\,|(1 + (p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))|}$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2 - 1} \sup_{\tau \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\beta_1} x_n(s), D^{\beta_2} x_n(s), ..., D^{\beta_n} x_n(s) \\ -f(s, x(s), D^{\beta_1} x(s), D^{\beta_2} x(s), ..., D^{\beta_n} x(s) \end{array} \right] \frac{ds}{s} \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1 - \beta_i)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1 - \beta_i - 1} \sup_{s \in [1,e]} \left| p^{-1}(s) \right| \frac{ds}{s} \right).$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
& \left| D^{\beta_i} \mathcal{H} x_n(t) - D^{\beta_i} \mathcal{H} x(t) \right| \\
\leq \; & \frac{S}{\Gamma(\alpha_1 - \beta_i)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1 - \beta_i - 1} \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2 - 1} \sup_{\tau \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1} x_n(\tau), D^{\beta_2} x_n(\tau), ..., D^{\beta_n} x_n(\tau) \\ -f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1} x(\tau), D^{\beta_2} x(\tau), ..., D^{\beta_n} x(\tau) \end{array} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right) \frac{ds}{s} \\
& + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2 - 1} \sup_{s \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\beta_1} x_n(s), D^{\beta_2} x_n(s), ..., D^{\beta_n} x_n(s) \\ -f(s, x(s), D^{\beta_1} x(s), D^{\beta_2} x(s), ..., D^{\beta_n} x(s)) \end{array} \right] \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{MS}{\Gamma(\alpha_1 - \beta_i)} \int_1^e (\log \frac{t}{s})^{\alpha_1 - \beta_i - 1} \frac{ds}{s} \right) + \frac{S}{2\Gamma(\alpha_1 - \beta_i)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1 - \beta_i - 1} \\
& \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{s}{\tau})^{\alpha_2 - 1} \sup_{\tau \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(\tau, x_n(\tau), D^{\beta_1} x_n(\tau), D^{\beta_2} x_n(\tau), ..., D^{\beta_n} x_n(\tau) \\ -f(\tau, x(\tau), D^{\beta_1} x(\tau), D^{\beta_2} x(\tau), ..., D^{\beta_n} x(\tau) \end{array} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right\} \frac{ds}{s} \\
& + \frac{MS}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_2 - 1} \sup_{\tau \in [1,e]} \left[\begin{array}{c} f(s, x_n(s), D^{\beta_1} x_n(s), D^{\beta_2} x_n(s), ..., D^{\beta_n} x_n(s) \\ -f(s, x(s), D^{\beta_1} x(s), D^{\beta_2} x(s), ..., D^{\beta_n} x(s) \end{array} \right] \frac{ds}{s} \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1 - \beta_i)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha_1 - \beta_i - 1} \frac{ds}{s} \right).
\end{aligned}$$

Puis que la fonction f est continue, Alors, On déduit que

$$\| D^{\beta_i} \mathcal{H} x_n(t) - D^{\beta_i} \mathcal{H} x(t) \|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,Quand

$$\| \mathcal{H} x_n(t) - \mathcal{H} x(t) \|_\infty + \| D^{\beta_i} \mathcal{H} x_n(t) - D^{\beta_i} \mathcal{H} x(t) \|_\infty \longrightarrow 0 \text{ , quand} \quad n \longrightarrow 0 \text{ .}$$

D'où

$$\| \mathcal{H} x_n(t) - \mathcal{H} x(t) \|_\infty \longrightarrow 0.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{H}$ est continue. D'autre part, On définit l'ensemble suivante :

$$\Omega_\mu = \{ x \in X, \quad \|x\|_X \leq \mu \}, \qquad \alpha > 0.$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \sup_{t\in[1,e]}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\right. \\
&\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&-\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s) \\
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\,(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&\left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
&\times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}f(s,x(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\,|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))|} \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Alors, En utilisant l'hypothèse (H_3), il vient

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1} \\
&\times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{N\left|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right|}{\left|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right|}\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right) \\
&+\frac{N}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{N\left|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right|}{2\left|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))\right|}\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Ou bien

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{SN}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{MSN}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right) \\
&+\frac{SN}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{MSN}{2\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui implique

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\ & \frac{3SN}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{3MSN}{2\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

On sait que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_1)},$$

Et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}x(t)| \\
\leq\;& \frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{3MSN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)} \\
\leq\;& \frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{3MSN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)} \\
\leq\;& K.
\end{aligned}$$

Où

$$K = \frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\,(1+M)\,.$$

On conculut que l'opérateur $\mathcal{H}$ est borné. En uitisant les mèmes techniques pour l'opéreteur $(D^{\beta_i},\, i=1,...n)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\;& \sup_{t\in[1,e]}\Bigg|D^{\beta_i}\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1} \\
&\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s}\Bigg] \\
&-D^{\beta_i}\left[\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)\right. \\
&\times\left.\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right]-D^{\beta_i}\left[\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\right. \\
&\times\left.\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s}\right] \\
&+D^{\beta_i}\left[\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)\right. \\
&\times\left.\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right]\Bigg|.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \sup_{t\in[1,e]}\Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\Bigg|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
& \times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{s\in[1,e]}f(s,x(s),D^{\beta_1}x_n(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right| \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\left|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))\right|} \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\sup_{\tau\in[1,e]}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Alors, En utilisant l'hypothèse (H_3), Il vient

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e (\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
&\times\left(\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{|1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{N}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right)+\frac{N}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right| \\
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s}+\frac{|(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))|}{2\,|(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1)))|}\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right) \\
&\times\left(\frac{N}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\sup_{s\in[1,e]}\left|p^{-1}(s)\right|\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{MSN}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right) \\
&+\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\times\left(\frac{MSN}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \frac{3NS}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
&+\frac{3MNS}{2\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)}.$$

Et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)}.$$

On conclut

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t)\right| \\
\leq\ & \frac{3NS}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}+\frac{3MNS}{2\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)} \\
\leq\ & \frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M).
\end{aligned}
$$

Montrons $\mathcal{H}$ est équi-continue. Soient $t_1, t_2 \in [1, e]$ tel que $t_1 < t_2$, on a

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)| \\
= & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\right. \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1} \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

On peut écrire

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)| \\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Ou bien

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)| \\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\\ +\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\\ +\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\end{array}\right] \\
& +\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)| \\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}\left[\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}+\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}+1\right] \\
& +\frac{MNS}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)}\left[\begin{array}{c}\left(\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)+\left(\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\\ +\left(\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$; on trouve

$$\|\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)\|_\infty \longrightarrow 0.$$

D'autre part, On a

$$
\begin{aligned}
& \left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2) - D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right| \\
= & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\right. \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1} \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right|\\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\
&+\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\
&+\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right|\\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\end{array}\right]\\
&+\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^{s}(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right|\\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}\left[\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}+\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}+1\right]\\
&+\frac{MNS}{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\left[\begin{array}{c}\left(\int_1^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)+\left(\int_1^{t_1}(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\\+\left(\int_1^{e}(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right)\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Quand $t_1\longrightarrow t_2$; il vient

$$\left\|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right\|_\infty\longrightarrow 0.$$

Par conséquent, On a

$$\|\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)\|_\infty+\left\|D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_2)-D^{\beta_i}\mathcal{H}x(t_1)\right\|_\infty\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t_1\longrightarrow t_2,$$

D'où

$$\|\mathcal{H}x(t_2)-\mathcal{H}x(t_1)\|_\infty\longrightarrow 0.$$

Maintenant, On définit l'ensemble suivante :

$$\Pi:=\{x\in X, x=\lambda\mathcal{H}x, 0<\lambda<1\ \}.$$

Pour tout $t\in[1,e]$ et $x\in\Pi$, On a

$$\begin{aligned}
&x(t)\\
=\ &\lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\right.\\
&\times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s}\\
&-\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\\
&\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right)\\
&\left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}|x(t)|\\
\leq\ &\frac{NS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})\frac{ds}{s}\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right)\\
&+\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s}\\
&+\left(\frac{MNS}{2\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}|x(t)|\\
\leq\ &\frac{NS+MNS}{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}+\frac{NS+MNS}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&|x(t)| \\
\leq\ & \lambda\left[\frac{3NS}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)\right].
\end{aligned}$$

D'autre part, On a

$$\begin{aligned}
& D^{\beta_i}x(t) \\
=\ & \lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\right. \\
& \times\left(p^{-1}(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\right)\frac{ds}{s} \\
& -\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)-\frac{1}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s) \\
& \times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}f(\tau,x(\tau),D^{\beta_1}x(\tau),D^{\beta_2}x(\tau),...,D^{\beta_n}x(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}\frac{ds}{s} \\
& +\frac{(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))}{2\left(1+(p^{-1}(e)/p^{-1}(1))\right)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}f(s,x(s),D^{\beta_1}x(s),D^{\beta_2}x(s),...,D^{\beta_n}x(s)\frac{ds}{s}\right) \\
& \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}p^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right)\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda}|x(t)| \\
\leq\ & \frac{NS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})\frac{ds}{s}\left(\frac{MNS}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right) \\
& +\frac{NS}{2\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_1^s(\log\frac{s}{\tau})^{\alpha_2-1}\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{ds}{s} \\
& +\left(\frac{MNS}{2\Gamma(\alpha_2)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_2-1}\frac{ds}{s}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\beta_i)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha_1-\beta_i-1}\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda}|x(t)| \\
\leq\ & \frac{NS+MNS}{\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}+\frac{NS+MNS}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
&|x(t)| \\
\leq\ & \lambda\left[\frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)\right].
\end{aligned}$$

Finalement

$$\|x(t)\|_{\infty}+\left\|D^{\beta_i}x(t)\right\|_{\infty} \leq \lambda\left[\frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)+\frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)\right].$$

C'est-à-dire

$$\|x(t)\|_{x} \leq \quad \lambda\left[\frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)+\frac{3SN}{2\Gamma(1+\alpha_1-\beta_i)\Gamma(1+\alpha_2)}(1+M)\right].$$

On déduit que

$$\|x(t)\|_{x} \leq \infty.$$

D'où, il existe un point fixe d'après le théorème de schaefer.

$\blacksquare$

Conclusion :

Dans le premier chapitre on va donner certains définitions et quelques propriétés ainsi que des théorèmes dont on aura besoin dans le chapitre suivante. Ensuite, dans le deuxième chapitre on utilise le type Hadamard de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire avec conditions aux limites de Sturm-Liouville où l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence et l'unicité de notre solution par le théorème de point fixe .

Bibliographie

[1] M. A. Abdellaoui,N. Bedjaoui and Z. Dahmani :Nouveaux résultats d'existence pour un système couplé sur des équations différentielles non linéairesd'ordre arbitraire. Ijnaa, 6(2), 2015, p. : 65-75.

[2] M. A. Abdellaoui, N. Bedjaoui and Z. Dahmani :Sur un système couplé d'équations intégro-diérentielles d'ordres arbitraires,Indien J. Indust. Appl. Math. 5(2), 2014, p : 96-104.

[3] M.A. Abdellaoui, Z. Dahmani et M. Houas : Sur certains problèmes de valeurs aux limites pour un système couplé d'ordre arbitraire, In-dian Journal IJIAM de l'industrie et des mathématiques appliquées., Vol 4, Iss. 2, (2013).

[4] G.Arfken, "Théorie de Sturm-Liouville - Fonctions orthogonales." Ch. 9 dans Mathematical Methods for Physicists, 3e éd. Orlando, FL : Academic Press, pp.497-538, 1985.

[5] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. World Scientific,PIER 33, Boston (2012). 14.

[6] S. Belarbi et Z. Dahmani : Existence de solu ons pour Multi- Points Fractional Evolution des équations. AAM, Applications et Ap-Mathématiques appliquées, Vol. 9, numéro 1 (juin 2014), pp : 416-427.

[7] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8.

[8] M. Bezziou et Z. Dahmani : Nouvel ordre couplé Hadamard opérateurs et certaines applications. Av. Opérat. Théorie Volume 4, Numéro 3(2019), pages : 651-672.

[9] M. Bezziou, Z. Dahmani et M. Houas : Dif-Systèmes ferentiels de type Hadamard : Existence et unicité des solutions,Journal eurasien Maths. 2018.

[10] M. Bezziou, Z. Dahmani et Mehmet Ey upki Ris : Appli cationsde les (k,s, h)-Riem ann-Li ouvill eet (k,h)-H adamardF ractionalOpérateurs sur les inégalités, Konuralp J. Math, 2020.

[11] M. Bezziou, Z. Dahmani et Mehmet Zeki Sarikaya :Nouveaux opérateurs pour la théorie de l'intégration fractionnelle avec certaines applications. J.Math. Extension, Vol 12, 2018.

[12] M. Bezziou, Z. Dahmani et A. Ndyae : Sur Langevin équations et quelques nouvelles applications, Accepté 2020 dans Journal Intediscip.Math.

[13] P.L. Butzer A.A. Kilbas, J.J Trujillo : Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, Math. Anal. Appl, PIER 269, pp 387–400, (2002). 14.

[14] G. Christopher : Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions, Comput. Math. Appl, PIER 61, pp 191–202,(2011). 14.

[15] Z. Dahmani et M. A. Abdellaoui : Nouveaux résultats pourun système non linéaire pondéré d'équations intégro-di-érentielles fractionnaires. FactaUniv., Ser. Math. Informer. Vol. 29, n° 3 (2014), pp : 233-242.

[16] Z. Dahmani, Y. Bahous et Z. Bekkouche : Aéquations différentielles fractionnaires singulières à deux paramètres de type Lane Emden,Turc J. Ineq., 3 (1) (2019), pp : 35 53.

[17] Z. Dahmani and L. Tabharit : Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative, Comput. Math. Appl, PIER 4, pp 40–55, (2014).

[18] Z. Dahmani et A. Taieb : A Système couplé de F ractional Diff Équations impliquant deux ordres fractionnaires, ROMAI J., Vol. 11, non. 2, (2015),p. : 141159.

[19] F. Dugundji and A. Granas : Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003). 12, 13.

[20] Y. Gouari, Z. Dahmani et M. Z. Sarikaya : Amultipoint non local tSingul arfraction alInteg Rodi ff Eren tielle problèmede LaneEm-den type Mathematical Methods in the Applied Sciences (IF 1.533) Date de publication : 2020-04-19 , DOI : 10.1002/mma.6444.

[21] J. Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor , Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[22] N. Heymans and I. Podlubny, Physical interpretation of initial conditions for fractional di erential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, Rheolog- ica Acta, 45(2006), no. 5, 765-772.

[23] M. Houas and Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional di erential equations with nonlocal multi-point boundary conditions. Lobachevskii Journal of Math- ematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[24] M. Houas et Z. Dahmani : Nouveaux résultats pourune système de deux équations différentielles fractionnaires impliquant Dérivés Caputo. Krag. J.Math., Volume 38(2) (2014), pp. 283-301.

[25] M. Houas et Z. Dahmani : New resultats for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives. Kragujevac Journal of Mathematics. Pages 283-301.

[26] M. Kaid et Ould Melha Khellaf : Sturm Liouville Abstract problems for the Second order Differential Equations in Non Commutative case », Bulletin SUSU MMCS, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 44_61.

[27] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[28] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993). 3, 8, 10, 11

[29] A.A. Kilbas, H.M Srivastava, J.J Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V, Pier 204, (2006). 11

[30] C. Kiataramkul, SK. Ntouyas, J. Tariboon and A. Kijjathanakorn : Generalized Sturm-Liouville and Langevin equations via Hadamard fractional derivatives with anti-periodic

boundary conditions. BOUNDARY VALUE PROBLEMS. DOI 10.1186/S13661-016-0725-1.

[31] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Di erential Equations,John Wiley, New York, 1993.

[32] S. M. Momani, S. B. Hadid and Z. M. Alawenh, Some analytical properties of solutions of di erential equations of noninteger order, Int. J. Math. Math. Sci. 2004(2004), 697{701

[33] H. Monch, Boundary value problem for nonlinear ordinary di erential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Anal. 75, No. 5 (1980), 985-999

[34] U. Mosco and J. l. Joly, A propos de l'existence et de la r egularit e des solutions de certaines in equations quasi-variationnelles, J. Funct. Anal. 34, 107-137 (1979).

[35] T. Muensawat, SK. Ntouyas and J. Triboon : Systems of Generalized Sturm-Liouville and Langevin Fractional differential Equations. Adv. Differ. Equ. 2017,
63.

[36] A.Ndiaye, M. Kaid et Z. Dahmani : Solvability for differential systems of Duffing type involving sequential Caputo derivatives. Annals Of Pure and Applied Mathematical Sciences. 1(1) (2021), 1–13.

[37] D. O'Regan and R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. AnaL. Appl. 245 (2000), 594-612.

[38] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[39] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fract. Calculus Appl. Anal. 5 (2002), 367-386.

[40] I. Podlubny, I. Petra s, B. M. Vinagre, P. O'Leary and L. Dor cak, Analogue realizations of fractional-order controllers. Fractional order calculus and its applications,Nonlinear Dynam. 29 (2002), 281-296.

[41] A. Oualid, Z. Dahmani : Differential Equation Via Hadamard Approach , Some Existence Uniqueness Results, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 5, 16, 21.

[42] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[43] M.Trott, Le guide Mathematica pour la symbolique. New York : Springer-Verlag, 2006.http ://www.mathematicaguidebooks.org/.