REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

$=-=-=-=-=-=-=-=-o \bigcirc o-=-=-=-=-=-=-=-=$

SUR LA CROISSANCE DES SOLUTIONS D'UNE CLASSE DE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

$=-=-=-=-=-=-=-=-o \bigcirc o-=-=-=-=-=-=-=-=$

Présentée par : Ahmed Amrane .

Soutenue le : devant le jury composé de :

Président :

Examinateurs :

Mr.

Mr.

Mr. BEDDANI Hamid, Maître de Conférences B École Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran. **Encadreur**

.

Remerciements

Au nom du Dieu clément et miséricordieux.
Tout d.abord, je remercie Dieu tout puissant qui m'a aide a pousuivre mes etudes superieures.
Je remercie aussi M. Fettouch Houari et tout particulierement M.Beddani Hamid pour son aide et ces conseils
Je dédie ce travail à :
*Mon mère.
*Mon père.
*Mes soeurs.
*Ma grand-mère.
*Mes oncles, mes amies et mon neveu.
Je remercie mes enseignants pendant toutes les anneés d.études surtout mon professeur M. B. Belaïdi.

Table des matières

Introduction

La théorie de Rolf Nevanlinna [15] est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions entière, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudies et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence en avec la théorie analytique des équations différentielles. En particulier, la croissance et l'oscillation des solutions de ces équations.

Pour l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0, \tag{0.0.1}$$

où $B(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est connu que toute solution de l'équation (0.0.1) est une fonction entière et si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (0.0.1), alors au moins une des deux solutions f_1 et f_2 est d'ordre infini ([11], P. 167-168).

D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (0.0.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^z$ est une solution d'ordre fini de l'équation (0.0.1) avec $B(z) = -(1 + e^{-z})$.

Alors la question qui se pose est : Quelle condition doit-on imposer sur $B(z)$ pour garantir que toute solution non nulle de l'équation (0.0.1) soit d'ordre infini ?

Plusieurs auteurs tels que Amemiya et Ozawa [1], Gundersen [7], Langley [16], frei [5] et Ozawa [19] ont étudié ce problème. Ils ont démontré que si $B(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante d'ordre différent à un, alors toute solution non nulle de l'équation (0.0.1) est d'ordre infini.

En 2001, Chen Zongxuan [2] a considéré l'équation différentielle suivante

$$f'' + e^{az}f' + Q(z)f = 0 \tag{0.0.2}$$

où $Q(z) = h(z)e^{bz}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul, et a, b des nombres complexes non nuls et $a \neq b$.
En 2003, Li Chun-hong et Huang Xiao-jun [17],a considéré l'équation différentielle suivante

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)} + ... + A_0(z)e^{a_0 z}f = 0 \tag{0.0.3}$$

où $A_j \not\equiv 0$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1(j = 1, .., k-1)$ $(k \geq 2), a_j \in \mathbb{C}^*(j = 1, .., k-1)$.

Différents chercheurs ([3], [14]) se sont intéressés à l'étude des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{0.0.4}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants et $h_j(z)(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières. Ces résultats ont été aussi étendus pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (voir par exemple ([20]).

Dans cette mémoire, on va considérer les résultats de Chen Zongxuan et ceux de Li Chun-hong et Huang Xiao-jun pour démontrer différents résultats concernant la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires.

Cette mémoire se compose d'une introduction et de deux chapitres :

Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de Nevanlinna nécessaires par la suite pour notre travail.

Croissance de solutions méromorphes d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier la croissance de solutions méromorphes d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)} + ... + A_0(z)e^{a_0 z}f = 0, \tag{0.0.5}$$

et

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + ... + H_0 f^{(s)} + ... + H_0 f = 0 \tag{0.0.6}$$

où $k \geq 2$ est un nombre entier, $A_j \not\equiv 0$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1(j = 1, .., k-1)$, et $h_j(z)(j = 0, ..., k-1)$ des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < 1$, et $H_j = h_j e^{a_j z}$ où $a_j(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes.

Chapitre 1

Quelques éléments de La théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

1.1.1 La formule de Jensen.

Théorème 1.1.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, +\infty$ et soient a_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (respectivement b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$) les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$, chaque zéro et pôle est pris selon sa multiplicité. Alors,*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log\frac{|b_k|}{R}. \tag{1.1.1}$$

On donne la preuve pour le cas où f n'a aucun zéro ou pôle sur le cercle $|z| = R$, (Si les zéros ou les pôles de la fonction f apparaissent sur le cercle $|z| = R$, on se réfère à [10, p. 2 deuxième cas.], [13, p. 43-47]).

Preuve. On pose

$$F(z) = f(z)\,\frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{R(z-b_k)}{R^2-\overline{b}_k z}}{\prod_{j=1}^{m} \frac{R(z-a_j)}{R^2-\overline{a}_j z}}. \tag{1.1.2}$$

La fonction F n'admet pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq R$, donc $\log F(z)$ est analytique dans $|z| \leq R$. Alors, par le théorème de la valeur moyenne des fonctions analytiques [**?**, p. 165], nous obtenons

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F\left(R\, e^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

Prenant les parties réelles, en utilisant $\mathrm{Re}(\log F(z)) = \log|F(z)|$, nous obtenons

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1.3}$$

De (2.1.2) , on trouve

$$F(0) = f(0) \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{R}}{\prod_{j=1}^{m} \frac{a_j}{R}}. \tag{1.1.4}$$

Pour tout $z = R.e^{i\varphi}$ et pour tout $j = 1,\ 2,\ ...,\ m,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n$, on a

$$\left| \frac{R(z-b_k)}{R^2 - \overline{b}_k z} \right| = \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z} \right| = 1. \tag{1.1.5}$$

De (2.1.2) et (1.1.5), on trouve

$$\left| F\left(Re^{i\varphi}\right) \right| = \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right|. \tag{1.1.6}$$

En combinant (1.1.6) avec (2.1.3) et (2.1.4), nous obtenons l'affirmation

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R}. \tag{1.1.7}$$

L'équation (1.1.7) est appelée formule de Jensen, elle donne une idée sur le lien entre les zéros et les pôles situés à l'intérieur d'un disque $|z| < R$ avec la valeur moyenne de $\log |f(z)|$ sur la frontière $|z| = R$. □

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k,\ C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R} - m \log R. \tag{1.1.8}$$

où les $a_j\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ (respectivement $b_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$) sont les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$.

Preuve. On définit la fonction méromorphe h par

$$h(z) = z^{-m} f(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

On a $h(0) = C_m \neq 0,\ +\infty$. Les fonctions h et f ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq R$. En appliquant la formule de Jensen (2.1.1), on trouve

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| R^{-m} f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R}$$

d'où

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R} - m \log R.$$

□

1.1.2 Reformulation de la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 *Pour tout nombre réel $x > 0$, on définit $\log^+ x$ par*

$$\log^+ x = \max\{0,\ \log x\}. \tag{1.1.9}$$

Lemme 1.1.1

(1) $\log x \leqslant \log^+ x$. (2) $\log^+ x \leqslant \log^+ y$ *pour* $x \leqslant y$.

(3) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$. (4) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.

(5) $\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$. (6) $\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$.

Preuve. (1), (2), (3) et (4) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1.1 et la monotonie de la fonction logarithme ordinaire.

(5) Si $\prod_{k=1}^n x_k \leq 1$, alors l'affirmation est triviale. D'autre part, si $\prod_{k=1}^n x_k > 1$, alors

$$\log^+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \log\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \textstyle\sum_{k=1}^n \log x_k \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

(6) Par (2) et (5) ci-dessus, on a

$$\log^+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \log^+\left(n \max_{1\leq k\leq n}\{x_k\}\right) \leq \log n + \log^+\left(\max_{1\leq k\leq n}\{x_k\}\right) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

□

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par*

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad si \ \ a \neq +\infty \tag{1.1.10}$$

et par

$$m(r, +\infty\ , f) = m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \quad si \ \ a = +\infty. \tag{1.1.11}$$

Corollaire 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = m(r,\ f) - m(r, \frac{1}{f}). \tag{1.1.12}$$

Preuve. En utilisant la troisième propriété du $\log^+$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}d\theta,$$

par les définitions (1.1.10), (1.1.11), nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=m(r,\ f)-m(r,\frac{1}{f}).$$

□

Définition 1.1.3 *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a=+\infty$. On définit $N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$) la fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $|z|\leqslant r$ par*

$$N(r,a,f)=N(r,\frac{1}{f-a})=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\log r\quad si\ a\neq+\infty, \tag{1.1.13}$$

$$N(r,+\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,+\infty,f)-n(0,+\infty,f)}{t}dt+n(0,+\infty,f)\log r\quad si\ a=+\infty \tag{1.1.14}$$

et

$$\overline{N}(r,a,f)=\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,a,f)-\overline{n}(0,a,f)}{t}dt+\overline{n}(0,a,f)\log r\quad si\ a\neq+\infty, \tag{1.1.15}$$

$$\overline{N}(r,+\infty,f)=\overline{N}(r,f)=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,+\infty,f)-\overline{n}(0,+\infty,f)}{t}dt+\overline{n}(0,+\infty,f)\log r\quad si\ a=+\infty, \tag{1.1.16}$$

où

$n(t,a,f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

$n(t,+\infty,f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z|\leqslant t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.

$\overline{n}(t,a,f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leqslant t$.

$\overline{n}(t,+\infty,f)$ désigne le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z|\leqslant t$.

Lemme 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe avec les a-points a_j $(j=1,2,\ldots,n)$ dans le disque $|z|\leqslant R$ telle que $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant R$, chacune est comptée selon sa multiplicité. Alors,*

$$\int_0^R\log\frac{n(t,a,f)}{t}dt=\int_0^R\log\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt=\sum_{j=1}^n\log\frac{R}{|a_j|}. \tag{1.1.17}$$

Preuve. En dénotant $r_j = |a_j|$, $j = 1, 2, ..., n$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{r_j} = \log \frac{R^n}{r_1 r_2 ... r_n} = n \log R - \sum_{j=1}^{n} \log r_j,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j \left(\log r_{j+1} - \log r_j\right) + n \left(\log R - \log r_n\right),$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^{R} \frac{dt}{t} = \int_0^R \frac{n\left(t, a, f\right)}{t} dt.$$

□

Corollaire 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f\left(z\right) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \; C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + N\left(R, f\right) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \tag{1.1.18}$$

Preuve. En combinant entre (1.1.8) et (1.1.17), on trouve

$$\begin{aligned} \log |C_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \int_0^R \frac{n\left(t, 0, f\right) - n\left(0, 0, f\right)}{t} dt \\ &\quad + \int_0^R \frac{n\left(t, +\infty, f\right) - n\left(0, +\infty, f\right)}{t} dt - m \log R, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log |C_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \int_0^R \frac{n\left(t, 0, f\right) - n\left(0, 0, f\right)}{t} dt \\ &\quad + \int_0^R \frac{n\left(t, +\infty, f\right) - n\left(0, +\infty, f\right)}{t} dt - \left(n\left(0, 0, f\right) - n\left(0, +\infty, f\right)\right) \log R. \end{aligned}$$

D'après les définitions (1.1.13) et (1.1.14), on obtient

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + N\left(R, f\right) - N\left(R, \frac{1}{f}\right).$$

□

Corollaire 1.1.3 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f\left(z\right) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \; C_m \neq 0, \; m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = m(r, \; f) - m(r, \frac{1}{f}) + N\left(R, f\right) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \tag{1.1.19}$$

Preuve. On obtient (1.1.19) directement en combinant entre (1.1.12) et (1.1.18). □

1.1.3 La fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

Définition 1.1.4 *Soit f une fonction méromorphe non constante. On définit la fonction caractéristique $T(r,f)$ de la fonction f par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f). \tag{1.1.20}$$

Exemple 1.1.1 *Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,+\infty,f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent $N(r,f) = 0$.*
De plus on a

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{re^{i\theta}}\right| d\theta,$$

d'où

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta.$$

Donc

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta)\, d\theta\right),$$

alors

$$m(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Par conséquent

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}. \tag{1.1.21}$$

Exemple 1.1.2 *(Voir [10, p. 7]) Soit $f(z) = \exp(e^z)$. Alors, on a*

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}, \quad r \to +\infty. \tag{1.1.22}$$

Exemple 1.1.3 *Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme non constant de degré $n \geqslant 1$ tel que $a_j\ (j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$, et soit $f(z) = e^{P(z)}$. On veut calculer $T\left(r, e^{P(z)}\right)$.*
D'abord on calcule $T(r,f)$ lorsque $P(z) = a_n z^n$. Soient $a_n = |a_n| e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$. Alors,

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)}.$$

Par conséquent

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log^{+}e^{|a_n|r^n\cos(n\theta+\varphi)}d\theta.$$

Par changement de variable, on a

$$m(r,f)=\frac{1}{2n\pi}\int\limits_{\varphi}^{2n\pi+\varphi}\log^{+}e^{|a_n|r^n\cos(\tau)}d\tau.$$

Puisque $2n\pi$ *est une période de la fonction* $\cos$, *alors*

$$m(r,f)=\frac{1}{2n\pi}\int\limits_{0}^{2n\pi}\log^{+}e^{|a_n|r^n\cos(\tau)}d\tau,$$

d'où

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log^{+}e^{|a_n|r^n\cos(\tau)}d\tau=\frac{|a_n|\,r^n}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\tau)\,d\tau=\frac{|a_n|\,r^n}{\pi}.$$

Comme f *est entière, donc*

$$T(r,f)=m(r,f)=\frac{|a_n|\,r^n}{\pi}. \tag{1.1.23}$$

Généralement, pour $f(z)=e^{P(z)}$ *et* $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ *on a*

$$|f(z)|=e^{|a_n|r^n\cos(n\theta+\varphi)(1+o(1))}\ \textit{pour}\ r\to+\infty.$$

Par conséquent, pour r *suffisamment grand on obtient*

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\log^{+}e^{|a_n|r^n\cos(n\theta+\varphi)(1+o(1))}d\theta=\frac{|a_n|\,r^n}{\pi}(1+o(1)).$$

D'où

$$T(r,f)=m(r,f)\sim\frac{|a_n|\,r^n}{\pi}\ r\to+\infty. \tag{1.1.24}$$

Exemple 1.1.4 *Soit* f *une fonction rationnelle*

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0},$$

telle que les a_j $(j=0,\ 1,\cdots,\ n)$, b_i $(i=0,\ 1,\cdots,\ m)$ *sont des nombres complexes avec* $a_nb_m\neq 0$ *et* $m\geqslant n$. *On a* $\deg(Q(z))=m$. *Il existe donc un nombre réel positif* $r_0\geqslant 0$ *tel que* $n(r,+\infty,f)=m$ *pour tout* $r\geqslant r_0$. *Alors,*

$$N(r,f)=\int_0^{r_0}\frac{n(t,+\infty,f)-n(0,+\infty,f)}{t}dt+\int_{r_0}^{r}\frac{m-n(0,+\infty,f)}{t}dt+n(0,+\infty,f)\log r,$$

d'où

$$N(r,f)=O(1)+(m-n(0,+\infty,f))(\log r-\log r_0)+n(0,+\infty,f)\log r.$$

Par conséquent

$$N(r,f)=m\log r+O(1). \tag{1.1.25}$$

Par les propriétés des polynômes complexes (voir [15, Lemme 1.3.1 p. 9]). Pour tout $\epsilon>0$, *il existe* $r_1>0$ *tel que pour tout* $|z|=r>r_1$, *on a*

$$|P(z)|=|a_n|\,r^n(1+o(1)) \quad et \quad |Q(z)|=|b_m|\,r^m(1+o(1)).$$

Par conséquent

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left(\frac{|a_n|}{|b_m|}r^{n-m}(1+o(1))\right)d\theta,$$

d'où

$$m(r,f)=O(1). \tag{1.1.26}$$

En combinant entre (1.1.25) *et* (1.1.26), *on obtient*

$$T(r,f)=m\log r+O(1)=O(\log r).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna.

Théorème 1.2.1 *Soit* f *une fonction méromorphe non constante et soit*

$$f(z)-a=\sum_{i=m}^{+\infty}C_iz^i,\quad C_m\neq 0,\quad m\in\mathbb{Z}$$

la série de Laurent de $(f-a)$ *à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe* a, *on a*

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|C_m|+\varphi(r,a), \tag{1.2.1}$$

où $|\varphi(r,a)|\leqslant\log 2+\log^+|a|$.

Preuve. Premièrement, on suppose que $a=0$. Par le Corollaire 1.1.3 et la Définition 1.1.4, on obtient

$$\log|C_m|=T(r,\ f)-T(r,\frac{1}{f}).$$

Par conséquent

$$T(r,\frac{1}{f})=T(r,\ f)-\log|C_m|,$$

c'est une affirmation avec $\varphi(r,0)\equiv 0$.

On traite maintenant le cas général où $a \neq 0$. Soit $h(z) = f(z) - a$. Alors,

$$N(r,h) = N(r,f), \quad N\left(r,\frac{1}{h}\right) = N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \tag{1.2.2}$$

et

$$m\left(r,\frac{1}{h}\right) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right). \tag{1.2.3}$$

Comme

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2$$

et

$$\log^+|f| = \log^+|f-a+a| \leq \log^+|f-a| + \log^+|a| + \log 2.$$

L'intégration de ces inégalités donne

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

et

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f). \tag{1.2.4}$$

Alors, $\varphi(r,a)$ satisfait

$$|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Maintenant, appliquons la formule (1.1.19) à la fonction h, nous obtenons

$$\log|C_m| = m(r,h) - m(r,\frac{1}{h}) + N(R,h) - N\left(R,\frac{1}{h}\right),$$

d'où

$$m(r,\frac{1}{h}) + N\left(R,\frac{1}{h}\right) = m(r,\ h) + N(R,h) - \log|C_m|.$$

De (1.2.2) et (1.2.4), on trouve

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m(r,f) + N(r,f) - \log|C_m| + \varphi(r,a) \\ &= T(r,f) - \log|C_m| + \varphi(r,a). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème principal peut être exprimé sous la forme :*

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1) \tag{1.2.5}$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. On note que le terme d'erreur $O(1)$ dépend de a.

Exemple 1.2.1 *Dans l'exemple précédent, on a calculé la fonction $T(r,f)$ pour la fonction rationnelle*

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0},$$

telle que les a_j $(j=0,\ 1,\cdots,\ n)$, b_i $(i=0,\ 1,\cdots,\ m)$ sont des nombres complexes où $a_n b_m\neq 0$ et $m\geqslant n$. Maintenant on va calculer le $T(r,f)$ de la fonction f mais pour le cas $m<n$.
On a la fonction $\frac{1}{f}$ est une fonction rationnelle qui vérifie les conditions de l'exemple précédent.
En appliquant le premier théorème fondamental (1.2.5)*, on obtient*

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1),$$

nous pouvons appliquer la même méthode de l'exemple précédent pour obtenir

$$T(r,f)=n\log r+O(1)=O(\log r).$$

Remarque 1.2.2 *Nous constatons que la fonction caractéristique d'une foncton rationnelle est toujours donnée par*

$$T(r,f)=O(\log r). \tag{1.2.6}$$

En outre, l'inverse de cet assertion est vrai. Autrement dit, si f est une fonction méromorphe avec $T(r,f)=O(\log r)$, alors f est une fonction rationnelle (voir [15, Théorème 2.2.3 p. 26]).

Proposition 1.2.1 *Soient $f,f_1,\ldots,f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$, telles que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Alors*
(a) $T\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}T(r,f_k),\quad n\geqslant 1,$
(b) $T(r,f^n)=nT(r,f),\ n\in\mathbb{N},$
(c) $T\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}T(r,f_i)+\log n,\quad n\geqslant 1,$
(d) $T\left(r,\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right)=T(r,f)+O(1)$, *en supposant que $f\not\equiv-\delta/\gamma$.*

Preuve. (a) et (c), en utilisant les propriétés (5) et (6) de $\log^+$ on peut facilement déduire que si $f_k\ (k=1,\ldots,n)$ sont des fonctions méromorphes, alors

$$m\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}m(r,f_k) \tag{1.2.7}$$

et

$$m\left(r,\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}m(r,f_k)+\log n. \tag{1.2.8}$$

En outre, puisque l'ordre du pôle de $\sum_{k=1}^{n} f_k$ en z_0 ne dépasse pas la somme des ordres des pôles des f_k $(k = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ en z_0, alors

$$N\left(r, \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} N\left(r, f_k\right). \tag{1.2.9}$$

De même, on a

$$N\left(r, \prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} N\left(r, f_k\right). \tag{1.2.10}$$

En combinant (1.2.9) (resp. (1.2.10)) avec (1.2.8) (resp. (1.2.7)), on trouve

$$T\left(r, \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} T\left(r, f_k\right) + \log n$$

et

$$T\left(r, \prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} T\left(r, f_k\right).$$

(b) Il suffit d'observer que $|f^n| = |f|^n \leq 1$ si et seulement si $|f| \leq 1$.
(d) On suppose que $\gamma \neq 0$. On pose $f_1 = f + \delta/\gamma$, $f_2 = \gamma f_1$, $f_3 = 1/f_2$, $f_4 = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta) f_3}{\gamma}$, alors $\frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} = f_4 + \alpha/\gamma$.
Maintenant, en utilisant les inégalités (a) et (c) dans la proposition précédente, nous trouvons

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) &= T\left(r, f_4\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f_3\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f_2\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f_1\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right). \end{aligned}$$

Le cas où $\gamma = 0$ $(\delta \neq 0)$. On pose $f_1 = f + \frac{\beta}{\alpha}$ (avec $\alpha \neq 0$) donc $\frac{\alpha f + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} f_1$. Alors,

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\delta}\right) &= T\left(r, \frac{\alpha}{\delta} f_1\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f_1\right) + O\left(1\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(1\right). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2 *Soit f une fonction méromorphe. Alors, pour tout $R > 0$, on a*

$$T\left(r, f\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}\right) d\theta + \log^+ |f\left(0\right)| \quad \textit{avec} \quad 0 < r < R. \tag{1.2.11}$$

$\cdot)$ *$T\left(r, f\right)$ est une fonction croissante de r.*

Preuve. En appliquant la formule de Jensen (2.1.1) avec $R = 1$ à la fonction $g(z) = a - z$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\phi}\right| d\phi = \begin{cases} \log|a|, & \text{si } |a| \geq 1 \\ \log|a| - \log|a| = 0 & \text{si } |a| < 1 \end{cases},$$

donc pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\phi}\right| d\phi = \log^+|a|. \tag{1.2.12}$$

Soit $0 < r < R$. En appliquant la formule de Jensen à la fonction $f(z) - e^{i\theta}$, nous trouvons

$$\log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\phi}\right) - e^{i\theta}\right| d\phi - N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) + N(r, f).$$

L'intégration par rapport à θ de 0 à 2π donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\phi}\right) - e^{i\theta}\right| d\phi\right] d\theta \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, f)\, d\theta,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\phi}\right) - e^{i\theta}\right| d\theta\right] d\phi \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, f)\, d\theta.\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

En utilisant (1.2.12) avec $a = f\left(re^{i\phi}\right)$, nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\phi}\right) - e^{i\theta}\right| d\theta = \log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|. \tag{1.2.14}$$

En utilisant (1.2.12) avec $a = f(0)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta = \log^+|f(0)|. \tag{1.2.15}$$

La substitution de (1.2.14), (1.2.15) dans (1.2.13), donne

$$\log^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right| d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + N(r, f),$$

d'où

$$\log^+|f(0)| = m(r, f) + N(r, f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta,$$

donc

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \log^+|f(0)|.$$

□

Remarque 1.2.3 *i) L'équation* (1.2.11) *est appelée l'Identité de Henri Cartan, c'est une autre représentation de* $T(r,f)$. *Puisque* $N\left(r, \frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)$ *est une fonction croissante de* r. *À l'aide de cette identité* (1.2.11), *on peut dire que la fonction* $T(r,f)$ *est une fonction croissante de* r.

ii) Généralement $m(r,f)$ *n'est pas monotone. Par exemple, pour la fonction* f *telle que*

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2}.$$

On a $|f(z)| < 1$ *pour* $|z| < \frac{1}{2}$ *ou* $|z| > 2$. *Cela implique que* $m(r,f) = 0$ *pour* $r \leqslant \frac{1}{2}$ *ou* $r \geqslant 2$.

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe.

1.3.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.3.1 *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors l'ordre de croissance de* f *est défini par :*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\rho_2(f)$ *de la fonction* f *par*

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.3.1 *Toute fonction* f *d'ordre fini satisfait* $\rho_2(f) = 0$.

Exemple 1.3.1 *Soit* f *une fonction rationnelle non constante*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

telle que les a_j $(j = 0,\ 1, \cdots,\ n)$, b_i $(i = 0,\ 1, \cdots,\ m)$ *sont des nombres complexes avec* $a_n b_m \neq 0$ *et* $n,\ m$ *sont des entiers positifs. Alors, de* (1.2.6) *on a*

$$T(r,f) = O(\log r),$$

d'où

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log O(\log r)}{\log r} = 0.$$

Exemple 1.3.2 *Soit* $f(z) = e^z$. *De* (1.1.21) *on a*

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\sigma(e^z) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.3.3 *Soit* $f(z) = e^{z^2}$. *D'après* (1.1.23), *on obtient*

$$T(r, f) = \frac{r^2}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^{z^2}) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{r^2}{\pi}}{\log r} = 2.$$

Exemple 1.3.4 *Soit* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *un polynôme non constant de degré* n *(*n *entier positif), tel que* $a_j\,(j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ *sont des nombres complexes avec* $a_n \neq 0$, *et soit* $f(z) = e^{P(z)}$. *Alors, d'après* (1.1.24),*on a*

$$T(r, f) \sim \frac{|a_n| r^n}{\pi}, \quad r \to +\infty,$$

d'où

$$\sigma(e^{P(z)}) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\log r} = n = \deg (P(z)).$$

On peut constater ces deux résultats

$$\sigma\left(e^{z^3}\right) = 3, \quad \sigma\left(e^{z^5+3z^2-2}\right) = 5, \quad \sigma_2\left(e^{z^3}\right) = 0, \quad \sigma_2\left(e^{z^5+3z^2-2}\right) = 0.$$

Exemple 1.3.5 *(Voir [10, p. 7]) Soit* $f(z) = \exp(e^z)$. *Alors,*

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}, \quad r \to +\infty,$$

d'où

$$\sigma(\exp(e^z)) = +\infty = \mu(f), \qquad \sigma_2(\exp(e^z)) = 1.$$

1.3.2 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.

Définition 1.3.2 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E.
La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.3.6 *1) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 8] \cup [9, 12] \subset [0, +\infty)$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^8 dt + \int_9^{12} dt = 10.$$

4) La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e^2] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2.$$

1.3.3 l'indice central d'une fonction entière.

Définition 1.3.3 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximal de f est défini par*

$$\mu(r) = \max\{|a_n| r^n,\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

et l'indice central de f est défini par

$$\nu_f(r) = \max\{m,\ \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Exemple 1.3.7 *Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 z^0$, $a_n \neq 0$, pour r suffisamment grand, on a $\mu(r) = |a_n| r^n$ et $\nu_P(r) = n$.*

Exemple 1.3.8 *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. On a*

$$\mu(r) = \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n = \max_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $u_n = \frac{1}{n!} r^n$ et étudions la monotonie de la suite (u_n). On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1},$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, & si\ n < r-1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, & si\ n > r-1 \end{cases}.$$

Par conséquent

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{[r]-2} < u_{[r]-1} \leqslant u_{[r]} > u_{[r]+1} > u_{[r]+2} > \cdots \quad .$$

Alors, pour $r > 0$ on a

$$\mu(r) = u_{[r]} = \frac{1}{[r]!} r^{[r]} \quad et \quad \nu_f(r) = [r].$$

Remarque 1.3.2 *[15] Pour toute fonction entière transcendante f, on a*

1) $\mu(r)$ est strictement croissante pour r suffisamment grand, et tend vers $+\infty$ pour $r \to +\infty$.

2) $\nu_f(r)$ est croissante et tend vers $+\infty$ pour $r \to +\infty$.

Chapitre 2

CROISSANCE DES SOLUTIONS D'UNE CLASSE DE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINEAIRE D'ORDRE SUPÉRIEUR

2.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.1}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. Il est bien connu que toute solution f de l'équation (2.1.1) est une fonction entière, et que si f_1 et f_2 est ordre infini [11]. Par conséquent, la plupart des solutions de (2.1.1) ont un ordre infini. Mais l'équation (2.1.1) avec $Q(z) = -(1 + e^{-z})$ possède une solution $f(z) = e^z$ d'ordre fini.

Ainsi, une question naturelle est : quelles sont conditions sur $Q(z)$ qui garantissent que toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.1) soit ordre infini ? De nombreux auteurs, M. Frei [6], M. Ozawa [19], G. Gundersen [7], et J.K. Langley [16], I. Amemiya and M.Ozawa [1] ont étudié ce problème. Ils ont prouvé que lorsque $Q(z)$ est un polynôme non constant ou $Q(z)$ est une fonction entière croissante avec ordre $\sigma(Q) \neq 1$, puis chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

Quelles sont conditions sur $Q(z)$ lorsque $\sigma(Q) = 1$ qui garantissent que toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1.1) soit ordre infini ?

Dans [2], Chen Zongxuan ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de l'équation (2.1.1) et ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *([2])Soient a, b des nombres complexes non nuls et $a \neq b$, $Q(z)$ est un polynôme non constant ou $Q(z) = h(z)e^{bz}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul. Puis toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{az}f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.2}$$

est d'ordre infini.et vérifie $\sigma_2(f) = 1$.

Li Chun-hong et Huang Xiao-jun [17], ils ont étendu le Théorème 2.1.1 pour certanies équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suit :

Exemple 2.1.1

$$f'' + e^{iz}f' + (1+z)e^{2iz}f = 0$$

alors : $\sigma(f) = +\infty, \sigma_2(f) = 1$.

Théorème 2.1.2 *([17]) soient $A_j \not\equiv 0$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1 (j = 1, .., k-1)$ $(k \geq 2), a_j \in \mathbb{C}^* (j = 1, .., k-1)$ et vérifiant $a_j = c_j a_0 (j = 1, .., k-1)$, où $c_j > 0 (j = 1, .., k-1)$ et tels que $k = 2$,$c_{k-1} > 1$,et $k \geq 3$, $c_{k-1} > c = \max\limits_{1 \leq j \leq k-2} \{c_j\}$, puis toute solution transcendante de*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)} + ... + A_0(z)e^{a_0 z}f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini.
Chen Zongxuan et Shon KwangHo [4] ils ont aussi généralisé les Théorème 2.1.1 et Théorème 2.1.2 pour cetaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suit :

Exemple 2.1.2

$$f''' + (1+z^2)e^{3iz}f'' + (1+z)e^{2iz}f' + ze^{iz}f = 0$$

$A_0(z) = z, \sigma(A_0) = 0 < 1, a_0 = i.$
$A_1(z) = 1+z, \sigma(A_1) = 0 < 1, a_1 = c_1 a_0 = 2i, c_1 = 2.$
$A_2(z) = 1+z^2, \sigma(A_2) = 0 < 1, a_2 = c_2 a_0 = 3i, c_2 = 3.$
$\sigma(f) = +\infty.$

Théorème 2.1.3 *([4]) soient $h_j(z) (j = 0, ..., k-1)$ des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < 1$, et $H_j = h_j e^{a_j z}$ où $a_j (j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes.Supposons qu'il existe a_s tel que $h_s \not\equiv 0$, et pour $j \neq s$, si $H_j \neq 0$, $a_j = c_j a_s$, $(0 < c_j < 1)$; si $H_j = 0$, nous définissons $c_j = 0$. Puis toute solution transcendante $f(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + ... + H_s f^{(s)} + ... + H_0 f = 0 \tag{2.1.4}$$

vérifie $\sigma(f) = \infty$. De plus, si $\max\{c_1, .., c_{s-1}\} < c_0$, puis chaque solution $f(\not\equiv 0)$ de (2.1.4) est d'ordre infini.

Théorème 2.1.4 *([4]) soient h_j des polynômes, s et H_j, a_j, h_j vérifiant l'autre hypothèses du Théorème 2.1.3. Alors toute solution transcendante $f(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle (2.1.4) vérifie $\sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) = 1$. De plus, si $\max\{c_1, .., c_{s-1}\} < c_0$, puis toute solution $f(\not\equiv 0)$ de (2.1.4) est d'ordre infini.et vérifie $\sigma_2(f) = 1$.*

Exemple 2.1.3

$$z^3 e^{\frac{2}{3}iz} f''' + (1 + z^2)e^{iz} f'' + (1 + z)e^{\frac{1}{3}iz} f' + ze^{\frac{1}{2}iz} f = 0$$

$s = 2, a_2 = i.$
$h_0 = z, c_0 = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{1}{2}i, H_0 = ze^{\frac{1}{2}iz}.$
$h_1 = 1 + z, c_1 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{3}i, H_1 = (1 + z)e^{\frac{1}{3}iz}.$
$h_2 = 1 + z^2, a_2 = i, H_2 = (1 + z^2)e^{iz}.$
$h_3 = z^3, c_3 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{3}i, H_3 = z^3 e^{\frac{2}{3}iz}.$
$\max\{c_1, .., c_{s-1}\} = \frac{1}{3} < c_0.$
$\sigma(f) = +\infty, \sigma_2(f) = 1.$

2.2 Lemmes

Lemme 2.2.1 *([8]) soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$, $|z| \geqslant R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2.2 *soit $h(z)e^{az}$ où h est une fonction entière non nulle avec $\sigma(h) = \alpha < 1$, $a = de^{i\varphi}(d > 0, \varphi \in [0, 2\pi))$. Ensemble $E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$. Alors pour tout $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1 - \alpha)$, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(E \cup E_0)$, avec r suffisamment grand*
(i) *Si $\cos(\varphi + \theta) > 0$, alors*

$$\exp\{(1 - \varepsilon)dr\cos(\varphi + \theta)\} \leq |h(z)e^{az}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)dr\cos(\varphi + \theta)\} \tag{2.2.2}$$

(ii) *Si* $\cos(\varphi+\theta)<0,$ *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)dr\cos(\varphi+\theta)\}\le|h(z)e^{az}|\le\exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\varphi+\theta)\} \tag{2.2.3}$$

Preuve. D'apres le Lemme 2.2.1,pour tout $\varepsilon(0<\varepsilon<1-\alpha)$ il existe un ensemble $E\subset[0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour un $\theta\in[0,2\pi)\backslash(E\cup E_0)$, il existe un $R_0(\theta)>1$, pour tous $z=re^{i\theta}$ satisfaisant $r>R_0$, on a

$$\left|\frac{h'(re^{i\theta})}{h(re^{i\theta})}\right|\le r^{\alpha-1+\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{2.2.4}$$

Soit la courbe intégrale $C=\{w:\arg w=\theta,R_0\le\mid w\mid=t\le r\}$, on a

$$\log h(re^{i\theta})=\int_{R_0}^{r}\frac{h'(te^{i\theta})}{h(te^{i\theta})}e^{i\theta}dt+\log h(R_0e^{i\theta}), \tag{2.2.5}$$

d'aprés (2.2.4) et (2.2.5), on a $\left|\log h(re^{i\theta})\right|\le Mr^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}+M\le r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$, où $M>0$ est une constante, et

$$\left|\log\left|h(re^{i\theta})\right|\right|\le\left|\log h(re^{i\theta})\right|\le r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

D'où

$$\exp\{-r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\}\le\left|h(re^{i\theta})\right|\le\exp\{+r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\}, \tag{2.2.6}$$

d'prés $|e^{az}|=e^{dr\cos(\varphi+\theta)}$ et (2.2.6), on obtient

$$\exp\{-r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}+\cos(\varphi+\theta)\}\le\left|h(re^{i\theta})e^{de^{i\varphi}re^{i\theta}}\right|\le\exp\{+r^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}+\cos(\varphi+\theta)\}.\theta \tag{2.2.7}$$

(**i**) Si $\cos(\varphi+\theta)>0$, alors pour $0<\varepsilon<1-\alpha$ et (2.2.7), nous savons que (2.2.2 satisfait pour r suffisamment grand. Utilisant la méme preuve similaire que celle ci-dessus, nous pouvons obtenir (2.2.3) de (**ii**) obtenue.
En utilisant la méme preuve similaire que celle de la preuve du Lemme 2.2.4 du [9], nous pouvons obtenir celle du Lemme 2.2.3. □

Lemme 2.2.3 *soit* $f(z)$ *une fonction entière et supposons que* $\left|f^{(m)}(z)\right|$ *est non borné sur un certain rayon* $\arg z=\theta$*. Alors il existe une séquence* $z_n=r_ne^{i\theta}(n=1,2,...)$*, qui tend vers l'infini telle que* $f^{(m)}(z_n)\longrightarrow\infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(m)}(z_n)}\right|\le|z_n|^{m-j}(1+o(1))(j=0,..,m-1).$$

Lemme 2.2.4 *([18]) soit $f(z)$ une fontion analytique sur le domaine $D = \{z \mid \alpha < \arg z < \beta, r_0 < |z| < \infty\}$, et continue sur $\overline{D} = D \cup C$ (C est la borne de D). Si pour un petit $\varepsilon > 0$, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|z| \geq R(\varepsilon)$, $z \in D$, on a $|f(z)| < \exp\{\varepsilon |z|^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}\}$, et pour $z \in C$, on a $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$ est une constante), alors $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.*

Lemme 2.2.5 *soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout un rayon $\arg z = \theta_0 \in [0, 2\pi) \backslash E$, $\left|f(re^{i\theta_0})\right| \leq Mr^k$ ($M = m(\theta_0) > 0$ est une constante et $k(> 0)$ est une constante indépendant de θ_0). Puis $f(z)$ est un polynôme de $\deg f \leq k$.*

Preuve. Puisque E de mesure linéaire nulle, on peut choisir des points $\theta_j \in [0, 2\pi) \backslash E$ $(j = 1, ..., n, n + 1)$ tels que

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n < 2\pi, \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$$

et

$$\max\{\theta_{j+1} - \theta_j; 1 \leq j \leq n\} < \frac{\pi}{\sigma + 1}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma(f) = \sigma$, il existe $R(\varepsilon) > 0$, tel que $\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq \exp(\varepsilon |z|^{\sigma+1})$.Dans le secteur

$$H_j = \{z \mid \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}, |z| \geq R\} (j = 1, ..., n)$$

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq \exp(\varepsilon |z|^{\frac{\pi}{\theta_{j+1}-\theta_j}})$$

Ainsi, et sur les rayons $\arg z = \theta_j$, θ_{j+1}, $\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq M$ et,d'aprés le Lemme 2.2.4, $\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq M$ est valable pour toute H_j. D'où $|f(z)| \leq M |z|^k$ valable sur tout le plan. Par conséquent $f(z)$ est un polynôme de $\deg f \leq k$. □

Lemme 2.2.6 *([8]) soit f une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, et une constante $B > 0$ qui depand de α et $(m, n)(m, n \in \{0, ..., k\}$, et $m < n)$ tel que pour tous z satisfant $|z| = r \notin [0, 2\pi) \cup E$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_n)}{f^{(m)}(z_n)}\right| \leq B(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f))^{n-m} \qquad (2.2.8)$$

Lemme 2.2.7 *([2])soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$, soit un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie. Alors il existe $\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\}$ tel que*

$|f(z_k)| = M(r_k, f), \theta_k \in [0, 2\pi)$, $\lim_{k\longrightarrow\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin E$, $k \longrightarrow \infty$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, pour* r_k *suffisamment grand, on a*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log v(r_k)}{\log r_k} = \infty. \tag{2.2.9}$$

$$exp(r_k^{\alpha-\varepsilon}) < v(r_k) < exp(r_k^{\alpha+\varepsilon}) \tag{2.2.10}$$

où $v(r)$ *est l'indice central de* $f(z)$*.*

Lemme 2.2.8 *soit* $f(z)$ *une fonction entiére transcendante. Alors il existe un ensemble* $E \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie telle que lorsque nous prenons un point* z *satisfant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ *et* $|f(z)| = M(r, f)$*, on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq 2r^s \quad (s \in N). \tag{2.2.11}$$

Preuve. D'aprés le Théorème de Wiman-Valiron ([12],[21]), on a .

$$\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} = (\frac{v(r)}{z})^s(1 + o(1)), \tag{2.2.12}$$

où $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, $E \subset (1, +\infty)$ est de mesure logarithmique finie telle que $|f(z)| = M(r, f)$ et $v(r)$ désigne l'indice central de $f(z)$. Puisque f est transcendante,$v(r) \longrightarrow \infty (r \longrightarrow \infty)$. Alors que z satisfait $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r, f)$ avec (2.2.12) on déduit (2.2.11) . □

Lemme 2.2.9 *soient* $H_j (j = 0, ..., k - 1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(H_j) \leq \sigma < \infty$*. Si* $f(z)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + ... + H_0 f = 0,$$

alors $\alpha_2(f) \leq \sigma$*.*

Preuve. En utilisant la Théorème de Wiman-Valiron, on peut facilement prouver le Lemme 2.2.9. □

2.3 Démonstration du Théorème 2.1.3.

Soit $f(z)$ est une solution transcendante de (2.1.4). Montrons que $\sigma(f) = \infty$. Supposons que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Soit $a_s = de^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$, alors $|e^{a_s z}| = e^{rd\cos(\varphi+\theta)}$, pour $j \neq s$, $a_j = c_j de^{i\varphi}$. Soit $c = \max\{c_j, j \neq s\}$, alors $0 \leq c < 1$. D'aprés le Lemme 2.2.1. il existe un ensemble $E_1 \subset$

$[0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, il existe un constant $R = R(\theta) > 1$, tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq |z|^M, (j = s+1, ..., k), \tag{2.3.1}$$

où $M(> 0)$ est une constante. Puisque $h_s \neq 0$ et $\sigma(h_j) < 1(j = 0, ..., k-1)$. D'prés le Lemme 2.2.2, $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, pour $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_0)(E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$, est un ensemble fini, pour tout ε donné $(0 < 3\varepsilon < 1 - c)$, on obtient que pour r suffisamment grand,

(**i**) Si $\cos(\varphi + \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\varphi+\theta)\} \leq \left|H_s(re^{i\theta})\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)dr\cos(\varphi+\theta)\} \tag{2.3.2}$$

$$\left|H_j(re^{i\theta})\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)cdr\cos(\varphi+\theta)\}(j \neq s) \tag{2.3.3}$$

(**ii**) Si $\cos(\varphi + \theta)$ et $H_j \neq 0$, alors

$$\left|H_s(re^{i\theta})\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\varphi+\theta)\} \tag{2.3.4}$$

$$\left|H_j(re^{i\theta})\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)c_j dr\cos(\varphi+\theta)\}(j \neq s) \tag{2.3.5}$$

Pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_0)$, alors $\cos(\varphi + \theta) > 0$ ou $\cos(\varphi + \theta) < 0$ nous divisons en deux cas : (**i**) $\cos(\varphi + \theta) > 0$ et (**ii**) $\cos(\varphi + \theta) < 0$.

Cas (**i**) : $\cos(\varphi + \theta) > 0$. Maintenant nous prouvons que $\left|f^{(s)}(re^{i\theta})\right|$ est borné sur la droite $\arg z = \theta$.

Si $\left|f^{(s)}(re^{i\theta})\right|$ est borné sur la droite $\arg z = \theta$, alors d'aprés le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}(r = 1, 2, ...)$ tel que pour $q \to \infty$ on a $q_r \to \infty$, $f^{(s)}(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \leq (1 + o(1))\,|z_q|^{s-j}\,(j = 0, ..., s-1). \tag{2.3.6}$$

En substituant (2.3.1)-(2.3.3) et (2.3.6) dans (2.1.4), on trouve que

$$\begin{aligned}\exp\{(1-\varepsilon)dr_q\cos(\varphi+\theta)\} &\leq |H_s(z_q)| \\ &\leq \left|\frac{f^{(k)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| + ... + \left|H_{s+1}(z_q)\frac{f^{(s+1)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \\ &\quad + \left|H_{s-1}(z_q)\frac{f^{(s-1)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| + ... + \left|H_0(z_q)\frac{f(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \\ &\leq k\exp\{(1+\varepsilon)cdr_q\cos(\varphi+\theta)\}\,|z_q|^M. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

D'aprés (2.3.7), il vient que

$$\exp\{\frac{1}{3}(1-c)dr_q\cos(\varphi+\theta)\} \leq r_q^M \tag{2.3.8}$$

C'est une contradiction. D'où $\left|f^{(k)}(re^{i\theta})\right| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. Nous pouvons facilement obtenir

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq Mr^k \tag{2.3.9}$$

sur $\arg z = \theta$.

Cas (**ii**) : $\cos(\varphi+\theta) < 0$, d'aprés (2.1.4),il vient que

$$-1 = H_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + H_s(z)\frac{f^{(s)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + H_0(z)\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)} \tag{2.3.10}$$

Maintenant nous prouvons que $\left|f^{(k)}(re^{i\theta})\right|$ est borné sur la droite $\arg z = \theta$. Si $\mid f^{(k)}(re^{i\theta}) \mid$ est borné sur $\arg z = \theta$, alors d'aprés le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}(r = 1, 2, ...)$ tel que pour $q \to \infty$ on a $q_r \to \infty$, $f^{(s)}(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leq (1+o(1))\,|z_q|^{k-j}\,(j = 0, ..., k-1), \tag{2.3.11}$$

d'aprés (2.3.4) et (2.3.11), et lorsque $q \to \infty$ alors

$$\left|H_s(z)\frac{f^{(s)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)c_j dr\cos(\varphi+\theta)\}r_q^{k-s}(1+o(1)) \to 0 \tag{2.3.12}$$

Si $H_j \neq 0(j \neq s)$ alors d'aprés (2.3.5), (2.3.11) et $c_j > 0$, et lorsque $q \to \infty$ alors

$$\left|H_j(z)\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)c_j dr\cos(\varphi+\theta)\}r_q^{k-j}(1+o(1)) \to 0. \tag{2.3.13}$$

En substituant (2.3.12) et (2.3.13) dans (2.3.10), on obtient que

$$1 \leq 0 \tag{2.3.14}$$

C'est une contradiction. D'où $\left|f^{(k)}(re^{i\theta})\right| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. Par conséquent

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq Mr^k. \tag{2.3.15}$$

Soit $\arg z = \theta$, d'aprés le Lemme 2.2.5, en utilisant (2.3.9) et (2.3.15) et puisque $(E_1 \cup E_2 \cup E_0)$ de mesure linéaire nulle,et puisque $f(z)$ est un polynôme c'est une contradiction selon l'hypothèse. Par conséquent $\sigma(f) = \infty$. De plus, supposant que f est une solution polynômiale de (2.1.4) et que $\deg f = m$.
Si $m \geq s$, alors nous prenons $\theta \in [0, 2\pi) \backslash (E_1 \cup E_2 \cup E_0)$ vérifiant $\cos(\varphi + \theta) > 0$. Pour tout ε_1 donné $(0 < 3\varepsilon_1 \min\{1-c, c_0 - c'\}(c' = (\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0))$, d'aprés (2.1.4) et le Lemme 2.2.2 on ait

$$\begin{aligned}
& \exp\{(1-\varepsilon_1)dr\cos(\varphi+\theta)\}r^{m-s} \\
\leq & \left|h_s(re^{i\theta})f^{(s)}(re^{i\theta})\right| e^{dr\cos(\varphi+\theta)} = \left|H_s(re^{i\theta})f^{(s)}(re^{i\theta})\right| \\
\leq & \sum_{j\neq s}\left|h_j(re^{i\theta})f^{(j)}(re^{i\theta})\right| e^{c_j dr\cos(\varphi+\theta)} \\
\leq & kr^m \exp\{(1+\varepsilon_1)cdr\cos(\varphi+\theta)\},
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

d'aprés (2.3.16), on a

$$\exp\{\frac{1}{3}(1-c)cdr\cos(\varphi+\theta)\} \leq r^s. \tag{2.3.17}$$

C'est une contradiction.
Si $m < s$, prenant θ comme ci-dessus,d'aprés (2.1.4) et le Lemme 2.2.2, on a

$$\begin{aligned}
\exp\{(1-\varepsilon_1)c_0 dr\cos(\varphi+\theta)\} & \leq \left|H_0(re^{i\theta})f(re^{i\theta})\right| \\
& \leq \sum_{j=1}^{s-1}\left|H_j(re^{i\theta})f^{(j)}(re^{i\theta})\right| \leq (s-1)\exp\{(1+\varepsilon_1)c'dr\cos(\varphi+\theta)\}
\end{aligned}$$

et

$$\exp\{\frac{1}{3}(c_0 - c')dr\cos(\varphi+\theta)\} \leq s-1 \tag{2.3.18}$$

C'est une contradiction.Par conséquent, quand $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$, toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de (2.1.4) est ordre infini.

2.4 Démonstration du Théorème 2.1.4

Soit $f(z)$ est une solution transcendante de (2.1.4), d'aprés le Théoreme 2.1.3, on a $\sigma(f) = \infty$. Maintenant nous montrons que $\sigma_2(f) = 1$. Soit $\sigma_2(f) < 1$, d'aprés le Lemme 2.2.6 nous savons qu'il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, et qu'il existe une constante $A > 0$, tel que

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(d)}(z)} \right| \leq A(T(2r, f))^{2k} \quad (k \geq j > d \geq 0) \tag{2.4.1}$$

$|z| = r \notin E_3$ et r suffisamment grand.

À la lumière de la théorie de Wiman-Valiron , nous avons des formules de base

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = (\frac{v(r)}{z})^j (1 + o(1))(j = 1, ..., k) \tag{2.4.2}$$

où z vérifiant $|f(z)| = M(r, f)$ et $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4, (E_4 \subset (1, +\infty))$ de mesure logarithmique finie, $v(r)$ est l'index central de $f(z)$.

D'prés le Lemme 2.2.7, nous pouvons choisir un segment $\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\}$ tel que $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi]$, $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0 \in [0, 2\pi]$, $r_n \notin [0, 1] \cup E_3 \cup E_4$, $r_n \to \infty$ et pour tout ε_2 donné $(0 < 3\varepsilon < \min\{1 - \alpha, 1 - c\})$ et r_n suffisamment grand on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log v(r_n)}{\log r_n} = \infty \tag{2.4.3}$$

$$\exp\{r_n^{\alpha - \varepsilon_2}\} \leq v(r_n) \leq \exp\{r_n^{\alpha + \varepsilon_2}\} \tag{2.4.4}$$

Pour θ_0, on a $\mathrm{Re}\{a_s z\} = dr\cos(\varphi+\theta_0)$, pour $dr\cos(\varphi+\theta_0)$, il existe trois cas : (**i**) $\cos(\varphi+\theta_0) > 0$; (**ii**) $\cos(\varphi + \theta_0) < 0$; (**iii**) $\cos(\varphi + \theta_0) = 0$. Pour le prouver nous divisons en tois cas

(**i**) : $\cos(\varphi + \theta_0) > 0$, d'aprés (2.1.4) on ait

$$\begin{aligned} -h_s e^{a_s z} &= (\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}) + h_{k-1} e^{a_{k-1} z} \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + ... + h_{s+1} e^{a_{s+1} z} \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}) \\ &\quad + (h_{s-1} e^{a_{s-1} z} \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + ... + h_1 e^{a_1 z} \frac{f^{(1)}}{f^{(s)}} + h_0 e^{a_0 z})) \frac{f}{f^{(s)}}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Pour n suffisamment grand, $\cos(\varphi + \theta_0) > 0$ lorsque $\theta_n \to \theta_0$. Par conséquent Pour n suffisamment grand, d'aprés le Lemme 2.2.2, nous savons que θ_n vérifiant

$$|h_s(z_n) e^{a_s z_n}| \geq \exp\{(1 - \varepsilon_2) dr_n \cos(\varphi + \theta_n)\} \tag{2.4.6}$$

$$\left|h_j(z_n)e^{a_j z_n}\right| \leq r^M \exp\{(1-\varepsilon_2)dr_n\cos(\varphi+\theta_n)\} \text{ (pour } j \neq s). \tag{2.4.7}$$

D'aprés le Lemme 2.2.8, on sait que si $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ vérifiant $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, on ait

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r_n^k. \tag{2.4.8}$$

Sur l'intervale $\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\}$, en remplacant (2.4.1), (2.4.6), (2.4.8) dans (2.4.5), comme n suffisamment grand, on obtien que

$$\begin{aligned}\exp\{(1-\varepsilon_2)dr_n\cos(\varphi+\theta_n)\} &\leq |h_s(z_n)e^{a_s z_n}| && (2.4.9)\\ &\leq Akr^M\exp\{(1-\varepsilon_2)dr_n\cos(\varphi+\theta_n)\}(T(2r,f))^{2k} && (2.4.10)\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\{\frac{1}{3}(1-c)d\cos(\varphi+\theta_n)\} \leq Akr^M(T(2r,f))^{2k}. \tag{2.4.11}$$

D'aprés (2.4.11), on a $\sigma_2(f) \geq 1$.

(**ii**) : $\cos(\varphi+\theta_0) < 0$, d'aprés (2.1.4) et (2.4.2), on obtien que

$$\begin{gathered}(-\frac{v(r_n)}{z_n})^k(1+o(1)) = H_{k-1}(z_n)(-\frac{v(r_n)}{z_n})^{k-1}(1+o(1)) \qquad (2.4.12)\\ +\ldots+H_s(z_n)(-\frac{v(r_n)}{z_n})^s(1+o(1))+\ldots+H_0(z_n).\end{gathered}$$

Puisque $\theta_n \to \theta_0$ et $\cos(\varphi+\theta_0) < 0$, on a $\cos(\varphi+\theta_n) < 0$ pour n suffisamment grand. Par conséquent pour n suffisamment grand, d'aprés le Lemme 2.2.2, nous savons que θ_n vérifiant

$$|h_s(z_n)e^{a_s z_n}| \leq \exp\{(1-\varepsilon_2)dr_n\cos(\varphi+\theta_n)\} \leq 1. \tag{2.4.13}$$

Pour $j \neq s$ si $H_j(z) \neq 0$, alors

$$|h_j(z_n)e^{a_j z_n}| \leq \exp\{(1-\varepsilon_2)c_j dr_n\cos(\varphi+\theta_n)\} \leq 1. \tag{2.4.14}$$

En remplacant (2.4.13) et (2.4.14) dans (2.4.12), il vient que

$$v(r_n) \leq kr_n^M(1+o(1)). \tag{2.4.15}$$

Alors (2.4.15) se contredit avec (2.4.3). Cela montre que le cas (**ii**) ne peut pas se produire.

(**iii**) : $\cos(\varphi+\theta_0)=0$. Puisque $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ vérifiant $r_n \to \infty, \theta_n \to \theta_0$ comme $n \to \infty$, la droite $\arg w = \varphi + \theta_0$ est une ligne asymptotique de $\{a_j z_n\}(j=0,...,k-1)$. Par conséquent, il existe $N>0$, tel que quand $n>N$, avec $\mathrm{Re}\{a_j r_n e^{i\theta_0}\}=0$, et puisque $h_j(j=0,...,k-1)$ est polynomial, on a pour $j=0,...,k-1$

$$-1<\mathrm{Re}\{a_j r_n e^{i\theta_0}\}<1, \frac{1}{e}<|e^{a_j z_n}|<e, r^{M_1}<|h_j(z_n)e^{a_j z_n}|<r^{M_2}. \tag{2.4.16}$$

où M_1, M_2 sont deux entiers positifs. D'aprés (2.1.4), (2.4.2), nous savons que (2.4.12) est vérifiée. D'aprés (2.4.12) et (2.4.16), on a

$$v(r_n)(1+o(1)) \le r_n^M. \tag{2.4.17}$$

Alors(2.4.17) se contredit avec (2.4.3) .Cela montre que le cas (**iii**) ne peut pas se produire.Dans le cas (**i**), on a prouvé que $\sigma_2(f) \ge 1$. En combinant le Lemme 2.2.9, on a $\sigma_2(f)=1$.
En outre pour le cas, utilisant la même démonstration que dans le Théorème 2.1.3, nous savons que lorsque $\max\{c_1,\cdots,c_{s-1}\}<c_0$, toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.4) a $\sigma_2(f)=1$.

2.5 Conclusion

Certains chercheurs se sont intéressés à l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur homogènes ou non homogènes dont les coefficients sont des fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini. C'est pourquoi on a introduit la notion de l'hyper-ordre. Cependant l'étude de ces equations dans le cas où les coefficients sont des fonctions méromorphes est un peu diffcile car les solutions ne sont pas forcément des fonctions méromorphes.

Dans cette mémoire on a étudié l'ordre et l'hyper-ordre de ces équations. On s'est aussi intéressé dans notre travail à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur non homogène avec des coefficients entières.

Bibliographie

[1] I. Amemiya, M. Ozawa, Non-existence of finite order solutions of $w''+e^{-z}w'+Q(z)w=0$. Hokkaido Math J, 1981, 10 : 1-17

[2] Z. Chen, The growth of solutions of the differential equation $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$. Science in China (Series A), 2001, 31 : 775-784 (in Chinese)

[3] Z. X. Chen, *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta. Math. Sinica Engl. Ser., 18 (1) (2002), 79-88.

[4] Z. Chen, K.H. Shon, On the growth of solutions of a class of higher order differential equations. Acta Mthematica Scientia 2004,24b(1) :52-60

[5] M. Frei, *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, Comment. Math. Helv. 35 (1961), 201-222.

[6] M. Frei, Uber die subnormalen losungen der differentialgleichung $w''+e^{-z}w'+(konst.)w=0$. Comment Math Helv, 1962, 36 : 1-8

[7] G. Gundersen, On the question of whether $f''+e^{-z}f+B(z)f=0$ can admit a solution $f\not\equiv 0$ of finiteorder. Proc R S E, 1986, 102A : 9-17

[8] G. Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. J London Math Soc, 1988, 37(2) : 88-104

[9] G.Gundersen, Finite order solutions of second order linear differential equations. Trans Amer Math Soc, 1988, 305 : 415-429 ;

[10] Hayman W. K., *Meromorphic Functions, Clarendon Press*, Oxford, 1964.

[11] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York : Wiley, 1976

[12] Y. He, X. Xiao . Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations. Beijing : Science Press, 1988(in Chinese)

[13] G. Jank , Volkmann L., *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhauser, 1985.

[14] K. H. Kwon, *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equation*, Bull. Korean. Math. Soc., 3, 1996, 487-496.

[15] I. Laine , *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter \& Co., Berlin, 1993.

[16] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa,* Kodai Math. J., 9 (1986), no. 3, 430-439.

[17] C. Li , X. Huang, The growth of solution of a class of high order differential equations (in chinese). Acta Mathematica Scientia, 2003, 23A(6)

[18] A I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, Vol.2. Translated by Silverman R A. N J Prentice-Hall : Englewood Cliffs, 1965

[19] M. Ozawa, On a solution of $w''+e^{-z}w'+(az+b)w=0$. Kodai Math J, 1980, 3 : 295-309

[20] J. Tu and C. F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340(1) (2008), 487-497.

[21] G. Valiron, Lectures on the General Theory of Integral Functions. New York : Chelsea, 1949