

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et informatique
Filière : Mathématique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par :
BOURASS Ahmed

THEME :
**Calcul des Solutions de Modèles Bidirectionnels à Dérivées non Entières : Une
Approche Alternative**

Soutenu le : Juin 2021

Devant le jury composé de :

Aissa Omar ELOSMANI	MCA	USTO Oran	Président
Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	Université de Mostaganem	Examineur
Djillali BOUAGADA	Professeur	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

Titre : Calcul des solutions de modèles bidirectionnels à dérivées non entières : une approche alternative

Rssumé :

Dans ce sujet nous allons considérer une classe de modèles 2D à dérivées non entières. Le but principal est d'établir une approche alternative pour calculer la solution du modèle considéré. L'idée clé est l'utilisation de nouvelles dérivations et transformations. Des exemples numériques seront présentés pour illustrer la nouvelle approche.

Title : Computing solutions of non-integer bidirectional derivative models : an alternative approach

Abstract :

In this topic we will consider a class of 2D non-integer derivative models. The main goal is to establish an alternative approach to calculate the solution of the considered model. The key idea is the use of new derivations and transformations. Numerical examples will be presented to illustrate the new approach.

ملخص:

في هذا الموضوع سننظر إلى فئة من نماذج الأنظمة ذات المشتقة الغير الصحيحة وثنائية الأبعاد. الهدف الرئيسي هو إنشاء نهج بديل لحساب حل النموذج المدروس. الفكرة الرئيسية هي استخدام الاشتقاقات والتحويلات الجديدة. سيتم تقديم أمثلة عددية لتوضيح النهج الجديد

Mémoire préparé à : Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem , ACSY
Team-Laboratory of Pure and Applied Mathematics, P.O.Box 227/118 ,
27000 Mostaganem, Algeria

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, et surtout la confiance qu'ils ont toujours eue en moi, et qui m'ont appris comment patienter pour atteindre un tel objectif.

Mes chers frères et mes chères soeurs que j'aime beaucoup.

Toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A mon encadreur pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de recherche très intéressant.

Remerciements

Je tiens à témoigner mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce travail de recherche :

- ★ Mon encadreur Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'université de Mostaganem, d'avoir dirigé ma thèse, et de m'avoir initié à ce grand axe de recherche mathématiques et applications qu'est la théorie de contrôle, et aussi tout au long de mon travail de Master, me guider, m'orienter par son soutien permanent, ses conseils utiles et encouragements qu'il n'a cessés de me prodiguer.
- ★ J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. J'ai eu l'opportunité de travailler sous sa direction durant tout mon cursus universitaire licence, Master vraiment j'étais très chanceux, pour cela je tiens à saluer son engagement total durant toute ma formation, je lui réitère mes remerciements pour ses conseils avisés et ses indications de tout temps fructueuses, sa capacité et son énorme maîtrise m'ont aidé à aborder les problèmes de cette thèse. Je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.
- ★ Je tiens également à remercier les membres de jury Docteur Aissa Omar ELOSMANI, et Docteur Mohammed Amine GHEZZAR . pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'expertiser ma contribution.
- ★ Sans oublier, un très grand merci pour Kamel BENYETTOU doctorant en mathématiques appliquées " Ro et aide à la décision " pour son soutien logistique sans lui le mémoire n'aurai jamais vu le jour.

Notations

\mathbb{R} : L'espace des nombres réels.

\mathbb{R}^n : L'espace des vecteurs réels de dimension n .

$\mathbb{R}^{n \times m}$: L'espace des matrices réelles de taille $n \times m$.

\in : Appartient .

$\text{rang} (\cdot)$: Le rang de la matrice.

$\det (\cdot)$: Le déterminant de la matrice.

I_n : La matrice identité de taille $n \times n$.

$0_{n \times m}$: La matrice nulle de taille $n \times m$.

$M_{n \times m}$: La matrice nulle de taille $n \times m$.

M^T : Transposé de la matrice M .

M^{-1} : L'inverse de la matrice M .

$M \succ 0$: Matrice définie positive.

M^* : Transposé conjugué de la matrice M .

\mathbb{M}_n : Une matrice de Metzler de taille n .

$N^\alpha x(t)$: La dérivée fractionnaire non conformable de la fonction $x(t)$

\mathcal{L}_N : La transformé de Laplace non conformable.

\mathcal{S} : La transformé de Sumudu non conformable.

Table des matières

- Dédicaces** **3**
- Remerciments** **4**
- Notations** **5**
- Introduction** **7**
- 1 Notions de Bases et Préliminaires** **9**
- 2 Les systèmes unidimensionnels fractionnaires** **11**
 - 2.1 Rappel sur la dérivé fractionnaire non-conforme et la transformation de Laplace 11
 - 2.2 Transformation de Sumudu 14
 - 2.3 Solvabilité des systèmes unidimensionnels fractionnaires 17
 - 2.4 Positivité des systèmes unidimensionnels fractionnaires 18
 - 2.5 Stabilité des des systèmes unidimensionnels fractionnaires 21
 - 2.6 Exemples et simulations 22
- 3 Les systèmes bidimensionnels fractionnaires** **28**
 - 3.1 Solvabilité des systèmes bidimensionnels fractionnaires 28
- Conclusion** **34**
 - Bibliographie 35

Introduction

Le monde scientifique connaît actuellement un grand développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus, du point de vue qualité et performance des machines industriels dans différents domaines.

Des modèles particuliers ont été développés et étudiés par nombreux scientifiques et mathématiciens pour pouvoir résoudre les problèmes qui se posent en réalité, dont on cite : les modèles à compartiments, les modèles électriques (circuits RLC), d'autres modèles apparaissent dans le domaine des sciences sociales, en science de la communication et de l'information, les processus industriels impliquant des réacteurs chimiques, l'industrie des Robots ... etc voir [9, 7, 14, 19, 23, 4, 1, 3, 26].

Parmi ces types de systèmes, on cite les systèmes fractionnaires linéaires où la dérivée fractionnaire est au sens de Caputo, sont décrits par l'équation :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

par contre; ne nouvelle dérivée dite : la dérivée fractionnaire conformable qui a été introduit par Khali et Abdeljawad voir [5, 17] , et est noté T^α , le système est

$$T^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où $x(\cdot) \in \mathbb{R}_+^n, U(\cdot) \in \mathbb{R}^m, A \in M_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Les résultats qui ont été trouvés lors de l'analyse de cette classe de systèmes sont nombreuses en théorie de contrôle (positivité et stabilité).

Récemment, une nouvelle dérivée fractionnaire à été introduite en [21, 20] et développée en [8] noté N^α dite non conformable. Nous nous intéressons dans ce travail à la classe des systèmes fractionnaires unidimensionnels non conformable d'ordre α , où $0 < \alpha \leq 1$, et pour le cas bidimensionnel fractionnaire d'ordre (α, β) où $0 < \alpha \leq 1$ et $0 < \beta \leq 1$; nous exposerons les tests de stabilité et de positivité au moyen de matrices de Metzler et de vecteurs positifs.

Notre travail est structuré en trois chapitres, en plus l'introduction et la conclusion et enfin des perspectives.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions mathématiques de bases comme : l'algèbre linéaire, les matrices non négatives et de Metzler de Metzler, la transformée de Laplace ..., pour pouvoir résoudre et étudier les conditions de positivité et de stabilité des systèmes fractionnaires. Le deuxième chapitre concerne l'analyse de la dérivée frac-

tionnaire non conformable pour présenter de nouveaux résultats sur la transformée de Sumudu pour établir la solution de la classe des systèmes unidimensionnels de type

$$N^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

Ensuite en utilisant la formule de cette solution on analyse ce type de système où présente les conditions nécessaire et suffisante de positivité et de stabilité .

Le troisième chapitre traite l'étude de solvabilité des système bidimensionnelle fractionnaire décrite par le modèle de Rosser sous la forme d'équation suivante

$$\begin{bmatrix} N_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) \\ N_{t_2}^\beta x^v(t_2, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w(t_1, t_2) \quad (2)$$

où $N_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2)$, $x^v(t_1, t_2) = \frac{\partial^\beta}{\partial t_2} x^h(t_1, t_2)$, et $A_{11}, A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ et $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ avec $n_1 + n_2 = n$.

Nous terminons enfin notre mémoire par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Notions de Bases et Préliminaires

Définition 1.0.1. [15] *Valeurs et vecteurs propres*

Soient $A \in M_{n,n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A s'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ telle que $x \neq 0$ vérifiant,

$$Ax = \lambda x$$

et on dit aussi que x_i est le vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i .

Définition 1.0.2. [15] *Polynôme caractéristique*

On définit le polynôme caractéristique de la matrice $A \in M_{n,n}$ par :

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \det(A - \lambda I_n)$$

Définition 1.0.3. [15] *Une fonction de la variable t est dite causale, si elle est nulle pour $t < 0$.*

Définition 1.0.4. [15] *Soit f une fonction du temps t causale, sa transformée de Laplace notée $F(s)$ est définie par :*

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

telle que s est un nombre complexe.

F existe que si cette intégrale à un sens i.e converge.

Définition 1.0.5. [2] *On dit que A est une matrice non-négative si $\forall i = \overline{1, n} \forall j = \overline{1, m} : a_{ij} \geq 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.*

Définition 1.0.6. [2] On dit que A est une matrice positive si A est non-négative et $\exists k = \overline{1, n}, \exists l = \overline{1, m} : a_{kl} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$

Définition 1.0.7. [2] On dit que A est une matrice de Metzler si $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$, i.e., toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ est noté \mathbb{M}_n .

Exemple 1.0.1. La matrice A suivante est une matrice de Metzler.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Lemme 1.0.1. [2] A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.
où e^{At} étant l'exponentiel de la matrice At .

Chapitre 2

Les systèmes unidimensionnels fractionnaires

Nous présentons dans ce chapitre les systèmes linéaires fractionnaires en temps continu tout en considérant la dérivée fractionnaire non conformable. Nous exposerons les résultats de la solution pour la classe des systèmes fractionnaires en rappelant quelques résultats sur cette nouvelle dérivée, puis on développe de nouvelles sur la nouvelle transformation de Sumudu moyennent cette dérivée.

Rappelons qu'une vue d'ensemble de la situation actuelle de la théorie des systèmes fractionnaire conformable est donnée dans les travaux [20, 21, 8].

2.1 Rappel sur la dérivé fractionnaire non-conforme et la transformation de Laplace

Définition 2.1.1. [20] *Le dérivé fractionnaire non conformable d'une fonction en temps continu réel $f(t), t \in [0, \infty)$ d'ordre $\alpha \in [0, 1]$*

$$N^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

Définition 2.1.2. [20] *La dérivée fractionnaire non conformable d'une fonction en temps continu réel $f(t), t \in [0, \infty)$ d'ordre $\alpha \in [0, 1]$*

$${}_N I^\alpha f(x) = \int_0^t f(x) d^\alpha x$$

2.1. RAPPEL SUR LA DÉRIVÉ FRACTIONNAIRE NON-CONFORME ET LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

où d'une manière équivalente

$${}_N I^\alpha f(x) = \int_0^x f(t) t^\alpha dt$$

Définition 2.1.3. [8] Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, puis la transformée de Laplace fractionnaire non conforme d'ordre α de $f(t)$ est défini par

$$\mathcal{L}_N f(t) = F^\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} f(t) t^\alpha dt$$

Théorème 1. Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ être une fonction donnée et $0 < \alpha \leq 1$. Puis

$$\mathcal{L}_N \{N^\alpha f(x)\} = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0), s > 0$$

Démonstration. En utilisant l'intégration par partie, nous aurons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N \{N^\alpha f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} N^\alpha f(x) x^\alpha dx \\ &= \int_0^\infty e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} x^{-\alpha} f'(x) x^\alpha dx \\ &= \int_0^\infty e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} f'(x) dx \\ &= \left[e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} f(x) \right]_0^\infty - \int_0^\infty f(x) \left(-\frac{s}{\alpha+1} (\alpha+1) x^\alpha \right) e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} f(x) \right]_0^c + s \int_0^\infty f(x) x^\alpha e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} dx \\ &= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

□

Théorème 2. Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}_N \left\{ f((\alpha+1)x)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\} (s)$$

Démonstration. En utilisant le changement de variable $v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, on a :

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} f(x) x^\alpha dx = \int_0^\infty e^{-sv} f((\alpha+1)v)^{\frac{1}{\alpha+1}} dv = \mathcal{L} \left\{ f((\alpha+1)v)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\},$$

□

Théorème 3. [8] Soient $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, et $c, a, p \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Alors,

1. $N^\alpha(uf + vg) = uN^\alpha(h) + vN^\alpha(g)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$;
2. $N^\alpha(hg) = hN^\alpha(g) + gN_3^\alpha(h)$;
3. $N^\alpha\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{hN^\alpha(g) - gN_3^\alpha(h)}{g^2}$;
4. $N^\alpha(c) = 0$ pour tout fonction constante $h(t) = c$;
5. $N^\alpha(1) = 0$;
6. $N^\alpha\left(\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}\right) = 1$;
7. $N^\alpha\left(e^{c\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\right) = ce^{c\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$;
8. $N^\alpha\left(\sin\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = c\cos\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)$;
9. $N^\alpha\left(\cos\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = -c\sin\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)$;

Théorème 4. [8] Pour $\alpha \in]0, 1]$, les résultats suivants sont vérifiées,

1. $\mathcal{L}_N(1) = \frac{1}{s}$.
2. $\mathcal{L}_N(t^b) = \frac{(1+\alpha)^{\frac{b}{1+\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{b}{1+\alpha}\right)}{1+\frac{b}{1+\alpha}}$, tel que la fonction Gamma Γ est définie par $\Gamma(a, x) =$

$$\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt, \Gamma^s(a, 0) := \Gamma(a) \text{ et } b > -1;$$

3. $\mathcal{L}_N\left(e^{c\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{s-c}$, pour $s - c > 0$;
4. $\mathcal{L}_N\left(f(t)e^{c\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\right) = F(s - c)$, avec $\mathcal{L}_N(f(t)) = F(s)$, c
5. $\mathcal{L}_N\left(\sin\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = \frac{c}{s^2+c^2}$;
6. $\mathcal{L}_N\left(\cos\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = \frac{s}{s^2+c^2}$;
7. $\mathcal{L}_N\left(\sinh\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = \frac{c}{s^2-c^2}$;
8. $\mathcal{L}_N\left(\cosh\left(c\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right) = \frac{s}{s^2-c^2}$;

Théorème 5. Soient $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{L}_N\{(f * g)(x)\} = \mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s)$$

où $f * g$ est le produit de convolution de f et g .

Démonstration. Par définition on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N\{(f * g)(x)\} &= \mathcal{L}\left\{(f * g)((\alpha + 1)x)^{\frac{1}{(\alpha+1)}}\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{f((\alpha + 1)x)^{\frac{1}{(\alpha+1)}}\right\} \mathcal{L}\left\{g((\alpha + 1)x)^{\frac{1}{(\alpha+1)}}\right\} \\ &= \mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

□

Proposition 2.1.1. [8] Soient $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et λ est un nombre réel, alors :

1.

$$\mathcal{L}_N(f + g) = \mathcal{L}_N(f) + \mathcal{L}_N(g)$$

2.

$$\mathcal{L}_N(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}_N(f)$$

3.

$$\mathcal{L}_N(N^\alpha f) = s \mathcal{L}_N(f) - f(0)$$

4.

$$\mathcal{L}_N \left(\int_0^x \frac{g(x)}{x^{-\alpha}} dx \right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}_N g(t)$$

2.2 Transformation de Sumudu

Dans cette partie du chapitre, on donne un aperçu sur la transformé de Sumudu avec la dérivée fractionnaire non conformable pour pouvoir donner la solution d'un système fractionnaire non conformable.

Définition 2.2.1. Sur l'ensemble de fonctions suivant :

$$A_\alpha = \left\{ f(x) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(x)| < M e^{\frac{|x|^\alpha}{\alpha \tau_j}}, \text{ si } x^\alpha \in (-1)^j \times [0, \infty), j = 1, 2 \right\},$$

la transformée de Sumudu fractionnaire non conformable de f peut être généralisée par :

$$\mathcal{S}_\alpha[f(x)] = \mathcal{F}_\alpha(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{\frac{-x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)u}} f(x) d_\alpha x$$

où

$$d_\alpha x = x^{\alpha-1} dx, 0 < \alpha \leq 1$$

Théorème 6. Soit $f \in A_\alpha$, alors on a

$$\mathcal{S}_\alpha[f(x)] = \frac{\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \tag{2.3}$$

Démonstration. Par définition de la transformation de Sumudu, il vient,

$$\mathcal{S}_\alpha[f(x)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+1)}x} f(x) d_\alpha x$$

Posons $v = \frac{x^\alpha}{\alpha} \Rightarrow dv = x^\alpha dx$, par suite

$$\mathcal{S}_\alpha[f(x)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} f(\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}} dv = \frac{1}{u} \mathcal{L} \left\{ f(\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}_{x \rightarrow \frac{1}{u}} = \frac{\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$$

□

Théorème 7. Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée et $0 < \alpha \leq 1$. Alors

$$\mathcal{S}_\alpha[N^\alpha f(x)] = \frac{\mathcal{F}_\alpha(u)}{u} - \frac{f(0)}{u}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\alpha[N^\alpha f(x)] &= \frac{\mathcal{L}_\alpha \{N^\alpha f(x)\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} \\ &= \frac{[s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0)]_{x \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} \\ &= \frac{\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2} - \frac{f(0)}{u} \\ &= \frac{\mathcal{F}_\alpha(u)}{u} - \frac{f(0)}{u} \end{aligned}$$

□

Théorème 8. Soient $a, c \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Nous avons donc les relations suivantes,

$$\mathcal{S}_\alpha[c] = c \tag{2.4}$$

$$\mathcal{S}_\alpha \left[e^{a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}} \right] = \frac{1}{1 - au}, u > \frac{1}{a} \tag{2.5}$$

$$\mathcal{S}_\alpha \left[\sin \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right] = \frac{au}{1 + a^2 u^2}, u > \frac{1}{|a|} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{S}_\alpha \left[\cos \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right] = \frac{1}{1 + a^2 u^2}, u > \frac{1}{|a|} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{S}_\alpha \left[\sinh \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right] = \frac{au}{1 - a^2 u^2}, u > \frac{1}{|a|} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{S}_\alpha \left[\cosh \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right] = \frac{1}{1 - a^2 u^2}, u > \frac{1}{|a|} \tag{2.9}$$

$$\mathfrak{S}_\alpha \left[\frac{x^{n(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^n} \right] = \Gamma(n+1)u^n, u > 0 \quad (2.10)$$

Démonstration.

1. Pour la propriété de l'équation (2.4) on vérifie bien que,

$$\mathfrak{S}_\alpha[c] = \frac{\mathcal{L}_\alpha\{c\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} = \frac{\{c\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} = c$$

2. Pour (2.5),

$$\mathfrak{S}_\alpha \left[e^{a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}} \right] = \frac{\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}} \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} = \frac{\mathcal{L} \{ e^{ax} \}_{s \rightarrow \frac{1}{(\alpha+1)}}}{u} = \frac{\left\{ \frac{1}{s-a} \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{4}}}{u} = \frac{1}{1-au}.$$

3. Pour la propriété de l'équation (2.6) on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\alpha \left[\sin \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right] &= \frac{\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left(a \frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)} \right) \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{4}}}{u} = \frac{\mathcal{L} \{ \sin(ax) \}_{s \rightarrow \frac{1}{a}}}{u} = \frac{\left\{ \frac{a}{s^2+a^2} \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} \\ &= \frac{au}{1+a^2u^2}. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons prouver (2.7) et ensuite facilement prouver (2.8) et (2.9).

4. Finalement, pour la dernière propriété,

$$\mathfrak{S}_\alpha \left[\frac{x^{n(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^n} \right] = \frac{\mathcal{L}_\alpha \left\{ \frac{x^{n(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^n} \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} = \frac{\Gamma(n+1)u^{n+1}}{u} = \Gamma(n+1)u^n.$$

□

Théorème 9. Pour f et $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions données, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. les propriétés suivantes sont satisfaites, :

1) Propriété de linéarité :

$$\mathfrak{S}_\alpha \{ \lambda f(x) + \mu g(x) \} = \lambda \mathcal{F}_\alpha(u) + \mu \mathcal{G}_\alpha(u), \quad (2.11)$$

2) Propriété de convolution :

$$\mathfrak{S}_\alpha [(f * g)(x)] = u \mathcal{F}_\alpha(u) \mathcal{G}_\alpha(u). \quad (2.12)$$

Démonstration.

1. Pour la propriété de la linéarité, il suffit juste d'appliquer la définition de la transformé de Sumudu (2.2.1).
2. En appliquant le Théorème (6), nous avons :

$$\begin{aligned}
 S_\alpha[(f * g)(x)] &= \frac{\mathcal{L}_\alpha\{f * g\}_{s \rightarrow \frac{1}{2}}}{u} \\
 &= \frac{[\mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s)]_{s \rightarrow \frac{1}{u}}}{u} \\
 &= \frac{\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)\mathcal{G}_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \\
 &= u\mathcal{F}_\alpha(u)\mathcal{G}_\alpha(u).
 \end{aligned}$$

□

2.3 Solvabilité des systèmes unidimensionnels fractionnaires

On considère le système à dérivée fractionnaire non conforme décrit par l'équation,

$$N^\alpha = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.13)$$

L'application de la transformée de Sumudu non conforme à notre système (2.13), donne

$$S_\alpha(Nx(t)) = S_\alpha(Ax(t) + Bu(t)) \quad (2.14)$$

$$\frac{X_\alpha - x(0)}{u} = AX_\alpha(s) + Bu(s) \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{1}{u}I - A\right)X_\alpha(s) = \frac{x_0}{u} + Bu(s) \quad (2.16)$$

$$X_\alpha(s) = \left(\frac{1}{u}I - A\right)^{-1}(x_0 + Bu(s)) \quad (2.17)$$

et sachant que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{u}I - A\right)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i \left(\frac{1}{u}\right)^{-i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i u^{i+1}
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

1/ En utilisant la transforme inverse (non conforme)

$$\begin{aligned} S_\alpha^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i u^{i+1} x_0 \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i S_\alpha^{-1}(u^{i+1}) x_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{(t^{\alpha+1})}{\Gamma(\alpha+1)} x_0 \\ &= e^{\frac{At^{\alpha+1}}{\alpha+1}} x_0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

2/ puis la transformation de Sumudu (non conforme)

$$S_\alpha^{-1} \left(B \sum_{i=0}^{\infty} A^i u^{i+1} u(s) \right) = B \sum_{i=0}^{\infty} A^i S_\alpha^{-1}(u^{i+1} u(s)) \quad (2.20)$$

et par application du théorème de convolution, il s'ensuit,

$$\begin{aligned} S_{i=0}^{-1} \left(B \sum_{i=0}^{\infty} A^i u^{i+1} u(s) \right) &= B \sum_{i=0}^{\infty} A^i (S_\alpha^{-1}(u^{i+1}) S_\alpha^{-1} * (u(s))) \\ &= B \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(i+1)} * u(s) \\ &= B \sum_{i=0}^{\infty} A^i \int_0^t \frac{(t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^i}{\Gamma(i+1)} B u(\tau) d^\alpha \tau \end{aligned} \quad (2.21)$$

d'après (2.19) et (2.21) on obtient

$$x(t) = e^{A \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} x(0) + \int_0^t e^{A \frac{t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}} B u(\tau) d^\alpha \tau \quad (2.22)$$

Théorème 10. *La solution du système (2.13) est donnée par*

$$x(t) = e^{A \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} x(0) + \int_0^t e^{A \frac{t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}} B u(\tau) d^\alpha \tau \quad (2.23)$$

2.4 Positivité des systèmes unidimensionnels fractionnaires

Les systèmes positifs sont des systèmes dans les quelles les variables (entrantes+sortantes) prennent des valeurs positives et dans la réalité, beaucoup d'exemples sont décrit par plu-

sieurs auteurs dans divers domaines, tout on vite à titre d'exemples : les problèmes de dynamique de populations, circuits RLC, ausii en médecine, les problèmes d'énergie minimale, dans l'analyse de signaux, le traitement d'image, pour plus de détails on se réfère à [3, 15].

L'étude des systèmes linaires positifs est un peut compliquée car elle nous pose plus de conditions (la positivité) sur la variable d'état pour la solution.

On considère le système suivant à dérivée fractionnaire non conformable

$$N^\alpha = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.24)$$

Nous annonçons dans ce qui suit une définition d'un système positif ensuite un théorème qui caractérise les conditions de positivités d'un système fractionnaire à dérivée fractionnaire non conformable, comme généralisation de résultats existants.

Définition 2.4.1. *Le système est internement positif si et seulement si $x(t) \in R_+^{n,n}$ pour tout $x_0 \in R_+^{n,n}$ et tout $u(t) \in R_+^{n,n} t \geq t_0$.*

Théorème 11. *Le système linéaire fractionnaire (2.32) est positif si et seulement si*

$$A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n*m} \quad (2.25)$$

Démonstration. Nous allons démontrer les deux conditions nécessaires et suffisantes de ce théorème.

La condition suffisante : on montre d'abord que

$$e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}_+^{n*n} \quad \text{telle que } t > 0 \quad 0 < \alpha < 1$$

si et seulement si

$$A \in \mathbb{M}_n$$

On a

$$e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} = I_n + \frac{At^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \dots$$

il s'ensuit que

$$e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}_+^{n*n} \quad t > 0 \quad \text{si } A \in \mathbb{M}_n$$

Si

$$\frac{A}{\alpha+1} \in \mathbb{M}_n$$

alors il existe un vecteur $\lambda > 0$

telle que

$$\frac{A}{\alpha + 1} + I_n \lambda \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

et

$$e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} = e^{(\frac{A}{\alpha+1} + I_n \lambda)t^{\alpha+1}} e^{-\lambda I_n t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, t \geq 0$$

Puisque

$$e^{(\frac{A}{\alpha+1} + I_n \lambda)t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

et

$$e^{-\lambda I_n t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Si $A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$ alors

$$e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad e^{\frac{A}{\alpha+1}t^{\alpha+1}} B u(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{pour } t \geq 0$$

et en utilisant la solution du système (2.24) donné dans le théorème 10, on obtient $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \geq 0$.

Pour montrer la nécessité, nous supposons que $u(t) = 0 \quad t > 0$ et $x_0 = e_i$ (i colonnes de la matrice I_n), la trajectoire $x(t)$ ne quitte pas l'orthant \mathbb{R}_+^n , si

$$N^\alpha x(t) = A e_i \in \mathbb{R}_+^n$$

ce qui implique $a_{ij} \geq 0 \quad i \neq j$ par conséquent, nous avons $A \in \mathbb{M}_n$.

de même pour $x_0 = 0$, on obtient

$$N^\alpha x(t) = B u(0) \in \mathbb{R}_+^n$$

ce qui implique $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire $u(0) = 0 \quad t > 0$

□

2.5 Stabilité des des systèmes unidimensionnels fractionnaires

Considérons le système linéaire fractionnaire positif en temps continu sans contrôle décrit par,

$$N_\alpha x(t) = Ax(t), \quad \text{avec } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.26)$$

Définition 2.5.1. *Le système fractionnaire positif (2.26) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n$$

Théorème 12. *Le système fractionnaire positif (2.26) est asymptotiquement stable si et seulement si*

1. *Il existe un vecteur strictement positif $\lambda^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$ tel que*

$$A\lambda < 0 \quad (2.27)$$

2. *Les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A*

$$\begin{aligned} \det [I_n s - A] \\ = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

sont positifs, i.e., $a_k > 0$ for $k = 0, 1, \dots, n-1$

3. *Les principaux mineurs de la matrice*

$$\bar{A} = -A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

sont positifs, i.e.,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} > 0, \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix} > 0 \\ \dots, \det[-A] > 0 \end{aligned}$$

Démonstration. 1. Soit ${}_N I_\alpha(0, t)$ l'opérateur intégral fractionnaire de l'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, satisfaisant

$${}_N I_\alpha(0, t) N_\alpha x(t) = x(t) - x(0)$$

Par application du cet opérateur, il s'ensuit pour $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ et $x(0) > 0$

$$-x(0) = AI_\alpha(0, \infty) = A\lambda < 0$$

puisque l'intégrale fractionnaire de $x(t)$ appartient à \mathbb{R}_+^n et $I_\alpha(0, \infty) > 0$.

Notez que le système dual associée à notre système (2.26) est

$$N^\alpha x(t) = A^T x(t)$$

est asymptotiquement stable si et seulement si le système (2.26) est asymptotiquement stable.

Comme un choix de la fonction de Lyapounov du système dual, nous choisissons

$$V(x) = x^T(t)\lambda > 0 \quad \text{pour } x(t) > 0$$

et, en utilisant $N^\alpha x(t) = A^T x(t)$, on obtient alors,

$$N_\alpha V(x) = N_\alpha x^T(t)\lambda = x^T(t)A\lambda < 0$$

si la condition est satisfaite.

Par conséquent, le système fractionnaire est asymptotiquement stable si et seulement si la condition est satisfaite.

2. Pour la deuxième et la troisième condition du théorème on s'est basé sur le travail de Kaczorek (voir référence [3]).

□

2.6 Exemples et simulations

Dans cette section, on donne des exemple dans le domaine des circuit *RLC* qui illustrent nos résultats obtenus dans la première et la deuxième section de ce chapitre.

Exemple 2.6.1. *On considère un exemple étudié par Kaczorek dans [3] d'un circuit électrique illustré dans la figure suivante avec résistances données $R1, R2, R3$, capacités $C1, C2$ et tension de source e .*

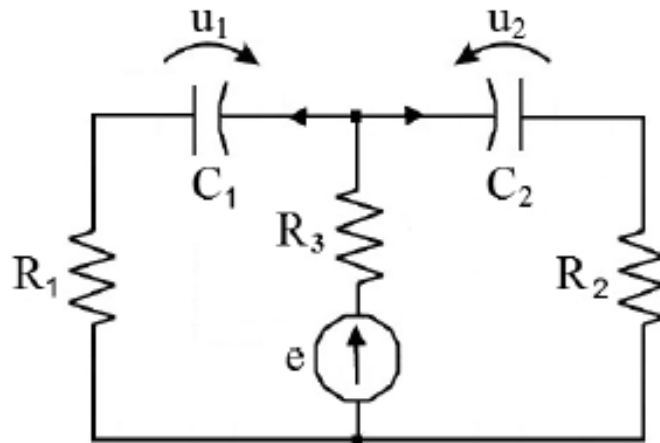


FIGURE 2.1 – Exemple d'un circuit électrique

En utilisant les lois de Kirchoff, nous pouvons écrire les équations

$$\begin{aligned}
 e &= R_1 C_1 \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} + u_1 + R_3 \left(C_1 \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} + C_2 \frac{d^\alpha u_2}{dt^\alpha} \right) \\
 e &= R_3 \left(C_1 \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} + C_2 \frac{d^\alpha u_2}{dt^\alpha} \right) + u_2 + R_2 C_2 \frac{d^\alpha u_2}{dt^\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

qui peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} (R_1 + R_3) C_1 & R_3 C_2 \\ R_3 C_1 & (R_2 + R_3) C_2 \end{bmatrix} \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Prémultiplions (2.29) par la matrice inverse

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} (R_1 + R_3) C_1 & R_3 C_2 \\ R_3 C_1 & (R_2 + R_3) C_2 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (R_2 + R_3) C_2 & -R_3 C_2 \\ -R_3 C_1 & (R_1 + R_3) C_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

telle que

$$\Delta = [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3] C_1 C_2$$

On obtient

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + B e \tag{2.30}$$

Avec

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -(R_2 + R_3) C_2 & R_3 C_2 \\ R_3 C_1 & -(R_1 + R_3) C_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_2 C_2 \\ R_1 C_1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

et $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u(t) = N^\alpha u(t)$ est la dérivée fractionnaire non-conformable de $u(t)$

De l'équation (2.31), on déduit directement que la matrice A est de Metzler et B est positive, donc d'après le théorème est le système obtenue (2.30) est positif.

Pour une analyse plus approfondie, nous supposons $\alpha = 0.8, R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 20\Omega, C_1 = C_2 = 100\text{mF}$ et la constante $e = 1 \text{ V}$. On suppose que les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) \end{bmatrix}^T = 0$.

On constate que la solution est sous la forme :

$$u_1(t) = u_2(t) = 1 - e^{-\frac{t^{0.8}}{9}}$$

et le graphe de cette fonction est,

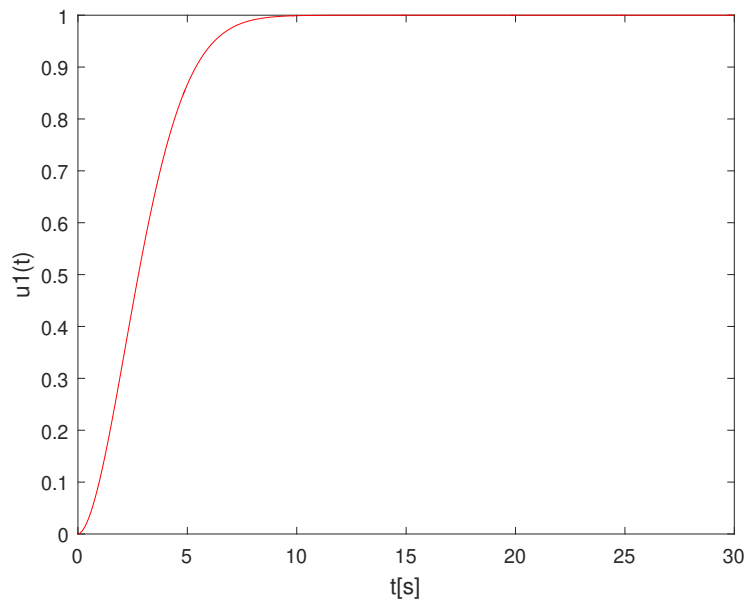


FIGURE 2.2 – Le graphe de $u_1(t)$

Exemple 2.6.2. Dans cet exemple traité par Ewa Piotrowska et Krzysztof Rogowski en [4], nous considérerons le circuit électrique d'ordre fractionnaire indiqué par la figure (2.3) avec les conductances G_0, G_1, G_2 , les capacités C_1, C_2 et la tension de source e .

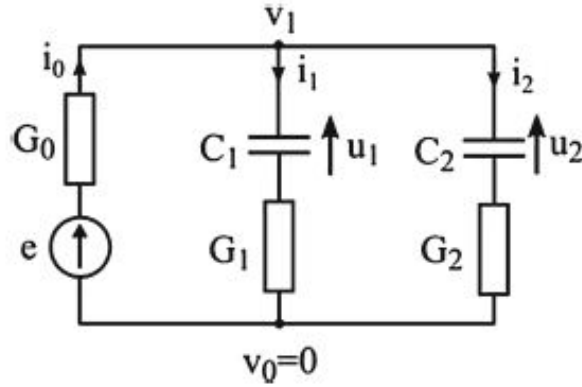


FIGURE 2.3 – Circuit électrique fractionnaire

En utilisant les lois de Kirchoff, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 i_0 &= i_1 + i_2 \\
 v_1 &= v_0 + e - \frac{i_0}{G_0} \\
 v_1 &= v_0 + \frac{i_1}{G_1} + u_1 \\
 v_1 &= v_0 + \frac{i_2}{G_2} + u_2
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Les courants dans ce circuit sont décrits par les équations d'ordre fractionnaire

$$\begin{aligned}
 i_1 &= C_1 N^\alpha u_1 \\
 i_2 &= C_2 N^\alpha u_2
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

telle que N^α est défini par la dérivée fractionnaire non-conformable.

Ensuite, en supposant que $v_0 = 0$ dans (2.32), nous pouvons calculer les courants dans le circuit

$$\begin{aligned}
 i_0 &= (e - v_1) G_0 \\
 i_1 &= (v_1 - u_1) G_1 \\
 i_2 &= (v_1 - u_2) G_2
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$(e - v_1) G_0 = (v_1 - u_1) G_1 + (v_1 - u_2) G_2$$

et

$$v_1 = \frac{1}{G_0 + G_1 + G_2} (G_0 e + G_1 u_1 + G_2 u_2)$$

En utilisant (2.32) et (2.33) on aura,

$$\begin{aligned} C_1 N^\alpha u_1 &= G_1 (v_1 - u_1) \\ C_2 N^\alpha u_2 &= G_2 (v_1 - u_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

En supposant que les composantes du vecteur d'état sont les tensions aux bornes des condensateurs $x(t) = [u_1 \quad u_2]^T$, et en utilisant (2.35) nous pouvons formuler,

$$A = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} -\frac{G_1(G_0+G_2)}{C_1} & \frac{G_1 G_2}{C_1} \\ \frac{G_1 G_2}{C_2} & -\frac{G_2(G_0+G_1)}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

et

$$B = \frac{G_0}{G} \begin{bmatrix} \frac{G_1}{C_1} \\ \frac{G_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

avec

$$G = G_0 + G_1 + G_2$$

Les conditions initiales (la tension initiale aux bornes des condensateurs) pour le système sont définis sous la forme

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les paramètres de simulations sont conductances $G_0 = 1.1\Omega^{-1}$; $G_1 = 2.1\Omega^{-1}$; $G_2 = 1.5\Omega^{-1}$; capacités $C_1 = 1.0$ F; $C_2 = 2.0$ F; les tensions initiales $u_{01} = 1.3$ V; $u_{02} = 0.0$ V et la tension de source est constante $e(t) = 1$ V.

La solution du système obtenu avec $\alpha = 0.7$ est illustrée par les figures (2.4) et (2.5) suivantes,

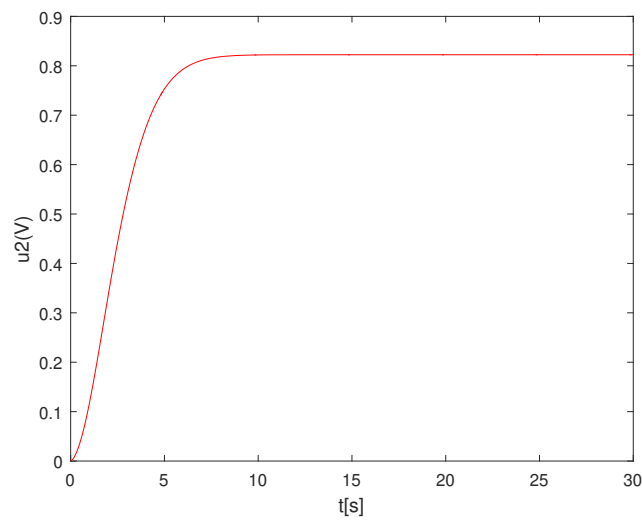


FIGURE 2.4 – La solution du premier condensateur

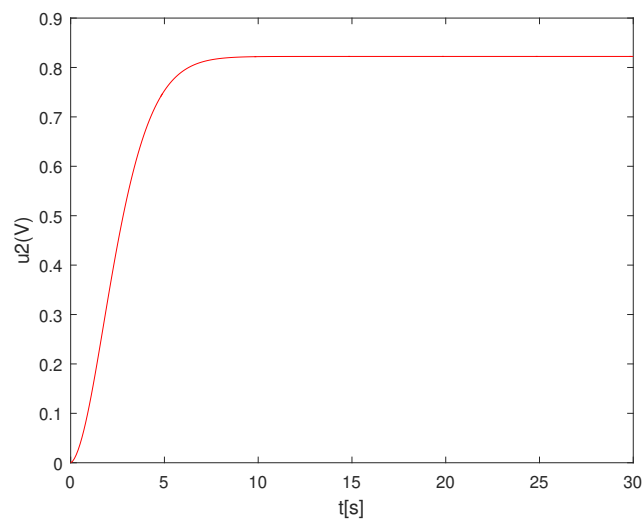


FIGURE 2.5 – La solution du deuxième condensateur

Remarque 2.6.1. *Le système considéré dans cet exemple est positif car A est une matrice de Metzler et B est positif de plus les figures (2.4) et (2.5) illustre ces résultats, ce qui assure leur validation pour les cas des systèmes à dérivées non-conformable .*

Chapitre 3

Les systèmes bidimensionnels fractionnaires

Dans cette partie, notre intérêt porte sur la classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires pour établir la solution de cette classe de systèmes en développant la transformée de Sumudu $2D$ en se basant sur le travail et les propriétés du chapitre précédent. Dans ce cadre, nous envisageons l'extension de l'approche au cas de modèles fractionnaires unidimensionnels pour ensuite traiter le cas de modèles bidimensionnels.

3.1 Solvabilité des systèmes bidimensionnels fractionnaires

On considère le système fractionnaire bidimensionnel de Roesser décrit par l'équation suivante,

$$\begin{bmatrix} N_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) \\ N_{t_2}^\beta x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w(t_1, t_2) \quad (3.1)$$

où $N_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2)$, $N_{t_2}^\beta x^v(t_1, t_2) = \frac{\partial^\beta}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2)$, et $A_{11}, A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ et $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ avec $n_1 + n_2 = n$

Par application de la transformée de Sumudu

$$\begin{aligned} S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \begin{bmatrix} N_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) \\ N_{t_2}^\beta x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \right) \\ &+ S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w(t_1, t_2) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

On peut voir que

$$\begin{bmatrix} S^\beta \left(S^\alpha N_{t_1}^\alpha x^h \right) \\ S^\beta \left(S^\beta N_{t_2}^\beta X^v \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\alpha,\beta}^h(u, v) \\ X_{\alpha,\beta}^v(u, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} W(u, v) \quad (3.3)$$

Donc

$$\begin{bmatrix} S^\beta \left(\frac{X^h(u, t_2) - X^h(0, t_2)}{u} \right) \\ S^\beta \left(\frac{X^v(t_1, v) - X^v(t_1, 0)}{v} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\alpha,\beta}^h(u, v) \\ X_{\alpha,\beta}^v(u, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} W_{\alpha,\beta}(u, v) \quad (3.4)$$

Ce qui implique que

$$\begin{bmatrix} \frac{X_{\alpha,\beta}^h(u, v) - X_{\alpha,\beta}^h(0, v)}{u} \\ \frac{X_{\alpha,\beta}^h(u, v) - X_{\alpha,\beta}^v(u, 0)}{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(u, v) \\ x^v(u, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} W_{\alpha,\beta}(u, v) \quad (3.5)$$

Par suite, si on multiplie la matrice définie par le bloc suivant

$$\begin{bmatrix} uI_{n_1} & 0 \\ 0 & vI_{n_2} \end{bmatrix}$$

On aura

$$\begin{bmatrix} X_{\alpha,\beta}^h(u, v) \\ X_{\alpha,\beta}^v(u, v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} uA_{11} & uA_{12} \\ vA_{21} & vA_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(u, v) \\ X^v(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\alpha,\beta}^h(0, v) \\ X_{\alpha,\beta}^v(u, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uB_1 \\ vB_2 \end{bmatrix} W(u, v) \quad (3.6)$$

et si nous définissons la matrice G par la formule,

$$G(u, v) = \begin{bmatrix} I_{n_2} - uA_{11} & -uA_{12} \\ -vA_{21} & I_{n_2} - vA_{22} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

L'inverse de la matrice G sera alors donné par,

$$G^{-1}(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i,j} u^i v^j \quad (3.8)$$

où $T_{i,j}$ est une matrice de transition donnée par

$$T_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{I}_n & \text{for } i = j = 0 \\ T_{1,0}T^{i-1,j} + T_{0,1}T_{i,j-1} & \text{for } i + j > 0 \text{ (} i, j \in \mathbb{Z}_+ \text{)} \\ 0_n & \text{for } i < 0 \text{ and / or } j < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Par utilisation des équations (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X^h(u, v) \\ X^v(u, v) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i-1, j} u^i v^j \begin{bmatrix} X_{\beta}^h(0, v) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i, j-1} u^i v^j \begin{bmatrix} 0 \\ X_{\alpha}^v(u, 0) \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i-1, j} u^i v^j \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} W(u, v) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i, j-1} u^i v^j \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} W(u, v)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

par suite, l'utilisation de la transformée inverse de Sumudu on déduit le théorème suivant.

Théorème 13. *La solution du système (3.1) pour n'importe qu'elle condition initiale et tout contrôle, est donnée par ,*

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\frac{A_{11}t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{A_{22}t_2^{\beta+1}}{\beta+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(0, t_2) \\ x^v(t_1, 0) \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{i, j+1} \frac{t_1^{(\alpha+1)i}}{(\alpha+1)^i i!} \int_0^{t_2} \frac{(t_2^{\beta+1} - \tau_2^{\beta+1})^j}{(\beta+1)^j j!} \begin{bmatrix} x^h(0, \tau_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tau_2^{\beta} d\tau_2 \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{i+1, j} \frac{t_2^{(\beta+1)j}}{(\beta+1)^j j!} \int_0^{t_1} \frac{(t_1^{\alpha+1} - \tau_1^{\alpha+1})^i}{(\alpha+1)^i i!} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(t_1, 0) \end{bmatrix} \tau_1^{\alpha} d\tau_1 \\
 &+ \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} e^{A_{11} \frac{t_1^{\alpha+1} - \tau_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_1^{\alpha} w(\tau_1, t_2) d\tau_1 \\
 &+ \int_0^{t_2} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{A_{22} \frac{t_2^{\beta+1} - \tau_2^{\beta+1}}{\beta+1}} B_2 \end{bmatrix} \tau_2^{\beta} u(t_1, \tau_2) d\tau_2 \\
 &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi_{i, j+1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi_{i+1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \times \\
 &\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_1^{\alpha+1} - \tau_1^{\alpha+1})^i}{(\alpha+1)^i i!} \frac{(t_2^{\beta+1} - \tau_2^{\beta+1})^j}{(\beta+1)^j j!} \tau_1^{\alpha} \tau_2^{\beta} u(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dans ce qui suit, on donne deux exemples qui illustrent nos résultats obtenus dans cette dernière partie.

Exemple 3.1.1. On considère le système fractionnaire 2D de Roesser décrit par l'équation (3.1) avec $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.8$ et :

$$A = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.07 \\ 0.01 & -0.07 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur d'entrée qui représente le contrôle du système

$$u(t_1, t_2) = H(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } t_1 < 0 \text{ and/or } t_2 < 0 \\ 1 & \text{for } t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

les conditions initiales sont

$$x^h(0, t_2) = 0 \text{ pour } t_2 \geq 0$$

$$x^v(t_1, 0) = 0 \text{ pour } t_1 \geq 0$$

En utilisant la solution du système (3.1) donnée par l'équation (3.11) dans le théorème 13 nous aurons suite à des codes MATLAB, les figures suivantes,

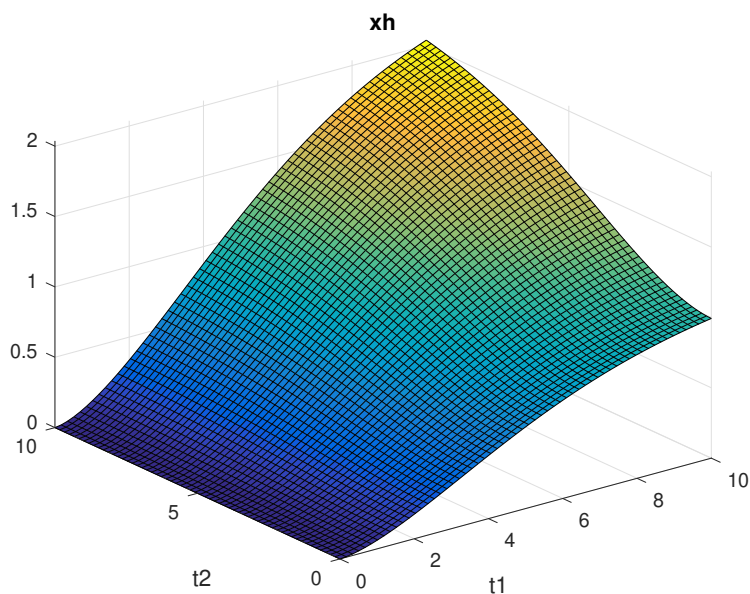


FIGURE 3.1 – la variable $x^h(t_1, t_2)$

et

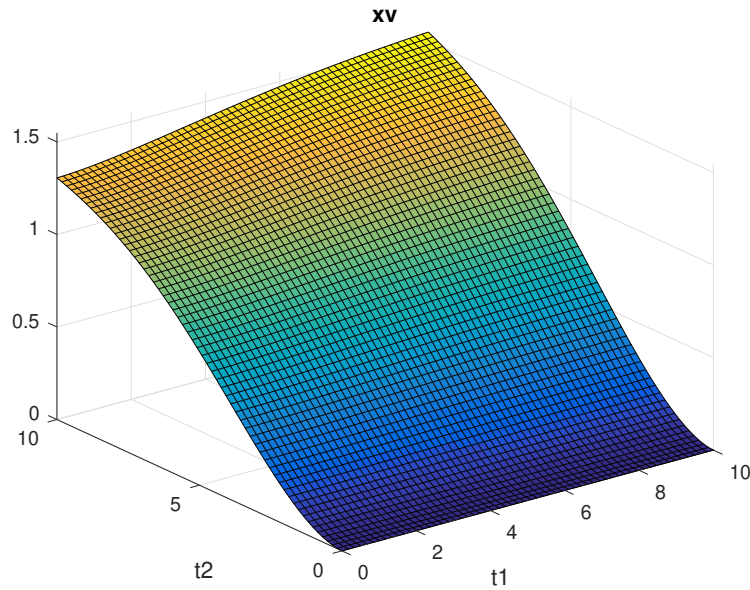


FIGURE 3.2 – la variable $x^v(t_1, t_2)$

Exemple 3.1.2. On considère le système fractionnaire 2D de Roesser décrit par l'équation (3.1) avec $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$ et :

$$A = \begin{pmatrix} -0.04 & -0.12 \\ -0.03 & 0.02 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur d'entrée qui représente le contrôle du système

$$u(t_1, t_2) = H(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } t_1 < 0 \\ 1 & \text{for } t_1, t_2 \geq 0 \end{cases} \text{ and/or } t_2 < 0$$

les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} x^h(0, t_2) &= 0 \text{ pour } t_2 \geq 0 \\ x^v(t_1, 0) &= 0 \text{ pour } t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

la solution du système (3.1) donnée par l'équation (3.11) dans le théorème 13 et sous des codes MATLAB, on représente les solutions (voir figures ci-dessous),

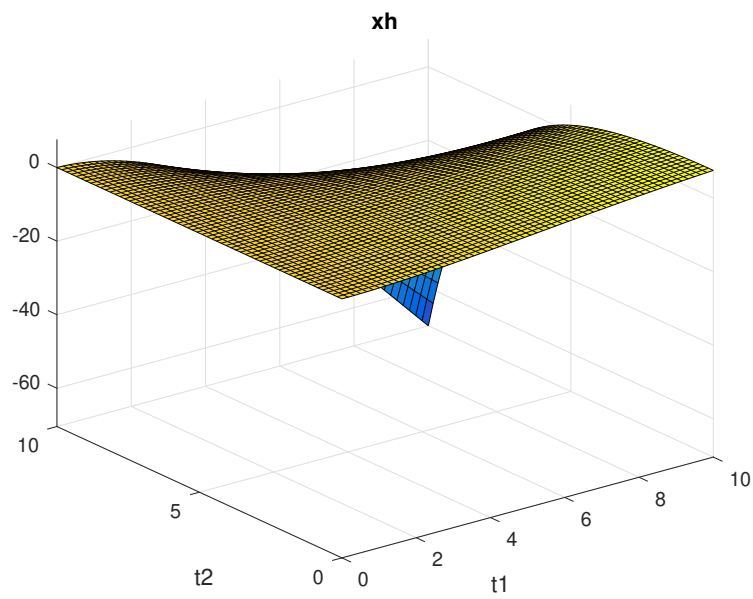


FIGURE 3.3 – la variable $x^h(t_1, t_2)$

et

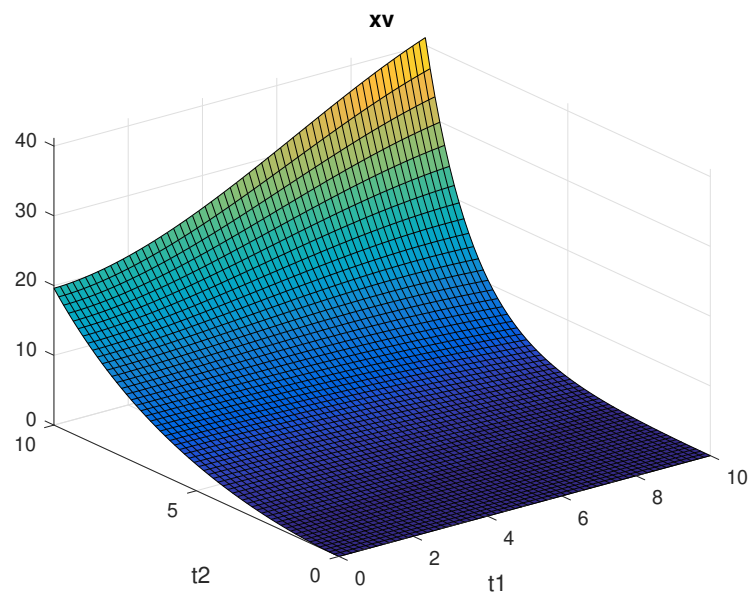


FIGURE 3.4 – la variable $x^v(t_1, t_2)$

Conclusion

Dans la première partie de notre travail, quelques notions sur la dérivée fractionnaire non conforme et la transformé de Laplace sont introduits, ensuite, des nouveaux résultats sur la transformé de Sumudu pour résoudre le problème de solvabilité, positivité et de stabilité des systèmes fractionnaires non conforme à temps continu sont explorés. Les conditions que nous avons développé sont des extensions des résultats basé sur [17, 5, 3, 8, 21, 20, 43].

Pour la seconde partie de ce mémoire, nous avons développé les résultats obtenu pour donner la solution générale d'un système fractionnaire bidimensionnel décrit par le modèle de Roesser.

En perspectives, les résultats peuvent être généralisés aux cas des systèmes singulières unidimensionnels et bidimensionnels de type Roesser fractionnaires. D'autres études pour le cas bidimensionnel feront l'objet de nos investigations futures pour le problème de positivité et stabilité. Aussi les résultats obtenue dans la première partie et la deuxième peut être étendu pour le cas des système de Lyapounov.

Bibliographie

- [1] D. Bouagada, P. Van Dooren, State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems, *Fractional calculus and applied analysis*, **15(3)** (2012), 356-361.
- [2] M. A. Ghezzar, Analyse et Synthèse de Certaines Classes de Systèmes Bidimensionnels Fractionnaires et/ou Singuliers Continuous Time Systems, *Thèse de doctorat en science, Université de Mostaganem*, **2017**.
- [3] Tadeusz Kaczorek, Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2018, Vol. 28, No. 2, 335–340.
- [4] Ewa Piotrowska , Krzysztof Rogowski, Analysis of Fractional Electrical Circuit Using Caputo and Conformable Derivative Definitions, *Non-Integer Order Calculus and its Applications*, (2019), DOI : 10.1007/978-3-319-78458-8_16.
- [5] ABDELJAWED, T. (2015) On conformable fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* **279**, 57-66.
- [6] DJORDJEVIC, V.D. & JARIC, FABRY, J. B. & FREDBERG, J.J. AND STAMENONI, D. (2003) Fractional derivatives embody essential features of cell rheological behavior, *Ann. Biomed. Eng.*, **31**, 692–699.
- [7] FILIPPO ,N. LORENZO , F. ROBERTO ,S. & ALFREDO, G. (2017) Positive Systems, Theory and Applications (POSTA 2016) Rome Italy , 1st edition. *Springer International Publishing Switzerland*.
- [8] FRANCISCO ,M., PSHTIWAN ,O.M, & JUAN, E. NÁPOLES, V. (2022) non-conformable fractional laplace transform, *Kragujevac Journal of Mathematics.*, **46(3)** , 341-354.
- [9] FORNASINI, E. & VALCHER, M.E. (1997) developments in 2D positive systems theory, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **7(4)**, 101–123.
- [10] GALKOWSKI, K. (2001) State-Space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD case, 1st Edition, *Springer-Verlag London*.

- [11] GUZMAN, P. M. & LANGTON, G. & LUGO, L. M. J. MEDINA AND J. E. NÁPOLES VALDÉS (2018) A new definition of a fractional derivative of local type, *J. Math. Anal.*, **9(2)**, 88-98.
- [12] HASHEMI, M.S. (2018) Some new exact solutions of (2+1)-dimensional nonlinear Heisenberg ferromagnetic spin chain with the conformable time fractional derivative, *Opt. Quant. Electron.* **107**, 50-79 .
- [13] HETAL, C (2018) The fractional Laplace transform solution for fractional differential equation of the oscillator in the presence of an external forces, *International Journal of Advanced Science and Technology.*, **5(2)**, 6-11.
- [14] KACZOREK, T. (2011) Selected Problems of Fractional Systems Theory, *1 st edition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [15] KACZOREK, T. (2002) Positive 1 D and 2D Systems, *1s Edition*, Springer-Verlag London .
- [16] KACZOREK, T (1985), Two-Dimensional Linear Systems, *Berlin, Germany :* Springer-Verlag.
- [17] KHALIL, R. & AL HORANI, M. & YOUSEF, A. AND SABABHEH, M. (2014) A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70.
- [18] KUREK, J.E. (1985) The general state-space model for a two-dimensional linear digital system, *IEEE Trans. Autom. Control* **30(2)**, 600-602.
- [19] MONJE, C.A. & CHEN, Y. & VINAGRE B.M. XUE, D. AND V. FELIU-BATLLE (2010) Fractional-order systems and controls., *Fundamentals and applications*, Springer, London.
- [20] NÁPOLES, J. E. & GUZMAN, P. M. AND LUGO, L. M. (2018) Some new results on non conformable fractional calculus, *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, **13(2)**, 167-175.
- [21] NÁPOLES, J. E. & GUZMAN, P. M. AND LUGO, L. M. (to appear) On the stability of solutions of fractional non conformable differential equations, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*
- [22] PARRA, G.G. ARENAS, A.J., & B.M. CHEN, C (2014) A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1)., *Math. Method. Appl. Sci.*, **37**, 2218-2226.
- [23] ROGOWSKI, K. (2017) Solution to the Fractional-Order 2D Continuous Systems Described by the Second Fornasini-Marchesini Model., *IFAC Papers OnLine*, **50(1)**, 9748-9752 .

- [24] ROGOWSKI .K (2011) General Response Formula for Fractional 2D Continuous-Time Linear Systems Described by the Roesser Model., *Acta mechanica et automatica*, **5(2)**, 112–116.
- [25] D.Xu, X.Yang, Controllability of Fractional Descriptor Linear System, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, Volume 11, Number 4 (2016), pp. 373–382.
- [26] D.Bouagada, Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, (2007).
- [27] F. R. Gantmacher, *The Theory OF Matrices Volume 1*, 1959, 1960, 1977 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.
- [28] F. R. Gantmacher, *The Theory OF Matrices Volume 2*, 1959, 1987, 1989 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.
- [29] L.Farina, S.Rinaldi, *Positive Linear Systems Theory and Applications*, 2000 by John Wiley & Sons.
- [30] L.Dai, *Singular Control Systems (Lecture notes in control and information sciences ; 118)* Springer-Verlag Bedin, Heidelberg 1989.
- [31] M.Saliha- D.Bouagada, New approach to compute solution of singular continuous-time fractional linear systems, Conference proceeding, http://www.algtop.net/2013_Poster_Marir.
- [32] T.Kaczorek, Przemyslaw Przyborowski, *Positive Continuous-Time Linear Lyapunov Systems*, The International Conference on “Computer as a Tool” Warsaw, September 9-12.
- [33] T.Kaczorek, *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, 2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [34] T.Kaczorek, *Positive 1 D and 2D Systems (Communications and control engineering)* 2002 Springer-Verlag London.
- [35] T.Kaczorek, Kamil Borawski, *Fractional Fescriptor Continuous–time Linear Systems Described by the Caputo–Fabrizio Derivative*, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2016, Vol. 26, No. 3, 533–541.
- [36] T.Kaczorek, *Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2011, Vol. 21, No. 2, 379–384.
- [37] Y.Feng, M.Yagoubi, *Robust Control of Linear Descriptor Systems*, *Studies in Systems, Decision and Control* 102 Springer Singapore (2017).
- [38] Kaczorek,T. : *Vectors and Matrices in Automation and Electronics*. WNT, Warsaw (1998). (in Polish)

- [39] F. S. Silva, D. M. Moreira and M. A. Moret, Conformable Laplace transform of fractional differential equations, *Axioms* 7(3) (2018), 55.
- [40] S. Jain and P. Agarwal, On new applications of fractional calculus, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3) 37(3) (2019), 113–118.
- [41] N. A. Khan, O. A. Razzaq and M. Ayaz, Some properties and applications of conformable fractional Laplace transform (CFLT), *J. Fract. Calc. Appl.* 9(1) (2018), 72–81.
- [42] Z. AL-Zhour et al, *new results on the conformable fractional sumudu transform : theories and applications*, *International Journal of Analysis and Applications*, **17(6)** 2019, 1019–1033.
- [43] Adem Kilicman, Hassan eltayeb Gadain, An application of double Laplace transform and double Sumudu transform, *Lobachevskii Journal of Mathematics* 30(3), 214-223, (2009).