Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et l'Informatique

Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

BESSGHIR Feriel

THÈME :

L'équation de la chaleur

Évalué par le jury composé de :

BOUZIT Hamid	MCA	Université de Mostaganem	Président
Tabharit Louiza	MCB	Université de Mostaganem	Examinateur
BENSIKADDOUR Djemaia	MCB	Université de Mostaganem	Encadrant

Année Universitaire 2020-2021

Table des matières

Remerciements

Je remercie mon encadrant Dr Dj. BENSIKADDOUR, maître de conférence à l'université de Mostaganem, pour m'avoir suivi avec patience et intérêt et pour la confiance qu'elle a placé en moi tout au long de ce travail. Ses conseils précieux et ses encouragements m'ont été d'une aide très précieuse dans la réalisation de ce projet.

Je tiens à exprimer ma respectueuse gratitude à Dr H. BOUZIT, maître de conférence à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire.

Je remercie également Dr L. TABHARIT, maître de conférence à l'université de Mostaganem, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, j'exprime ma très grande reconnaissance à ma famille, mon père, ma mère, mes sœurs et mes frères pour m'avoir encouragée et pour tous les soucis que je leur ai causés et surtout pour avoir été toujours à mes côtés.

Notations

- ✓ Δ Laplacien :$\Delta u =$
- ✓ T température [°K]
- ✓ t temps a dimensionnel
- ✓ α coefficient de diffusivité thermique [$m^2.s^{-1}$]
- ✓ ρ masse volumique[$kg.m^{-3}$]
- ✓ $\frac{\partial}{\partial t}$ Dérivée partielle
- ✓ Γ coefficient de diffusion
- ✓ c_p coefficient calorifique
- ✓ λ coefficient de conduction
- ✓ S section / surface
- ✓ L longeur
- ✓ ξ, η direction
- ✓ Φ flux de chaleur
- ✓ ϕ quantité dans fluid [w]
- ✓ s la surface d'échange de chaleur [m^2]
- ✓ ΔT Différence de température
- ✓ e épaisseur
- ✓ $Biot$ nombre de biot

Résumé

Ce travail est une brève étude de *"l'équation de la chaleur"* dans les deux cas stationnaire et non-stationnaire en une dimension d'espace. On s'intéresse à la résolution de cette équation par la méthode de séparation des variables.

INTRODUCTION

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont modulisés sous la forme des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à résoudre dans la plupart des cas.
En général, les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, hyperbolique et parabolique .
L'équation de la chaleur est l'exemple la plus simple d'une équation parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite par Joseph Fourier en 1807.
La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la températeur entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.
Les transferts d'énergies sont déterminés à partir de l'évolution de la température dans le temps et dans l'espace $u = f(x, y, z, t)$. Pour déterminer l'évolution de cette température $u = f(x, y, z, t)$, il faut résoudre les équations de conduction de chaleur correspondantes en connaissant les conditions initiales et les conditions aux limites.
L'objet de ce travail est de résoudre les équations de la chaleur en une seule dimension d'espace, les résolutions de ces équations sont faites par plusieurs méthodes :

1/ Analytique (méthode de séparation de variables).

2/ Numérique (méthode des caractéristiques, méthode des différences finies, méthode des éléments finis et méthodes de volumes finis).

L'objectif de ce travail est la résolution analytique des équations de la chaleur stationnaires et non stationnaires en une seule dimension de l'espace. Ainsi, ce mémoire est composé de quatre chapitres :
Le premier chapitre est consacré à présenter des généralités sur les équations aux dérivées partielles (définitions, propriétés, types et différentes méthodes de résolution).

Le deuxième chapitre consiste à étudier l'équation de la chaleur en une seule dimension et la résoudre par la méthode de séparation des variables.

Dans le troisième chapitre on présente la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire en dimension 1 en illustrant l'exemple de la température du mur homogéne.

Enfin, le dernier chapitre comporte la résolution de l'équation de la chaleur non stationnaire en dimension 1 et le traitement du cas de milieu semi infini.

On termine le travail par une conclusion générale, qui résume les principaux résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre sert à rappeler essentiellement des définitions, outils et théorèmes qu'on aura besoin tout au long de ce travail. Pour plus de détails, on invite le lecteur à consulter les références ([1], [3], [5], [7] et [4]) .

1.1 Les équations aux dérivées partielles

1.1.1 Définitions et propriétés

La compréhension des phénomènes du monde réel est basée sur les équations aux dérivées partielles car la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP.
Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique : On cite à titre d'exemples :

i/ Mécanique des fluides : l'équation de Navier-Stockes.

ii/ Electromagnétisme : l'équations de Maxwell.

iii/ Mécanique quantique : l'équation de Schrödinger.

iv/ Thermique : équation de la chaleur...

Définition 1.1.1 *Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Si u est une fonction à valeurs scalaires des* *variables x et y, telles que $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une EDP est une relation de la forme :*

$$F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \; pour (x, y) \in \Omega \tag{1.1.1}$$

où F désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

Définition 1.1.2 *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (1.1.1) est donc d'ordre* 1.

Définition 1.1.3 *La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. L'équation (1.1.1) est donc de dimesion* 2.

Exemple 1.1.1 *On cite quelques exemples des EDP's les plus usuelles.*

1/ L'équation de Laplace $\Delta u = 0$.

2/ L'équation de Poisson $\Delta u - f = 0$.

3/ L' équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$.

4/ L'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$

5/ L' équation de Korteweg-de Vries pour des vagues sur de l'eau peu profonde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

6/ L'équation de la chaleur, diffusion homogène $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$.

Définition 1.1.4 *Résoudre l'EDP consiste à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (1.1.1).*

En général, une EDP est complétée par des conditions sur le bord de Ω de type

$$F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \;\; \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega$$

1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

i/ On dit qu'une équation aux dérivées partielles est "**linéaire**" si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u+g(x,y)=0.$$

L'équation est dite "**homogène**" si la fonction g est identiquement nulle sur Ω, dans le cas contraire elle est "**non-homogène**".

ii/ On dit qu'une équation aux dérivées partielles est "**semi-linéaire**" si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus éleve est linéaire

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y et F une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iii/ On dit qu'une équation aux dérivées partielles est "**quasi-linéaire**" si elle est de la forme :

$$a(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0$$

où a, b, c et F sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iv/ On dit qu'une équation aux dérivées partielles est "**complètement non linéaire**" si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Exemple 1.1.2 *Soit l'équation*

$$u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1 \tag{1.1.2}$$

L'équation (1.1.2) *est une EDP linéaire non-homogène* ($D=\mathbb{R}^2$)

on a

$$Lu=u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad f(x,y)=1$$

L : un opérateur linéaire car si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in D$, alors

$$\begin{aligned} L(\alpha u+\beta v) &= (\alpha u+\beta v)+y\frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial y^2} \\ &= \alpha(u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+\beta(v+y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\ &= \alpha Lu+\beta Lv \end{aligned}$$

L est linéaire et donc (1.1.2) est linéaire.

L'équation (1.1.2) est non-homogène car $f(x,y)=1$ est non nulle.

Exemple 1.1.3 *Soit l'équation*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin y,\ D=\mathbb{R}^2. \tag{1.1.3}$$

L'équation (1.1.3) est une EDP non linéaire

on a

$$Lu=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

L'opérateur L n'est pas un opérateur linéaire et $f(x,y)=\sin y$. Il suffit de considérer par exemple $\alpha=\beta=1$ et les deux fonctions $u(x,y)=v(x,y)=x^2$. On obtient donc

$$L(u+v)=16x \quad \text{et } Lu+Lv=4x.$$

D'où

$$L(u+v)\neq Lu+Lv.$$

On peut classer les EDP's selon l'ordre à :

<u>EDP linéaire d'ordre 1</u>

Définition 1.1.5 *On appelle EDP linéaire d'ordre 1 dans un domaine $\Omega \subset R^n$ et d'inconnu : $\Phi : \Omega \longmapsto R$ une EDP de la forme :*

$$F(x)\cdot\nabla\Phi(x)+g(x)\Phi(x)=h(x)$$

où $\nabla\Phi(x)$ est le vecteur gradient de Φ ,($\nabla\Phi(x)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ et $F(x)=(f_1(x),...,f_n(x))$.

Exemple 1.1.4 *Soit $u=u(x,y)$ une fonction différentiable.*

1/ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ *est une EDP du* 1^{ier} *ordre linéaire et homogène.*

2/ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\sin u=0$ *est une* 1^{ier} *ordre homogène et non-linéaire.*

<u>EDP linéaires du second ordre</u>

Définition 1.1.6 *On appelle EDP linéaire à 2 dans un domaine* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *et d'inconnu :* $\Phi:\Omega\longmapsto R$ *une équation de type*

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}(x)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}+g(x)\Phi(x)=h(x)$$

par convection, on supposera que $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$.

Exemple 1.1.5 *L'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

où c *est une constante réelle et* u *est une fonction* $\mathbb{C}^2$*-différentiable.*

Les EDP's d'ordre 2 sont classées selon leurs types en trois grandes catégories.
On considère la forme générale d'une équation aux dérivées partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0. \tag{1.1.4}$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé $A,\ B$ et C. On calcule le discriminant défini par :

$$\Delta=B^2-4AC.$$

L'équation (1.1.4) est dite de type

1/ elliptique si $\Delta<0$,

2/ parabolique si $\Delta=0$,

3/ hyperbolique si $\Delta>0$.

<u>L'EDP elliptique</u>

Définition 1.1.7 *Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par :*

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x)$$

pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \cap \mathbb{R}^n$*, où* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée. L'inconnue est la fonction* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Cette catégorie d'EDP's est associée aux problèmes de nature stationnaire (permanent) ou d'équilibre tels que l'écoulement stationnaire d'un liquide visqueux, la répartition stationnaire du champ de température ou la distribution d'un potentiel.
La principale caractéristique de ce type d'équations elliptiques est qu'une perturbation introduite en un point quelconque à l'intérieur du domaine de calcul influé sur la totalité du domaine. Ceci implique que pour résoudre un problème de type elliptique, il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine.

Exemple 1.1.6 *L"équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

de type elliptique car

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

telle que $A = 1$*,* $B = 0$*,* $C = 1$*.*

$$\Delta = -4 < 0$$

L'EDP parabolique

Définition 1.1.8 *Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \Delta T(x,t) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^n$*,* $t > 0$ *. L'inconnue est la fonction* $T : \Omega \times]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*. C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire (non permanent).*

Exemple 1.1.7 *L'équation*

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

liée aux conditions initiales :

$$T\,(x,0)=\sin(\pi x)$$

et aux conditions aux limites

$$T(0,t)=T(l,t)=0$$

est une équation linéaire d'ordre 2, parabolique par rapport à la variable du temps t .

L'EDP hyperbolique

Définition 1.1.9 *Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont :*

1/ *L'équation de transport*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0$$

pour tout $x\in\Omega\cap\mathbb{R}$, tout $t>0$ et $a\in\mathbb{R}$ une constante donnée.

2/ *L'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0,$$

pour tout $x\in\Omega\cap\mathbb{R}^n$ et tout $t>0$.

Exemple 1.1.8 *L'équation de propagation d'une onde*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

associée aux conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{lcl} T(x,0) & = & \sin(\pi x), \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x,0) & = & 0, \end{array}\right.$$

et aux conditions aux limites

$$T(0,t)=T(L,t)=0$$

est une équation de type hyperbolique.

1.2 La méthode de résolution des EDP's

Les méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont :

1/ Méthode des différences finies (MDF) : La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée.

2/ Méthode des éléments finis (MEF) : La méthode des éléments finis est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est à dire qui permet de calculer un champ qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées, la méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, et à recherche une formulation simplifiée du probléme sur chaque élément, c'est à dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires, chaque système peut se représenter par une matrice, les systèmes d'équations pour tous les éléments sont rassemblés, la résolution de ce système global donne la solution approchée du problème.

3/ Méthode des volumes finis(MVF) : Dans la simulation par la méthode des volumes finis, le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles. Chacun des volumes de contrôle contenant un noeud dit : "noeud principal".

4/ Méthode des caractéristiques : elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport de particules, elle peut permettre la résolution purement analytique de l'EDP's .

Chapitre 2

L'équation de la chaleur

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité : le joule.
A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température.

2.1 La chaleur, la température et le flux thermique

2.1.1 La chaleur

Définition 2.1.1 *On appelle* ***température*** *la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. L'unité de température est le degré Kelvin* $[K]$ *ou encore le degré Celsius* $[\circ C]$.

2.1.2 Unités de chaleur

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J). On utilise également la calorie (cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de $14,5°C$ à $15,5°C$ sous une pression de 1 atm.

Remarque 2.1.1 *L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie». On a*

$$1\ Cal = 4,1855\ J.$$

2.1.3 Flux de chaleur

Définition 2.1.2 *On appelle flux de chaleur, la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps : $\Phi = \frac{dQ}{dt}$ en watt.*

Définition 2.1.3 *La densité de flux représente la puissance qui traverse l'unité de surface. Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur, on a*

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS},$$

si le flux est homogène en tout point de la surface, alors $\varphi = \frac{\Phi}{S}$, où φ s'exprime en $W.m^{-2}$.

2.1.4 Equation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux de type parabolique

$$u_t(x,t) - \Delta k u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0 \tag{2.1.1}$$

pour u défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$ et $k > 0$. Cette expression (2.1.1) est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur.

2.2 Analyse du transfert de chaleur

On appel « transfert de chaleur » le déplacement de la chaleur d'une région à une autre suite à une différence de température, ce déplacement peut se produit entre deux corps en contacte (solide solide, solide-fluide, fluide-fluide) ou entre deux parties d'un même corps. L'énergie interne du système change au cours du déplacement de la chaleur en produisant :

1/ Le flux thermique transmis.

2/ La répartition de la température a l'intérieur du milieu considéré.

Avant d'arriver aux échangeurs de chaleurs « Condenseurs », on doit d'abord parler des modes de transmission de la chaleur qui s'effectuent dans le condenseur et qui sont : la conduction, la convection et sans oublier le transfert de chaleur avec changement de phase l'ors de la condensation qui est le phénomène le plus important dans les condenseurs.

Transfert de chaleur par conduction : La conduction est le transfert de chaleur des parties chaudes vers des parties plus froides, d'un même corps ou de deux corps en contacte sans mouvement apparent de matière. Ce mode peut avoir s'effectue dans les solides et les fluides. Ce pendent, ces le seul mécanisme par le quel la chaleur peut se déplacer dans les solides opaques.

La conduction est régie par la loi de Fourier :

$$Q_x = -\lambda s \frac{dT}{dx}, \tag{2.2.1}$$

cette formule donne la valeur du flux de chaleur en direction de x, avec : Le signe(-) intervient puisque la chaleur s'écoule vers le décroissement de la température. On note que

λ : la conductivité thermique du milieu considéré$[W/m.K]$, s : La surface d'échange de chaleur $[m^2]$,

$\frac{dT}{dx}$: le gradient de température dans la direction de $x[K/m]$.

Alors, si un corps à la température T_1 est raccordé à un corps à la température T_2 par l'intermédiaire d'un corps thermique de section S et d'épaisseur e.

Le flux de chaleur qui s'écoule entre les deux corps est donné par la relation :

$$Q = -\lambda s \frac{T_1 - T_2}{e} \tag{2.2.2}$$

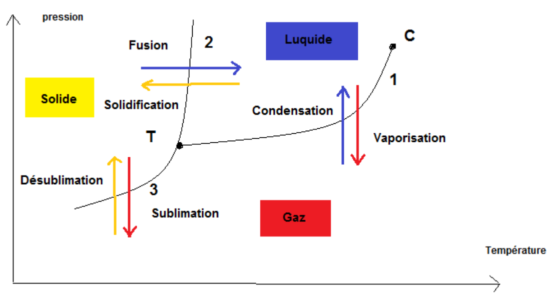
Transfert de chaleur par convection : De façon générale, la convection est le transport d'une grandeur physique d'un fluide d'un point à un autre par mouvement de ces molécules. Les différences de températures dans les fluides entraîne des différences de densités et donc un mouvement des particules du fluides ce mouvement à pour effet de véhiculer la chaleur du fluide et d'égaliser les températures par substitution réciproque des molécules froides à des molécules chaudes.

Le phénomène de convection intervient à chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à des éléments fixes (murs, plaques, tubes,. . . .etc.) à des températures différentes de celle du fluide ou lorsque deux fluides à des températures différentes sont mis en contact.

On dit que la convection est naturelle si le mouvement des masses fluides responsables du transfert de la chaleur, est provoqué par des différences de densités provenant elles mêmes des différences de températures à l'intérieur du fluide. Et on dit que la convection est forcée si le mouvement est crée par une action extérieure (ventilateurs, pompes,. . . etc.)
La loi de Newton donne le flux échangé entre une surface de valeur s et de température T_s et un fluide de température T_f, elle s'écrit :

$$Q = hs(T_s - T_f) \tag{2.2.3}$$

où h : Coefficient d'échange convectif$[W/m^2.K]$ et s : la surface d'échange $[m^2]$.
<u>**Transfert de chaleur lors de la condensation**</u> A une pression donnée la température d'un corps reste constante aussi longtemps que dure le changement d'état. Les changements de phase qui peuvent être rencontrés sont présentés dans la figure suivante :



Courbe de changement d'états d'un corps pur

Figure 1

2.2.1 Probléme physique : conduction dans une barre

On considère le problème de la diffussion de la chaleur dans une bare homogène, de coefficient de conduction λ, de masse volumique ρ, de coefficient calorifique c_p, de section s et de longeur L, sans production d'énergie interne. En supposant que les deux extrémités sont maintenues à une température constant T_0, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho c_p s \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

pour $x \in [0, L]$, auquel on associe deux conditions aux limitees

$$\begin{cases} T(0,t) = T_0 \\ T(L,t) = T_0 \end{cases}$$

et une condition initiale

$$T(x,t) = T_i(x) \ .$$

2.2.2 Problème modèle

En effectuant le changement de variable $u = T - T_0$, on obtient le problème modèle suivant avec des condution aux limites de type Dirichlet homogénes (c'est-à-dire que la valeur de u est imposée égale à zéro aux extrémités $x = 0$ et $x = L$) :

$$(p): \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } x \in [0, L] \\ u(0,t) & = u(L,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) & = C(x) \quad \text{pour } x \in [0, L] \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Dans cette équation $k = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique du matériau, $u(x,t)$ la température relative initiale $C(x) = T_i(x) \ - T_0$.

2.2.3 Recherche d'une solution analytique

Dans le but d'obtenir une solution de référence pour les simulations numériques, on va chercher une solution analytique du problème (2.2.4), en utilisant la méthode classique de séparation de variables.

Méthode de séparation de variables

Pour résoudre le problème (2.2.4), on considère le problème sans condition initiale fixée :

$$(p'): \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = & K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) & = & 0, \\ u(l,t) & = & 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

On cherche une solution élémentaire de ce dernier (2.2.5) sous la forme à variables séparées. Pour cela, on pose

$$u(x,t) = f(t)g(x). \tag{2.2.6}$$

En substituant cette relation dans l'équation (2.2.6), on obtient

$$f'(t)g(x) = Kf(t)g''(x) \tag{2.2.7}$$

en divisant par $f(t)g(x)$, il vient

$$\frac{1}{K}\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}. \tag{2.2.8}$$

lComme le membre à gauche de l'équation (2.2.8) est une fonction qui dépend uniquement de t, et le membre à droite est une fonction qui dépend de x. Alors,

$$\frac{1}{K}\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \beta, \ \beta \in \mathbb{R} \tag{2.2.9}$$

cela conduit au système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{f'(t)}{f(t)} & = & \beta K \\ \frac{g''(x)}{g(x)} & = & \beta \end{array} \right. \tag{2.2.10}$$

qui implique

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) - \beta K f(t) = 0, \\ g''(x) - \beta g(x) = 0. \end{array} \right. \tag{2.2.11}$$

Après la résolution de la première équation différentielle du système (2.2.11), on obtient

$$f(t) = c_1 e^{\beta k t} \tag{2.2.12}$$

où c_1 est une constante réelle.

Remarque 2.2.1 *Le signe de la constante β donne l'évolution de la température au cours du temps (puisque $k > 0$). Si la constante β est possitive, la température croit exponentiellement, ce qui n'est physiquement pas acceptable. Par contre, si la constante β est négative, la température décroît exponentiellement, ce qui est à priori la solution à retenir.*

On envisage, cependant les deux cas, et on montre que seul le second cas conduit à une solution non identiquement nulle. Pour résoudre la deuxième équation du système (2.2.11), on suppose que $\beta > 0$ et on pose $\beta = w^2, \ w \in \mathbb{R}$ (telle que w est une constante arbitraire), on aura alors

$$g''(x) - w^2 g(x) = 0 \tag{2.2.13}$$

cette équation (2.2.13) est une équation du second ordre homogène et à coefficients constants. En cherchant la solutoin sous la forme : $g(x) = e^{mx}$. L'équation caractéristique : $m^2 - w^2 = 0$, a comme racines $m = \pm w$. Alors, la solution $g(x)$ est

$$g(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$$

avec A et B sont deux constantes réelles.

Finalement, la solution $u(x,t)$ de (2.2.5) est donnée par :

$$u(x,t) = e^{Kw^2t}\left[Ae^{wx} + Be^{-wx}\right]$$

avec $w,\ \ A,\ B \in \mathbb{R}$.

On peut montrer sans difficulté que l'application des conditions aux limites du problème (2.2.4) conduit à $A = B = 0$ et donc à une solution identiquement nulle.

On suppose maintenant $\beta < 0$ et on pose $\beta = -w^2 < 0$. Dans ce cas en suivant la même démarche que précédemment, on trouve que la solution s'écrit :

$$u(x,t) = e^{-(Kw^2t)}\left[A\cos(wx) + B\sin(wx)\right]$$

L'application de la première condition aux limites $u(0,t) = 0$ en $x = 0$ donne :

$$e^{-Kw^2t}\left[A + 0\right] = 0 \Longrightarrow A = 0.$$

$u(x,t)$ s'écrit alors :

$$u(x,t) = Be^{-Kw^2t}\sin(wx)$$

L'application de la deuxième condition en $x = L$ implique :

$$Be^{-(Kw^2t)}\sin(wL) = 0$$

Si on choisit $\beta = 0$, on retrouve une solution identiquement nulle. On suppose donc que $\beta \neq 0$, et on obtient

$$\begin{aligned} Be^{-Kw^2t}\sin(wL) &= 0 \Longrightarrow \sin(wL) = 0 \\ &\Longrightarrow wL = n\pi. \end{aligned}$$

Cette condition fixe les valeurs possibles de w

$$w = \frac{n\pi}{L} \quad (n \in Z)$$

La solution de (2.2.5) s'écrit :

$$u(x,t) = Be^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.2.14}$$

pour chaque valeur de n, on a donc une solution élémentaire qui dépend de n où n est une constante arbitaire que l'on notera C_n

$$u_n(x,t) = C_n\, e^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.2.15}$$

Et suivant le principe de superposition, toute combinaison linéaire de solutions de la forme (2.2.15), est aussi solution de (2.2.5) (sous réserve la convergence de la série). Par conséquent, La solution générale de (2.2.5) est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.2.16}$$

où les C_n sont des constantes arbitraires.

On constate que puisque l'on a fixé aucune condition initiale, le problème (2.2.5) admet une infinité de solutions.

Solution générale vérifiant la condition initiale

Les solutions (2.2.16) vérifiant le problème (2.2.5) si

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = C(x) \qquad 0 \le x \le L \tag{2.2.17}$$

Le problème revient maintenant à la détermination des C_n de sorte que la série (2.2.17) converge vers $C(x)$ pour tout $x \in [0, L]$.

Pour calculer les constantes C_n, on multiplie l'équation (2.2.17) par $\sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)$, puis on intègre sur l'intervalle $[0, L]$. En utilisant l'orthogonalité des fonctions sinus, on obtient

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{K,n}$$

d'où les valeurs de C_K sont données par

$$C_K = \frac{2}{L}\int_0^L C(x)\sin\left(\frac{K\pi}{L}\right)x dx \tag{2.2.18}$$

Les C_K sont les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période $2L$ coincidant avec $C(x)$ sur l'intervale $[0, L]$.

La solution générale du problème (2.2.4) s'écrit :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.2.19}$$

$$Cn = \frac{2}{L}\int_0^L C(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy$$

Dans le cas particulier $C(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$, on trouve le mode propre (i.e. une solution qui évolue de façon auto-similaire au cours du temps) d'ordre n du problème (2.2.4)

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{2.2.20}$$

Ce mode décroît de façon auto-similaire et exponentiellement au cours du temps proportionnellement au carré de sa longeur d'onde $\frac{L}{n\pi}$.

2.3 Equation de la chaleur en un dimension

On va maintenant résoudre le problème de diffusion de la température. On considère une barre en cuivre peu épaisse de diffusivité thermique k ($k = 1cm^2/s$) qui est totalement isolée de l'extérieur et pour laquelle on a fixé les températures aux deux extrémités à $0°C$. La répartition initiale de la température (à $t = 0s$) dans la barre est donnée par la fonction suivante :

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{pour} \quad L/2 < x < L \end{cases}$$

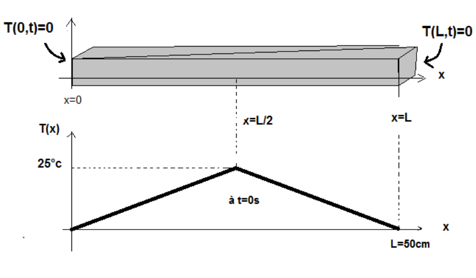


Figure 2

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} & = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ T(0,t) & = T(L,t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ T(x,0) & = f(x) & \text{pour } 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{2.3.1}$$

On s'intéresse à chercher une solution élémentaire du problème (2.3.1) sous la forme à variables séparées :

$$T(x,t) = \Psi(t)X(x). \tag{2.3.2}$$

La première équation du système (2.3.1) devient

$$\Psi'(t)X(x) = k\Psi(t)X''(x). \tag{2.3.3}$$

On divise (2.3.3) par le produit $\Psi(t)X(x)$, on obtient

$$\frac{1}{K}\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{2.3.4}$$

(λ est une constante réelle quelconque). Il est clair que les variables sont bien séparables, on est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

1/ Un problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable x (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

où il faut rechercher toutes les valeurs propres λ_n et les fonctions propres $X_n(x)$.

2/ Une équation différentielle du 1^{ier} ordre sur la variable t

$$\Psi'(t) + \lambda_n k\Psi(t) = 0 \tag{2.3.6}$$

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres. On étudie toutes les possibilités pour la constante de séparation λ.

1/ Résolution du problème aux valeurs propres

Soit l'équation différentielle

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

son équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$. Donc $\Delta = -4\lambda$.

i/ Si $\Delta = 0$, alors $\lambda = 0$ et la solution est

$$X(x) = Ax + B.$$

En vérifiant les conditions aux frontières, on trouve

$$A = B = 0.$$

Par conséquent, $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre du problème (2.3.5).

ii/ Si $\Delta > 0$, alors $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\alpha^2$ soit $\Delta = 4\alpha^2 \Rightarrow r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$. La solution est donc

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

En vérifiant les conditions aux frontières, on trouve $A = -B = 0$. Alors, les valeurs $\lambda < 0$ ne sont pas des valeurs propres du problème (2.3.5).

iii/ Si $\Delta < 0$, alors $\lambda > 0$. On pose $\lambda = \beta^2$ soit $\Delta = -4\beta^2 \Rightarrow r_1 = \beta$ et $r_2 = -\beta$. D'où la solution est

$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x).$$

La vérification des conditions aux frontières conduit à

$$A = 0 \text{ et } \beta = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ sont les valeurs propres du problème aux limites (2.3.5). Les fonctions propres associées aux valeurs propre λ_n sont :

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.3.7}$$

2/ Résolution de l'équation différentielle sur la variable t

Les valeurs propres λ étant connus, donc on peut résoudre l'équation différentielle (2.3.6) en t :

$$\Psi' + \lambda_n k\Psi = 0$$

Pour $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, on obtient

$$\Psi_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k\Psi_n = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_n(t) = A_n e^{-k(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{2.3.8}$$

où A_n est une constante arbitraire.

i/ Solution générale de l'EDP La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la super position de l'ensemble des solutions

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\Psi_n(t) \tag{2.3.9}$$

d'aprés (2.3.7) et (9) , on obtient

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) A_n e^{-k\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right.} \tag{2.3.10}$$

ii/ Solution particulière La solution générale doit vérifier la condition initiale

$$T(x;t=0) = f(x)$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{pour} \quad L/2 < x < L \end{cases}$$

à partir de la solution générale, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.3.11}$$

Il reste donc à décomposer $f(x)$ sur la base des fonctions propres en calculant le coefficient A_n,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{2.3.12}$$

En remplaçant $f(x)$ par son expression dans (2.3.12), on obtient

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

après développement de l'intégrale par partie, on obtient

$$A_n = \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

L'évolution de la température dans la barre est

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Les courbes de température sont données sur la figure suivante (jusqu'à 500 *secondes*). La température tend vers $0°C$ pour un temps infini.

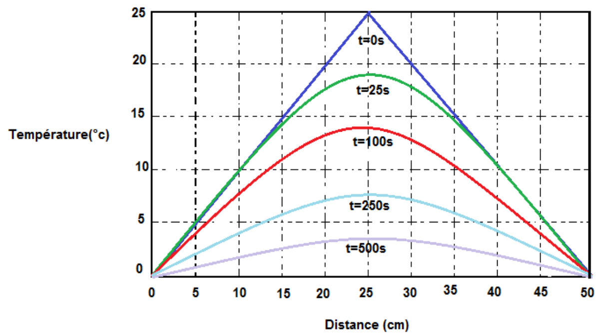

Température(°c)
25
20
15
10
5
0
t=0s
t=25s
t=100s
t=250s
t=500s
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Distance (cm)

Figure 3

Chapitre 3

Résolution de l'équation de la chaleur stationnaire en dimention1

On appelle solution stationnaire la solution obtenue pour un temps assez long. Pour la solution stationnaire, la température ne varie plus par rapport au temps t.

3.1 L'équation de la chaleur stationnaire en dimention 1

On écrit les équations stationnaires, puisque la température ne varie plus par rapport au temps t, alors

$$\frac{\partial}{\partial t}T = 0.$$

On distingue les cas de l'équation de la chaleur stationnaire suivant :

1/ L'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source est donc

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)) + r(x) = 0.$$

2/ L'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source et isotrope est donc

$$k\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) + r(x) = 0.$$

Dans les deux cas, c'est une équation différentielle ordinaire. On a besoin de ses conditions aux limites pour la résoudre.

Conditions aux limites : il faut connaître la température aux bornes de l'objet chauffé. Par exemple, la température d'un mur de maison dépend bien de la température extérieure et de la température à l'intérieur de la maison. On dira que soit la température pariétale est imposée : $T = T_p$ ou soit l'autre possibilité qui est que le flux pariétal imposé

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} \mid_p = q_p.$$

On remarque qu'une paroi adiabatique (on dit aussi athermane) est telle que

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} \mid_p = 0.$$

Sur un plan de symétrie, on a aussi

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

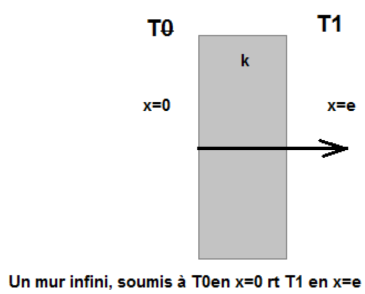


Figure 4

Il existe une autre possibilité liée au "facteur d'échange" qu'on va voir plus tard. Pour fixer les idées, on examinera dans la section suivante des exemples simples en dimension 1.

3.2 Exemple de conduction stationnaire

Comme exemple de conduction stationnaire, on va étudier le cas du problème de la température du mur homogène.

3.2.1 Equation de la chaleur dans un mur

Soit une paroi d'épaisseur, ce mur est homogène : k est constant, séparant deux milieux à température fixée et uniforme, T_0 (à gauche) et T_1 (à droite).
Dans ce solide, l'équation de la chaleur stationnaire est

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

la température est linéaire $T = ax + b$, la température passe de T_0 à T_1, de $x = 0$ à e donc

$$T = T_0 + \frac{x}{e}(T_1 - T_0)$$

et le flux est constant dans le solide, il vaut :

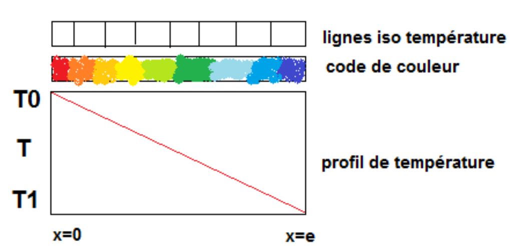
$$q = -k(T_1 - T_0)/e.$$

Le flux entrant est le même que le flux sortant. Si $T_0 > T_1$, le flux est positif, il va bien du chaud au froid.

3.2.2 Equation de la chaleur : profils de température

La température est linéaire en x, c'est une droite

$$T = T_0 + \frac{x}{e}(T_1 - T_0)$$



Profil de température: différentes représentations équivalentes

Figure 5

Le code couleur RVB : le rouge est chaud, le bleu est froid, la température intermédiaire est le vert. La pente est constante, elle est liée au flux. La température ne varie pas en y.

On trace aussi des iso lignes de température. Pour chaque x fixé, c'est une droite parallèle à l'axe des y, ou on trace des cartes en couleur d'iso températures. Le rouge est en général la température la plus élevée, le bleu la plus froide, le vert est une température intermédiaire. On a en fait du plus chaud au plus froid : rouge jaune vert cyan bleu.

3.2.3 Equation de la chaleur dans un mur homogène, flux imposé

Flux imposé à droite

Supposons que l'on se donne cette fois une température imposée à gauche, mais un flux à droite

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = q_1 \text{ en } x = e.$$

Le flux est toujours constant à travers le mur. Ainsi,

$$T = -\frac{q_1}{k}x + T_0.$$

La température en e est donnée par

$$T_1 = -\frac{q_1}{k}e + T_0.$$

Flux imposé à gauche

On suppose maintenat une température imposée à droite, mais un flux à gauche :

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = q_0 \text{ en } x = 0.$$

Le flux est toujours constant à travers le mur. Alors,

$$T = -\frac{q_0}{k}(x - e) + T_1$$

La température en 0 est donc

$$T_0 = \frac{q_0}{k}e + T_1$$

3.2.4 Autres conditions aux limites

On peut résoudre l'équation de la chaleur stationnaire avec d'autres conditions aux limites :

1/ Deux températures en $x = 0$ et $x = e$,

2/ une température en $x = 0$ et un flux en $x = e$,

3/ un flux en $x = 0$ et une températures en $x = e$.

3.2.5 Exemple numérique la casserole

Soit une casserole en aluminium d'épaisseur $e = 0.5cm$ et de $20cm$ de diamètre ($k = 200W/m2/K$) Elle est posée sur une plaque électrique de $900W$. L'eau se vaporise, elle est à $Te = 100°C$. Le flux sur la paroi du bas est

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = q_0.$$

Si on prend $q_0 = 900W/\pi/((0.1m)^2) = 28.7kW/m^2$, alors la température est

$$\begin{aligned} T_0 &= T_e + q_0 e/k \\ &= 100 + 28662 * 0.005/200 \\ &= 100.7°C. \end{aligned}$$

l'augmentation de température n'est que de 0.7 degrés.

Chapitre 4

Résolution de l'équation de la chaleur Instationnaire

L'objectif de ce chapitre est de résoudre léquation de la chaleur dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = k \nabla^2 T + r$$

et des conditions aux limites (sur chaque portion de paroi) :

i/ Température pariétale imposée :

$$T = Tp.$$

ii/ Flux pariétal imposé :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \mid_p = \phi_p.$$

iii/ Flux pariétal relié à la température pariétale et à la température extérieure par le coefficient d'échange

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \mid_p = h(T_{p-T_{ext}}).$$

4.1 Problème physique

On considère le problème d'un mur d'épaisseur l, qui se trouve initialement à une température uniforme θ_0 (température de la cambre). À l'instant $t = 0$, la température extérieure (en $x =$

0) monte brusquement à $\theta_s > \theta_0$, valeur maintenue constante par une source de chaleur. On suppose que la température à $x = l$ est gardée à sa valeur initiale θ_0 .
On est donc dans le carde d'un domaine à une dimesion. La propagation de la chaleur dans le mur (de diffusivité thermique) sera d'écrite par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1.1}$$

avec l'inconnue

$$u(x,t) = \theta(x,t) - \theta_0$$

vérifiant la condition initiale

$$u_0(x) = 0,$$

et les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u(0,t) = \theta_s - \theta_0 = u_s,\ u(l,t) = 0, \forall t > 0. \tag{4.1.2}$$

4.2 Analyse mathématique

4.2.1 Sur un domaine infini

En Cas d'un domaine infini (un mur d'épaisseur infinie $(l \to \infty)$), on va chercher la solution sous la forme

$$u(x,t) = f(\eta) \text{ avec } \eta = \frac{x}{2\sqrt{kt}}. \tag{4.2.1}$$

D'abord on montre que la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta\frac{df}{d\eta} = 0. \tag{4.2.2}$$

Comme $\eta = \frac{x}{2\sqrt{kt}}$, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} & = & \frac{1}{2\sqrt{kt}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} & = & -\frac{x}{4\sqrt{kt}^{3/2}}. \end{cases}$$

En plus, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{kt}^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{kt}}\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{kt}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{kt}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{1}{4kt}\frac{d^2 f}{d\eta^2}.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

alors

$$-\frac{x}{4\sqrt{kt}^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial \eta} - k\frac{1}{4kt}\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0.$$

Soit

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{4xt}{4\sqrt{kt}^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

ce qui implique

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{x}{\sqrt{kt}}\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0.$$

Enfin, on peut écrire

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta\frac{df}{d\eta} = 0.$$

En introduisant la fonction suivante, appelée fonction erreur

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\xi^2)d\xi \tag{4.2.3}$$

qui vérifie $\mathrm{erf}(0) = 0$ et $\mathrm{erf}(\infty) = 1$, on trouve la solution de l'équation de la chaleur pour $l \to \infty$

$$u(x,t) = [1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{kt}})]u(0,t) \tag{4.2.4}$$

D'aprés (4.1.1)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta\frac{df}{d\eta} &= 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{df}{d\eta} = A\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$f(\xi) = B + A \int_0^{\eta} \exp(-s^2) ds$$

où A et B sont deux constantes réelles. Or $f(0) = B$ et $u(l,t) = 0$ pour tout $t > 0$, donc comme $l \to \infty$, on obtient

$$u(\infty, t) = [1 - \operatorname{erf}(\infty)] u(0,t) = 0$$

donc $f(\infty) = 0$, de plus $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Soit

$$\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi

$$f(\infty) = f(0) + A \int_0^{\infty} \exp(-s^2) ds = f(0) + A \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} f(0).$$

Enfin

$$f(\eta) = f(0) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(0) \int_0^{\eta} \exp(-s^2) ds = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-s^2) ds\right] f(0),$$

et

$$u(x,t) = [1 - \operatorname{erf}(\eta)] u(0,t).$$

4.2.2 Sur un domaine fini

Pour un mur d'épaisseur fini, on va utiliser la décomposition en ondes simples de la solution

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \hat{U}_k(t) \phi_k(x), \;\; \phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right).$$

Par dérivation, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{d\hat{U}_k}{dt}(t) \phi_k(x)$$

et comme

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right),$$

on a, alors

$$\frac{d^2\phi_k}{dx^2}(x) = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \phi_k(x)$$

et

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \hat{U}_k(t)\frac{d^2\phi_k}{dx^2}(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \hat{U}_k(t)\phi_k(x).$$

Alors, si $u(x,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

pour chaque $\hat{U}_k$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{d\hat{U}_k}{dt}(t)\phi_k(x) + k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \hat{U}_k(t)\phi_k(x)\right] = 0,$$

cela implique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\left(\frac{d\hat{U}_k}{dt}(t) + k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \hat{U}_k(t)\right)\phi_k(x)\right] = 0.$$

D'où on déduit l'équation différentielle vérifiée par chaque fonction $\hat{U}_k$

$$\frac{d\hat{U}_k}{dt}(t) + k\hat{U}_k(t)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = 0$$

la forme de chaque fonction $\hat{U}_k$ et donc

$$\hat{U}_k(t) = A_k \exp\left[-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]$$

Maintenant, on vérifie que la solution de l'équation de la chaleur avec les condition aux limite (4.1.2) s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = (1-\frac{x}{l})u_s + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \exp\left(-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\phi_k(x).$$

on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} -A_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \exp\left(-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\phi_k(x),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \exp\left(-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\frac{d\phi_k}{dx}(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \exp\left(-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\frac{d^2\phi_k}{dx^2}(x)\\ &= -\sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k(\frac{k\pi}{l})^2 \exp\left(-k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\phi_k(x)\end{aligned}$$

Ici $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{d^2u}{dx^2}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} - A_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\phi_k(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\phi_k(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Cette équation vérifie bien les conditions aux limites (4.1.2) .

4.3 Exemple de l'équation de la chaleur non stationnaire

On examine un cas simple : la lamelle $1D$ soumise à un choc thermique (sans source de chaleur volumique $r = 0$). Il s'agit d'étudier un système épais. Par opposition aux systèmes minces où la température est quasi constante, on note que le sens : "épais", veut dire que la température varie spatialement.

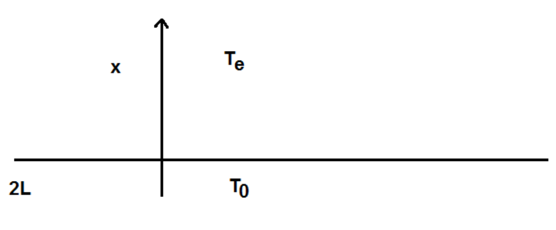


Figure 6

Soit h un coefficient d'échange aux surfaces. Le problème à résoudre est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p}\frac{d^2T}{dx^2} \tag{4.3.1}$$

vérifiant la condition initiale

$$T(x, t = 0) = T_0$$

et pour tout $t > 0$, on a

$$-k\left(\frac{\partial T(x=\pm L,t)}{\partial x}\right) = \pm h(T(x=\pm L,t) - T_{ext}) \tag{4.3.2}$$

Ce problème est écrit avec des dimensions, en fait, il est subtil de faire disparaître la taille de la lamelle et ses propriétés physiques et d'écrire un problème sans dimension.
On pose $\overline{t} = \frac{t}{\tau}$ et $\overline{x} = \frac{x}{L}$ et $\overline{T} = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})T$.
La jauge de temps est obtenue en s'arrangeant pour qu'il n'y ait plus de coefficients dans les équations, il est clair que

$$\frac{(T_0 - T_{ext})}{\tau}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}}\right) = \frac{k(T_0 - T_{ext})}{\rho c_p L^2}\left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right)$$

et

$$\frac{\rho c_p (T_0 - T_{ext})}{\tau}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} = \frac{k(T_0 - T_{ext})}{L^2}\left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right) \tag{4.3.3}$$

donc si on prend pour échelle de température $\tau = L^2/a$ avec $a = k/\rho c_p$ (diffusivité thermique ne dépend que du matériau), du (4.3.3) on obtient la forme de l'équation de la chaleur sans dimension

$$\frac{(T_0 - T_{ext})}{L^2/a}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} = \frac{(T_0 - T_{ext})}{L^2/a}\left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} = \left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right) \tag{4.3.4}$$

L'écriture de la condition de flux à la paroi permet de faire surgir le nombre de Biot. On va supposer ici qu'il est d'ordre 1 pour garder le maximum de termes.
L'équation (4.3.2) devient

$$-k\left(\frac{\partial T(x=\pm L,t)}{\partial x}\right) = \pm h(T(x=\pm L,t) - T_{ext})$$

ce qui implique

$$-\frac{k(T_0 - T_{ext})}{L}\left(\frac{\partial \overline{T}(\overline{x}=\pm 1,t)}{\partial \overline{x}}\right) = \pm h(T_0 - T_{ext})\left(\overline{T}\left(\overline{x}=\pm 1,\overline{t}\right)\right) \tag{4.3.5}$$

c'est-à-dire comme $Bi = hL/k$ (4.3.5) devient

$$-\left(T_0 - T_{ext}\right)\left(\frac{\partial \overline{T}(\overline{x} = \pm 1, t)}{\partial \overline{x}}\right) = \pm Bi(T_0 - T_{ext})\left(\overline{T}\left(\overline{x} = \pm 1, \overline{t}\right)\right) \tag{4.3.6}$$

Le problème sans dimension est le plus général possible, (à Biot quelconque), c'est donc

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} = \left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right)$$

avec

$$\overline{T} = 1 \text{ en } \bar{t} = 0 \text{ et } -\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}}\right) = \pm Bi\overline{T} \text{ en } \bar{t} > 0 \text{ et } \bar{x} = \pm 1.$$

Le problème sans dimension est le plus général possible. Il représente le cas où la température est imposée, elle vaut 0 et le nombre de Biot est infini

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} = \left(\frac{d^2\overline{T}}{d\overline{x}^2}\right)$$

avec $\overline{T} = 1$ en $\bar{t} = 0$ et $\overline{T} = 0$ en $\bar{t} > 0$ et $\overline{x} = \pm 1$.

Pour résoudre le problème décrit ci-dessus, on cherche la solution sous forme de variables séparées

$$\overline{T}(x, t) = f(\bar{t})g(\overline{x}). \tag{4.3.7}$$

L'équation de la chaleur devient

$$f'(\bar{t})g(\overline{x}) = f(\bar{t})g''(\overline{x}) \tag{4.3.8}$$

On divise les deux membres de (4.3.8) par $f(\bar{t})g(\overline{x})$, on obtient

$$f'(\bar{t})/f(\bar{t}) = g''(\overline{x})/g(\overline{x}) \tag{4.3.9}$$

On en déduit que à gauche, on a une fonction qui ne dépend que du temps et à droite une fonction qui ne dépend que de x. Alors,

$$\frac{f'(\bar{t})}{f(\bar{t})} = K \tag{4.3.10}$$

et

$$\frac{g''(\overline{x})}{g(\overline{x})} = K \tag{4.3.11}$$

La solution de l'équation (4.3.10)

$$f(\bar{t}) = e^{k\bar{t}}.$$

Elle n'est physique que si $K < 0$, on pose donc $K = -k^2$.

L'équation (4.3.11) admet la solution

$$g(x) = \cos(k\bar{x} + \phi_k).$$

On obtient très simplement des fonctions trigonométriques en espace (c'est en fait une série de Fourier que l'on construit) et des exponentielles en temps pour la température. Par symétrie par rapport au centre du milieu étudié la phase est nulle $k = 0$. On conserve une constante A_k multiplicative. Donc toutes les fonctions de la forme

$$T_k = A_k exp(-k^2\bar{t}) cos(k\ \bar{x} + \phi_k) \tag{4.3.12}$$

vérifient l'équation de la chaleur. On doit maintenant trouver les valeurs de k puis les valeurs de A_k...

Il faut écrire dans un premier temps les conditions de bord.

$$-\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial \bar{x}} = \pm Bi\ \bar{T}_k \text{ en } \bar{x} = \pm 1$$

donc cela donne

$$-k\sin(\pm k) = \pm Bi \cos(\pm k).$$

Soit $ktg(k) = Bi$, il faut calculer toutes les valeurs possibles de k en fonction de Bi. On note k_i les valeurs propres croissantes avec i, par exemple si $Bi = \infty$, il faut résoudre $tg(k) = \infty$, c'est-à-dire il faut résoudre $cos(k) = 0$, donc les valeurs de k_i sont$(2i-1)\pi/2$, il y a une infinité de valeurs de k.

Pour les autres valeurs de Bi, il faut résoudre numériquement l'équation par une méthode appropriée (Newton, dichotomie...), on trouve alors encore une suite de valeurs k_i.

Si $Bi = 0$, $k_i = (i-1)\pi$.

Si $Bi = 0.1$, $k_1 = 0.311$, $k_2 = 3.173$, $k_3 = 6.300$, $k_4 = 9.435$...

Si $Bi = 1$, $k_1 = 0.863$, $k_2 = 3.4256$, $k_3 = 6.4373$, $k_4 = 9.5293$...

Si $Bi = 10$, $k_1 = 1.430$, $k_2 = 4.306$, $k_3 = 7.223$, $k_4 = 10.2$...

Si $Bi = 100$, $k_1 = 1.555$, $k_2 = 4.666$, $k3 = 7.777$, $k_4 = 10.88...$

Si $Bi = \infty$, $k_1 = 1.57$, $k_2 = 4.72$, $k_3 = 7.854$, $k_4 = 10.99$, $k_i = (2i-1)\pi/2$.

En fait, la température s'écrit sous forme d'une somme de toutes ces solutions élémentaires (à Bi fixé) sont

$$\sum_{i\rangle 0} A_i exp(-k_i^2\bar{t}) cos(k_i\bar{x}).$$

Pour déterminer les coefficients A_i, on vérifie la condition initiale en temps

$$\sum_{i\rangle 0} A_i cos(k_i\bar{x}) = 1,$$

c'est-à-dire au temps initial, la température est constante et vaut 1. Par les propriétés de l'analyse de Fourier, on multiplie membre à membre cette égalité par $cos(k_j\bar{x})$ et on intégre sur l'épaisseur de -1 à 1. On obtient

$$\int cos(k_i\bar{x})cos(k_j\bar{x})dx = \frac{\sin((k_i-k_j)\bar{x})}{2(k_i-k_j)} + \frac{\sin((k_i+k_j)\bar{x})}{2(k_i+k_j)}$$

donc on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} cos(k_i\bar{x})cos(k_j\bar{x})dx &= 1,\ si\ i=j\\ &= 0,\ sinon.\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que si les indices sont égaux, l'intégrale suivante vaut 1, et si ils sont différents l'intégrale vaut 0

$$\int_{-1}^{1} cos(k_i\bar{x})cos(k_j\bar{x})dx = \delta_{ij}$$

et compte tenu de l'intégrale de cos

$$\int_{-1}^{1} cos(k_i\bar{x})d\bar{x} = \frac{4(-1)^{i+1}}{\pi(2i-1)}$$

les A_i s'écrivent

$$A_i = \frac{2\sin(k_i)}{k_i + \sin(k_i)\cos(k_i)}$$

Il serait aussi intéressant de tracer la température au centre en fonction du temps pour plusieurs Bi. On voit alors dans la figure ci-dessous (figure 7) que plus Bi est grand, moins la décroissance est rapide.

Le problème est alors résolu, l'influence du nombre de Biot sur la solution est clairement mis en évidence.

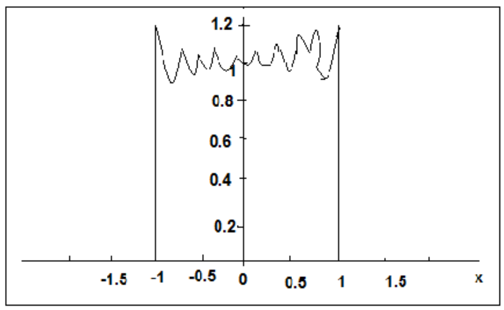


Figure 7

Conclusion

Ce mémoire est une étude courte de l'équation de la chaleur dans ses deux cas stationnaire et non stationnaire. On a traité des solutions stationnaires pour des murs à température ou flux imposé et la solution de l'équation de la chaleur instationnaire dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants et des condition aux limites.

Bibliographie

[1] A. Abbès, Méthodes numériques appliquées au calcul des écoulements et du transfert de chaleur, USTO MB, Université de Oran, (2003).

[2] P. Cormault, Cours de thermique théorique et pratique, (1999).

[3] C. David, P. Gosselet, Equations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés, Paris, (2012).

[4] Y. Jannot, Transferts thermiques, Ecole des Mines Nancy $2^{ème}$ année, 6, 5, (2012).

[5] P-Y. Lagrée, Equation de la chaleur, Cours MECAVENIR/EPU, 2009/2010.

[6] H. Reinhard, Equation aux dérivées partielles, introduction, Dinod Université.

[7] A. Rondepierre, A. Rouchon, Introduction aux équations aux dérivées partielles étude théorique, 2012-2013.

[8] M.H. Vignal, Cours équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques en Master 1 Mathématiques fondamentales, 2003-2008.