MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DELA RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

ALOUANI Hadjer

THEME :

Sur le problème de Cauchy abstrait de type parabolique dans les espaces de fonctions continues de petites Hölder

Devant le jury composé de :

Mme. BENSIKADDOUR Djemaia	MCB	Université de Mostaganem	Présidente
Mme. DIALA Horiya	MAA	Université de Mostaganem	Examinatrice
Mme. LIMAM Kheira	MCA	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Thème

Sur le problème de Cauchy abstrait de type parabolique dans les espaces de fonctions continues de petites Hölder

Présenté par

ALOUANI Hadjer

Devant le jury

Mme. Bensikaddour Djemaia	**MCB**	**Présidente**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme. Diala Horiya	**MAA**	**Examinatrice**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme. Limam Kheira	**MCA**	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Année universitaire 2020-2021

Table des matières

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas pu être réalisé si DIEU, le tout puissant, nous a avait pas doté d'une santé physique et morale a chaque instant. c'est pourquoi, je le remercie à l'infini pour ce don inestimable dont il m'a gratifié.

Je tiens bien entendre à remercier particulièrement, ma chère encadreur Mme Kheira Limam de l'Université de Mostaganem qui, par son encadrement, ses précieux conseils, sa patience, sa générosité et enfin sa disponibilité ai fait mon œuvre a été largement facilité, je ne saurie l'oublier.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements et ma gratitude aux membres de Jury, Mme Bensikaddour, et Mme Diala d'avoir accepté l'évaluation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants qui ont participés à ma formation tout le long de mon cursus et surtout Mr Medeghri et Mr Belaidi.

Sans oublier de remercier tous les membres de ma famille pour leurs soutient et leurs encouragements et particulièrement mes très chers parents.

Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

À mes très chers parents

Je vous dois que je suis aujourd'hui grâce à votre amour, à votre prières, à votre patience et vos innombrables sacrifices. Que ce travail, soit pour vous une petite compensation et reconnaissance envers ce que vous m'avez fait d'incroyable pour moi. Que DIEU, le tout puissant, vous préserve et vous procure santé et longue vie afin que je puisse à mon tour vous combler.

À mes très chers frères

Mohamed Amin, Yaakoub, Younes, Ilyes et le petit Idris, je vous souhaite tous le bonheur que vous méritez. En leur souhaitant un brillant avenir.

À toute ma famille et à tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

À mes amis.

À tous ceux qui ont su m'apporter aide et soutien aux moments propices au long de mes études. Je dédie ce modeste travail, reconnaissant et remerciant chaleureusement.

Résumé

Dans ce mémoire, on a fait une synthèse sur une partie de l'article de Eugenio Sinestrari intitulé "**On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions**".

L'objectif de ce mémoire est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence, l'unicité et la régularité d'une solution classique ou stricte d'un problème de Cauchy abstrait posé sur un espace de Banach E :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x \end{cases}$$

Lorsque le second membre f est une fonction continue de petit Hölder et A est un opérateur linéaire fermé quelconque de domaine $D(A)$ vérifiant l'hypothèse

$$(H) \qquad \begin{cases} \exists\ \theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 : \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

Où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A.

INTRODUCTION

On se propose d'étudier, dans le cadre continu, l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte d'un problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x \end{cases} \tag{P}$$

tels que

▶ x est un élément d'un espace de Banach E.

▶ A est un opérateur linéaire fermé, de domaine $D_A \subset E$ non nécessairement dense et vérifiant l'hypothése fondamental suivante

$$(H) \qquad \begin{cases} \exists\, \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \ : \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

où

▶ $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A

▶ $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante de A .

Le problème abstrait de Cauchy modélise beaucoup de phénomènes en physique et en biologie, par exemple, le problème suivant (voir [16])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = -a \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x) + f(t,x) & \text{pour } (t,x) \in]0,1] \times]0,1] \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ pour tout } x \in [0,1] \\ v(t,0) = v(t,1) = 0 \text{ pour tout } t \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C([0,1], C([0,1]))$.

Posons $E := C([0,1])$. En utilisant les notations vectorielles usuelles

$$v(t,x) := v(t)(x) \qquad \text{et} \qquad f(t,x) := f(t)(x).$$

On peut introduire l'opérateur A défini par

$$\begin{cases} D(A) = C^2([0,1]) \cap C_0([0,1]) = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\} \\ Au = -au''. \end{cases}$$

Ainsi le problème (1) s'écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), & t \in]0,1] \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Ce dernier problème qui sera étudié dans un cadre plus général lorsque A est un opérateur linéaire fermé quelconque, E est un espaces de Banach, $v_0 \in E$ et $f \in C([0,T], E)$.

On va faire dans ce manuscrit une synthèse sur une partie de l'article de Eugenio Sinestrari [17] d'intitulé "**On the Absract Cauchy Probleme of Parabolic Type in Spaces of Continous Functions**".

L'objectif de ce mémoire est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur la donnée x, lorsque le second membre f est assez régulier i. e.

$$f \in h^{\theta}(0,T,E); \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

pour assurer l'existence et l'unicité

1. **D'une solution classique** de (P) i.e.,

$$u \in C(0,T,E) \cap C^1\left(0^+,T,E\right) \cap C\left(0^+,T,D_A\right)$$

vérifiant (P) pour $t \in]0,T]$. Où $C(0,T,E)$ est l'espace des fonctions continue sur $[0,T]$ dans E et

$$C\left(0^+,T,E\right) = \{u :]0,T] \to E : u \in C(\epsilon,T,E) \text{ pour tout } \epsilon \in]0,T]\}.$$

2. **D'une solution stricte** i.e.,

$$u \in C^1(0,T,E) \cap C(0,T,D_A)$$

vérifiant aussi le problème (P) pour $t \in [0,T]$.

On étudie aussi **la régularité** de la solution **stricte**, en montrant que

$$u', \ Au \in h^{\theta}(0,T,E).$$

Notons que l'étudiante Souad Ziane à réalisé dans sa thèse [25] une synthèse sur la première partie de l'article [17], concernant l'étude de problème P dans le cadre höldérien, c'est-à-dire

$$f \in C^{\theta}(0,T,E); \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux définitions fondamentales pour réaliser ce travail. Ils concernent les opérateurs, les semi-groupes, les espaces d'interpolations et les espaces fonctionnels.

Dans **le second chapitre,** on trouve des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence et la régularité d'une solution classique ou stricte d'un problème de Cauchy abstrait.

Le dernier chapitre est réservé aux exemples pour illustrer la théorie abstraite prouvée dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Rappels

On donne ici quelques rappels fondamentaux sur la théorie des opérateurs...

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel normé, on dit que c'est un espace de Banach s'il est complet. C'est-à-dire toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X.*

Exemples. Soient $(E, \mathcal{B}(E), \lambda)$ un espace mesuré, Ω un ensemble mesurable et $T > 0$. Alors

1) Tout espace vectoriel réel ou complexe de dimension fini est un espace de Banach car il est complet pour n'import quelle norme.

2) $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\lambda(x) < \infty \right\}$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

4) $C^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que la fonction $x \longmapsto f'(x)$ existe et est continue, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{C}^1([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| f'(x) \right|,$$

est un espace de Banach.

1.2 Les opérateurs

Soient X et Y deux espaces de Banach réels ou complexes. On note par $\|.\|_X$ la norme dans X ($\|.\|$ s'il n'y a pas confusion).

Définition 1.2.1 (opérateur linéaire) *Un opérateur A de X dans Y est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel (noté $D(A) \subset X$ et appelé domaine de A) à valeurs dans Y, i.e pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

(i) $A(x+y) = Ax + Ay$.

(ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

C'est-à-dire $D(A)$ est le sous espace vectoriel des éléments x de X tels que Ax ait un sens dans Y.

Définition 1.2.2 (Opérateur borné) *Un opérateur A défini de X dans Y est borné si $D(A) = X$ et*

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty.$$

Dans la suite, on note par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Définition 1.2.3 (Opérateur fermé) *On dit qu'un opérateur linéaire A est fermé si et seulement si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de $X \times Y$.

D'une manière équivalente, un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

On a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.2.4 (opérateur fermable) *On dit qu'un opérateur A est fermable si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{array} \right. \Longrightarrow y = 0$$

La plus petite extension fermée de A est notée $\overline{A}$ et s'appelle la fermeture de A et $\overline{G(A)}$ est le graphe de l'opérateur $\overline{A}$.

Théorème 1.2.1 (du graphe fermé) *Soient X, Y deux espaces de Banach. Une application linéaire f de X dans Y est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

Définition 1.2.5 *L'ensemble résolvant d'un opérateur A est*

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\}.$$

Si A est fermé, alors

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ est bijectif} \}.$$

par le théorème du graphe fermé.
La résolvante de A est $(\lambda I - A)^{-1}$ et $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ est son spectre.

On donne maintenant quelques propriétés importantes.

Propriétés :

Soit A, B deux opérateurs fermés de domaines $D(A) \subseteq X$ et $D(B) \subseteq X$.

i. Si $B \in \mathcal{L}(X, Y)$; alors $A + B$ est fermé de domaine $D(A)$.

ii. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.

iii. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.

v. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Exemple 1.2.1 *Dans l'espace $X = L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur*

$$Au = u' \quad D(A) = H^1(\mathbb{R}),$$

est fermé.

1.3 Les semi-groupes

Définition 1.3.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateur linéaire dans X. On dit que cette famille forme un semi groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I$.
2. $\forall\, (t,s) \geq 0,\ G(t+s) = G(t) + G(s)$.

   Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on dit qu'on a un groupe.

Définition 1.3.2 *On dit qu'un semi groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ est continu, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe.

Proposition 1.3.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe, alors il existe $\omega \geq 0$, $M \geq 1$ tels que*

$$\forall t \geq 0 \ \text{on a} \ \|G(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.3.3 *Un semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaire borné si*

$$\lim_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3.1 *Soit A un opérateur fermé non nécessairement borné à demaine dense dans X (i.e $\overline{D(A)} = X$) alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ si, et seulement s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que*

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \lambda_0\} \subset \rho(A) \ \text{et} \ \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda};\ \lambda > \lambda_0.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.4 *On appelle semi-groupe analytique de type $\theta \in \left]\pi/2, \pi\right[$ toute application G définie sur l'ensemble*

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\}$$ S

à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que

1. $z \mapsto G(z)$ est analytique sur S_θ.

2. $\forall x \in E$, $G(0) = I$ et

$$\lim_{z \in S_\theta \quad z \to 0} G(z)\, x = x$$

3. $\forall z_1, z_2 \in S_\theta$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.

Proposition 1.3.2 *Si A génère un semi groupe analytique $G(t)$, alors il est défini par l'intégrale de Dunford*

$$G(t)\, x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{tz} (zI - A)^{-1} x dz := e^{tA} x.$$

où γ est une courbe simple définie par

$$\gamma = \{z \in C : |z| = 1 \text{ et } |\arg z| \leq \theta\} \cup \left\{z \in C : z = re^{\pm i\theta} \text{ et } r \geq 1\right\}.$$

vérifiant

i. *$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$ pour $t, s \geq 0$.*

ii. *$e^{At} x \in D\left(A^k\right)$ pour $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}^*$.*

iii. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe M_k (dépendant de M et θ) telle que*

$$\left\| t^k A^k e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_k \qquad \text{pour } t > 0.$$

iv. *pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, dans $\mathcal{L}(X)$ on a*

$$\frac{d^k e^{At}}{dt^k} = A^k e^{At}.$$

et $t \to e^{At}$ peut-être prolongée analytiquement dans un secteur contenant la demi-droite positive.

v. *$Ae^{At} x = e^{At} Ax$ pour $t > 0$ et $x \in D_A$.*

vi. *$R(\lambda, A)\, e^{At} = e^{At} R(\lambda, A)$ pour $t > 0$ et $\lambda \in \rho(A)$.*

1.3.3 Théorème de Kato

Théorème 1.3.2 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire vérifiant*

(1) *A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*

(2) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *et* $\exists M > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant

(1) $\exists C > 0,\ \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C.$

(2) $\forall t > 0,\ G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ *et* $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}.$

Remarque 1.3.1 *Lorsque $D(A)$ n'est pas dense dans X l'influences de $t \to e^{At}x$ au voisinage de 0 est donné par la proposition suivante*

Proposition 1.3.3 *On suppose que A vérifie l'hypothèse suivante*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\textit{ et } M > 0 \textit{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \textit{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \end{array} \right. \tag{H}$$

Alors

1. Si $x \in \overline{D(A)}$, alors
$$\lim_{t \to 0} e^{At}x = x.$$
Inversement, s'il existe
$$\lim_{t \to 0} e^{At}x = y.$$
alors $x \in \overline{D(A)}$ et $y = x$.

2. Pour tout $x \in X$ et $t > 0$, on a $\int_0^t e^{At}xds \in D(A)$ et
$$A\int_0^t e^{As}xds = x - e^{At}x. \tag{1.3.1}$$
donc
$$\int_0^t e^{As}xds = e^{At}x - x.$$
où $s \longmapsto \left\|Ae^{As}x\right\| \in L^1([0,t], \mathbb{R}).$

3. Si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors :

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax.$$

Inversement, si $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{At}x - x}{t}$ existe et vaut y, alors $x \in D(A)$, $Ax \in \overline{D(A)}$ et $Ax = y$.

4. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \int_0^t e^{At}xds = y$ existe si et seulement si $y = x \in \overline{D(A)}$.

5. On a

$$\begin{aligned}\left\{x \in X : \exists \lim_{t\to 0} Ae^{At}x\right\} &= \left\{x \in X : \lim_{t\to 0} Ae^{At}x = Ax\right\} \\ &= \left\{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\right\}.\end{aligned}$$

Preuve. Soit $\lambda \in \rho(A)$.

1. On sait que pour tout $x \in D(A)$, on a $\lim\limits_{t\to 0} e^{At}x = x$ et le résultat reste vraie pour $x \in \overline{D(A)}$ car $\left(e^{At}\right)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(X)$. Pour l'inverse supposons que $\lim\limits_{t\to 0} e^{At}x = y$ alors

$$(\lambda I - A)^{-1} y = \lim_{t\to 0} (\lambda I - A)^{-1} e^{At}x = \lim_{t\to 0} e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x$$

de la première partie $(\lambda I - A)^{-1} x \in D(A)$, en on déduit que

$$\lim_{t\to 0} e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x = (\lambda I - A)^{-1} x$$

en plus

$$(\lambda I - A)^{-1} y = (\lambda I - A)^{-1} x$$

donne $y = x$. Comme $e^{At}x \in D(A)$ pour $t > 0$, on obtient

$$x = \lim_{t\to 0} e^{At}x \in \overline{D(A)}$$

2. Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après la proposition (1.3.3) point (4) et (5) on obtient

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^t e^{As}xds &= \int_\varepsilon^t (\lambda I - A) e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds \\ &= \lambda \int_0^t e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds - \int_\varepsilon^t \frac{d}{ds}\left(e^{As} (\lambda I - A)^{-1} x\right) ds \\ &= \lambda \int_\varepsilon^t e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds - e^{As} (\lambda I - A)^{-1} x + e^{A\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} x\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$, on déduit de 1.

$$\int_0^t e^{As} x ds = \lambda (\lambda I - A)^{-1} \int_0^t e^{As} x ds - (\lambda I - A)^{-1} \left(e^{As} x - x\right) \qquad (1.3.2)$$

ceci montre que

$$\int_0^t e^{As} x \in D(A),$$

en appliquant $(\lambda I - A)$ à la relation $(1.3.2)$ on obtient $(1.3.1)$.

3. Supposons que $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors d'après point 2 de la Proposition 1.3.3 on trouve

$$\frac{e^{At} x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t e^{As} Ax ds$$

ce dernier tendre vers Ax quand $t \to 0$, en vertu de premier point de cette proposition. Inversement, $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{At} x - x}{t} = y$ donne $\lim_{t \to 0} e^{At} x = x$ en plus $x \in \overline{D(A)}$ ceci nous permis de déduire que $y \in \overline{D(A)}$. Grace a $(1.3.2)$ on obtient

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= \lim_{t \to 0} (\lambda I - A)^{-1} \frac{e^{At} x - x}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\lambda (\lambda I - A)^{-1} \frac{1}{t} \int_0^t e^{At} x ds - \frac{1}{t} \int_0^t e^{At} x ds \right] \\
&= \lambda (\lambda I - A)^{-1} x \\
&= x
\end{aligned}$$

ceci implique $x \in D(A)$.

4. De $(1.3.2)$ on déduit que $\forall x \in X$ et $t > 0$

$$\left[\lambda (\lambda I - A)^{-1} - I\right] \frac{1}{t} \int_0^t e^{At} x ds = \frac{e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x - (\lambda I - A)^{-1} x}{t}$$

par conséquent ; il existe

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \exp(At) x ds \right) = y$$

alors par (point 3. Proposition 1.3.3), on obtient

$$\lambda (\lambda I - A)^{-1} x = -x + \lambda (\lambda I - A)^{-1} x \in \overline{D(A)}$$

et donc $x \in \overline{D(A)}$ et selon (point 1. Proposition 1.3.3) on trouve

$$y = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t e^{At} x ds \right) = x$$

l'inverse est une conséquence de **1**.

5. Supposons que

$$\lim_{t \to 0} Ae^{At} x = y.$$

Alors $s \to Ae^{As}x$ est dans $L^\infty([0,T], X)$, pour tout $t > 0$ et de (2. Proposition 1.3.3) on obtient

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{At}x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t Ae^{As} x ds = y$$

Ainsi, de (3. Proposition 1.3.3) on déduit que

$$x \in D(A), \; Ax \in \overline{D(A)} \;\; et \;\; y = Ax.$$

Inversement, supposons que $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$ alors

$$\lim_{t \to 0} Ae^{At} x = \lim_{t \to 0} e^{At} Ax = Ax$$

en vertu de (1. Proposition 1.3.3).

Remarque 1.3.2 *Si $D(A)$ n'est pas dense dans X et A vérifie l'hypothèse (H) alors $\left(e^{At}\right)_{t \geq 0}$ génère un semi groupe analytique non fortement continue en 0. Mais la restriction de A sur $\overline{D(A)}$ génère un semi groupe analytique fortement continue.*

Proposition 1.3.4 *Soit l'opérateur A vérifie l'hypothèse (H). On définit l'ensemble*

$$E_0 = \overline{D(A)}$$

muni de la norme de X, et l'opérateur $A_0 : D(A_0) \subset E_0 \longrightarrow E_0$ où

$$\begin{cases} D(A_0) = \left\{ x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)} \right\} \\ A_0 x = Ax \quad pour \; x \in D(A_0). \end{cases} \tag{1.3.3}$$

L'opérateur A_0 est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, $t \to e^{A_0 t}$ dans E_0, fortement continue pour $t \geq 0$. En plus, on a

$$e^{A_0 t} x = e^{At} x$$

pour $t > 0$ et $x \in \overline{D(A)}$.

1.4 Les espaces d'interpolation

On désigne par E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est-à-dire $E_0 \hookrightarrow E$, $E_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$E_0 \cap E_1 \text{ et } E_0 + E_1$$

munis des normes

$$\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1},$$

et

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x=x_0+x_1, \quad x_i \in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\right).$$

Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.1 *Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre E_0 et E_1 tout espace de Banach E tel que*

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Les espaces $E_i, i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.2 *Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre E_0, E_1 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i) \; \forall t > 0, \exists u_i(t) \in E_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) \; t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(R_+, E_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(R_+, E_1) \end{cases}$$

où

$$L^p_*(E) = \left\{ f :]0, \infty[\to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p_E \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

1.4.1 Propriétés des espaces $(E_0, E_1)_{\theta,p}$

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in]0, 1[$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\omega,q}$.

2) Si $p \leqslant q$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q}$.

3) Si $E_0 = E_1$ alors $(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1$.

4) Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$((E_0, E_1)_{\theta,p}, (E_0, E_1)_{\omega,q})_{t,r} = (E_0, E_1)_{\alpha,r},$$

avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

1.4.2 Cas particulier $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans E. Posons

$$E_0 = D(A) \text{ et } E_1 = E,$$

alors

$$E_0 \cap E_1 = D(A) \text{ et } E_0 + E_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho\,(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

alors

$$\begin{array}{rcl} (D\,(A)\,, E)_{\theta,p} & = & D_A\,(1-\theta, p) \\ & = & \left\{ x \in E : \left\| t^{1-\theta} A\,(A-t)^{-1}\, x \right\|_E \in L^p_* \right\}. \end{array}$$

Théorème 1.4.1 (de Lions) *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $\left(e^{At}\right)_{t \geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in \left]0,1\right[$*

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \left\| t^{\theta-1} \left(e^{At} - I\right) x \right\|_E \in L^p_* \right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \left\| t^{\theta-1} \left(e^{At} - I\right) x \right\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

avec les modifications usuelles si $p = \infty$.

Définition 1.4.3 *Pour tout* $\theta \in]0,1[$, *on définit l'espace*

$$D_A(\theta,\infty) = \left\{ x \in E : \|x\|_\theta = \sup_{t>0} \left\| t^{1-\theta} A e^{At} x \right\| < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} = \|x\| + \|x\|_\theta .$$

est un espace de Banach et le sous-espace $D_A(\theta)$ *de* $D_A(\theta,\infty)$ *défini par*

$$D_A(\theta) = \left\{ x \in E : \lim_{t \to 0} t^{1-\theta} A e^{At} x = 0 \right\}.$$

muni de la norme de $D_A(\theta,\infty)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.4.4 *Pour tout* $\theta \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$D_A(\theta+k,p) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta,p) \right\},$$

$$D_A(\theta+k) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta) \right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\| A^k x \right\|_{D_A(\theta,p)} .$$

Propriétés des espaces $(D(A), E)_{\theta,p}$

On a pour tout $\theta \in]0,1[$

1. $D(A) \subset D_A(\theta) \subset D_A(\theta,\infty) \subset \overline{D(A)}$.

2. $D_{A_0}(\theta,\infty) = D_A(\theta,\infty)$ et

$$D_{A_0}(\theta) = D_A(\theta)$$

où A_0 est un opérateur défini par (1.3.3).

3. Si $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, alors

$$D_A(\theta_2) \subset D_A(\theta_2,\infty) \hookrightarrow D_A(\theta_1) \subset D_A(\theta_1,\infty)$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta_1,\infty)} \leq (1+M_1) \|x\|_{D_A(\theta_2,\infty)} \tag{1.4.1}$$

pour $x \in D_A(\theta_2, \infty)$. D'autre part on a

$$D_A \hookrightarrow D_A(\theta, \infty) \subset E$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} \leq (M_0 + M_1) \|x\|_{D_A},$$

pour $x \in D_A$ et $\theta \in]0, 1[$.

4. On note par $\overline{D}^{\theta}_{A_0}$ la fermeture de

$$D_{A_0} = \left\{x \in D_A : Ax \in \overline{D_A}\right\}$$

dans $D_A(\theta, \infty)$, on a

$$\overline{D}^{\theta}_{A_0} = D_A(\theta)$$

5. Soit $\theta \in]0, 1[$. Les espaces

$$D_A(\theta, \infty) \text{ et } D_A(\theta)$$

sont invariant par $A^n e^{At}$ et $R(\lambda, A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ et on a

$$\begin{aligned} \left\|A^n e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty))} &\leq \left\|A^n e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \\ \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty))} &\leq \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)}. \end{aligned}$$

6. On pose pour tout $\theta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} D_A(\theta + 1, \infty) &= \{x \in D_A : Ax \in D_A(\theta, \infty)\} \\ D_A(\theta + 1) &= \{x \in D_A : Ax \in D_A(\theta)\}. \end{aligned}$$

Alors, l'opérateur A_1 défini par

$$\begin{cases} A_1 : D_A(\theta + 1, \infty) \subset D_A(\theta, \infty) & \longrightarrow & D_A(\theta, \infty) \\ x & \longmapsto & A_1 x = Ax \quad \text{pour } x \in D_A(\theta + 1, \infty) \end{cases}$$

vérifie l'hypothèse (S), donc génère un semi-groupe analytique borné en $D_A(\theta, \infty)$, qu'est la restriction de e^{At} à $D_A(\theta, \infty)$.

D'autre part, l'opérateur A_2 défini par

$$\begin{aligned} A_2 &: D_A(\theta + 1) \subset D_A(\theta) \longrightarrow D_A(\theta) \\ A_2 x &= Ax \text{ pour } x \in D_A(\theta + 1) \end{aligned}$$

génère aussi un semi groupe analytique borné, fortement continu pour $t \geq 0$, qu'est la restriction de e^{At} à $D_A(\theta)$.

7. L'opérateur A' défini par

$$\begin{aligned} A' \quad &: \quad {D_A}^2 \subset D_A \longrightarrow D_A \\ A'x \quad &= \quad Ax \text{ pour } x \in D_{A^2}. \end{aligned}$$

vérifie l'hypothèse (S). En plus, on a

$$D_A(\theta+1,\infty) = D_{A'}(\theta+1,\infty) \text{ et } D_A(\theta+1) = D_{A'}(\theta+1)$$

7. Si $x \in D_A(\theta,\infty)$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ on a

$$\left\| t^{n-\theta} A^n e^{At} x \right\| \leq M_{n,\theta} \left\| x \right\|_\theta .$$

On pose $M_{1,\theta} = 1$, et

$$M_{n,\theta} = n^{n-\theta} (n-1)^{1-n} M_{n-1} \text{ pour } n > 1.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty);E)} &\leq M_0 \\ \left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty);E)} &\leq \frac{M_{n,\theta}}{t^{n-\theta}} \quad \text{pour } n > 0 \end{aligned}$$

8. Si $x \in E$, alors on a les propriétés suivantes

$$x \in D_A(\theta,\infty) \Longleftrightarrow \left\| x \right\|_\theta^* = \sup_{t>0} \frac{\left\| e^{At}x - x \right\|}{t^\theta} < \infty \tag{1.4.2}$$

$$x \in D_A(\theta) \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{e^{At}x - x}{t^\theta} = 0 \tag{1.4.3}$$

$$x \in D_A(\theta,\infty) \Longleftrightarrow \left\| x \right\|_\theta^{**} = \sup_{t>0} \left\| t^{2-\theta} A^2 e^{At} x \right\| < \infty \tag{1.4.4}$$

$$x \in D_A(\theta) \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} t^{2-\theta} A^2 e^{At} x = 0 \tag{1.4.5}$$

en plus, on a

$$x \in D_A(\theta) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \left\| e^{At}x - x \right\|_{D_A(\theta,\infty)} = 0 \tag{1.4.6}$$

9. Pour $0 < \alpha < \theta < 1$ et $t > 0$, on a

$$\left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(E, D_A(\theta,\infty))} \leq M_0 + \frac{M_1}{t^\theta} \tag{1.4.7}$$

$$\left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty), D_A(\theta,\infty))} \leq \max(M_0, \frac{1}{t^{\theta-\alpha}})$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(E, D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M_n}{t^n} + \frac{M_{n+1}}{t^{n+\theta}} \tag{1.4.8}$$

$$\left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty), D_A(\theta,\infty))} \leq M_{n+1,\alpha}. \max(\frac{1}{t^n}, \frac{1}{t^{n+\theta-\alpha}})$$

où

$$M_{n+1,\alpha} = (n+1)^{n+1-\alpha} n^{-n} M_n \text{ pour } n > 0.$$

10. Pour $0 < \alpha < \theta < 1$ et $t > 0$, on a

$$\left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty), D_A(\theta,\infty))} \leq M_0 \left(1 + M_1\right)$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty), D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M_n \left(1 + M_1\right)}{t^n}.$$

$$\left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty), D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M'_{n,\alpha}}{t^{n-\alpha}} + \frac{M''_{n,\alpha,\theta}}{t^{n-\alpha+\theta}}.$$

où

$$M'_{n,\alpha} = 2^{n-\alpha} M_0 M_{n,\alpha} \text{ et } M''_{n,\alpha,\theta} = 2^{n+\theta-\alpha} M_1 M_{n,\alpha}$$

11. Soit $A : D_A \subset E \longrightarrow E$ et $B : D_B \subset E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires vérifient l'hypothèse (H). Si $D_A = D_B$ donc

$$D_A\left(\theta, \infty\right) \backsimeq D_B\left(\theta, \infty\right) \text{ et } D_A\left(\theta\right) = D_B\left(\theta\right)$$

pour tout $\theta \in \left]0, 1\right[$.

1.5 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $a = (a_1, a_2, ..., \alpha_{an})$ un multi-indice, avec $|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et on utilise la notation

$$\partial^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n}.$$

1.5.1 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sp+n}} dx dy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, E)$. Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, on définit

$$B^s_{p,q}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a

$$B^s_{p,p}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

1.5.2 Les espaces de Hölder

On considère :

- L'ensemble $\mathcal{B}(\Omega, E)$ qui désigne l'espace des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que f est bornée.
- L'ensemble $C(\Omega, E)$ qui désigne l'espace des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que f est continue.
- Notons $C_b(\Omega, E) := \mathcal{B}(\Omega, E) \cap C(\Omega, E)$ i.e.,

$$C_b(\Omega, E) = \{f : \Omega \to E : f \text{ est bornée et continue}\}.$$

On a

$$\|f\|_{C_b(\Omega,E)} = \|f\|_{C(\Omega,E)} = \|f\|_{\mathcal{B}(\Omega,E)} = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$:

L'ensemble $C^m(\Omega, E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que la fonction $x \longmapsto \partial^\alpha f(x)$ existe et est continue pour tout $|\alpha| \leqslant m$ i.e.,

$$\mathbf{C}^m(\Omega, E) = \{f : \Omega \to E, \partial^\alpha f \in C(\Omega, E)\,; |\alpha| \leqslant m\}$$

L'ensemble $C_b^m(\Omega, E)$ est un sous espace vectoriel de $C^m(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées sur Ω **i.e.,**

$$\mathbf{C}_b^m(\Omega, E) = \{f \in C^m(\Omega, E) : \partial^\alpha f \in C_b(\Omega, E)\,; \alpha = 0, ..., m\} \subset \mathbf{C}^m(\Omega, E)$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{C_b^m(\Omega,E)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} \|\partial^\alpha f(x)\|_E .$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$:

– L'ensemble $C^\alpha(\Omega, E)$ est l'espace de Hölder d'exposant α des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que

$$\begin{cases} \sup\limits_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E < \infty, \\ \exists C > 0, \forall x, y \in \Omega : \|f(x) - f(y)\|_E \leqslant C\,|x - y|^\alpha . \end{cases} \tag{1.5.1}$$

i.e.,

$$\mathbf{C}^\alpha(\Omega, E) = \left\{ f \in C_b(\Omega, E) : [f]_{C^\alpha(\Omega,E)} = \sup_{x,y \in \Omega, y < x} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{(x - y)^\alpha} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^\alpha(\Omega,E)} &= \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E + \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} \\ &= \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha(\Omega,E)} . \end{aligned}$$

– Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$C^{\alpha+k}(\Omega, E) = \left\{ f \in C_b^k(\Omega, E) : \partial^k f \in C^\alpha(\Omega, E) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\alpha+k}(\Omega,E)} = \|f\|_{C_b^k(\Omega,E)} + [f]_{C^\alpha(\Omega,E)} .$$

les espaces $C^\alpha(\Omega, E)$**,** $C^{\alpha+k}(\Omega, E)$ sont des espaces de Banach.

Remarques.

1. Il suffit de supposer $\|x-y\|_2 \leq \delta$ dans 1.5.1, où δ est un nombre positif très petit. Car pour $\|x-y\|_2 \geq \delta$ on a toujours

$$\begin{aligned} \|f(x)-f(y)\|_E &\leqslant 2\sup_{x\in\Omega}\|f(x)\|_E \\ &\leq 2\sup_{x\in\Omega}\|f(x)\|_E \frac{\|x-y\|_2^{\alpha}}{\delta^{\alpha}} \\ &\leq C\,\|x-y\|_2^{\alpha} \end{aligned}$$

2. Les espaces de Hölder sont intermédiaires entre C_b^0 et C_b^1, c'est -à-dire

$$C_b^1(\Omega;E) \subset C^{\alpha}(\Omega,E) \subset C_b^0(\Omega;E).$$

La première inclusion se déduit du Théorème des accroissements finis et du fait que

$$\|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_2^{\alpha}$$

pour

$$\|x-y\|_2 \leq 1$$

et $\alpha \in \ ]0,1[$.

3. Les fonctions de $C^{\alpha}(\Omega;E)$ sont uniformément continues sur Ω.

Proposition 1.5.1 *Toute fonction f de $C^{\alpha}(\Omega;E)$, $\alpha \in]0,1[$ se prolonge à une fonction de $C^{\alpha}(\overline{\Omega};E)$. En particulier*

$$C^{\alpha}(\Omega;E) \subset C^{0}(\overline{\Omega};E).$$

On écrira

$$C^{\alpha}(\Omega;E) = C^{\alpha}(\overline{\Omega};E).$$

1.5.3 Les espaces des fonctions continues de petit Hölder

Les espaces de petits Hölder sont des sous espaces de $C^{\alpha}(\Omega;E)$, définis par

$$h^{\alpha}(\Omega;E) = \left\{ f \in C^{\alpha}(\Omega;E) : \lim_{x\to+\infty} \sup_{0<\|x-y\|_2\leq\delta} \frac{\|f(x)-f(y)\|_2}{\|x-y\|_2^{\alpha}} = 0 \right\}.$$

en plus $h^{\alpha}(\Omega;E)$ muni de la norme induite de $C^{\alpha}(\Omega;E)$ est un espace de Banach.

Or, pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $h^{k+\alpha}(\Omega; E)$ par

$$h^{k+\alpha}(\Omega; E) = \left\{ f \in C_b^k(\Omega; E) : \partial^k f \in h^{\alpha}(\Omega, E) \right\}$$

muni de la norme induite $C^{\alpha+k}(\Omega, E)$. En plus $h^{k+\alpha}(\Omega; E)$ est un espace de Banach.

1) On a $h^{\alpha}(\Omega; E) \subset C^{\alpha}(\Omega; E)$.

2) Pour $0 < \alpha < 1$ et $\theta > \alpha$, on a $h^{\alpha}(\Omega; E)$ est la fermeture de $C^{\theta}(\Omega; E)$ dans $C^{\alpha}(\Omega; E)$ (voir Berroug [5]).

3) On a pour $\varepsilon \in \left]0, \alpha\right[$ et k un entier supérieur ou égal à 2, les inclusions suivantes

$$C_b^k(\Omega; E) \subset C_b^1(\Omega; E) \subset h^{\alpha}(\Omega; E) \subset h^{\alpha-1}(\Omega; E) \subset C^{\alpha-1}(\Omega; E) \subset C_b^0(\Omega; E).$$

Remarque 1.5.1 ♦ *La dernière inclusion est déjà vue dans les propriétés des espaces de Hölder.*

♦ *Pour la deuxième on utilise l'inégalité des accroissements finis.*

♦ *Quand à la quatrième, on a pour $f \in C^{\alpha}(\Omega; E)$ et $0 < \|x - y\|_2 < \delta$*

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x - y\|_2^{\alpha}} \|x - y\|_2^{\epsilon} \leq \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x - y\|_2^{\alpha}} \delta^{\epsilon} \leq C\delta^{\epsilon}$$

D'où le résultat.

4) f est une fonction de $h^{\alpha}(\Omega; E)$ si et seulement si elle vérifie la propriété

$$\begin{cases} \forall \delta > 0, \exists C(\delta) > 0 : \forall x, y \in \Omega, \\ \|x - y\|_2 \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_E \leq C(\delta) \|x - y\|_2^{\alpha} \end{cases} \tag{1.5.2}$$

où

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0^+} C(\delta) = 0.$$

5) Soit f une fonction de $h^{\alpha}(\Omega; E)$ avec $\alpha \in \left]0, 1\right[$, alors f se prolonge en une fonction de $h^{\alpha}(\overline{\Omega}; E)$. Pour cela on confondra par la suite ces deux espaces.

Preuve. Soit f une fonction de $h^{\alpha}(\Omega; E)$ avec $\alpha \in \left]0, 1\right[$. Posons pour $x \in \overline{\Omega}, (x_n)_n \subset \Omega$ telle que $x_n \longrightarrow x$:

$$F(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n),$$

D'après la Proposition 1.5.1, la fonction $F \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}; E)$.

Soient $\delta > 0$ et $x, y \in \overline{\Omega}$ avec

$$\|x - y\|_2 \leq \delta.$$

Alors $x_n \longrightarrow x$, et $y_n \longrightarrow y$ et pour n grand on a

$$\|x_n - y_n\|_2 \leq 2\delta,$$

donc, d'après 1.5.2, on a

$$\|f(x_n) - f(y_n)\|_E \leq C(2\delta)\, \|x_n - y_n\|_2^{\alpha}$$

par passage à la limite, on obtient

$$\|F(x) - F(y)\|_E \leq C(2\delta)\, \|x_n - y_n\|_2^{\alpha}$$

C'est-à-dire

$$F \in h^{\alpha}(\overline{\Omega}; E).$$

6) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi

$$h^{k+\alpha}(\Omega; E) = \{f \in h^{\alpha}(\Omega; E) : \partial^{\gamma} f \in h^{\alpha}(\Omega; E) \quad \textit{pour } \gamma : |\gamma| \leq k.\}$$

Dans le cas où $\Omega := I$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on a la proposition suivante qui donne une autre caractérisation importante des espace de petits Hölder dans la pratique.

Proposition 1.5.2 *Soient $\alpha \in]0, 1[$et $\theta > \alpha$. Alors $h^{\alpha}(I; E)$ est la fermeture de $C^{\theta}(I; E)$ dans $C^{\alpha}(I; E)$. On a aussi des résultats similaires, pour tout $k \in]\alpha, +\infty[$:*

$$\begin{cases} h^{\alpha}(\mathbb{R}^n; E) = \overline{C^k(\mathbb{R}^n; E)}^{C^{\alpha}(\mathbb{R}^n; E)}, \\ h^{\alpha}(\overline{\Omega}; E) = \overline{C^k(\overline{\Omega}; E)}^{C^{\alpha}(\overline{\Omega}; E)}. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier.

Chapitre 2

Problème de Cauchy abstrait

2.1 Position du problème

On considère le problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution (stricte ou classique) du problème (2.1.1) lorsque $f \in C([0,T]; E)$ et $x \in E$.

Conséquences.

1. Si u est une solution classique de (2.1.1), alors on a

$$u(0) \in \overline{D(A)}, \quad u'(t) \in \overline{D(A)} \qquad 0 < t \leq T. \tag{2.1.2}$$

2. Si u est une solution stricte de (2.1.1) , on a également

$$u(0) \in D(A) \text{ et } u'(0) = Au(0) + f(0) \in \overline{D(A)}. \tag{2.1.3}$$

2.2 Représentation de la solution

Si u est une solution classique de (2.1.1) alors pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$u(t) = e^{At} + \left(e^{At} * f\right)(t) \tag{2.2.1}$$

où

$$\left(e^{At} * f\right)(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds = \int_0^t e^{As} f(t-s)\, ds \tag{2.2.2}$$

en plus la solution classique de (2.1.1) est unique et vérifie

$$\|u\|_{C([0,T],E)} \leq M_0 T \|f\|_{C([0,T],E)} + M_0 \|x\|.$$

Preuve. Soient u une solution classique de (2.1.1) dans $[0,T]$ et $t \in \left]0,T\right]$ fixé.
Comme $u(t) \in D(A)$, on déduit de la Proposition (1.3.2) que la fonction

$$v(s) = e^{A(t-s)} u(s) \qquad 0 \leq s \leq t.$$

appartient à $C(0,t;E)$ et que pour tout $s \in \left]0,t\right[$ il existe

$$v'(s) = e^{A(t-s)} u'(s) - A e^{A(t-s)} u(s) = v(t) = e^{A(t-s)} f(s).$$

D'autre part, si $0 < 2\epsilon < t$ on trouve

$$v(t-\epsilon) - v(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} e^{A(t-s)} f(s)\, ds,$$

lorsque $\epsilon \to 0$, on obtient

$$v(t) = v(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds,$$

où $v(t) = u(t)$ et $v(0) = e^{At} u(0)$ donc

$$u(t) = e^{At} u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds.$$

Or, d'après la Proposition (1.3.2) on a

$$\|u\|_{C([0,T],E)} = \max_{t \in [0;T]} \|u(t)\|_E \leq M_0 T \|f\|_{C([0,T],E)} + M_0 \|x\|$$

Définition 2.2.1 *Soit $f \in C([0,T];E)$ et $x \in \overline{D(A)}$. On dit que la fonction définie par* (2.1.3) *est une solution faible de* (2.1.1).

Remarque. La condition $x \in \overline{D(A)}$ est donnée pour garantir la continuité de la solution faible en $t = 0$.

On note que $\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$ est l'espace des fonctions bornées dans $D_A(\gamma,\infty)$ à valeurs de $[0,T]$. Les propriétés de la solution faible seront données dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 *Soit $T > 0$ et $\gamma \in]0,1[$; on a pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$*

$$C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty)) \hookrightarrow C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon)). \qquad (2.2.3)$$

et pour chaque $u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$, il existe K une constante dépende de $(M_1; T^{\gamma-\epsilon})$ telle que

$$\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq K \max\left\{\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}, \|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))}\right\}$$

En plus

$$h^{\gamma}(0,T;E) \cap C(0.T;D_A(\gamma,\infty)) \subset h^{\epsilon}(0,T;D_A(\gamma-\epsilon)) \qquad (2.2.4)$$

Preuve. Soit $u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$ alors, selon les propriétés des espaces d'interpolation ; $u(t) \in D_A(\gamma-\epsilon)$ pour $t \in [0,T]$ et $\epsilon \in]0,\gamma[$ d'autre part quand $0 \leq t \leq t+k \leq T$ on a

$$\begin{aligned}
& \|u(t+k)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)} \\
= \; & \|u(t+k)-u(t)\| + \sup_{s>0}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\| \\
\leq \; & \|u(t+k)-u(t)\| \\
& + \max\left\{\sup_{s<k}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\|, \sup_{s\geq k}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\|\right\} \\
\leq \; & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.k^{\gamma} \\
& + \max\left\{k^{\epsilon}\sup_{s<k}\left\|s^{1-\gamma}Ae^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\|, k^{\epsilon-\gamma}\sup_{s\geq k}\left\|sAe^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\|\right\} \\
\leq \; & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.k^{\gamma-\epsilon}.k^{\epsilon} \\
& + \max\left\{k^{\epsilon}\sup_{s<k}\left\|s^{1-\gamma}Ae^{As}[u(t+k)-u(t)]\right\|, k^{\epsilon-\gamma}M_1.\|u(t+k)-u(t)\|\right\} \\
\leq \; & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.T^{\gamma-\epsilon}.k^{\epsilon} + \max\left\{k^{\epsilon}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, k^{\epsilon-\gamma}M_1.\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.k^{\gamma}\right\}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|u(t+k)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)} \leq k^{\epsilon}\left(\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.T^{\gamma-\epsilon} + \max\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, M_1.\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.\right\}\right)$$

d'où $u \in C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))$. En utilisant (1.4.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))} &= \sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)}+\sup_{t,t+k\in[0,T]}\frac{\|u(t+k)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)}}{k^{\epsilon}} \\
&\leq (1+M_1)\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{D_A(\gamma)}+\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}T^{\gamma-\epsilon} \\
&\quad +\max\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, M_1\|u\|_{\gamma}\right\} \\
&\leq (1+M_1)\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}+\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}T^{\gamma-\epsilon} \\
&\quad +\max\left\{\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}, M_1\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}\right\} \\
&\leq \left(1+M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right) \\
&\quad +\max\{1,M_1\}.\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}
\end{aligned}$$

Si $M_1 \geq 1$ on trouve

$$\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))}\leq\left(1+2M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right)$$

et pour $M_1 < 1$; on trouve

$$\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))}\leq\left(2+M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right).$$

Pour montrer (2.2.4), en utilisant l'inclusion $h^{\gamma}([0,T];E)\subset C^{\gamma}([0,T];E)$ et le fait que pour tout $u\in h^{\gamma}([0,T];E)$ on a

$$\|u\|_{h^{\gamma}([0,T];E)}=\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}$$

En plus, toute fonction continue sur un compact est bornée c'est-à-dire

$$C([0,T];D_A(\gamma))\subset\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))$$

Donc pour

$$u\in h^{\gamma}(0,T;E)\cap C(0.T;D_A(\gamma,\infty))\subset C^{\gamma}([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$$

on trouve, si $M_1\geq 1$

$$\|u\|_{h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))}\leq\left(1+2M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{C([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{h^{\gamma}([0,T];E)}\right)$$

et pour $M_1<1$, on a

$$\|u\|_{h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))}\leq\left(2+M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{C([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{h^{\gamma}([0,T];E)}\right).$$

d'où l'inclusion (2.2.4).

Proposition 2.2.2 *Soit $T > 0$, on a pour tout $\theta \in]0,1[$*

$$C^1([0,T];E) \cap C([0,T];D_A) \subset h^{1-\theta}([0,T];D_A(\theta)). \tag{2.2.5}$$

Preuve. Soit $u \in C^1([0,T];E) \cap C([0,T];D_A)$ donc u est une solution stricte (et classique) de problème P, donc selon 2.1.2 $u'(t) \in \overline{D(A)}$, et d'après 1) de la Proposition 1.3.3, on a

$$\lim_{s\to 0} e^{sA}u'(t) = u'(t)$$

c'est-à-dire, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que $|s-0| \leq \delta$ on a

$$\left\| u'(t) - e^{\delta A}u'(t) \right\| = \| u'(t) - u'_\delta(t) \| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0,T]$$

où $u_\delta(t) = e^{\delta A}u(t)$.

pour $0 \leq t < t+\tau \leq T$ on a $u(t) \in D_A(\theta)$ et

$$\begin{aligned} & \frac{\|u(t+\tau) - u(t)\|_{D_A(\theta)}}{\tau^{1-\theta}} \\ \leq \; & \frac{\|u(t+\tau) - u(t)\|}{\tau^{1-\theta}} + \sup_{0<s<\tau} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} [u(t+\tau) - u(t)] \right\|}{\tau^{1-\theta}} \\ & + \sup_{\tau<s<T} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} [u(t+\tau) - u(t)] \right\|}{\tau^{1-\theta}}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 quand $\tau \to 0$ car $u \in C^1([0,T];E)$, et $Au \in C([0,T];E)$, pour le dernier, en effet

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau<s<T} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} [u(t+\tau) - u(t)] \right\|}{\tau^{1-\theta}} \\ \leq \; & \sup_{\tau<s<T} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} [u(t+\tau) - u(t) - u_\delta(t+\tau) + u\delta(t)] \right\|}{\tau^{1-\theta}} \\ & + \sup_{\tau<s<T} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} [u_\delta(t+\tau) - u_\delta(t)] \right\|}{\tau^{1-\theta}} \\ \leq \; & \sup_{\tau<s<T} \frac{\left\| s^{1-\theta} A e^{As} \left[\int_t^{t+\tau} u'(\xi) - u_\delta(\xi)\, d\xi \right] \right\|}{\tau^{1-\theta}} + \frac{\|u_\delta(t+\tau) - u_\delta(t)\|_{D_A(\theta)}}{\tau^{1-\theta}} \\ \leq \; & M_1.\epsilon + \frac{\|u_\delta(t+\tau) - u_\delta(t)\|_{D_A(\theta)}}{\tau^{1-\theta}} \end{aligned}$$

en plus

$$u_\delta \in C^1([0,1], D_A) \subset h^{1-\theta}([0,1], D_A(\theta)).$$

Donc le troisième terme tend vers 0 lorsque $\tau \to 0$. Ce qui implique que $u \in h^{1-\theta}([0,1], D_A(\theta))$.

Proposition 2.2.3 *Soit $T>0$ et $0<\theta_1<\theta_2$. Alors*

$$C\left([0,T];E\right)\cap\mathcal{B}\left([0,T];D_A\left(\theta_2,\infty\right)\right)\subset C\left([0,T];D_A\left(\theta_1\right)\right)$$

Preuve. Supposons que $u\in C\left([0,T];E\right)\cap\mathcal{B}\left([0,T];D_A\left(\theta_2,\infty\right)\right)$.
Soit $\epsilon>0$ et $\delta=\delta\left(\epsilon\right)$ telle que

$$2\delta^{\theta_2-\theta_1}\left\|u\right\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\theta_2,\infty))}<\epsilon$$

donc pour $0\leq t,t+\tau\leq T$ nous avons $u\left(t\right)\in D_A\left(\theta_1\right)$ et

$$\begin{aligned}
&\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|_{D_A(\theta_1)}\\
=\;&\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|+\sup_{0<s<\delta}s^{\theta_2-\theta_1}\left\|s^{1-\theta_2}Ae^{As}\left[u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right]\right\|\\
&+\sup_{\delta<s<T}\left\|s^{1-\theta_1}Ae^{As}\left[u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right]\right\|\\
\leq\;&\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|+\sup_{0<s<\delta}s^{\theta_2-\theta_1}\left\|s^{1-\theta_2}Ae^{As}\left[u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right]\right\|\\
&+\frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|\\
\leq\;&\left(1+\frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\right)\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|+\delta^{\theta_2-\theta_1}\left\|u\left(t+\tau\right)-u\left(t\right)\right\|_{\theta_2}\\
\leq\;&\left(1+\frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\right)\left\|u\right\|_{C(0;T;E)}+\delta^{\theta_2-\theta_1}\left\|u\right\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\theta_2,\infty))}
\end{aligned}$$

donc $u\in C\left([0,T];D_A\left(\theta_1\right)\right)$

2.3 Problèmes auxiliaires et solutions (stricte ou classique)

On suppose toujours que $f\in C\left([0,T];E\right)$. Il est connu que si $x\in\overline{D\left(A\right)}$ alors la solution faible donner par (2.2.1) appartient à $u\in C\left([0,T];E\right)$. On montre que cette solution est plus régulière, pour cela on va étudie séparément les deux problèmes auxiliaires suivants

$$(P_{aux1})\quad\begin{cases}u_0'(t)=Au_0(t)\\u_0(0)=x;\end{cases}\quad\text{et}\quad(P_{aux2})\quad\begin{cases}u_1'(t)=Au_1(t)+g\left(t\right)\\u_1(0)=0;\end{cases}$$

Théorème 2.3.1 *Soit $x\in E$ et $t\geq0$; alors*

$$u_0\left(t\right)=e^{At}x.$$

Pour chaque $T > 0$ et $k \in \mathbb{N}$; on a

$$u_0 \in \mathcal{B}\left([0,T]\,;E\right) \cap C^k\left([0,T]\,;D_{A^k}\right).$$

En plus

1. Si $x \in \overline{D(A)}$; alors $u_0 \in D_A(\gamma,\infty) \in C([0,T]\,;E)$ et u_0 est une solution classique du problème $(P_{aux}1)$.

2. Si $x \in D_A(\gamma,\infty)$ alors

$$u_0 \in C^\gamma\left([0,T]\,;E\right) \cap \mathcal{B}\left([0,T]\,;D_A(\gamma,\infty)\right) \cap C^\epsilon\left([0,T]\,;D_A(\gamma-\epsilon)\right)$$

pour tout $\epsilon \in \left]0,\gamma\right[$ avec

$$\|u_0\|_{C^\gamma([0,T];E)} \leq \max\left(M_0, \frac{1}{\gamma}\right)\|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}$$

$$\|u_0\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq M_0\,\|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}$$

***3.** Si $x \in D_A(\gamma)$; alors*

$$u_0 \in h^\gamma\left([0,T]\,;E\right) \cap C\left([0,T]\,;D_A(\gamma)\right) \cap h^\epsilon([0,T]\,;D_A(\gamma-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in \left]0,\gamma\right[$.

***4.** Soit $x \in D_A$, alors*

$$u_0 \in C^1(0,T;E) \cap C(0,T;D_A) \cap h^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta)$$

*pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$, c'est-à-dire u_0 est une **solution stricte** du problème $(P_{aux}1)$ et $u_0'(t) = e^{At}Ax$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve.

1. En utilisant les propriétés des semi-groupes (Proposition (1.3.2)), on montre que u_0 est une solution du problème auxiliaire (P_{aux1}), en suite grâce à la Proposition (1.3.3) premier point, on montre que u_0 est continue si $x \in \overline{D(A)}$.

En on déduit que u_0 est une solution classique c'est-à-dire :

$$u_0 \in C\left([0,T]\,;E\right) \cap C^1\left(\left[0^+,T\right]\,;E\right) \cap C\left(\left[0^+,T\right]\,;D(A)\right)$$

Si $x \in D(A)$.

2. On suppose que $x \in D_A(\gamma, \infty)$, d'après la relation

$$A \int_0^t e^{As} x ds = e^{At} x - x$$

et pour tout $0 \leq t \leq t+h \leq T$, on trouve

$$\left\| e^{A(t+h)} x - e^{At} x \right\| = \left\| \int_t^{t+h} A e^{As} x ds \right\| \leq \|x\|_\gamma \int_t^{t+h} s^{\gamma-1} ds \leq \|x\|_\gamma \frac{h^\gamma}{\gamma},$$

par conséquent $u_0 \in C^\gamma([0,T]; E)$ et

$$\|u_0\|_{C^\gamma([0,T];E)} \leq \max\left(M_0, \frac{1}{\gamma}\right) \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}.$$

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$

$$\left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(D_A(\gamma,\infty))} \leq \left\| A^n e^{At} \right\|_{\mathcal{L}(E)}$$

on en déduit que $u_0 \in \mathcal{B}([0,T]; D_A(\gamma, \infty))$ et

$$\|u_0\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq M_0 \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}.$$

Finalement grâce à l'injection (2.2.3) on a

$$u_0 \in C^\epsilon([0,T]; D_A(\gamma - \epsilon)), \qquad \forall \epsilon \in]0, \gamma[$$

3. Soit $x \in D_A(\gamma)$, selon (1.4.6), on trouve que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| e^{At} x - x \right\|_{D_A(\gamma,+\infty)} = 0$$

C'est-à-dire

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \|u_0(x) - u_0(0)\|_{D_A(\gamma,+\infty)} = 0,$$

– donc $u_0 \in C(0,T; D_A(\gamma, +\infty))$.

D'après (1.4.3), on a

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\|u_0(x) - u_0(0)\|}{t^\gamma} = 0$$

C'est-à-dire $u_0 \in h^\theta(0,T;E)$. De l'inclusion 2.2.5 on trouve que

$$u_0 \in h^\gamma(0,T;E) \cap C(0,T; D_A(\gamma, +\infty)) \cap h^\epsilon(0,T; D_A(\gamma - \epsilon)$$

4. Soit $x \in D_A$, on a

$$Au_0(t) = Ae^{At}x = e^{At}Ax$$

D'après la propriété (v) 1.3.2 des semi-groupes.

– Si $Ax \in \overline{D_A}$, alors selon la proposition 1.3.3 $u_0 \in C(0,T;D_A)$. En plus,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} e^{At}Ax = Ax.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t}(e^{At}x) = Ae^{At}x = e^{At}Ax,$$

donc $u_0' \in C(0,T;E)$ i.e.,

$$u_0 \in C^1(0,T;E)$$

Ceci implique que u_0 est une solution stricte de $(P_{aux}1)$. L'inclusion $u_0 \in h^{1-\theta}([0,T]\,;D_A(\theta))$ pour tout $\theta \in]0,1[$ est un résultat de la proposition précédente.

Remarque. Le sens inverse du Théorème 2.3.1) est vraie c'est-à-dire on a les implications suivantes

1. Si $u_0 \in C^\gamma([0,T]\,;E)$ alors $x \in D_A(\gamma,\infty)$
2. Si $u_0 \in C^1([0,T]\,;E)$ ou $u_0 \in C([0,T]\,;D_A)$ alors $\left(x \in D_A \text{ et } Ax \in \overline{D_A}.\right)$
3. Si $u_0 \in h^\gamma([0,T]\,;E)$ alors $x \in D_A(\gamma)$.

Grâce à la Proposition (1.3.3, 3.).

Théorème 2.3.2 *Soient $f \in C([0,T]\,;E)$ et*

$$u_1(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\,ds \qquad 0 \le t \le T.$$

Alors

$$u_1 \in C^{1-\theta}([0,T]\,;D_A(\theta)) \qquad \forall\theta \in]0,1[\tag{2.3.1}$$

et

$$u_1 \in h^\theta([0,T]\,;E) \cap C([0,T]\,;D_A(\theta)) \qquad \forall\theta \in]0,1[\tag{2.3.2}$$

En plus

$$\|u_1\|_{C^{1-\theta}([0,T];D_A(\theta))} \le C_1.\, \|f\|_{C([0,T];E)}$$

$$\|u_1\|_{h^\theta([0,T];E)} \leq C_2. \|f\|_{C([0,T];E)} \tag{2.3.3}$$

$$\|u_1\|_{C([0,T];D_A(\theta))} \leq C_3. \|f\|_{C([0,T];E)} \tag{2.3.4}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes dépendent de θ, T, M_0, M_1 et M_2.

Preuve. Remarquons que $s \longrightarrow e^{As} f(t-s)$ appartient à $L^1(0, t; D_A(\theta))$ pour tout $t \in]0, T]$ En effet selon 1.4.7 et

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{D_A(\theta)} &= \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds \right\|_{D_A(\theta)} \leq \int_0^t \left(M_0 + \frac{M_1}{s^\theta} \right) \|f(t-s)\|_E\, ds \\ &\leq \left(M_0 T + \frac{M_1}{1-\theta} T^{1-\theta} \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_E . \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Si $0 \leq t \leq t+\tau \leq T$, En utilisant 1.4.8 pour $n = 1$, et 1.4.7, on obtient

$$\begin{aligned} & \|u_1(t+\tau) - u_1(t)\|_{D_A(\theta)} \\ =& \left\| \int_0^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} f(s)\, ds - \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds \right\|_{D_A(\theta)} \\ =& \left\| \int_0^t \left[e^{A(t+\tau-1)} - e^{A(t-s)} \right] f(s) ds + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} f(s) ds \right\|_{D_A(\theta)} \end{aligned}$$

pour la première on utilise le fait que

$$\left[e^{A(t+\tau-1)} - e^{A(t-s)} \right] f(s) = \int_{t-s}^{t+\tau-s} A e^{Ar} f(s) dr,$$

pour la deuxième on utilise ce changement de variable $r = t+\tau-s$ on trouve

$$\int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} f(s) ds = -\int_\tau^0 e^{Ar} f(t+\tau-r) dr$$

donc

$$\begin{aligned} & \|u_1(t+\tau) - u_1(t)\|_{D_A(\theta)} \\ \leq & \int_0^t \left\| \int_{t-s}^{t+\tau-s} A e^{Ar} f(s) dr \right\|_{D_A(\theta)} ds + \int_0^\tau \left\| e^{Ar} f(t+\tau-r) \right\|_{D_A(\theta)} dr \\ \leq & \left\{ \int_0^t \left(\int_{t-s}^{t+\tau-s} \frac{M_1 r^\theta + M_2}{r^{1+\theta}} dr \right) ds + \int_0^\tau \left(M_0 + \frac{M_1}{s^\theta} \right) ds \right\} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\| \\ \leq & \left\{ \left(M_1 T^0 + M_2 \right) \int_0^t \left(\int_{t-s}^{t+\tau-s} r^{-1-\theta} dr \right) ds + M_0 \tau + \frac{M_1}{1-\theta} \tau^{1-\theta} \right\} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\| \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(\int_{t-s}^{t+\tau-s} r^{-1-\theta} dr \right) ds &= \frac{1}{\theta} \int_0^t \left((t-s)^{-\theta} - (t+\tau-s)^{-\theta} \right) ds \\
&= \frac{1}{\theta} \int_0^t (t-s)^{-\theta} ds - \int_0^t (t+\tau-s)^{-\theta} ds \\
&= \frac{1}{\theta} \int_0^t r^{-\theta} dr - \int_{t+\tau}^{\tau} r^{-\theta} dr \\
&= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left[t^{1-\theta} + \tau^{1-\theta} - (t+\tau)^{1-\theta} \right] \\
&\leq \frac{\tau^{1-\theta}}{\theta(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|u_1(t+h) - u_1(t)\|_{D_A(\theta)} \leq \left[\frac{M_1 T^\theta + M_2}{\theta(1-\theta)} + M_0 T^\theta + \frac{M_1}{1-\theta} \right] \tau^{1-\theta} \sup_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|$$

Grâce à cette relation et 2.3.5 on obtient 2.3.1 et 2.3.4 avec

$$C_1 = M_0 \left(T^\theta + T \right) + \frac{M_1}{1-\theta} \left(1 + \frac{T^\theta}{\theta} + T^{1-\theta} \right) + \frac{M_2}{\theta(1-\theta)}$$

Grâce à 2.3.5 on obtient aussi 2.3.4 avec

$$C_3 = M_0 T + \frac{M_1}{1-\theta} T^{1-\theta}$$

Pour démontrer 2.3.3 on peut utiliser 2.3.1 et l'inclusion

$$C^\theta([0,T]; E) \hookleftarrow C^\theta([0,T]; D_A(1-\theta)),$$

mais on trouve C_3, dans 2.3.3 telle que $\lim\limits_{T\longrightarrow 0} C_3 = 0$. A cette effet, on procède comme ci dessus, on obtient pour $0 \leq t < t+\tau \leq T$

$$\begin{aligned}
\|u_1(t+\tau) - u_1(t)\| &\leq \int_0^t \left\| \int_{t-s}^{t+\tau-s} A e^{Ar} f(s) dr \right\| ds + \int_0^\tau \left\| e^{As} f(t+\tau-s) \right\| ds \\
&\leq \left[\int_0^t M_1 \left(\int_{t-s}^{t+\tau-s} r^{-1} dr \right) ds + M_0 \tau \right] \sup_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|
\end{aligned}$$

Comme pour $0 \leq s < t$ et $\tau > 0$

$$\int_{t-s}^{t+\tau-s} r^{-1} dr \leq \int_{t-s}^{t+\tau-s} \frac{dr}{(t-s)^\theta r^{1-\theta}} \leq \frac{\tau^\theta}{\theta(t-s)^\theta}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\|u_1(t+\tau)-u_1(t)\| &\leq \left[M_1\frac{\tau^\theta}{\theta}\int_0^t (t-s)^{-\theta}\,ds+M_0\tau\right]\sup_{0\leq t\leq T}\|f(t)\| \\ &\leq \left[\frac{M_1T^{1-\theta}}{\theta(1-\theta)}+M_0T^{1-\theta}\right]\tau^\theta\sup_{0\leq t\leq T}\|f(t)\|\end{aligned}$$

ce qui donne 2.3.3 avec

$$C_2=M_0T+M_0T^{1-\theta}+\frac{M_1}{\theta(1-\theta)}T^{1-\theta}$$

Théorème 2.3.3 *Si $f\in C\left([0,T];\overline{D_A}\right)$ alors*

$$e^A*f\in h^{1-\theta}([0,T];D_A(\theta))$$

pour tout $\theta\in\,]0,1[$.

Preuve. Pour $g\in C^1([0,T];D_A)$, on a

$$A\left(e^A*g\right)=e^A*Ag.$$

En appliquant le théorème précédent pour les fonctions g, $Ag\in C([0,T];E)$, et de l'inclusion 2.3.2 on trouve

$$e^A*g,\quad e^A*Ag\in h^\gamma([0,T];E)\quad\text{pour tout }\gamma\in\,]0,1[\,.$$

Si on prend $\gamma=1-\theta\in\,]0,1[$, on déduit que pour tout $\theta\in\,]0,1[$ on a

$$e^A*g,\quad A\left(e^A*g\right)\in h^{1-\theta}(0,T,E)\,.$$

ce qui signifie que $e^A*g\in h^{1-\theta}(0,T;D_A)$.

Comme $D_A\subset D_A(\theta)$, alors

$$e^A*g\in h^{1-\theta}(0,T;D_A)\subset h^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta))\,.$$

On suppose maintenant que $f\in C\left(0,T;\overline{D_A}\right)$. De l'estimation **??** on obtient

$$\left\|e^A*f-e^A*g\right\|_{C^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta))}\leq C_1\|f-g\|_{C(0,T;E)}$$

Comme $C^1(0,T;D_A)$ est dense dans $C\left(0,T;\overline{D_A}\right)$ et $h^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta))$ est fermé dans $C^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta))$, on déduit

$$e^A*f\in h^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta))\ \text{ pour tout }\theta\in\,]0,1[\,.$$

Théorème 2.3.4 *Soient* $f \in C([0,T];E)$, $x \in \overline{D(A)}$ *et* u *est une solution faible de* (2.1.1). *Alors*

$$u \in C^{1-\theta}\left(0^+, T; D_A(\theta)\right) \qquad \forall \theta \in \left]0,1\right[$$

en plus

1. Si $x \in D_A(\gamma,\infty)$ alors
$$u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty)) \cap C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon)) \qquad \forall \epsilon \in \left]0,\gamma\right[$$

2. Si $x \in D_A(\gamma)$, alors
$$u \in h^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{C}([0,T];D_A(\gamma)) \cap h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))$$
pour tout $\epsilon \in \left]0,\gamma\right[$.

3. Si $x \in D_A$ alors
$$u \in C^{1-\theta}([0,T];D_A(\theta))$$
pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$.

   Supposons que $f \in C\left([0,T];\overline{D_A}\right)$ alors, si $x \in \overline{D_A}$ nous avons
$$u \in h^{1-\theta}\left(0^+, T; D_A(\theta)\right) \qquad \text{pour tout } \theta \in \left]0,1\right[$$
et si $x \in D_{A_0}$;
$$u \in h^{1-\theta}(0,T;D_A(\theta)) \qquad \text{pour tout } \theta \in \left]0,1\right[$$

Preuve. Conséquence directe des deux théorèmes $2.3.1 - 2.3.2$ et le fait que $u = u_0 + u_1$.

2.4 La régularité temporelle

On commence par le cas particulier $x = 0 = f(0)$.

Théorème 2.4.1 *Soit* $\beta \in \left]0,1\right[$ *si* $f \in C_0^{\beta}([0,T];E)$; *alors pour tout* $t \in [0,T]$

$$A\left(e^A * f\right)(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]ds + e^{At}f(t) - f(t) \tag{2.4.1}$$

$$\left(e^A * f\right)'(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]ds + e^{At}f(t) \tag{2.4.2}$$

et $e^A * f$ vérifié (2.1.1) (si $x = 0$) pour tout $t \in [0, T]$. De plus

$$\left(e^A * f\right)'; A\left(e^A * f\right) \in C_0^\beta\left([0,T]; E\right) \tag{2.4.3}$$

$$\left\|\left(e^A * f\right)'\right\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq C\left\|f\right\|_\beta \tag{2.4.4}$$

$$\left\|A\left(e^A * f\right)\right\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq \left(C + T^\beta + 1\right)\left\|f\right\|_\beta \tag{2.4.5}$$

où C dépend de β, T, M_0, M_1 et M_2.

En plus, on a

$$f \in h_0^\beta\left(0,T;E\right) \Longrightarrow \left(e^A * f\right)'; \;\; A\left(e^A * f\right) \in h_0^\beta\left([0,T]; E\right)$$

où $h_0^\beta\left(0,T;E\right) = \left\{f \in h^\beta\left(0,T;E\right) : f(0) = 0\right\}$

Preuve. Posons pour $t \in [0, T]$

$$w\left(t\right) = \left(e^A * f\right)\left(t\right) = w_1\left(t\right) + w_2\left(t\right)$$

où

$$\begin{aligned} w_1\left(t\right) &= \int_0^t e^{A(t-s)}\left[f\left(s\right) - f\left(t\right)\right] ds \\ w_2\left(t\right) &= \int_0^t e^{A(t-s)} f\left(t\right) ds = \int_0^t e^{As} f\left(t\right) ds \end{aligned}$$

On va montrer que $w_1\left(t\right)$, $w_2\left(t\right) \in D\left(A\right)$, c'est évident lorsque $t = 0$ (car $f\left(0\right) = 0$).

Or, pour $0 \leq s < t$ on a

$$\begin{aligned} \left\|Ae^{A(t-s)}\left[f\left(s\right) - f\left(t\right)\right]\right\| &= \left\|\left(t-s\right)Ae^{A(t-s)}\frac{\left[f\left(s\right) - f\left(t\right)\right]}{\left(t-s\right)}\right\| \\ &\leq \left\|\left(t-s\right)Ae^{A(t-s)}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sup_{t;s\in[0;T]}\left\|\frac{\left[f\left(s\right) - f\left(t\right)\right]}{\left(t-s\right)^\beta}\right\|_E \cdot \left(t-s\right)^{\beta-1} \\ &\leq M_1\left\|f\right\|_\beta\left(t-s\right)^{\beta-1} \end{aligned}$$

On en déduit $w_1\left(t\right) \in D\left(A\right)$, pour tout $t \in \left]0, T\right]$ et

$$Aw_1\left(t\right) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f\left(s\right) - f\left(t\right)\right] ds \tag{2.4.6}$$

donc

$$\|Aw_1(t)\| \leq M_1 \|f\|_\beta \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \leq M_1 \beta^{-1} T^\beta \|f\|_\beta \tag{2.4.7}$$

De la Proposition (1.3.3) point 2), on sait que $w_2(t) \in D(A)$ et

$$Aw_2(t) = e^{At} f(t) - f(t). \tag{2.4.8}$$

En utilisant ensuite (2.4.6), on trouve la première égalité. Grâce à l'hypothèse $f(0) = 0$ et (2.4.8), on déduit que

$$\begin{aligned} \|Aw_2(t)\| &\leq \left\|e^{At}(f(t) - f(0))\right\| + \|f(t) - f(0)\| \\ &\leq M_0 . \|f\|_\beta t^\beta + \|f\|_\beta t^\beta \\ &\leq (M_0 + 1) \|f\|_\beta T^\beta \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup \left\|A\left(e^A * f\right)(t)\right\| \leq \left(1 + M_0 + M_1 \beta^{-1}\right) T^\beta \|f\|_\beta \tag{2.4.9}$$

Montrons maintenant que w vérifiée l'équation

$$w'(t) = Aw(t) + f(t) \qquad 0 \leq t < T \tag{2.4.10}$$

Soit $\delta \in]0, T[$ fixé. On définit sur l'intervalle $[\delta, T]$ une famille de fonctions w_ϵ, dépendent de paramètre $\epsilon \in]0, \delta[$:

$$w_\epsilon(t) = \int_0^{t-\epsilon} e^{A(t-s)} f(s) ds = \int_\epsilon^t e^{As} f(t-s) ds \qquad \delta \leq t < T. \tag{2.4.11}$$

Il est facile de voire que

$$\lim_{\epsilon \to 0} w_\epsilon(t) = w(t) \qquad \delta \leq t < T$$

et que $w_\epsilon \in C^1([\delta, T]; E)$ avec

$$\begin{aligned} w'_\epsilon(t) &= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} Ae^{A(t-s)} f(s) ds \\ &= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} Ae^{A(t-s)} [f(s) - f(t)] ds + \int_0^{t-\epsilon} Ae^{A(t-s)} f(s) ds \\ &= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} Ae^{A(t-s)} [f(s) - f(t)] ds - e^{A\epsilon} f(t) + e^{At} f(t) \end{aligned}$$

en utilisant (2.4.1), on obtient pour $t \in [\delta, T]$

$$\left\|w'_{\epsilon}(t) - Aw(t) - f(t)\right\| \leq \left\|e^{A\epsilon}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \left\|f(t-\epsilon) - f(t)\right\| + M_1 \left\|f\right\|_{\beta} \int\limits_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{\beta-1} ds$$

ce qui implique que

$$\lim_{\epsilon \to 0} w'_{\epsilon}(t) = Aw(t) + f(t)$$

uniformément pour $t \in [\delta, T]$. Ce qui signifie que w'; $Aw \in C(0^+, T; E)$ et w vérifie l'équation (2.4.10) sur $]0, T]$, mais grâce à l'hypothèse $f(0) = 0$ on déduit facilement que Aw est continue en 0 et donc (2.4.10) est vérifie pour $t \in]0, T]$. On trouve évidemment (2.4.1) ; (2.4.10) et (2.4.2).

Montrons maintenant que Aw_1, $Aw_2 \in C^{\beta}(0, T; E)$. Pour Aw_1, on pose pour $0 < t < t+\tau \leq T$

$$w_1(t+\tau) - w_1(t) = v_1(t,\tau) + v_2(t,\tau) + v_3(t,\tau), \tag{2.4.12}$$

où

$$\begin{aligned} v_1(t,\tau) &= \int\limits_0^t \left[e^{A(t-s+\tau)} - e^{A(t-s)}\right] [f(s) - f(t)]\, ds \\ v_2(t,\tau) &= \int\limits_0^t e^{A(t-s+\tau)} [f(t) - f(t+\tau)]\, ds \\ v_3(t,\tau) &= \int\limits_t^{t+\tau} e^{A(t-s+\tau)} [f(s) - f(t+\tau)]\, ds. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq s < t$, on a

$$\begin{aligned} \left\|A\left[e^{A(t-s+\tau)} - e^{A(t-s)}\right][f(s) - f(t)]\right\| &\leq \left\| \int\limits_{t-s}^{t-s+\tau} A^2 e^{Ar} dr \right\|_{\mathcal{L}(E)} \|f\|_{\beta} (t-s)^{\beta} \\ &\leq M_2 \|f\|_{\beta} (t-s)^{\beta-1} (t-s+\tau)^{-1} \tau. \end{aligned}$$

donc $v_1(t,\tau) \in D(A)$ et

$$\|Av_1(t,\tau)\| \leq M_2 \|f\|_{\beta} \tau^{\beta} \int\limits_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds.$$

En plus, d'après 2) de la Proposition (1.3.3), on trouve que $v_2(t,\tau) \in D(A)$ et

$$Av_2(t,\tau) = e^{A(t+\tau)}\left[f(t) - f(t+\tau)\right] - e^{A\tau}\left[f(t) - f(t+\tau)\right]$$

ceci implique

$$\|Av_2(t,\tau)\| \leq M_2 \|f\|_\beta \tau^\beta. \tag{2.4.13}$$

Finalement, comme $s \in [t, t+\tau]$, alors

$$\left\|Ae^{A(t-s+\tau)}\left[f(s) - f(t+\tau)\right]\right\| \leq \frac{M_1}{(t-s+\tau)^{1-\beta}} \|f\|_\beta$$

on obtient donc $v_3(t,\tau) \in D(A)$ et

$$\|Av_3(t,\tau)\| \leq M_1 \|f\|_\beta \beta^{-1}\tau^\beta. \tag{2.4.14}$$

De (2.4.12) $\sim$ (2.4.14) on déduit que $Aw_1 \in C^\beta(0,T;E)$ et

$$\|Aw_1(t+\tau) - Aw_1(t)\| \leq \left(M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds + 2M_0 + M_1\beta^{-1}\right) \|f\|_\beta \tau^\beta \tag{2.4.15}$$

pour $0 \leq t < t+\tau \leq T$.

On examine maintenant le terme $w_2(t) = \int_0^t e^{As} f(t)\, ds$. On déduit, de la Proposition (1.3.3) point 2) que $Aw_2 \in D(A)$ et

$$Aw_2(t) = e^{At} f(t) - f(t). \tag{2.4.16}$$

Ceci implique que $Aw_2 \in C(0,T;E)$ car $f(0) = 0$; en utilisant une autre fois cette hypothèse on trouve que pour $0 \leq t < t+\tau \leq T$

$$\begin{aligned}
\left\|e^{A(t+\tau)} f(t+\tau) - e^{At} f(t)\right\| &\leq \left\|e^{A(t+\tau)}\left[f(t+\tau) - f(t)\right]\right\| + \left\|\left(e^{A(t+\tau)} - e^{At}\right) f(t)\right\| \\
&\leq M_0 \|f\|_\beta \tau^\beta + \left\| \int_{t-s}^{t-s+\tau} Ae^{As} ds \right\|_{\mathcal{L}(E)} \|f\|_\beta t^\beta \\
&\leq \|f\|_\beta \left(M_0\tau^\beta + M_1 t^\beta \int_t^{t+\tau} s^{-1} ds\right) \\
&\leq \|f\|_\beta \left(M_0\tau^\beta + M_1 \int_t^{t+\tau} s^{\beta-1} ds\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\| e^{A(t+\tau)} f(t+\tau) - e^{At} f(t) \right\| \leq \|f\|_\beta \left(M_0 + M_1 \beta^{-1} \right) \tau^\beta. \tag{2.4.17}$$

Ainsi (2.4.16) et (2.4.17) implique, pour $0 \leq t < t+\tau \leq T$, que

$$\begin{aligned} \|Aw_1(t+\tau) - Aw_1(t)\| &\leq \left\| e^{A(t+\tau)} f(t+\tau) - e^{At} f(t) \right\| + \|f(t+\tau) - f(t)\| \\ &\leq \|f\|_\beta \left(M_0 + M_1 \beta^{-1} + 1 \right) \tau^\beta \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

et $Aw_2 \in C^\beta(0,T;E)$. En conclusion $A\left(e^A * f\right) \in C^\beta(0,T;E)$ et

$$\left\| A\left(e^A * f\right) \right\|_\beta \leq \left(1 + 3M_0 + 2M_1\beta^{-1} + M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds \right) \|f\|_\beta. \tag{2.4.19}$$

En vertu de (2.4.11); on déduit aussi que $\left(e^A * f\right)' \in C^\beta(0,T;E)$. De (2.4.2) et (2.4.7) il vient que

$$\left(e^A * f\right)'(t) = Aw_1(t) + e^{At} f(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

et (2.4.8), (2.4.15) et (2.4.17) implique

$$\left\| \left(e^A * f\right)' \right\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq \left(M_1\beta^{-1}T^\beta + M_0T^\beta + M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds \right) \|f\|_\beta.$$

En conclusion; l'inégalité (2.4.4) est vérifiée. D'après (2.4.10), (2.4.19) on trouve (2.4.5) avec la constante

$$C = M_0\left(3 + T^\beta\right) + M_1\beta^{-1}\left(T^\beta + 2\right) + M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds.$$

Pour les espaces de petit Hölder, on suppose que $f \in h_0^\beta([0,T];E)$ et on montre que

$$\left(e^A * g\right)',\ A\left(e^A * g\right) \in h_0^\beta([0,T];E).$$

En effet, pour tout $g \in C_0^1([0,T];E)$, on a

$$\left\| \left(e^A * f\right)' - \left(e^A * g\right)' \right\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq C \|f - g\|_{C^\beta(0,T;E)}.$$

D'autre part on a

$$\left(e^A * g\right)' = e^A * g',$$

(pour plus de détail voir [17] theorem 4.2, page 48), alors de 2.3.2 on a $e^A * g' \in h_0^\beta([0,T];E)$ donc
$$\left(e^A * g\right)' \in h_0^\beta([0,T];E).$$
Comme $C_0^1([0,T];E)$ est dense dans $h_0^\beta([0,T];E)$ et $h^\beta([0,T];E)$ est fermé dans $C^\beta([0,T];E)$, on déduit que
$$\left(e^A * f\right)' \in h^\beta([0,T];E)$$

Théorème 2.4.2 *Soit $0<\beta<1$. Pour tout $f \in C_0^\beta([0,T];E)$ on a*
$$\left(e^A * f\right)' \in B([0,T];D_A(\beta,\infty)) \cap C^\epsilon([0,T];D_A(\beta-\epsilon))$$
pour tout $\epsilon \in \left]0,\beta\right[$, et
$$\left\|\left(e^A * f\right)'\right\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty))} \le C\|f\|_\beta$$
où C est une constante dépende de β, T, M_0, M_1 et M_2.
En plus, si $f \in h_0^\beta([0,T];E)$ on a
$$\left(e^A * f\right)' \in C([0,T];D_A(\beta)) \cap h^\epsilon([0,T];D_A(\beta-\epsilon)) \tag{2.4.20}$$
pour tout $\epsilon \in \left]0,\beta\right[$.

Preuve. Soit $f \in C_0^\beta([0,T];E)$, on sait que $\left(e^A * f\right)'$ existe (d'après le Théorème 2.4.1), et il est donné par la formule
$$\left(e^A * f\right)'(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s)-f(t)]\,ds + e^{At}f(t)$$
Pour tout $t \in [0,T]$ et $r>0$ on a
$$\begin{aligned}
&\left\|r^{1-\beta}Ae^{Ar}\int_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s)-f(t)]\,ds + r^{1-\beta}Ae^{Ar}e^{At}f(t)\right\| \\
\le\;& M_2\|f\|_\beta r^{1-\beta}\int_0^t \frac{(t-s)^\beta}{(r+t-s)^2}ds + M_1\|f\|_\beta r^{1-\beta}\frac{t^\beta}{r+t} \\
\le\;& M_2\|f\|_\beta \int_0^{\frac{t}{r}} \frac{s^\beta}{(1+s)^2}ds + M_1\|f\|_\beta,
\end{aligned}$$
en vertu de 2.4.2; on déduit que $\left(e^A * f\right)' \in \mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty))$ avec
$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\left(e^A * f\right)'(t)\right\|_\beta \le \left(M_2\int_0^{+\infty}\frac{s^\beta}{(1+s)^2}ds + M_1\right)\|f\|_\beta \tag{2.4.21}$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.4.1, on peut montrer que

$$\left\|\left(e^{A} * f\right)'(t)\right\| \leq \left(M_0 + M_1\beta^{-1}\right) T^{\beta} \|f\|_{\beta}. \tag{2.4.22}$$

De 2.4.21 et 2.4.22 on trouve que

$$\left\|\left(e^{A} * f\right)'\right\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty))} \leq C \|f\|_{\beta}$$

avec

$$C = M_0 T^{\beta} + M_1\left(1 + \beta^{-1}T^{\beta}\right) + M_2 \int_0^{+\infty} \frac{s^{\beta}}{(1+s)^{2}} ds.$$

Pour montrer que $\left(e^{A} * f\right)' \in C^{\epsilon}\left([0,T]\,;D_A(\beta-\epsilon)\right)$, pour tout $\epsilon \in \left]0,\beta\right[$, il suffit d'utiliser 2.4.3 et 2.2.3.

On montre maintenant la propriété 2.4.20 ; On observe d'abord que lorsque $g \in C^1\left([0,T]\,;E\right)$, on a

$$\left(e^{A} * g\right)' = e^{A} * g' \in C\left([0,T]\,;D_A(\beta)\right).$$

D'autre part, si $h^{\beta}\left([0,T]\,;E\right)$, on obtient

$$\left\|\left(e^{A} * f\right)' - \left(e^{A} * g\right)'\right\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty))} \leq C \|f-g\|_{C^{\beta}([0,T];E)},$$

ceci montre que $\left(e^{A} * g\right)' \in C\left([0,T]\,;D_A(\beta)\right)$ et comme $C_0^1\left([0,T]\,;E\right)$ est dense dans $h_0^{\beta}\left([0,T]\,;E\right)$ et $C\left([0,T]\,;D_A(\beta)\right)$ est fermé dans $B\left([0,T]\,;D_A(\beta,\infty)\right)$, alors grace à la propriété (voir Théorème 2.4.1)

$$f \in h_0^{\beta}(0,T;E) \Longrightarrow \left(e^{A} * f\right)',\ A\left(e^{A} * f\right) \in h_0^{\beta}\left([0,T]\,;E\right)$$

et l'inclusion 2.2.4, on déduit que

$$\left(e^{A} * f\right)' \in h^{\epsilon}\left([0,T]\,;D_A(\beta-\epsilon)\right).$$

On peut donc étudier le problème (P) sous la condition

$$f \in h^{\beta}\left([0,T]\,;E\right) \subset C^{\beta}\left([0,T]\,;E\right)$$

lorsque $x \in \overline{D_A}$. On verra dans ce cas que l'existence d'une solution classique est assurée avec d'autres propriétés de régularité.

Théorème 2.4.3 *Soit $f \in C^{\beta}([0,T];E)$ et $x \in \overline{D_A}$. Alors le problème (P) admet une solution classique u telle que*

$$u^{'} \in C^{\beta}\left(\left[0^{+},T\right];E\right) \cap \mathcal{B}\left(\left[0^{+},T\right];D_A(\beta,\infty)\right) \cap C^{\epsilon}\left(\left[0^{+},T\right];D_A(\beta-\epsilon)\right)$$

pour tout $\epsilon \in]0,\beta[$,

$$Au \in C^{\beta}\left(\left[0^{+},T\right];E\right),$$

et pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$u^{'}(t) = Ae^{At}x + e^{At}f(t) + \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f(s)-f(t)\right]ds.$$

En plus, si $f \in h^{\beta}([0,T];E)$ alors

$$u' \in h^{\beta}\left(0^{+},T;E\right) \cap C^{\gamma}\left(0^{+},T;D_A(\beta)\right) \cap h^{\epsilon}\left(0^{+},T;D_A(\beta-\epsilon)\right)$$

pour tout $\epsilon \in]0,\beta[$. En plus, on a les propriétés suivantes
i) Si $x \in D_A(\gamma,\infty)$, alors

$$u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty)) \cap C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon)) \tag{2.4.23}$$

pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$.
ii) Si $x \in D_A(\gamma)$, alors

$$u \in h^{\gamma}([0,T];E) \cap C([0,T];D_A(\gamma)) \cap h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon)) \qquad (\#(4.43))$$

pour tout $\boldsymbol{\epsilon} \in]0,\gamma[$

Preuve. la solution du (P) est la somme des deux fonctions u_1 et u_2 solutions des deux problèmes

$$\begin{cases} u_1'(t) = Au_1(t) + f(t) - f(0), & t \in [0,T], \\ u_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2.4.24}$$

et

$$\begin{cases} u_2'(t) = Au_2(t) + f(0), & t \in [0,T], \\ u_2(0) = x \end{cases} \tag{2.4.25}$$

On sait d'après le Théorème (2.4.1) et (2.4.3) que

$$u_1 = e^{A} * (f(\cdot) - f(0))$$

est une solution stricte du (2.4.24) vérifiant

$$u_1' \in C^{\beta}\left([0,T];E\right) \cap \mathcal{B}\left([0,T];D_A\left(\beta,\infty\right)\right)$$

$$Au_1 \in C^{\beta}\left([0,T];E\right)$$

lorsque $f \in C^{\beta}\left([0,T];E\right)$ et vérifie

$$u_1' \in h^{\beta}\left([0,T];E\right) \cap C\left([0,T];D_A\left(\beta\right)\right)$$

$$Au_1 \in h^{\beta}\left([0,T];E\right).$$

et de $(2.4.2)$, on déduit que pour $0 \leq t \leq T$

$$u_1'\left(t\right) = \int\limits_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f\left(s\right)-f\left(t\right)\right]ds + e^{At}f\left(t\right) - e^{At}f\left(0\right).$$

D'autre part, il est facile de vérifier que

$$u_2\left(t\right) = e^{At}x + \int\limits_0^t e^{As}f\left(0\right)ds$$

est une solution classique de (2.4.25) et pour tout $0 \leq t \leq T$

$$u_2'\left(t\right) = Ae^{At}x + e^{At}f\left(0\right). \tag{2.4.26}$$

En conclusion

$$u = u_1 + u_2$$

est une solution classique de (P). Idem si $f \in C^{\beta}\left([0,T];E\right)$.

Or, puisque $x \in D_A\left(\gamma,\infty\right)$ alors $t \to e^{tA}x$ appartient a $C^{\gamma}\left(0,T;E\right) \cap \mathcal{B}\left(0,T;D_A\left(\gamma,\infty\right)\right)$ et en vertu du théorème 2.3.1, et le fait que

$$u_1 \in C^{\gamma}\left(0,T;E\right) \cap C\left(0,T;D\left(A\right)\right),$$

on déduit donc (2.4.23).

Théorème 2.4.4 *Si $f \in C^{\beta}\left([0,T];E\right)$ $(0<\beta<1)$ et $x \in D\left(A\right)$, et $Ax + f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$, alors le problème (P) admet une solution stricte u pour tout $t \in [0,T]$*

$$u'\left(t\right) = e^{At}\left(Ax + f\left(t\right)\right) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}\left[f\left(s\right)-f\left(t\right)\right]ds. \tag{2.4.27}$$

de plus

$$x \in D(A) \ \ et \ Ax + f(0) \in D_A(\beta, \infty) \tag{2.4.28}$$

et pour tout $\epsilon \in]0, \beta[$

$$\begin{aligned} u' &\in C^\beta([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty)) \cap C^\epsilon([0,T];D_A(\beta-\epsilon)) && (2.4.29)\\ Au &\in C^\beta([0,T];E) && (2.4.30)\end{aligned}$$

et

$$\|u'\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq C_1 \|f\|_\beta + \max\left(M_0 + \beta^{-1}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} \tag{2.4.31}$$

$$\begin{aligned} \|Au\|_{C^\beta([0,T];E)} \ \leq \ & \left(C_1 + T^\beta + 1\right) \|f\|_\beta + \|f(0)\| \\ & + \max\left(M_0 + \beta^{-1}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

où

$$C_1 = M_0\left(3 + T^\beta\right) + M_1\beta^{-1}\left(2 + T^\beta\right) + M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds$$

$$C_2 = M_0 T^\beta + M_1\left(1 + \beta^{-1}T^\beta\right) + M_2 \int_0^{+\infty} \frac{s^\beta}{(1+s)^2} ds$$

Si $f \in h^\theta([0,T];E)$ et $x \in D_A$ et $Ax + f(0) \in D_A(\beta)$, alors

$$u' \in h^\beta([0,T];E) \cap C([0,T];D_A(\beta)) \cap h^\epsilon([0,T];D_A(\beta-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0, \beta[$, et

$$Au \in h^\beta([0,T];E).$$

Preuve. Soit u_1, u_2 deux fonctions définies par (2.4.24) et (2.4.25). Si $x \in D(A)$ et $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, on déduit de l'égalité (2.4.26) que u_2 est une solution stricte et pour $0 \leq t \leq T$

$$u_2'(t) = e^{At}(Ax + f(0)). \tag{2.4.33}$$

En utilisant (2.4.2) , on montre que u_1 vérifie

$$u_1'(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s) - f(t)]\,ds + e^{At}f(t) - e^{At}f(0).$$

or u_1 est une solution stricte car le second membre $g(t) := f(t) - f(0)$ de (2.4.24) est nul en $t = 0$.

Par conséquent u est une solution stricte de (2.1.1) et

$$\begin{aligned} u'(t) &= u_1'(t) + u_2'(t) \\ &= \int_0^t Ae^{A(t-s)} [f(s) - f(t)]\, ds + e^{At} f(t) - e^{At} f(0) \\ &\quad + e^{At}(Ax + f(0)) \\ &= \left(e^A * g\right)'(t) + e^{At}(Ax + f(0)). \end{aligned}$$

En plus

$$\begin{aligned} u_1' &\in C^\beta([0,T]; E) \cap \mathcal{B}([0,T]; D_A(\beta,\infty)) \\ Au_1 &\in C^\beta([0,T]; E), \end{aligned}$$

comme

$$C^\beta([0,T]; E) \cap \mathcal{B}([0,T]; D_A(\beta,\infty)) \hookrightarrow C^\epsilon(0,T; D_A(\beta-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0,\beta[$, alors

$$u_1' \in C^\beta([0,T]; E) \cap \mathcal{B}([0,T]; D_A(\beta,\infty)) \cap C^\epsilon(0,T; D_A(\beta-\epsilon))$$

Pour u_2, on applique le Théorème 2.3.1 :

Si $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, alors

$$u_2' \in C(0,T; E) \cap C\left(0^+, T; E\right) \cap C\left(0^+, T; D(A)\right)$$

et si $Ax + f(0) \in D_A(\beta,\infty)$, alors

$$u_2' \in C^\beta(0,T; E) \cap \mathcal{B}(0,T; D_A(\beta,\infty)) \cap C^\epsilon(0,T; D_A(\beta-\epsilon))$$

Par conséquent

$$u' \in C^\beta(0,T; E) \cap \mathcal{B}(0,T; D_A(\beta,\infty)) \cap C^\epsilon(0,T; D_A(\beta-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0,\beta[$, et $Au \in C^\beta([0,T]; E)$.

Pour prouver les estimations (2.4.31) et (2.4.32), on utilise le Théorème 2.3.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|u_2'\|_{C^\beta(0,T;E)} &\leq \max\left(M_0, \tfrac{1}{\beta}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} \\ \|u_2'\|_{\mathcal{B}(0,T;D_A(\beta,\infty))} &\leq M_0 \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)}, \end{aligned}$$

et par le Théorème 2.4.1, on trouve

$$\left\| \left(e^A * g\right)'(t) \right\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq C \|g\|_\beta = C \|f\|_\beta$$

ainsi

$$\|u_2\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq C \|f\|_\beta + \max\left(M_0, \frac{1}{\beta}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)}.$$

Puisque

$$u_2'(t) = Au_2(t) + f(0) = e^{At}(Ax + f(0))$$

alors

$$Au_2(t) = e^{At}(Ax + f(0)) - f(0),$$

donc

$$\|Au_2(t)\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq \left\| e^{At}(Ax + f(0)) \right\|_{C^\beta(0,T;E)} + \|f(0)\|_E$$

et par le Théorème 2.4.1, on a

$$\left\| A\left(e^A * g\right)(t) \right\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq \left(C + T^\beta + 1\right) \|f\|_\beta,$$

ensuite

$$\|Au\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq \left(C + T^\beta + 1\right) \|f\|_\beta + C \|f\|_\beta + \max\left(M_0, \frac{1}{\beta}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} + \|f(0)\|_E.$$

Chapitre 3

Application

Le résultat principal obtenu dans le chapitre 2 pour les fonctions de petit Höldèr est donné par le théorème suivant

Théorème. Soit $f \in h^{\theta}([0,T];E)$.

► Si $x \in \overline{D_A}$, alors u est **une solution classique** du problème (2.1.1) (voir 2.4.3) vérifie

$$u' \in h^{\theta}(]0,T];E) \cap C(]0,T];D_A(\theta)) \cap h^{\epsilon}(]0,T];D_A(\theta-\epsilon)) \qquad \forall \epsilon \in]0,\gamma[$$

et lorsque $x \in D_A(\theta)$, on a

$$u \in h^{\theta}([0,T];E) \cap C([0,T];D_A(\theta)) \cap h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$.

► Si $x \in D_A$, et $Ax - f(0) \in \overline{D_A}$, alors u est **une solution stricte** du problème (2.1.1) (voir 2.4.4). En plus, si $x \in D_A$, et $Ax - f(0) \in D_A(\theta)$, alors

$$u' \in h^{\theta}([0,T];E) \cap C([0,T];D_A(\theta)) \cap h^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$, et $Au \in h^{\theta}([0,T];E)$.

Pour appliquer ce résultat abstrait, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + g(t,x) \\ u(0,x) = \Phi(x) \text{ pour } x \in [0,1] \end{cases} \tag{3.0.1}$$

posé sur $[0,1] \times [0,T]$, lorsque le second membre

$$g \in C([0,T];C([0,1])).$$

On utilise les notations vectorielles

$$u\,(t,x) = u\,(t)\,(x)\,,\;\; g\,(t,x) = g\,(t)\,(x)$$

et

$$u\,(0,x) = u\,(0)\,(x)\,.$$

On introduit l'opérateur A tel que

$$\left\{\begin{array}{l} D(A) = \{\psi \in C([0,1]), \psi'' \in C(]0,1[) : \psi(0) = \psi\,(1) = 0\} \\ A\psi = \psi'' \end{array}\right.$$

Pour écrire le problème (3.0.1) sous la forme abstraite suivante

$$\left\{\begin{array}{l} u'\,(t) = Au\,(t) + g\,(t) \\ u\,(0) = \Phi. \end{array}\right. \tag{3.0.2}$$

posé dans E.

Le domaine de A

$$\begin{array}{l} D(A) = \{\psi \in C_0([0,1]), \psi \in C^2(]0,1[)\} \\ = C_0([0,1]) \cap C^2(]0,1[) \end{array}$$

n'est pas dense dans $E = C_0([0,1])$, car $\overline{D(A)} = C_0([0,1])$.

On montre maintenant que l'opérateur A vérifie l'hypothèse (H). Par un calcul direct on peut montrer que la résolvante de cet opérateur est

$$(A-\lambda)^{-1}\,g = \int_0^1 K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)g(s)ds,$$

où

$$K_\lambda(x,s) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}\,(1-x)\sinh s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}\,(1-s)\sinh x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } x \leqslant s \leqslant 1, \end{array}\right.$$

avec $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} > 0$, en plus

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}g\right\| \leqslant \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \left|K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)\right| ds\right) \|g\|\,.$$

De plus, l'opérateur A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1}g = \int_0^x (x-s)\,g(s)ds - x\int_0^1 (1-s)\,g(s)ds.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|K_{\sqrt{\lambda}}(x,s)\right| ds \\
&\leqslant \frac{\cosh Re\sqrt{\lambda}(1-x)}{|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\int_0^x \cosh Re\sqrt{\lambda}s ds \\
&+ \frac{\cosh Re\sqrt{\lambda}x}{|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|}\int_x^1 \cosh Re\sqrt{\lambda}(1-s) ds \\
&\leqslant \frac{\cosh Re\sqrt{\lambda}(1-x)\sinh Re\sqrt{\lambda}x + \cosh Re\sqrt{\lambda}x \sinh Re\sqrt{\lambda}(1-x)}{|\lambda|^{1/2}\,\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|} \\
&\leqslant \frac{\sinh Re\sqrt{\lambda}}{|\lambda|^{1/2}\,\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\right|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|\left|1-e^{-2\sqrt{\lambda}}\right|} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.
\end{aligned}$$

On trouve ainsi que $\rho(A) \supset [0,+\infty[$ et $\exists C > 0$

$$\forall\lambda \in [0,+\infty[: \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C}{1+\lambda}.$$

c'est-à-dire, pour tout $\lambda \geq 0$, on a

$$\left\|(A-\lambda)^{-1} g\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{K}{1+\lambda}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

par conséquent l'hypothèse sur A est vérifiée. Il reste donc à caractérisé l'espace d'interpolation $D_A(\theta)$. D'après [14] (Theorem 1.2.17, page 28), on a pour tout $\theta \in]0,1[$, avec $\theta \neq \frac{1}{2}$,

$$D_A(\theta) \simeq h_0^{2\theta}([0,1])$$

Par conséquent le résultat est

Proposition 3.0.1 *Soit* $g \in h^\theta([0,T];C([0,1]))$, $\theta \in]0,1[$ *avec* $\theta \neq \dfrac{1}{2}$.

► Si $\Phi \in C_0([0,1])$, alors u est **une solution classique** du problème 3.0.1, et lorsque

$$\Phi \in h_0^{2\theta}([0,1]),$$

on a

$$u \in h^\theta([0,T];C([0,1])) \cap C\left([0,T];h_0^{2\theta}([0,1])\right) \cap h^\epsilon\left([0,T];h_0^{2(\gamma-\epsilon)}([0,1])\right)$$

pour tout $\epsilon \in \,]0, \gamma[\,.$

► Si $\Phi \in C_0([0,1]) \cap C^2(]0,1[)$, et

$$A\Phi - g(0) \in C_0([0,1]),$$

alors u est **une solution stricte** du problème (3.0.1).

En plus, si $\Phi \in C_0([0,1]) \cap C^2(]0,1[)$, et

$$A\Phi - f(0) \in h_0^{2\theta}([0,1]),$$

alors

$$u', \; Au \in h^{\theta}\left([0,T]\,; C([0,1])\right).$$

Bibliographie

[1] S. AGMON, "On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems" Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119-147.

[2] A. ARDITO and P. RICCIARDI, "Existence and regularity for linear delay partial differential equations" Nonlinear Anal. 4 (1980), 411-414.

[3] L. BERS, F. JOHN, and M. SCHCHTER, "Partial differential equations" Interscience, NewYork, 1964.

[4] H. BERENS and P. L. BUTZER, "Approximation theorems for semi-group operators in inter-mediate spaces" Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.) 70 (1964), 689-692.

[5] T. BERROUG, "Sur des problèmes elliptiques et paraboliques dans les espaces de Hölder et les pettits Hölder" Thèse, Université du Havre, 2003.

[6] P. L. BUTZER and H. BERENS, "Semigroups of Operators and Approximatio" Springer, Berlin, 1967.

[7] S. CAMPANATO, "Generation of analytic semi-groups by elliptic operators of second order in Holder spaces" Ann. Scula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 8 (1981), 495-512.

[8] G. DA PRATO and P. GRISVARD, "Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parapolique" Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120 (1979), 329-396.

[9] G. DA PRATO and E. SINESTRARI, "Holder regularity for non-autonomous abstract parabolic equtions" J Math.42 (1982), 1-19.

[10] P. GRISVARD, "Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles" J. Math. pure Appl.54 (1975), 305-387.

[11] P. GRISVARD, "Spazi di tracce e applicazioni" Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[12] T. KATO, "Perturbation Theory for linear Operators" Springer, Berlin, 1966.

[13] G.E. LADAS and V. LAKSHMIKANTHAM, "Differential equtions in abstract spaces" Academic Press, New York, 1972.

[14] A. LUNARDI, "Analyticity of the maximal solution of an nonlinear parabolic eqution," Nonlinear Anal 6 (1982), 503-521.

[15] R. H. MARTIN, "Nonlinear operators and differential equtions in Banach Spaces," Wiley, New York, 1976.

[16] A. MEDEGHRI, Cours Master 1 "Semi-groupes" Année universitaire 2017-2018 ; Université de Mostaganem.

[17] E. SINESTRARI, "On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions" J. Math. Anal. App., 66 (1985), pp. 16-66.

[18] E. SINESTRARI, "On the solutions of the inhomogeneous evolution equations in Banach spaces" Rend.Accad. Naz.Lincei 70 (1981), 12-17.

[19] E. SINESTRARI, "Continuous interpolation spaces and spatial regularity in nonlinear Volterra integrodifferntial equations" J. Equations 5 (1983), 287-308.

[20] E. SINESTRARI, Classical solutions of parabolic equations in Hölder spaces Rend. Accard. Naz. Lincei 73 (1983), 289-297.

[21] E. SINESTRARI and P. VERNOLE, semilinear evolution equations in interpolation spaces, Nonlinear Anal.1 (1977),249-261.

[22] B. STEWART, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators" Trans. Amer. Math. Soc.199 (1974), 141-162.

[23] B. STEWART, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions" Trans. Amer. Math. Soc.259 (1980), 299-310.

[24] H.TANABE, "Equations of evolution" Pitman, London, 1979.

[25] S. ZIANE, "Sur le problème de Cauchy abstrait de type parabolique dans les espaces de fonctions continues" Mémoire de fin d'études, Université de Mostaganem. Année universitaire 2018-2019.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a fait une synthèse sur une partie de l'article "On the Absract Cauchy Probleme of Parabolic Type in Spaces of Continous Functions" de Eugenio Sinestrari. "

L'auteur a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence et la régularité d'une solution classique ou stricte d'un problème de Cauchy abstrait

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \text{ avec } u(0) = x$$

tels que A est un opérateur linéaire fermé quelconque dans un espace de Banach E et de domaine $D_A \subset E$; vérifiant l'hypothèse

$$(H) \qquad \begin{cases} \text{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \text{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \left\| \lambda (\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A, lorsque le second membre f est une fonction de l'espace de petit Hölder et x est un élément de E.