Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Amira Bendahou

Équations Différentielles Fractionnaires Séquentielles et Applications

Soutenu : 23 juin 2021

Devant le jury

Présidente :	Samira HAMANI	Pr	UMAB
Examinateur :	Zinelaabidine LATREUCH	MCA	UMAB
Encadreur :	Zoubir DAHMANI	Pr	UMAB

Année Universitaire : 2020/2021

Résumé

L'existence des solutions pour les équations différentielles fractionnaires séquentielles avec conditions aux limites a suscité une très grande attention de la part des mathématiciens au fils de ces derniers temps.
Le but de ce mémoire est d'utiliser la théorie des points fixes sur les espaces de Banach pour traiter les questions d'existence et d'unicité de solutions pour une classe de problèmes différentiels non linéaires impliquant la dérivée fractionnaire "séquentielle". Le problème considéré est de type Duffing-Rayleigh. L'existence de solutions est établie en employant le principe de contraction de Banach. Puis, on utilise le théorème de Schaeffer pour prouver l'existence d'une solution pour notre problème. Nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

Mots-clé : dérivé séquentielle dérivée de Caputo, équation de Duffing-Rayleigh, existence de solution, point fixe de Banach.

Abstract

The existence of solutions for sequential fractional differential equations with boundary conditions has received a great deal of attention from mathematicians in recent times.
The goal of this project is to use the theory of fixed points on Banach spaces to deal with the questions of existence and uniqueness of solutions for a class of nonlinear differential problems involving the "sequential" fractional derivative. The considered problem is of the Duffing-Rayleigh type. The existence of solutions is established by employing the Banach contraction principle. Then, we use Schaeffer's theorem to prove the existence of a solution for our problem. We conclude the results with some illustrative examples.

Keywords : sequential derivative, Caputo derivative, Duffing-Rayleigh equation, existence of solution, Banach fixed point.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents

A mes chères sœurs

A notre encadreur professeur DAHMANI ZOUBIR

A mes très chères amies

A tous ceux qui m'ont soutenu moralement de près ou de loin.

Enfin à toute(es) les étudiants de la promotion Master2 Mathématiques avec lesquelles j'ai passé cette année

Remerciements

*Louange à **ALLAH** le Tout Puissant pour nous avoir donné de la force à accomplir ce travail. Notre gratitude au professeur Dahmani Zoubir d'avoir proposé ce sujet et qui s'est toujours montré à l'écoute et très impliqué tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements aux membres du jury qui nous font honneur en jugeant ce travail. Nous adressons également notre gratitude à tous les professeurs de l'université de Mostaganem en particulier ceux du département de Mathématiques et Informatique. Enfin, nous remercions toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{K}$: Corps.

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+^*$: $x \in \mathbb{R}, x > 0$ L'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\|.\|_\infty$: Norme infinie,avec$\|x\|_\infty = sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

$\|.\|_X$: Norme de l'espace de Banach X.

$C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$: Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$C^n\left([a,b],\mathbb{R}\right)$: Espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre $n-1$ sur $[a,b]$.

J^α : Intégrale fractionnaire á gauche au sens de Riemann-Liouville.

${}_cD^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

${}_{RL}D^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma d'Euler.

$\beta\left(.,.\right)$:La fonction Bêta d'Euler.

Introduction Générale

Au cours des trois dernières décennies, la théorie du calcul fractionnaire a été une attention considérable. Les modèles mathématiques d'ordre fractionnaire peuvent être utilisés plus de détails que les modèles d'ordre entier, de plus, les applications que cette nouvelle théorie trouve dans l'analyse numérique, les mathématiques appliquées et dans différents domaines technologiques et scientifiques, telles que, le contrôle du système, la rhéologie des polymères, le traitement du signal, les comportements dynamiques des oscillateurs, oscillation non linéaire du séisme, la variation régulière, et la viscoélasticité. Pour plus de détails, et d'applications, on renvoie le lecteur intéressé aux papiers [1, 4, 5, 7].

Le but principal de notre travail est l'étude d'une classe d'équations différentielles non linéaires séquentielles à dérivées au sens de Caputo. Dans ce sens, un problème d'ordre non entier inspiré de celui de Duffing-Rayleigh a été choisis et par la suite il va être regardé de près dans ce mémoire.

L'organisation du mémoire est la suivante : comprenant une introduction et deux chapitres.

Dans un premier temps, au chapitre 1, nous passons à rappeler quelques définitions et notions de base sur l'analyse fonctionnelle, puis on cite quelques théorèmes du point fixe. Les concepts de base du calcul fractionnaire : "différenciation d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L) et Caputo", sont aussi très présents dans ce chapitre, avec certaines de leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, là c'est notre propre contribution pour ce projet de fin d'étude. Nous présentons un nouveau problème fractionnaire séquentiel non linéaire de type Duffing-Rayleigh, puis nous passons à présenter et à démontrer la représentation intégrale à cette classe d'équations. Après ça, nous passons à traiter la question d'existence et d'unicité des solutions via le principe de contraction de Banach. Le problème de l'existence d'une solution au moins est aussi à traiter dans ce chapitre par application de "Schaeffer" par exemple. A la fin, nous fournissons trois exemples illustratifs des résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques résultats d'Analyse Fonctionnelle

1.1.1 Définitions et Notions

Définition 1.1.1 (Espace de Banach) *[21] On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps* $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2 (Continuité) *[21] Étant donnée une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est continue en point* x *si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R} : |y - x| < \alpha \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si elle est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.3 (Equicontinuité) *[3] Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* A *une famille d'applications continues de* X *dans* Y. A *est dite équicontinu en* $x \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

A *est dite uniformément équicontinu si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 (Fonction Bornée) *[21] Une fontion* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite bornée si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M.$$

Définition 1.1.5 (Condition de Lipchitz) *[8] Soient* J *une partie de* $\mathbb{R}^2$, $f : J \to \mathbb{R}$ *une application et* k *un nombre réel positif. On dit que* f *est k-Lipchitzienne par rapport à* y *si :*

$$\forall (x, y) \in J : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k |y_1 - y_2|,$$

où k *est appelée la constante de Lipschitz .*

- *Si* $0 \leq k < 1$, *on dite que* f *est contractante.*

Proposition 1.1.1 *[21] Toute application lipchitzienne est uniformément continue et donc continue.*

Théorème 1.1.6 (Parties relativement compactes) *[21] On dit que* S *est une partie relativement compacte de* X *si son adhérence est compacte.*

Définition 1.1.7 (Opérateur Complètement Continu) *[21] Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. Un opérateur continu* $H : X \to Y$ *est dit complètement continu s'il transforme tout borné de* X *en une partie relativement compacte dans* Y *(pour l'espace* $\mathbb{R}^n$ *les parties relativement compactes sont les parties bornées).*

1.1.2 Quelques Théorèmes Importants

Les théorèmes de point fixe sont importants et ils servent à aider pour établir l'existence de solutions de différents types d'équations différentielles. La méthode des points fixes consiste donc à transformer le problème différentiel donné en un problème de point fixe.

Définition 1.1.8 (Point Fixe) *[8] Soit f une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $x \in X$ tel que*

$$f\left(x\right) = x.$$

Théorème 1.1.9 (Principe de Contraction de Banach) *[8] Soit X un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, alors F possède un point fixe unique.*

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énoncer est celui de Schaefer. On a alors

Théorème 1.1.10 *[8] Soient X un espace de Banach et un opérateur $\phi : X \to X$ complétement continu. Si l'ensemble*

$$A = \{x \in X : x = \mu\phi x, 0 < \mu < 1\} \tag{1.1}$$

est borné, alors ϕ possède au moins un point fixe.

Aussi on rapppele le théorème suivant :

Théorème 1.1.11 (Arzela-Ascoli) *[3] Soient X un espace de Banach et S une partie de X. On suppose les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) S est uniformément bornée

$$\exists C : |f(x)| \leq C, \forall f \in S, \forall x \in X.$$

(ii) S est équicontinue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |y - x| < \alpha \implies |f\left(y\right) - f\left(x\right)| < \varepsilon, \forall f \in S$$

Alors S est relativement compacte.

1.2 Calcul Fractionnaire

1.2.1 Intégration Fractionnaire

Fonction Gamma

La fonction gamma $\Gamma(z)$ est l'une des fonctions jouant un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Elle est la généralisation de la factorielle : n!.

Définition 1.2.1 *[9] Pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.2}$$

Propriétés

Proposition 1.2.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, ...\}$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1.
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.3}$$

2.
$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \geq 1. \tag{1.4}$$

3.
$$\Gamma(\alpha+n) = \alpha\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\Gamma(\alpha). \tag{1.5}$$

Preuve.

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
   Une intégration par partie de l'intégrale (1.2) nous donne :
$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt \\ &= -e^{-t}t^\alpha\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

2. $\Gamma(n) = (n-1)!, \textit{pour } n \geq 1$.
   Nous utilisons une démonstration par récurrence.
   Pour $n = 1$, nous avons :
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}dt = 1.$$
   Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)$ est vraie.
   Montrons que la propriété reste vraie pour l'ordre $(n+1)$. D'après la propriété (1.3) nous avons :
$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n\,(n-1)! = n!\end{aligned}$$

3. $\Gamma(\alpha+n) = \alpha\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\Gamma(\alpha)$.
   Nous obtenons le résultat en nous basant sur la propriété précédente.

Exemple 1.2.2

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\pi}. \\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \\ \Gamma(n+\frac{1}{3}) &= \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3^n}\Gamma(\frac{1}{3}).\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 *Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle a des pôles simples aux points $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$*

Fontion Bêta β

Définition 1.2.3 *[9] Pour $x, y > 0$, la fonction Bêta d'Euler est définie par :*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt. \tag{1.6}$$

Propriétés

Proposition 1.2.3 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,*

1.
$$\beta(x, y) = \beta(y, x).$$

2.
$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Preuve.

1. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$. Avec le changement de variables $z = (1-t)$
$$\beta(y, x) = \int_0^1 z^{y-1}(1-z)^{x-1} dz = \beta(x, y)$$

2. $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
Nous utilisons la définition (1.2), on a
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^\infty e^{-v} v^{x-1} dv\right)\left(\int_0^\infty e^{-u} u^{y-1} du\right)$$
Avec le changement de variables $w = x + y$, nous obtenons
$$\int_0^\infty e^{-w}\left[\int_0^w u^{x-1}(1-u)^{y-1} du\right] dw,$$
puis nous posons $z = \dfrac{u}{w}$, donc
$$\int_0^w u^{y-1}(1-u)^{x-1} du = \int_0^1 z^{x-1} w^{x+y-1}(1-z)^{y-1} dz$$
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\beta(x, y).$$

Exemple 1.2.4

$$\begin{aligned}
\beta(1, y) &= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y+1)} = \frac{1}{y}. \\
\beta\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= 2. \\
\beta(n, y) &= \frac{(n-1)!}{y(y+1)\dots(y+n-1)}, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.2.5 *[11] Soit f est une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$J_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.7}$$

Où α est un nombre réel positif.

Remarque La formule (1.7) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.

Propriétés

Proposition 1.2.4 *1. Soit $\alpha > 0, f, g \in C([a, b])$,*
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, J^{\alpha}$ est un opérateur linéaire :

$$J_a^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = \lambda J_a^{\alpha} f(t) + J_a^{\alpha} g(t), t \in [a, b]\,.$$

2. Soient $\alpha, \beta > 0$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, pour tout $t \in [a, b]$, J^{α}vérifie :

$$J_a^{\alpha}\left[J_a^{\beta} f(t)\right] = J_a^{\beta}\left[J_a^{\alpha} f(t)\right] = J_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Preuve.

2. Nous démontrons que J^{α} a la propriété de semi-groupe. Soient alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$et $f \in C([a, b])$, par définition on a :

$$J_a^{\alpha}\left[J_a^{\beta} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\int_{\tau}^t (t-u)^{\alpha-1} (u-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\right) du.$$

Si nous posons $v = \frac{u-\tau}{t-\tau}$, obtenons donc :

$$\int_a^u (t-u)^{\alpha-1} (u-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau = (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \beta(\alpha, \beta)\,.$$

Par conséquent on a :

$$J_a^{\alpha}\left[J_a^{\beta} f(t)\right] = J_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Exemple 1.2.6 *On calcule l'intégrale fractinnaire d'orde $\alpha > 0$, de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $\beta > -1, t \geq a$.*

On a :

$$J_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} (u-a)^{\beta} du.$$

Nous effectuons : $z = \frac{u-a}{t-a}$, alors il s'ensuit

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \beta(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, a = 0$, nous aurons :

$$J^{\frac{1}{2}} t = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}.$$

Exemple 1.2.7 *L'intégrale fractinnaire d'orde $\alpha > 0$, d'une fonction constante $f(t) = k$, telle que $k \in \mathbb{R}^*, a \leq t$.*

$$J_a^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha .$$

1.2.2 Dérivation de Riemman-Liouville

Définition 1.2.8 *[11] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, n = [\alpha]+1$,et $f \in C^n([a,b])$, nous définissons la dérivée fractionnaire au sens de Riemman-Liouville d'ordre α comme suit :*

$$_{RL}D^\alpha f(t) := D^n J_a^{n-\alpha} f(t) .$$

D'autre écriture :

$$_{RL}D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u)\, du\right), \text{si } n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), \;\; \text{si } n = \alpha \end{cases} \tag{1.8}$$

Propriétés

Proposition 1.2.5 *[11] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^n([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, donc nous avons*

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},_{RL} D^\alpha [\lambda f + \mu g](t) = \lambda_{RL} D^\alpha f(t) + \mu_{RL} D^\alpha g(t)$.
2. $_{RL}D^\alpha f(t) \underset{\alpha \to n}{\to} D^n f(t), n-1 < \alpha \leq n$.

Proposition 1.2.6 *[11] Soient $n-1 < \alpha \leq n, f \in C^n([a,b])$, nous avons :*

1. $_{RL}D^\alpha J_a^\alpha f(t) = f(t)$.
2. $J_a^\alpha(_{RL}D^\alpha f(t)) = f(t) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a) \frac{(t-a)^i}{i!}, t > a$.
3. $_{RL}D^\alpha(_{RL}D^\beta f(t)) \neq_{RL} D^\beta(_{RL}D^\alpha f(t))$.
4. $_{RL}D^\alpha(_{RL}D^\beta f(t)) \neq_{RL} D^{\alpha+\beta} f(t)$.

Exemple 1.2.9 *La dérivée fractionnaire de :*

1. *Fontion puissance $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :*

$$_{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, t \geq a. \tag{1.9}$$

2. *Dans la formule (1.9) si nous prenons $\beta = 0$*

$$_{RL}D^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \alpha > 1. \tag{1.10}$$

Cas particulier : *Si $\alpha = 1$ La dérivée de Riemann Liouville d'un fontion constante est nulle, en raison de pôle de la fonction Gamma dans le point 0.*

Théorème 1.2.10 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n-1 < \alpha \leq n$, nous avons*

$$_{RL}D^\alpha f(t) = 0 \iff f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)} (t-a)^{i+\alpha-n} .$$

Preuve. Par définition, nous avons $D^n J_a^{n-\alpha} f(t) = 0$. Donc

$$J_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i, a > 0 \tag{1.11}$$

Appliquons $D^{n-\alpha}$ à (1.11) nous obtions

$$f(t) = D^{n-\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i\right).$$

Alors

$$D^n f(t) = 0 \iff f(t) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{c}_j (t-a)^{\alpha-j}.$$

1.2.3 Dérivation Selon Caputo

En modélisation mathématique, l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemman-Liouville conduite à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires à la borne inférieure de l'intervalle. Approche de Caputo a utilisé pour éviter ce problème.

Définition 1.2.11 *[11] La dérivée de Caputo d'ordre α pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, qui est au moins n fois différentiable peut être définie comme :*

$$\begin{cases} {}_cD^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \alpha > 0 \\ {}_cD^0 f(t) = u(t), \alpha = n \end{cases} \tag{1.12}$$

pour $n = [\alpha] + 1$.

Propriétés

Proposition 1.2.7 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^n([a, b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, donc nous avons*

1. *${}_cD^\alpha$ est un opérateur linéaire.*

2. *${}_cD^\alpha f(t) \underset{\alpha \to n}{\to} f^{(n)}(t), n-1 < \alpha \leq n$.*

3. *${}_cD^\alpha J_a^\alpha f(t) = f(t)$.*

Exemple 1.2.12 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'un fontion $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par (1.9).*

La dérivée fractionnaire de Caputo d'un fontion constante est nulle .

1.2.4 Connexion

Théorème 1.2.13 *Soient $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ de classe $C^n([0, T])$ et $\alpha > 0$*

$${}_cD^\alpha f(t) = {}_{RL}D^\alpha \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}\right]. \tag{1.13}$$

Preuve.

On considère le développement limité de la fonction f au point $t=0$:

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}f^{\left(i\right)}\left(0\right)\frac{t^{i}}{i!}+R,$$

avec,

$$R=\int_{0}^{t}f^{\left(n\right)}\left(0\right)\frac{\left(t-u\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}du=J^{n}f^{\left(n\right)}(t).$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
{}_{RL}D^{\alpha}f\left(t\right) &= {}_{RL}D^{\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1}f^{\left(i\right)}\left(0\right)\frac{t^{i}}{i!}+\int_{0}^{t}f^{\left(n\right)}\left(0\right)\frac{\left(t-u\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}du\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}f^{\left(i\right)}\left(0\right)\frac{t^{i-\alpha}}{\Gamma\left(i+1-\alpha\right)}+J^{n-\alpha}f^{\left(n\right)}(t)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}f^{\left(i\right)}\left(0\right)\frac{t^{i-\alpha}}{\Gamma\left(i+1-\alpha\right)}+{}_{c}D^{\alpha}f\left(t\right).
\end{aligned}$$

Et alors, on obtient

$${}_{c}D^{\alpha}f\left(t\right)={}_{RL}D^{\alpha}f\left(t\right)-\sum_{i=0}^{n-1}f^{\left(i\right)}\left(0\right)\frac{t^{i-\alpha}}{\Gamma\left(i+1-\alpha\right)}.$$

1.2.5 Dérivée fractionnaire séquentielle

Il existe également une autre approche qui n'est pas très connue sur les dérivées. Elle est la suivante :

Définition 1.2.14 *[20] La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $nq, n-1<nq<n$, est dite la dérivée fractionnaire de Caputo séquentielle, si la relation :*

$$({}_{c}D^{nq})u(t)={}_{c}D^{q}\left({}_{c}D^{(n-1)q}\right)u(t)$$

est valable pour $n=2,3,\ldots,etc.$

1.3 Quelques Lemmes

Dans cette section nous destinons aux lemmes fondamentaux utilisés par la suite [15, 16].

Lemme 1.3.1 *Soit $f\in C^{n}\left(\left[0,b\right],\mathbb{R}\right)$. Pour $\alpha>0$, la solution générale de ${}_{c}D^{\alpha}f\left(t\right)=0$, est donnée par*

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_{i}t^{i},t>0 \tag{1.14}$$

où : c_i sont des constante arbitraires, $i=0,1,2\ldots n-1, n\in N^{*}$.

Lemme 1.3.2 *Soit $u\in C^{n}\left(\left[0,b\right],\mathbb{R}\right)$. Pour $n-1<\alpha\leq n$, le résultat suivant est valable pour les équations différentielles fractionnaires*

$$J^{\alpha}({}_{c}D^{\alpha}u(t))=u(t)+c_{0}+c_{1}t+c_{2}t^{2}\ldots+c_{n-1}t^{n-1},t>0 \tag{1.15}$$

telle que $c_i\in\mathbb{R}$.

Lemme 1.3.3 *Soient $\alpha,\beta>0$, avec $\beta\geq\alpha$, et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$${}_{c}D^{\alpha}J^{\beta}f(t)=J^{\beta-\alpha}f(t),t\geq a. \tag{1.16}$$

Chapitre 2

Sur un Problème Différentiel Fractionnaire Séquentiel

2.1 Introduction

Il est bien connu que l'équations différentielles fractionnaires (EDFs) sont conclues à partir de nombreux problème physiques et chimiques et d'autres problèmes scientifiques. Ces équations sont mieux adaptées à la modélisation des processus physiques et chimiques que les équations différentielles d'ordre entier, voir([6, 19]). Par conséquent, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes linéaires et non linéaires pour comprendre le comportement de phénomènes physiques associés.

L'équation différentielle du second ordre suivante

$$X'' + (\beta_1 + \beta_2 X'^2)X' + \gamma X' + w_0^2 X + kX^3 = w(t)$$

est appelée l'équation de Duffing Rayleigh [17]. Cette équation a un grand important dans divers domaines tels que : mécanique, physique, biologie, ingénierie . Par exemple, on cite les papiers dans lesquels certaines applications sur des problèmes de Duffing Rayleigh sont présentées[2, 10, 14, 23, 27].

Avec l'approche des dérivées fractionnaires, il y a beaucoup de travaux sur ce type d'équations. Pour montrer aux lecteurs certains articles (pas tous les articles) de recherche motivant ce travail, on commence par l'article de Min Xiao et ses co auteurs [24] où ces auteurs ont effectivement utilisé la méthode de collocation pour étudier l'oscillateur de Duffing Rayleigh avec un petit problème d'amortissement fractionnaire. Leur problème est le suivant :

$$\begin{cases} X''(t) - \varepsilon\left(1 - \left(D^\alpha X(t)\right)^2\right) D^\alpha X(t) + X(t) = 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, 0 < \varepsilon \leq 1, \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$X(0) = A, \quad X'(0) = B$$

où la dérivée D^α est de Caputo.

On cite également l'article de Selvam et al.[22] tel que la stabilité au sens de Ulam a été discutée pour le problème suivant

$$\begin{cases} D^\alpha X(t) + \delta X(t+\alpha) + \eta\left(X(t+\alpha)\right)^3 + h(t+\alpha) = 0 \\ t \in [0,T] \cap \mathbb{N}_{2-\alpha}, 1 < \alpha \leq 2 \\ X(0) = A, \quad D(0) = B, \end{cases}$$

où D^{α} est l'opérateur de Caputo, η et δ sont des paramètres réels positifs, $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $\mathbb{Q} : [j+2, j+T] \cap \mathbb{N}_{j+2}, T \in \mathbb{N}, \mathbb{N} = \{j, j+1, \ldots\}, j \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathbb{R}_{+}$.

Le système de Duffing-Rayleigh modifié d'ordre fractionnaire est également discuté par Yan-Lan et al. dans le travail [26] suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = y \\ D^{\alpha} y = ax - bx^{3} + \varepsilon \left[\mu y (1 - |y|) + F \cos(\omega t)\right] \\ t \in [0, T], 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

où la dérivée D est au sens de Caputo d'ordre α. μ, a, b, F, ω sont des paramètres réels, et ε est une petite constante non négative.

Avec ces références, dans ce chapitre, on va étudier un nouveau problème différentiel séquentiel d'ordre arbitraire non-linéaire de type Duffing Rayleigh. Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} (D^{\alpha_2} + \beta_1) y(t) + \beta_2 f(t, y(t), D^{\alpha_3} y(t)) + \gamma g(t, y(t), D^{\alpha_4} y(t)) \\ +h(t, y(t)) = w(t), t \in [0, 1] \\ y(0) = a_0, y(1) = b_0, \\ 0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans (2.1), on doit prendre $\beta_1, \beta_2, \gamma > 0, t \in [0, 1]$, sous les conditions que les dérivées D du problème sont au sens de Caputo d'ordre α_i telles que $i = 1, 2, 3, 4$, et $\alpha_1 + \alpha_2$ compris entre 1 et 2.

On considère deux paramètres de dérivation α_1, α_2, ce qui nous permet de nous intéresser aux problème séquentiel sans qu'on ait forcément les propriétés de commutativité ou de semi-groupe de dérivé et les fontions $f, g \in C(J, \mathbb{R}^2), h \in C(J, \mathbb{R})$ sont des fonctions continues vérifient certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, avec conditions au bord de l'intervalle $[0, 1]$ soient réels.

Plus de détails sur le Duffing-Rayleigh, on se réfere aussi aux travaux [12, 13, 18, 25].

On étudiera donc la question d'existence et d'unicité de solution du problème ci-dessus. Puis, on passera vers l'existence d'une solution au moins pour notre problème. Trois exemples seront traités vers la fin de ce chapitre.

2.2 Le passage au point fixe

Lemme 2.2.1 *Soit $F \in C([0, 1])$. Alors la solution du problème séquentie :*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} (D^{\alpha_2} + \beta_1) y(t) = F(t), t \in [0, 1] \\ 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \beta_1 > 0 \\ y(0) = a_0, y(1) = b_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

est donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} F(s) \, ds - \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} y(s) \, ds + (a_0 - b_0) t^{\alpha_2} \\ &+ \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} F(s) \, ds - \frac{\beta_1 t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_2 - 1} y(s) \, ds + a_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Preuve. En utilisant le lemme 1.3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} y(t) &= J^{\alpha_2} J^{\alpha_1} F(t) - \beta_1 J^{\alpha_2} y(t) - J^{\alpha_2} c_0 - c_1 \qquad (2.4) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha_1 - 1} F(\tau) \, d\tau \right) - \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} y(s) \, ds \\ &- \frac{c_0}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} - c_1, \end{aligned}$$

où c_0 et c_1 sont des constantes arbitraires à déterminer.
Et tenant compte des conditions (2.2) , nous obtenons :

$$c_1 = -a_0$$
$$c_0 = \Gamma(\alpha_2 + 1)(a_0 - b_0 + J^{\alpha_2} J^{\alpha_1} F(1) - \beta_1 J^{\alpha_2} y(1)).$$

En remplaçant c_0 et c_1 dans (2.4), nous trouvons la formule (2.3) . Le lemme ci-dessus est prouvé.

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Le premièr résultat d'existence est obtenu en utilisant de l'application contractante de Banach, pour ce faire, on considère les hypothèses suffisantes suivantes :

(A1) : Les fonctions f et g définies sur $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ sont continues, et h définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ est également continue.

(A2) : Il existe des constantes $L_f, L_g, L_h > 0$, telles que pour $t \in [0,1]$,et $y_1, y_1^*, y_2, y_2^* \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(t, y_1, y_1^*) - f(t, y_2, y_2^*)| &\leq L_f (|y_1 - y_2| + |y_1^* - y_2^*|); \\ |g(t, y_1, y_1^*) - g(t, y_2, y_2^*)| &\leq L_g (|y_1 - y_2| + |y_1^* - y_2^*|); \\ |h(t, y_1) - h(t, y_2)| &\leq L_h |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

(A3) : Il existe des constantes $M_{f_1}, M_{f_2}, M_{g_1}, M_{g_2}, M_h$ positives, telles que pour tout $t \in [0,1]; x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} |f(t,x,y)| &\leq M_{f_1} |x| + M_{f_2} |y|; \\ |g(t,x,y)| &\leq M_{g_1} |x| + M_{g_2} |y|; \\ |h(t,y)| &\leq M_h |y|. \end{aligned}$$

(A4) : La norme infinie de La fonction w est $||w||_\infty = M_w$. Aussi, on considère les quantités :

$$D_1 = \frac{2v_4}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2 + 1)} \tag{2.5}$$

$$D_2 = v_4\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_2 - \alpha_3 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}\right) + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2 - \alpha_3 + 1)} \tag{2.6}$$

$$D_3 = v_4\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_2 - \alpha_4 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}\right) + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2 - \alpha_4 + 1)} \tag{2.7}$$

où

$$\begin{aligned}
\upsilon_1 &= \beta_2 M_{f_1} + \gamma M_{g_1} + M_h; \upsilon_2 = \beta_2 M_{f_2}; \upsilon_3 = \gamma M_{g_2}; \upsilon_4 = \left(\beta_2 L_f + \gamma L_g + L_h\right);\\
\Lambda_1 &= \frac{2\upsilon_1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}; \Lambda_2 = \frac{2\upsilon_2}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)}; \Lambda_3 = \frac{2\upsilon_3}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)};\\
\Lambda_4 &= \frac{\upsilon_1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1\right)} + \frac{\upsilon_1\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)};\\
\Lambda_5 &= \frac{\upsilon_2}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1\right)} + \frac{\upsilon_2\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)};\\
\Lambda_6 &= \frac{\upsilon_3}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1\right)} + \frac{\upsilon_3\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)};\\
\Lambda_7 &= \frac{\upsilon_1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)} + \frac{\upsilon_1\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)};\\
\Lambda_8 &= \frac{\upsilon_2}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)} + \frac{\upsilon_2\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)};\\
\Lambda_9 &= \frac{\upsilon_3}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)} + \frac{\upsilon_3\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)};\\
\theta_1 &= \frac{2M_w}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \left|b_0\right| + 2\left|a_0\right|;\\
\theta_2 &= \frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)}\left|b_0+a_0\right| + M_w\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1\right)} + \frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)}\right);\\
\theta_3 &= \frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\left|b_0+a_0\right| + M_w\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)} + \frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)}\right).
\end{aligned}$$

Nous introduisons l'espace de Banach suivant :

$$X := \left\{y \in C\left([0,1],\mathbb{R}\right), D^{\alpha_3}y \in C\left([0,1],\mathbb{R}\right), D^{\alpha_4}y \in C\left([0,1],\mathbb{R}\right)\right\},$$

avec la norme :

$$\|y\|_X = \max\left(\|y\|_\infty, \|D^{\alpha_3}y\|_\infty, \|D^{\alpha_4}y\|_\infty\right).$$

Ensuite, sur l'espace ci-dessus, nous définissons l'opérateur non linéaire par $H : X \to X$.

$$\begin{aligned}
Hy\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right)ds - \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha_2-1} y(s)ds\\
&\quad + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right)ds - \beta_1\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_2-1} y(s)ds\\
&\quad + \left(a_0-b_0\right)t^{\alpha_2} + a_0. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

où

$$F_y\left(s\right) = w(s) - \beta_2 f\left(s, y\left(s\right), D^{\alpha_3}y\left(s\right)\right) - \gamma g\left(s, y\left(s\right), D^{\alpha_4}y\left(s\right)\right) - h(s, y(s)).$$

Nous utilisons également les deux éxpressions suivantes :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha_3}Hy\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-1} F_y\left(s\right)ds - \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha_2-\alpha_3-1} y(s)ds\\
&\quad + \frac{t^{\alpha_2-\alpha_3}\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)}\int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right)ds - \beta_1\frac{t^{\alpha_2-\alpha_3}\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)}\\
&\quad \times\left[\int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_2-1} y(s)ds\right] + \left(a_0-b_0\right)\frac{t^{\alpha_2-\alpha_3}\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_3+1\right)}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^{\alpha_4}Hy(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-1}F_y(s)\,ds - \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_4)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-\alpha_4-1}y(s)ds \\ &+\frac{t^{\alpha_2-\alpha_4}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\alpha_4+1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}F_y(s)\,ds - \beta_1\frac{t^{\alpha_2-\alpha_4}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\alpha_4+1)} \\ &\times\left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha_2-1}y(s)ds\right] + (a_0-b_0)\frac{t^{\alpha_2-\alpha_4}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_4+1)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On considère l'ensemble $X_r = \{y \in X, \|y\|_X \le r\}$ de sorte que

$$\max\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\Lambda_1,\Lambda_4,\Lambda_7,\Lambda_2,\Lambda_5,\Lambda_8,\Lambda_3,\Lambda_6,\Lambda_9\} \le \frac{r}{4}.$$

On montre que $H(X_r)\subset X_r$. Pour tout $y \in X_r$, on a

$$\begin{aligned} |Hy(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}|F_y(s)|\,ds + \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}|y(s)|\,ds \quad (2.11) \\ &+\frac{|t^{\alpha_2}|}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}|F_y(s)|\,ds + \beta_1\frac{|t^{\alpha_2}|}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_2-1}|y(s)|\,ds \\ &+|a_0-b_0|\,|t^{\alpha_2}| + |a_0|. \end{aligned}$$

D'après (A3), nous allons avoir :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]}|F_y(t)| &= \|w(t)-\beta_2 f(t,y(t),D^{\alpha_3}y(t)) - \gamma g(t,y(t),D^{\alpha_4}y(t)) - h(t,y(t))\|. \quad (2.12) \\ &\le M_w + \beta_2(M_{f1}|y(t)| + M_{f2}|D^{\alpha_3}y(t)|) + \gamma(M_{g1}|y(t)| + M_{g2}|D^{\alpha_4}y(t)|) + M_h|y(t)| \\ &\le (\beta_2 M_{f1} + \gamma M_{g1} + M_h)\|y\|_X + \beta_2 M_{f2}\|D^{\alpha_3}y\|_X + \gamma M_{g2}\|D^{\alpha_4}y\|_X + M_w \\ &\le \upsilon_1\|y\|_X + \upsilon_2\|D^{\alpha_3}y\|_X + \upsilon_3\|D^{\alpha_4}y\|_X + M_w. \end{aligned}$$

Puis, en remplaçant (2.12) dans (2.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|Hy\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]}|Hy(t)| \le \frac{|t^{\alpha_1+\alpha_2}|\,\|F_y\|_X}{(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{\beta_1|t^{\alpha_2}|}{\alpha_2\Gamma(\alpha_2)}\|y\|_X + \frac{|t^{\alpha_2}|\,\|F_y\|_X}{(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \\ &+\frac{\beta_1|t^{\alpha_2}|}{\alpha_2\Gamma(\alpha_2)}\|y\|_X + |a_0+b_0| + |a_0|. \quad (2.13) \\ &\le \frac{2}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}(\upsilon_1\|y\|_X + \upsilon_2\|D^{\alpha_3}y\|_X + \upsilon_3\|D^{\alpha_4}y\|_X + M_w) \\ &+\frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|y\|_X + |a_0+b_0| + |a_0|. \\ &\le \left(\frac{2\upsilon_1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2+1)}\right)\|y\|_X + \frac{2\upsilon_2}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\|D^{\alpha_3}y\|_X \\ &+\frac{2\upsilon_3}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\|D^{\alpha_4}y\|_X + \frac{2M_w}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + |b_0| + 2|a_0|. \\ &\le \Lambda_1\|y\|_X + \Lambda_2\|D^{\alpha_3}y\|_X + \Lambda_3\|D^{\alpha_4}y\|_X + \theta_1. \end{aligned}$$

Aussi, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha_3}Hy(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-1}|F_y(s)|\,ds + \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-\alpha_3-1}|y(s)|\,ds \\
& +\frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}|F_y(s)|\,ds + \beta_1\frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} \\
& \times\left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha_2-1}|y(s)|\,ds\right] + |a_0-b_0|\,\frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha_3}Hy\|_\infty = & \sup_{t\in[0,1]}|D^{\alpha_3}Hy(t)| \qquad (2.14)\\
\leq & \frac{|t^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}|\,\|F_y\|_X}{(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\,\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)} + \frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\beta_1}{(\alpha_2-\alpha_3)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3)}\|y\|_X \\
& +\frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)\,\|F_y\|_X}{(\alpha_1+\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} + \frac{\beta_1\,|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)}{\alpha_2\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} \\
& +|a_0+b_0|\,\frac{|t^{\alpha_2-\alpha_3}|\,\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}. \\
\leq & \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)} + \frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\right) \\
& \times(\upsilon_1\|y\|_X + \upsilon_2\|D^{\alpha_3}y)\|_X + \upsilon_3\|D^{\alpha_4}y\|_X + M_w) \\
& +\frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\|y\|_X + |a_0+b_0|\,\frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} \\
\leq & \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)} + \frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\right)\upsilon_1\right. \\
& \left.+\frac{2\beta_1}{\alpha_2-\alpha_3\Gamma(\alpha_2-\alpha_3)}\right]\|y\|_X + \upsilon_2\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)}\right. \\
& \left.+\frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\right)\|D^{\alpha_3}y\|_X + \upsilon_3\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)}\right. \\
& \left.+\frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\right)\|D^{\alpha_4}y\|_X + |a_0+b_0|\,\frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} \\
& +M_w\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)} + \frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)}\right) \\
\leq & \Lambda_4\|y\|_X + \Lambda_5\|D^{\alpha_3}y\|_X + \Lambda_6\|D^{\alpha_4}y\|_X + \theta_2.
\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons pour la norme sup de $D^{\alpha_4}Hy\left(t\right)$ la chose suivante

$$\begin{aligned}
\left\|D^{\alpha_4}Hy\right\|_{\infty} &= \sup_{t\in[0,1]}\left|D^{\alpha_4}Hy\left(t\right)\right| \qquad (2.15)\\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right)\upsilon_1\right.\\
&\left.+\frac{2\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right]\left\|y\right\|_X+\upsilon_2\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right.\\
&\left.+\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right)\left\|D^{\alpha_3}y\right\|_X+\upsilon_3\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right.\\
&\left.+\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right)\left\|D^{\alpha_4}y\right\|_X+\left|a_0+b_0\right|\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\\
&+M_w\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)\Gamma\left(\alpha_2-\alpha_4+1\right)}\right).\\
&\leq \Lambda_7\left\|y\right\|_X+\Lambda_8\left\|D^{\alpha_3}y\right\|_X+\Lambda_9\left\|D^{\alpha_4}y\right\|_X+\theta_3.
\end{aligned}$$

Par (2.13) ,(2.14)et (2.15), nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|Hy\right\|_X &= \max\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left|Hy\left(t\right)\right|,\sup_{t\in[0,1]}\left|D^{\alpha_3}Hy\left(t\right)\right|,\sup_{t\in[0,1]}\left|D^{\alpha_4}Hy\left(t\right)\right|\right\}\\
&\leq \max\left\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\right\}+\max\left\{\Lambda_1,\Lambda_4,\Lambda_7\right\}\left\|y\right\|_X+\max\left\{\Lambda_2,\Lambda_5,\Lambda_8\right\}\left\|D^{\alpha_3}y\right\|_X\\
&\quad+\max\left\{\Lambda_3,\Lambda_6,\Lambda_9\right\}\left\|D^{\alpha_4}y\right\|_X\\
&\leq r
\end{aligned}$$

cela prouve que $H\left(X_r\right)$ appartient à X_r .

Théorème 2.3.1 *Supposons que (A2), (A4) soient satisfaits. Si $D<1$,*

telles que

$$D:=Max\left\{D_1,D_2,D_3\right\},$$

où D_1,D_2 et D_3 sont données respectivement par (2.5), (2.6) et (2.7).
Donc, le problème (2.1) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Preuve. Nous procédons à la démonstration que H est une application de contraction. Dans ce qui suit, on note au passage que δ prend des valeurs dérivées d'ordre α_3 puis α_4 . Donc, pour $(x,y)\in X\times X$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left|Hx(t)-Hy(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\left(F_x\left(s\right)-F_y\left(s\right)\right)ds-\frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha_2-1}\right.\\
&\times\left[\left(x(s)-y(s)\right)ds\right]+\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\left(F_x\left(s\right)-F_y\left(s\right)\right)ds\\
&\left.-\beta_1\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_2-1}\left(x(s)-y(s)\right)ds\right|. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Nos hyphothèse nous permettent de dire que :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}\left|F_x\left(s\right)-F_y\left(s\right)\right| &\leq \beta_2\left|f\left(t,x\left(t\right),D^{\alpha_3}x\left(t\right)\right)-f\left(t,y\left(t\right),D^{\alpha_3}y\left(t\right)\right)\right|+\gamma\left|g\left(t,x\left(t\right),D^{\alpha_4}x\left(t\right)\right)\right.\\
&\left.-g\left(t,y\left(t\right),D^{\alpha_4}y\left(t\right)\right)\right|+\left|h(t,x(t))-h(t,y(t))\right|\\
&\leq \beta_2L_f\left(\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|+\left|D^{\alpha_3}x\left(t\right)-D^{\alpha_3}y\left(t\right)\right|\right)+\gamma L_g\left(\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|\right.\\
&\left.+\left|D^{\alpha_4}x\left(t\right)-D^{\alpha_4}y\left(t\right)\right|\right)+L_h\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|\\
&\leq \left(\beta_2L_f+\gamma L_g+L_h\right)\left\|x-y\right\|_X\\
&\leq \upsilon_4\left\|x-y\right\|_X. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

En remplaçant (2.17) dans (2.16) on trouve :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}|Hx(t)-Hy(t)| &\leq \left(\frac{2(\beta_2 L_f+\gamma L_g+L_h)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+\frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2+1)}\right)\|x-y\|_X \\
&\leq \left(\frac{2v_4}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+\frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2+1)}\right)\|x-y\|_X . \\
&\leq D_1\|x-y\|_X . \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\left|D^{\delta}Hx(t)-D^{\delta}Hy(t)\right| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-\delta-1}(F_x(s)-F_y(s))ds \\
&\quad -\frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\delta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-\delta-1}(x(s)-y(s))ds \\
&\quad +\frac{t^{\alpha_2-\delta}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(F_x(s)-F_y(s))ds \\
&\quad -\beta_1\frac{t^{\alpha_2-\delta}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_2-1}(x(s)-y(s))ds\Big|. \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-\delta-1}|F_x(s)-F_y(s)|ds \\
&\quad +\frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\delta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-\delta-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&\quad +\frac{t^{\alpha_2-\delta}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}|F_x(s)-F_y(s)|ds \\
&\quad +\beta_1\frac{t^{\alpha_2-\delta}\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha_2-1}|x(s)-y(s)|ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}\left|D^{\delta}Hx(t)-D^{\delta}Hy(t)\right| &\leq v_4\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta+1)}+\frac{\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\right)||x-y||_X \\
&\quad +\frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}||x-y||_X .
\end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons voir que les inégalités suivantes sont valides : Donc pour $\delta=\alpha_3$:

$$||D^{\alpha_3}Hx-D^{\alpha_3}Hy||_\infty \leq D_2||x-y||_X . \qquad (2.19)$$

Pour $\delta=\alpha_4$, on a

$$||D^{\alpha_4}Hx-D^{\alpha_4}Hy||_\infty \leq D_3||x-y||_X . \qquad (2.20)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
||Hx-Hy||_X &\leq \max\{D_1,D_2,D_3\}||x-y||_X . \\
&\leq D||x-y||_X .
\end{aligned}$$

Selon le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique pour le problème (2.1).

Dans la suite, on établir des conditions suffisantes pour garantir l'existence d'une solution au moins pour notre problème. Ces résultats sont basés sur le théorème du point fixe de Schaefer. D'autres théorèmes de points peuvent etre appliqués sans aucune peine.

Théorème 2.3.2 *Si les hypothèses **(A1)**, **(A3)** et **(A4)** sont satisfaites, alors le problème* (2.1) *a au moins une solution sur* $[0,1]$.

Preuve. Pour montrer ce théorème, nous procédons donc aux étapes suivantes :

Etape (I)
Continuité de H : Soit y_n une suite converge vers y dans notre espace de Banach précédemment introduit. Alors, on peut dire que

$$\begin{aligned} |Hy_n(t) - Hy(t)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} (F_{x_n}(s) - F_{y_n}(s))ds - \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \\ &\quad \times [(y_n(s) - y(s))\,ds] + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} (F_{x_n}(s) - F_{y_n}(s))ds \\ &\quad -\beta_1 \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_2-1} (y_n(s) - y(s))\,ds|. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En remplaçant (2.17) dans (2.21), nous pouvons écrire

$$\|Hy_n - Hy\|_\infty \le D_1 \|y_n - y\|_X .$$

Aussi, on peut écrire

$$||D^{\alpha_3}Hx - D^{\alpha_3}Hy||_\infty \le D_2 \|y_n - y\|_X . \tag{2.22}$$

et

$$||D^{\alpha_4}Hx - D^{\alpha_4}Hy||_\infty \le D_3 \|y_n - y\|_X . \tag{2.23}$$

Par (2.21), (2.22), et (2.23), on a :

$$\begin{aligned} \|Hy_n - Hy\|_X &\le \max\{D_1, D_2, D_3\} \|y_n - y\|_X \\ &\le D \|y_n - y\|_X . \end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que $\|Hy_n - Hy\|_X$ tend vers 0, lorsque $n \to \infty$, alors nous confirmons que H est continu sur X.

Etape (II)
Bornitude de H : H transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans X.
En effet, nous montrons que pour tout $r > 0$, il existe une constante positive k telle que pour chaque $y \in X_r$, on a $\|y\|_X \le k$.
Soit $Z \in X_r$. Nous mettons

$$k = \max\{\theta_1 + r(\Lambda_1 + \Lambda_2 + v), \theta_2 + r(\Lambda_4 + \Lambda_5 + \Lambda_6), \theta_3 + r(\Lambda_7 + \Lambda_8 + \Lambda_9)\}.$$

Selon (A2), (A3), (2.13), (2.14) et (2.15), nous obtenons

$$\|ZH\|_\infty \le \theta_1 + r(\Lambda_1 + \Lambda_2 + v),$$

$$\|D^{\alpha_3}ZH\|_\infty \le \theta_2 + r(\Lambda_4 + \Lambda_5 + \Lambda_6),$$

et

$$\|D^{\alpha_4} ZH\|_\infty \le \theta_3 + r\left(\Lambda_7 + \Lambda_8 + \Lambda_9\right).$$

D'où, il s'ensuit

$$\begin{aligned}\|ZH\|_X &\le \max\left\{\theta_1 + r\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + v\right), \theta_2 + r\left(\Lambda_4 + \Lambda_5 + \Lambda_6\right), \theta_3 + r\left(\Lambda_7 + \Lambda_8 + \Lambda_9\right)\right\} \\ &\le k.\end{aligned}$$

Donc, H est uniformément borné sur Xr.

Etape (III)

Equicontinuité de H : H transforme les ensembles bornés en des ensembles équicontinus de X. Pour $y \in Xr$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ tel que $t_2 < t_1$ par exemple. Ensuite, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|Hy\left(t_1\right) - Hy\left(t_2\right)\right| &= |\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)} \int_0^{t_1} \left(t_1 - s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right) ds - \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2\right)} \int_0^{t_1} \left(t_1 - s\right)^{\alpha_2-1} y(s) ds \\ &+ \frac{t_1^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right) ds - \beta_1 \frac{t_1^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_2\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_2-1} y(s) ds \\ &+ \left(a_0 - b_0\right) t_1^{\alpha_2} - \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)} \int_0^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right) ds \\ &+ \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2\right)} \int_0^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{\alpha_2-1} y(s) ds - \frac{t_2^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F_y\left(s\right) ds \\ &+ \beta_1 \frac{t_2^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_2\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_2-1} y(s) ds - \left(a_0 - b_0\right) t_2^{\alpha_2}|. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Grâce à (2.12), le lecteur peut obtenir

$$\begin{aligned}\underset{t\in[0,1]}{sup} \left|Hy\left(t_1\right) - Hy\left(t_2\right)\right| &\le \frac{2\left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2} - t_2^{\alpha_1+\alpha_2}\right) \|F_y\|_X}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \frac{2\left(t_1^{\alpha_2} - t_2^{\alpha_2}\right)\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)} \|y\|_X \\ &+ \left|a_0 - b_0\right| \left(t_1^{\alpha_2} - t_2^{\alpha_2}\right). \\ &\le \frac{2\left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2} - t_2^{\alpha_1+\alpha_2}\right)\left(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3\right) r}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)} + \frac{2\left(t_1^{\alpha_2} - t_2^{\alpha_2}\right)\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2+1\right)} r \\ &+ \left|a_0 + b_0\right| \left(t_1^{\alpha_2} - t_2^{\alpha_2}\right) + 2M_w \left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2} - t_2^{\alpha_1+\alpha_2}\right) r.\end{aligned}$$

D'où $|Hy(t_1) - Hy(t_2| \to 0$, lorsque t_1 tend vers t_2

Aussi, nous pouvons observer pour que pour $\delta = \alpha_3$, puis $\delta = \alpha_4$ nous avons

$$\begin{aligned}\left|D^\delta Hy\left(t_1\right) - D^\delta Hy\left(t_2\right)\right| &= |\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\delta\right)} \int_0^{t_1} \left(t_1 - s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-\delta-1} F\left(s\right) ds \\ &- \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2-\delta\right)} \int_0^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-\delta-1} F\left(s\right) ds \\ &- \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\delta\right)} \int_0^{t_1} \left(t_1 - s\right)^{\alpha_2-\delta-1} y(s) ds \\ &+ \frac{\beta_1}{\Gamma\left(\alpha_2-\delta\right)} \int_0^{t_2} \left(t_2 - s\right)^{\alpha_2-\delta-1} y(s) ds \\ &+ \frac{\left(t_1^{\alpha_2-\delta} - t_2^{\alpha_2-\delta}\right)\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\Gamma\left(\alpha_2-\delta+1\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} F\left(s\right) ds \\ &+ \beta_1 \frac{\left(t_1^{\alpha_2-\delta} - t_2^{\alpha_2-\delta}\right)\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2\right)\Gamma\left(\alpha_2-\delta+1\right)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{\alpha_2-1} y(s) ds \\ &- \left(a_0 - b_0\right) \frac{\left(t_1^{\alpha_2-\delta} - t_2^{\alpha_2-\delta}\right)\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2-\delta+1\right)}|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} \left|D^{\delta}Hy(t_1)-D^{\delta}Hy(t_2)\right| &\leq \frac{\left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}\right)\|F_y\|_X}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta+1)}+\frac{(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\Gamma(\alpha_2+1)\|F_y\|_X}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\\
&\quad+\frac{2(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\beta_1\|y\|_X}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}+\frac{|a_0+b_0|(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\\
&\leq \frac{\left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}\right)(\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3)\,r}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta+1)}+\frac{2\beta_1(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})r}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\\
&\quad+\frac{(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\Gamma(\alpha_2+1)(\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3)\,r}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\\
&\quad+\frac{|a_0+b_0|(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}\\
&\quad+M_w\left(\frac{(t_1^{\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_2-\delta})\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_2-\delta+1)}+\frac{\left(t_1^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}-t_2^{\alpha_1+\alpha_2-\delta}\right)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\delta+1)}\right)r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons sans peine obtenir $\left|D^{\delta}Hy(t_1)-D^{\delta}Hy(t_2)\right| \to 0$,lorsque t_1 tend vers t_2.

D'après les trois étapes ci-dessus et grâce au théorème d'Arzela-Ascoli, nous confirmons que H est complètement continu.

La dernière étape pour montre que l'ensemble S est bornée telque $S=\{x\in X, x=\lambda Hx; 0<\lambda<1\}$ est la suivante :

Etape (VI)
Bornitude de $\mathbf{S}$ *:* Soit $y\in S$ puis $y=\lambda Hy$ pour un certain $\lambda\in\,]0,1[$. Donc, nous avons pour tout $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\|y\|_\infty &= \|\lambda Hy\|_\infty\\
&\leq \lambda\left(\Lambda_1\|y\|_X+\Lambda_2\|D^{\alpha_3}y\|_X+\Lambda_3\|D^{\alpha_4}y\|_X+\theta_1\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha_3}y\|_\infty &= \lambda\|D^{\alpha_3}Hy\|_\infty\\
&\leq \lambda(\Lambda_4\|y\|_X+\Lambda_5\|D^{\alpha_3}y\|_X+\Lambda_6\|D^{\alpha_4}y\|_X+\theta_2).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha_4}y\|_\infty &= \lambda\|D^{\alpha_4}Hy\|_\infty\\
&\leq \lambda(\Lambda_7\|y\|_X+\Lambda_8\|D^{\alpha_3}y\|_X+\Lambda_9\|D^{\alpha_4}y\|_X+\theta_3).
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\|y\|_X &= \lambda\|Hy\|_X\\
&\leq \lambda\left(\max\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}+\max\{\Lambda_1,\Lambda_4,\Lambda_7\}\|y\|_X+\max\{\Lambda_2,\Lambda_5,\Lambda_8\}\|D^{\alpha_3}y\|_X\right.\\
&\quad\left.+\max\{\Lambda_3,\Lambda_6,\Lambda_9\}\|D^{\alpha_4}y\|_X\right)\\
&\leq \lambda r<\infty.
\end{aligned}$$

S est donc borneé.
Grâce au théorème du point fixe de Schaefer, H a un point fixe qui est une solution de (2.1) .

2.4 Exemples

Dans cette section, nous présentons trois exemples pour mieux illustrer nos principaux résultats.

Exemple 2.4.1 *Nous considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{0.95}\left(D^{0.35}+0.25\right)y\left(t\right)+0.005\left(\frac{2|y(t)|}{(300+t)(1+|y(t)|)}+\frac{\left|D^{0.12}y(t)\right|}{(150+t)(1+|D^{\alpha_3}y(t)|)}\right) \\ +\frac{\sin(2y(t)-D^{0.04}y(t))}{36(t^2+t+1)}+\frac{2|y(t)|}{(15+t^2)(1+|y(t)|)}=\cos 2t, t\in[0,1] \\ y\left(0\right)=a_0, y\left(1\right)=b_0. \end{cases}$$

où $\alpha_1=0.95, \alpha_2=0.35, \beta_1=0.25, \beta_2=0.005, \gamma=1,$ *et les fonctions* f, g, h *et* w *sont telles que :*

$$\begin{aligned} f(t,u(t),v(t)) &= \left(\frac{2\left|u(t)\right|}{(300+t)\left(1+\left|u(t)\right|\right)}+\frac{\left|v(t)\right|}{(150+t)\left(1+\left|v(t)\right|\right)}\right), \\ g(t,u(t),v(t)) &= \frac{\sin(2u(t)-v(t))}{36\left(t^2+t+1\right)}, \\ h(t,u(t)) &= \frac{2\left|u(t)\right|}{(15+t^2)\left(1+\left|u(t)\right|\right)}, \\ w(t) &= \cos 2t. \end{aligned}$$

Prenons $\alpha_3=0.12, \alpha_4=0.04,$ *puis en utilisant les données de cet exemple, nous trouvons que* $L_f=\frac{1}{75}$*,* $L_g=\frac{1}{108}$*,* $L_h=\frac{1}{8}$.

D'où,

$$\upsilon_4=\beta_2 L_f+\gamma L_g+L_h=0.1344.$$

En conséquence, $D_1=0.7914,$ $D_2=0.7850,$ *et* $D_3=0.7905.$

Donc,

$$D:=\max\left\{D_1,D_2,D_3\right\}=0.7914<1,$$

où D_1*,* D_2 *et* D_3 *sont donnés respectivement par* (2.5) *,*(2.6) *, et* (2.7) *.*
Les conditions du théorème 2.3.1 sont valides. Ainsi, le problème (2.1) *a une solution unique sur* $[0,1]$.

Exemple 2.4.2 *Comme deuxième exemple illustratif, nous considérons le problème :*

$$\begin{cases} D^{0.85}\left(D+\frac{1}{5}\right)y\left(t\right)+\frac{1}{300}\left(\frac{|y(t)|}{(\pi+t^2|y(t)|)}+\frac{\left|D^{0.7}y(t)\right|}{(9+|D^{\alpha_3}y(t)|)}\right) \\ +\frac{2}{7}\left(\frac{\cos(y(t)+2)}{280(t+e^{-2t})}+\frac{t^3+\left|D^{0.5}y(t)\right|}{50}+\ln(t+1)\right)+\frac{\sin(y(t))}{(450+t)e^{t^2+1}}=\ln(t+2) \\ t\in[0,1] \\ y\left(0\right)=a_0, y\left(1\right)=b_0. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} f(t,u(t),v(t)) &= \frac{|u(t)|}{(\pi + t^2\,|u(t)|)} + \frac{|v(t)|}{(9+|v(t)|)}, \\ g(t,u(t),v(t)) &= \frac{\cos(u(t)+2)}{280\,(t+e^{-2t})} + \frac{t^3+|v(t)|}{50} + \ln(t+1), \\ h(t,u(t)) &= \frac{\sin(u(t))}{(450+t)\,e^{t^2+1}}, \\ w(t) &= \ln(t+2). \end{aligned}$$

Avec un petit calcul : $\alpha_1 = 0.85, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.7, \alpha_4 = 0.5, \beta_1 = \frac{1}{5}, \beta_2 = \frac{1}{300}$, *et* $\gamma = \frac{2}{7}$,

$$\upsilon_4 = \beta_2\,(0.3526) + \gamma\,(0.0218) + 3.0008e - 004 = 0.0077$$

et

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2\upsilon_4}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2+1)} = 0.4088, \\ D_2 &= \frac{\upsilon_4}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+1)} + \frac{\upsilon_4\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\delta+1)\,\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_3+1)} = 0.4578, \\ D_3 &= \frac{\upsilon_4}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-+1)} + \frac{\upsilon_4\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_4+1)\,\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{2\beta_1}{\Gamma(\alpha_2-\alpha_4+1)} = 0.4627. \end{aligned}$$

Donc $D := D_3 = 0.4627$. *Grâce au théorème 2.3.1, nous pouvons affirmer que* (2.1) *a une solution unique sur* $[0,1]$.

Exemple 2.4.3 *Prenons :*

$$\begin{cases} D^{0.75}\left(D^{0.5}+\frac{1}{25}\right)y\,(t) + \frac{1}{16}f(t,y(t),D^{0.03}y(t)) + \frac{1}{3}g\,(t,y\,(t)\,,D^{0.6}y\,(t)) \\ +h(t,y\,(t)) = w(t), t\in[0,1] \\ y\,(0) = a_0, y\,(1) = b_0\ . \end{cases}$$

Pour cet exemple, nous avons

$$\begin{aligned} f(t,y(t),D^{0.03}y(t)) &= \frac{\sin(y(t)) + \cos(D^{0.03}y(t))}{2\pi^3\,(t+2)}, \\ g\left(t,y\,(t)\,,D^{0.6}y\,(t)\right) &= \frac{|y(t)| + |D^{0.6}y\,(t)|}{25\,(\exp(t)+t^2)}, \\ h(t,y(t)) &= \frac{\cos(y(t)) + \ln(t+1)}{t^2+2}, \\ w(t) &= \exp(t). \end{aligned}$$

où

$$\beta_1 = \frac{1}{25},\ \ \beta_2 = \frac{1}{16},\ \ \gamma = \frac{1}{3}\ .$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} |f(t,u,v)| &\le \frac{1}{3\pi^3}, \\ |g(t,u,v)| &\le \frac{1}{25(e+1)}, \\ |h(t,u)| &\le \frac{\ln(2)}{3}, \\ \|w\| &\le e\ . \end{aligned}$$

Les fonctions f et g définies sur $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ sont continues, et h définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ est également continue. Alors, d'après le théorème 2.3.2, le problème (2.1) *a au moins une solution sur* $[0,1]$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons prouvé l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème séquentiel différentiel non linéaire d'ordre non entier (2.1) par l'application du principe de contraction de Banach. De plus, par application de théorème de point fixe de Scheafer, l'existence d'au moins une solution est aussi prouvé. Pour montrer l'applicabilité de nos principaux résultats, quelques exemples illustratifs ont été discutés.

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons proposé un problème séquentiel de type Duffing Rayleigh à caractère fractionnaire. On a démontré un premier résultat sur la représentation intégrale. Puis à l'aide du théorème de point fixe de Banach, nous avons démontré un deuxième résultat lié à l'existence d'une unique solution pour notre problème. Des conditions suffisantes sont établies pour assurer cette existence et unicité. Puis, à l'aide du théorème de point fixe de Schaeffer, un autre résultat a été discuté. La nouveauté apportée dans ce mémoire se résume en introduisant les dérivées séquentielles à la première fois, à notre connaissance, dans ce type de mémoire. La perte des propriétés de semi groupe et commutativité dans notre problème nous a poussés à aller chercher d'autres arguments plus puissants relativement par rapport au cas trouvés dans la littérature "fractionnaire" pour pourvoir traiter ce type de problème. Des exemples illustrant nos résultats sont aussi discutés dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, S.K. Ntouyas, R.P. Agarwal and A. Alsaedi : *Existence results for sequential fractional integro-differential equations with nonlocal multi-point and strip conditions.* Boundary Value Problems, 2016, vol. 2016, no 1, p. 1-16.

[2] S. Chatterjee and S. Dey : *Nonlinear dynamics of two harmonic oscillators coupled by Rayleigh type self-exciting force.* Nonlinear Dynamics, 2013, vol. 72, no 1, p. 113-128.

[3] J. Collins and J. Zimmer : *An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem.* Topology and its Applications, 2007, vol. 154, no 11, p. 2312-2322.

[4] K. Diethelm and G. Walz : *Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation.* Numerical algorithms, 1997, vol. 16, no 3, p. 231-253.

[5] M. El Amin Bengrine and Z. Dahmani : *Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations.* International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 2012, vol. 5, no 4.

[6] H.Fallahgoul, S. Focardi and F. Fabozzi : *Fractional calculus and fractional processes with applications to financial economics.* Theory and application, Academic Press, 2016.

[7] R. Gorenflo : *Fractional calculus : some numerical methods.* Courses and lectures-international centre for mechanical sciences, 1997, p. 277-290.

[8] A. Granas and J. Dugundji : *Fixed Point Theory.* Springer-Verlas, New York, 2003.

[9] D. Gronau : *Why is the gamma function so as it is.* Teaching Mathematics and Computer Science, 2003, vol. 1, p. 43-53.

[10] B.Z. Kaplan and Y. Horen : *Switching-mode counterparts of the Rayleigh and Van-der-Pol oscillators.* International journal of circuit theory and applications, 2000, vol. 28, no 1, p. 31-49.

[11] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : *Theory and applications offractional differential equations.* elsevier, 2006, vol. 204.

[12] C.K. Kwuimy and B.R. Nbendjo : *Active control of horseshoes chaos in a driven Rayleigh oscillator with fractional order deflection.* Physics Letters A, 2011, vol. 375, no 39, p. 3442-3449.

[13] L. Lai, Y.D. Ji, S.C. Zhong and L. Zhang : *Sequential parameter identification of fractional-order duffing system based on differential evolution algorithm.* Mathematical Problems in Engineering, 2017.

[14] M.A. López and R. Martínez : *A note on the generalized Rayleigh equation : limit cycles and stability.* Journal of Mathematical Chemistry, 2013, vol. 51, no 4, p. 1164-1169.

[15] K.S. Miller and R. Bertram : *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* Wiley, 1993.

[16] K.B. Oldham and J. Spanier : *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Elsevier, 1974.

[17] Z. Ran-Ran, X. Wei, Y. Gui-Dong and H. Qun : *Response of a Duffing-Rayleigh system with a fractional derivative under Gaussian white noise excitation*. Chinese Physics B, 2015, vol. 24, no 2, p. 020204.

[18] M. Rostami and M. Haeri : *Undamped oscillations in fractional-order Duffing oscillator*. Signal processing, 2015, vol. 107, p. 361-367.

[19] J.A. Sabatier, O.P. Agrawal and J.T. Machado : *Advances in fractional calculus*. Dordrecht, Springer, 2007.

[20] B. Sambandham and A. Vatsala : *Basic results for sequential Caputo fractional differential equations*. Mathematics, 2015, vol. 3, no 1, p. 76-91.

[21] L. Schwartz : *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann Paris, 1970.

[22] A.G.M. Selvam, D. Baleanu, J. Alzabut, D. Vignesh and S. Abbas : *On Hyers–Ulam Mittag-Leffler stability of discrete fractional Duffing equation with application on inverted pendulum*. Advances in Difference Equations, 2020, vol. 2020, no 1, p. 1-15.

[23] M.S. Siewe, H. Cao and M.A. Sanjuán : *Effect of nonlinear dissipation on the basin boundaries of a driven two-well Rayleigh–Duffing oscillator*. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, vol. 39, no 3, p. 1092-1099.

[24] M. Xiao, G. Jiang and J. Cao : *Asymptotic Solutions and Circuit Implementations of a Rayleigh Oscillator Including Cubic Fractional Damping Terms*. Circuits, Systems and Signal Processing, 2016, vol. 35, no 6, p. 2041-2053.

[25] J.H. Yang and H. Zhu : *Bifurcation and resonance induced by fractional-order damping and time delay feedback in a Duffing system*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, vol. 18, no 5, p. 1316-1326.

[26] Y.L. Zhang and C.Q. Li : *Fractional modified Duffing–Rayleigh system and its synchronization*. Nonlinear Dynamics, 2017, vol. 88, no 4, p. 3023-3041.

[27] L. Zhou, S. Liu and F. Chen : *Chaotic dynamics of a Rayleigh-Duffing oscillator with periodically external and parametric excitations*. In : 6th International Conference on Mechatronics, Materials, Biotechnology and Environment (ICMMBE 2016). Atlantis Press, 2016. p. 286-292.