REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS
DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET D'INFORMATIQUE
Département de mathématiques
et d'informatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques :

Option : Analyse fonctionnelle

THEME :

Etude d'une équation elliptique avec conditions non locales généralisées dans les espaces de Hölder : cadre non commutatif

❖ Présenté par : Bennour Abdelaziz

Soutenu le 13/06/2021 devant le Jury

Mr. Menad Abdallah	**Président**	**MCA**	**U. Mostaganem**
Mr. Haoua Rabah	**Examinateur**	**MCB**	**U. Mostaganem**
Mr. Ahmed Medeghri	**Encadreur**	**Pr**	**U. Mostaganem**

Année universitaire : 2020/ 2021

Remerciements

Avant tout, louange à ALLAH le tout puissant de mavoir aidé à réaliser ce modeste travail.

je voudrais exprimer mes remerciements à mon encadreur **Ahmed Medeghri**, Professeur à l'université de Mostaganem. Son intérêt pour ce travail, ses orientations et ses conseils mathémathiques m'ont été trés précieux.
Je remercie vivement Mr **Menad Abdallah** d'avoir accepté de présider mon jury.
Un grand merci à Mr **Haoua Rabah**, examinateur, pour tous ses conseils et ses recommandations.

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents.

Tous mes remerciements et ma reconnaissance à Beddani khaled pour sa confiance et son soutien.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude a toutes celles et ceux qui m'ont témoigné de la sympathie et de l'intérèt, qu'ils reçoivent aujourd'hui le témoignage de ma profonde gratitude et l'assurance de mon estime.

Abstract

This work is devoted to the study of the the second order operational differential equation of elliptic type in non-commutative framework :

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x); x \in [0,1] \tag{0.0.1}$$

The boundary conditions considered in this work are nonlocal :

$$\begin{cases} u(0) = u_0; \\ u'(0) \in D(H) \ \text{ et } \ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0} : \end{cases} \tag{0.0.2}$$

where A and H are closed linear operators in a complex Banach space X, u_0, $u_{0,1} \in X$ and $\omega > 0$. The study is performed in $C^\theta([0,1]; X)$ with $0 < \theta < 1$.
We will seek for existence, uniqueness and optimal regularity of the stricte solution of Problems (0.0.1)-(0.0.2) .

key - words : second-order abstract elliptic differential equations, non-commutative case; analytic semigroups; maximal regularity, Hölder spaces, interpolation spaces.

Résumè

Le but est de trouver des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution d'une équation elliptique avec des conditions non locales généralisées dans les espaces de Hölder:cadre non commutatif. La méthode est basée essentiellement sur l'utilisation de la théorie des sommes d'opérateurs, les semigroupes et les espaces d'interpolation.
Ce travail complète l'article (1) qui a traité le cadre L^p. Il y a une possible généralisation en un problème de Bitsadze-Samarski.

Mots clés: : EDA elliptique conditions non locales généralisées Cadre non commutatif; Semigroupes analytiques; régularité maximale; Sommes d'opérateurs; Espaces d'interpolation.

Table des Matières

Introduction

0.1 Position du problème

On considére, dans un espace de Banach complexe X, les équations différentielles opérationnelles ou abstraites (en abrégé EDA) d'ordre deux de type elliptique avec des conditions aux limites non locales dans un cadre non commutatif entre A et H (0.1.1)-(0.1.2). On entend ici par EDA, des équations différentielles à coeffcients opérateurs linéaires (en général non bornés) sur l'espace X.

Les problèmes aux limites que l'on se propose d'étudier ici, consistent en l'équation différentielle

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x) \ \ ; \ \ x \in (0;1), \tag{0.1.1}$$

avec les conditions non locales généralisées:

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(0) \in D(H) \ \text{ et } \ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{0.1.2}$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(H)$ dans X, u_0 et $u_{1,0}$ sont des éléments donnés dans X et ω est un paramétre spectral positif. Notre étude se fera lorsque le second membre f appartient à $C^{\theta}([0;1];X)$ avec $0 < \theta < 1$.

On sintéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte pour les problèmes (0.1.1)-(0.1.2) sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité des données $u_0, u_{1,0}$ et f. Pour des raisons de commodité, on va traiter l'équation (0.1.1) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \omega \geq 0.$$

La principale difficulté et originalité de ce travail réside dans le fait que :

1. Les opérateurs A et H ne commutent pas.

2. Les conditions aux limites contiennent des opérateurs non bornés.

0.2 Aperçu historique

Le travail, que je présente dans ce mémoire, fait suite à ceux de Hammou Houari et al pour le cadre commutatif dans les espaces de Hölder en [1] et les espaces UMD en [2] ainsi que celui du cadre non commutatif traité par Cheggag et al dans les espaces UMD [3] .

Ici, je considère le cadre non commutatif dans les espaces de Hölder.

Des résultats originaux sont demontrés complètant ainsi ceux obtenus dans les travaux cités ci-dessus par exemple, on cite ceux obtenus dans le cas $\omega = 0$ (voir le chapitre 3):

Théorème 0.2.1 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.0.1),(2.0.2) admet une unique solution stricte.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A) \\ Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 0.2.2 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.0.1),(2.0.2) admet une unique solution stricte* u *qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A) \\ Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

0.3 Description des chapitres

Ce travail comporte cinq chapitres.

- ➠ Le premier chapitre est dédié aux rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce travail tels que des notions d'analyse fonctionnelle, certains résultats classiques sur la théorie des semi-groupes, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs et les intégrales de Dunford.

- ➠ Le deuxième chapitre traite le problème (0.1.1)-(0.1.2) lorsque $f \in C^\theta([0,1];X); 0 < \theta < 1$ et pour $\omega = 0$.
  On construit une formule de représentation de la solution.

- ➠ Dans le troisième chapitre, on donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence, d'unicité et de régularité optimale de la solution stricte du problème (0.1.1)-(0.1.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

  $$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)).$$

  et vérfiant la régularité maximale

  $$u'' \ , Au \in C^\theta([0,1];X).$$

  Plus précisément, et faisant certaines hypothèses, nous obtenons les résultats.

- Le quatrième chapitre, est consacré, cette fois-ci, pour $\omega \geq \omega_0$, au problème (0.1.1)-(0.1.2). On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de deux types de solutions du problème (0.1.1)- (0.1.2).L'hypothèse d'inversibilité est vérifiée pour ω assez grand.

- Dans le cinquième chapitre, on étude l'exemple de [4] dans l'espace de Hölder.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs:

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Soient X,Y et Z des espaces de Banach.

Definition 1.1.1 *On dit qu'un opérateur A, défini de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad et \ \sup_{||\xi||\leq 1} ||A\xi|| < +\infty.$$

Definition 1.1.2 *On note $\mathcal{L}(X;Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y, $\mathcal{L}(X;Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par*

$$||A||_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} = \sup_{||x||_X\leq 1} ||Ax||_Y = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_Y \ , \ \forall A \in \mathcal{L}(X;Y).$$

On note $\mathcal{L}(X;X) := \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.1.1 *$\mathcal{L}(X;Y)$est un espace de Banach si et seulement si Y est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $||A||_{\mathcal{L}(X)} < 1$ alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Definition 1.1.3 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$si*

$$\begin{cases} D((A) \subset D(B), \\ \forall x \in D(A) \ , \ Ax = Bx. \end{cases}$$

Definition 1.1.4 *Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ et $B : D(B) \subset Y \longrightarrow Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A) \ : \ Ax \in D(B)\}, \\ (BA)x = B(Ax), x \in D(BA). \end{cases}$$

Definition 1.1.5 *On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (A - \lambda I) \text{et inversible et à inverse borné dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. *Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par*

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. *$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.*

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Definition 1.1.6 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \ , \ \text{dans } X \\ Ax_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y \ , \ \text{dans } Y. \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Alors l'application*

$$R_\lambda \ : \ \lambda \in \rho(A) \longrightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.1.4 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire .*

1. *Si A est un opérateur fermé,alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X; Y)$ l opérateur $A + B : D(A) \to X \subset Y$ est fermé.*
2. *Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.*
3. *Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.*
4. *Si A est un opérateur continu sur $D(A) \subset X$, alors Aest fermé si et seulement si,son domaine est fermé.*
5. *Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.*

Proposition 1.1.5 *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $Im(A) \subset D(B)$ Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Definition 1.1.7 *Soit* $0 < \omega \leq \pi$ *On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |argz| < \pi - \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A *sur* X *est dit sectoriel d'angle* ω *si* $S_\omega \subset \rho(A)$, *et*

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} ||\lambda(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$$

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Definition 1.2.1 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires dans* X. *On dit que cette famille forme un semi-groupe dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. $G(0) = I_X$,

2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t + s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ *est définie pour* $t \in \mathbb{R}$, *et que la deuxième propriété est vérifie pour tout* s, t *de* $\mathbb{R}$ *on dira qu'on a un groupe.*

Definition 1.2.2 *On dit qu un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est fortement continu si et seulement si pour tout* $x \in X$, *l'application* $t \longrightarrow G(t)x$ *de* $\mathbb{R}^+$ *dans* X *est continue,c est-à-dire pour tout* $x \in X$

$$\lim_{t \to 0^+} ||G(t)x - x||_X = 0$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi - groupe.*

Definition 1.2.3 *Un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est appelé semi-groupe uniformément continu d opérateurs linéaires bornés si*

$$\lim_{t \to 0^+} ||G(t) - I||_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.2.1 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *telles que*

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Definition 1.2.4 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$, *l'opérateur* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} existe \right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \quad , \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est bien un sous espace vectoriel de X,A est linéaire de $D(A)$ dans X.

Proposition 1.2.2 *Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$, alors*

1. *A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*
2. *$]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\forall\lambda \in]\omega, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*
$$||(A - \lambda I)^n||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\Big(\lambda - \omega\Big)^n},$$
où $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur $\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ |argz| < \alpha\}$.

Definition 1.2.5 *Soit $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. Une famille $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ forme un semi-groupe analytique de type α dans X, un espace de Banach complexe, si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *$G(0) = I$,*
2. *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha, G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,*
3. *$\forall x \in X, \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_\alpha}} G(z)x = x$,*
4. *l'application $z \longrightarrow G(z)$ est holomorphe sur Σ_α.*

Théorème 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X tel que*
$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists M > 0 : \forall\lambda > 0, ||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\lambda}.$$
Alors,il existe un secteur $\Sigma_\delta, 0 < \delta \leq \dfrac{\pi}{2}$, tel que
$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \text{ et } \forall\lambda \in \Sigma_\delta, ||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}.$$
De plus, l'opérateur $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini et il existe un secteur $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ avec $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, tel que
$$\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho\Big(- (-A)^{\frac{1}{2}}\Big),$$
et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique.

1.3 Les espaces d'interpolation

Definition 1.3.1 *Soit X un espace de Banach. On désigne par $L^p_*(\mathbb{R}_+;X)$ avec $p \in [1;+\infty]$,l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} ||f(t)||^p_X \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = ||f||_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X)} < +\infty$$

avec la modification habituelle pour $p = +\infty$.

Definition 1.3.2 *soient$(X_0; \| \,.\, \|_0)$ et $(X_1; \| \,.\, \|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé X.*
pour $p \in [1;+\infty]$ et $\theta \in]0;1[$, on dit que $x \in (X_0;X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists x_0(t) \in X_0, \exists x_1(t) \in X_1 \text{ tel que } x = x_0(t) + x_1(t), \\ ii)\ t^{-\theta} x_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+;X_0), t^{1-\theta} x_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+;X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *$(X_0 \cap X_1; \| \,.\, \|_{X_0\cap X_1})$, $(X_0 + X_1; \| \,.\, \|_{X_0+X_1})$ et $((X_0,X_1)_{\theta,p}; \| \,.\, \|_{\theta,p})$ sont des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\begin{cases} \| x \|_{X_0\cap X_1} = \| x \|_{X_0} + \| x \|_{X_1} \text{ si } x \in X_0 \cap X_1, \\ \| x \|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{x_i \in X_i, x_0+x_1=x} \big(\| x_0 \|_{X_0} + \| x_1 \|_{X_1} \big) \text{ si } x \in X_0 + X_1, \\ \| x \|_{\theta,p} = \inf\limits_{\substack{x_i:\mathbb{R}_+\to X_i, i=0,1 \\ \forall t>0, x=x_0(t)+x_1(t)}} \big(\| t^{-\theta} x_0 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_0)} + \| t^{1-\theta} x_1 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_1)} \big) \text{ si } x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}. \end{cases}$$

de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0,X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$$

avec injections continues.
Notons que $(X_0,X_1)_{\theta,p} = (X_1,X_0)_{1-\theta,p}$.

1.3.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers

Definition 1.3.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe:*

$$\forall x \in D(A), ||x||_{D(A)} = ||x||_X + ||Ax||_X.$$

En suivant les notations de P.Grisvard [7], pour $p \in [1,+\infty]$ et $0 < \theta < 1$, on pose alors

$$D_A(\theta,p) = (D(A),X)_{1-\theta,p}.$$

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires,il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta,p)$ comme suit:

Proposition 1.3.2 *Soient $p \in [1,+\infty], 0 < \theta < 1$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. *Supposons que* $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ *et qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall t > 0, ||(A - tI)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{t},$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1}x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir G.Da Prato et P.Grisvard [7]).

2. *Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X*

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir Lions [14]).

3. *Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors*

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Notons que, d'aprés G.Da Prato et P.Grisvard (voir [7],page 383), on a

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty]$ *et* $0 < \theta < 1$.

Remarque 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine* $D(A) \subset X$. *Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner, pour* $m \geqslant 1$, *des caractérisations explicites de* $(D(A^m), X)_{1/mp,p}$. *On a*

$$(D(A^m), X)_{1/mp,p} = D_{A^m}(1 - 1/mp, p),$$

(voir .P.Grisvard [10])et grâce à la propriété de réitération (voir Lions -Peetre [15]), il s'ensuit pour $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} D_{A^m}(1 - 1/mp, p) =& D_A(m - 1/p, p) \\ =& D_A(m - 1 + (1 - 1/p), p) \\ =& \Big\{\varphi \in D(A^{m-1}) : A^{m-1}\varphi \in (D(A), X)_{1/p,p}\Big\} \\ =& (D(A), X)_{(m-1)+1/p,p}. \end{aligned}$$

En particulier, on pose alors $m = 2$, *en suivant les notations de P.Grisvard [10]*

$$\begin{aligned} (D(A^2), X)_{1/2p,p} =& D_{A^2}(1 - 1/2p, p) \\ =& (D(A), X)_{1+1/p,p)} \\ =& \Big\{\varphi \in D(A) : A\varphi \in (D(A), X)_{1/p,p}\Big\} \subset D(A). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplet d'espace d'interpolation (X_0, X_1, X) et (Y_0, Y_1, Y) et un opératteur linéaire Tde X dans Y. Alors on a le théoréme suivant:

Théorème 1.3.1 *On suppose que les restrictions de T aux espaces X_i à valeurs dans Y_i sont linéaires continues. Alors, pour tout $0 < \theta < 1$ et $p \in [1, +\infty]$, l'opérateur T est lineaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ dans $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p})} \leqslant C\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)}.$$

1.4 Les espaces de Hölder

Definition 1.4.1 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0, 1]; X)$ l'espace de Banach des fonction continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0,1]}(\|f(t)\|_X).$$

L'ensemble des fonction $\theta-$höldériennes de $[0, 1]$dans X est défini par

$$C^\theta([0, 1]; X) = \left\{ f \in C([0, 1]; X)/ \sup_{t-s\neq 0; s,t\in[0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\theta} < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $\theta \in]0, 1[$.Alors*

$$C^1([0, 1]; X) \subset C^\theta([0, 1]; X) \subset C([0, 1]; X).$$

Proposition 1.4.2 *$C^\theta([0, 1]; X)$ avec $\theta \in]0, 1[$ est un espace de Banach mùuni de la norme $\|.\|_{C^\theta([0,1];X)}$ définie par*

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{t-s\neq 0; s,t\in[0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\theta}.$$

1.5 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs, en particulier la racine carrée d'un opérateur.
Soit A un opérateur linéaire fermé dans X, tel que $\rho(A)$contient $]0, +\infty[$. S'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$,

$$||\lambda(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C < +\infty,$$

alors, on définit pour $0 < \text{Re}\, \alpha < 1$ et $x \in D(A)$, l'opérateur J^α par

$$J^\alpha x = \frac{sin\pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(A - \lambda I)^{-1}(-A)xd\lambda$$

et pour $0 < \text{Re}\, \alpha < 2$ et $x \in D(A^2)$ par

$$J^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left((A - \lambda I)^{-1} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) (-A)\, xd\lambda + (-A)\, x \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

(voir Balakrishnan [5])

Lemme 1.5.1 *Les opérateurs J^α admettent des extensions fermées et $(-A)^\alpha$ est la plus petite extension fermée de J^α. (voir [5],p.423).*

Lemme 1.5.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 \ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \ \text{ et pour } \lambda \geq 0, \\ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

alors pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-(-A)^a$ défini précédemment génère un semi-groupe analytique $S_a(t)$ défini par

$$S_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} g(\lambda, t; \alpha) \, d\lambda \ \text{ si } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

où $g(\lambda, t; \alpha) = \dfrac{1}{\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \pi\alpha) \exp(-t\lambda^\alpha \cos \pi\alpha)$ est analytique pour tout $t > 0$. (voir [5],p.423)

Remarque 1.5.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $S_{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$.*

1.6 Calcul fonctionnel

Soit $(X, ||.||)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Definition 1.6.1 ***(formule intégrale de Cauchy)*** *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in \mathcal{H}(U)$, et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Definition 1.6.2 ***(Intégrale de Dunford)****. Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz.$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.

Definition 1.6.3 *Soient A un opérateur linéaire fermé et $\mathcal{H}(A)$ est l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A . Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ est une courbe sectorielle de Jordan entourant le spectre de l'opérateur A et $f \in \mathcal{H}(A)$.

Chapitre 2

Représentation de la solution

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la représentation de la solution d'une équation différentielle opérationnelle du second ordre de type elliptique, posée sur l'intervalle borné $[0;1]$

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \tag{2.0.1}$$

munie de conditions aux limites à coefficient opérateur de type non local :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(0) \in D(H) \ \text{ et } \ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{2.0.2}$$

ou A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X, un espace de Banach complexe, $f \in C^\theta([0,1]; X)$ avec $0 < \theta < 1$ et u_0, $u_{1,0}$ sont des éléments donnés dans X.

2.1 Les hypothèses

On suppose que

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) \ \ et \ \ \sup_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \tag{2.1.1}$$

cette hypothése implique que $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$ existe et génére un semi-groupe analytique généralisé (non fortement continu en zéro) $(e^{Qx})_{x>0}$ (voir [5].

$$H \ \text{ est un opérateur linéaire fermé,} \tag{2.1.2}$$

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K) \subset D(H), \tag{2.1.3}$$

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{2.1.4}$$

avec $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q}$ défini sur X et $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$
Ce mémoire est une généralisation de l'article [1]:

1. Nous avons changé la condition $D(Q) \subset D(H)$ par (2.1.3) .
2. Nous ne supposons pas l'hypothése de commutativité .
3. Nous construisons une formule de représentation adaptée pour la solution stricte .
4. Nous supposons les conditions

$$\Lambda^{-1}\big(D_Q(1 + \theta, +\infty)\big) \subset D(Q^2), \tag{2.1.5}$$

$$HQe^Q(X) \subset D_Q(1 + \theta, +\infty), \tag{2.1.6}$$

Remarque 2.1.1 *L'hypothèse (2.1.6) implique*

$$Q^2\Lambda^{-1}\big(D_Q(1+\theta,+\infty)\big) \subset \overline{D(Q)}, \tag{2.1.7}$$

tel que

$$D_Q(1+\theta,+\infty) = \Big\{\varphi \in D(Q), Q\varphi \in D_Q(\theta,+\infty), 0<\theta<1\Big\}.$$

On utilisée pour l'existence des solutions semi-strictes ou strictes de problème (2.0.1) et(2.0.2) .

Pour la régularité maximale on remplace (2.1.7) par

$$Q^2\big[\Lambda^{-1}\big(D_Q(1+\theta,+\infty)\big)\big] \subset D_Q(\theta,+\infty). \tag{2.1.8}$$

Nous adaptons á notre situation les définitions de solution stricte et sem-stricte donnes par E. Sinestrari en [16], Section 2, p. 34:
On remarque d'abord qu'ici $D(A)$ est doté de la norme du graphe qui est

$$||\phi||_{D(A)} = ||\phi||_X + ||A\phi||_X, \quad \phi \in D(A)$$

puis pour un intervalle J on définit $C(J;D(A))$ de la manière suivante

$$h \in C(J;D(A)) \Longleftrightarrow \begin{cases} h \in C(J;X), \\ h(x) \in D(A) \ \ \forall x \in J, \\ Ah \in C(J;X). \end{cases}$$

Definition 2.1.1 *Une solution stricte u du problème (2.0.1)-(2.0.2) est une fonction u telle que*

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)),$$

et qui satisfait (2.0.1)-(2.0.2). Cette solution stricte satisfait la régularité maximale si

$$u'' \ \ , Au \in C^\theta([0,1];X).$$

Remarque 2.1.2 *Une solution semi-stricte u du problème (2.0.1)-(2.0.2) est une fonction u telle que*

$$C([0,1[;X) \cap C^2([0,1[;X) \cap C([0,1[;D(A)),$$

et qui satisfait (2.0.1)-(2.0.2). Cette solution semi-stricte satisfait la régularité maximale si

$$\begin{cases} u \in C^\theta([0,1];X), \\ u'' \, , Au \in C^\theta([0,b];X) \ \ , \forall b \in]0;1[. \end{cases}$$

Il est bien connu que tout $h \in C^\theta([0,1[;X)$ peut etre étendue en une fonction
$\tilde{h} \in C^\theta([0,1];X)$ donc $C^\theta([0,1];X) = C^\theta([0,1[;X)$ cela explique l'introduction des espaces $C^\theta([0,b];X) \ \ , b \in]0;1[$.

2.2 Représentation de la solution

On utilise la représentation de la solution trouvée dans [3], cadre L^p qui est donnée par:

$$u(x) = e^{xQ}\zeta_0 + e^{(1-x)Q}\zeta_1 + I(x) + J(x) \ \ , x \in [0,1]. \tag{2.2.1}$$

avec

$$I(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds \ , \text{ et } J(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds,$$

$$u'(x) = Qe^{xQ}\zeta_0 - Qe^{(1-x)Q}\zeta_1 + QI(x) - QJ(x) \ \ , x \in [0,1],$$

alors

$$u'(0) = Q\zeta_0 - Qe^{Q}\zeta_1 - QJ(0) \in D(H),$$

$$\begin{cases} u(1) = e^{Q}\zeta_0 + \zeta_1 + I(1), \\ u(0) = \zeta_0 + e^{Q}\zeta_1 + J(0). \end{cases}$$

On utilise les conditions

$$\begin{cases} e^{Q}\zeta_0 + \zeta_1 + I(1) + H(Q\zeta_0 - Qe^{Q}\zeta_1 - QJ(0)) = u_{1,0} \\ \zeta_0 + e^{Q}\zeta_1 + J(0) = u_0, \end{cases}$$

alors $\zeta_0 = u_0 - e^{Q}\zeta_1 - J(0)$ et

$$e^{Q}(u_0 - e^{Q}\zeta_1 - J(0)) + \zeta_1 + H(Q\zeta_0 - Qe^{Q}\zeta_1 - QJ(0)) = u_{1,0} - I(1),$$

implique

$$(I - e^{2Q})\zeta_1 + H[-2Qe^{Q}\zeta_1 + Q(u_0 - 2J(0))] = u_{1,0} - I(1) - e^{Q}(u_0 - J(0)), \tag{2.2.2}$$

on remarque que

$$-2Qe^{Q}\zeta_1 + Q(u_0 - 2J(0)) \in D(H),$$

et de (2.1.3),$-2Qe^{Q}\zeta_1 \in D(H)$ donc

$$Q(u_0 - 2J(0)) \in D(H),$$

alors (2.2.2) devient

$$(I - e^{2Q} - 2HQe^{Q})\zeta_1 = u_{1,0} - I(1) - e^{Q}(u_0 - J(0)) - HQ(u_0 - 2J(0)),$$

de (2.1.4) on déduit

$$\zeta_1 = \Lambda^{-1}[u_{1,0} - I(1) - e^{Q}(u_0 - J(0)) - HQ(u_0 - 2J(0))], \tag{2.2.3}$$

et

$$\zeta_0 = u_0 - J(0) - e^{Q}\zeta_1, \tag{2.2.4}$$

Finalement, en insérant (2.2.3) et (2.2.4) dans (2.2.1) on déduit que, la solution du problème (2.0.1)-(2.0.2) u est représentée formellement, pour tout $x \in [0;1]$, par

$$\begin{aligned}
u(x) =& e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}[u_{1,0} - HQu_0] - e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}u_0 \\
&+ e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \\
&- \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \\
&- \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds \\
&+ R(x, u_0, u_{1,0}, f),
\end{aligned}$$

avec

$$R(x, u_0, u_{1,0}, f) = -e^{(1+x)Q}\Lambda^{-1}[u_{1,0} - I(1) - e^{Q}(u_0 - J_0) - HQ(u_0 - 2J_0)],$$

alors

$$\begin{aligned}
u(x) =& e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}[u_{1,0} - HQu_0] - e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}u_0 \\
&+ e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}f(0)ds \\
&- \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds - \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(0)ds \\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds + \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(0)ds \\
&- \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s) - f(1))ds - \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(1)ds \\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s) - f(0))ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(0)ds \\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s) - f(1))ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(1)ds \\
&+ R(x, u_0, u_{1,0}, f)
\end{aligned}$$

alors en ajoutant et en retranchant $f(0)$ et $f(1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
u(x) =& e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}[u_{1,0} - HQu_0] - e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}u_0\\
&+ e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}HQ^{-1}[e^{Q}f(0)-f(0)]\\
&- \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds - \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)]\\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds + \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)]\\
&- \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s)-f(1))ds - \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-2}[e^{Q}f(1)-f(1)]\\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s)-f(0))ds + \frac{1}{2}Q^{-2}[e^{xQ}f(0)-f(0)]\\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s)-f(1))ds + \frac{1}{2}Q^{-2}[e^{(1-x)Q}f(1)-f(1)]\\
&+ R(x,u_0,u_{1,0},f),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u(x) =& e^{xQ}[u_0 + Q^{-2}f(0)]\\
&+ e^{(1-x)Q}\big[\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big) + HQ^{-1}(Au_0 - f(0)] + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\big]\\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\big[-2e^{Q}u_0 + 2HQ^{-1}e^{Q}f(0) + e^{Q}Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)] - Q^{-2}e^{Q}f(1)\big]\\
&+ e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds - \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds\\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds - \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s)-f(1))ds\\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s)-f(0))ds - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\\
&+ \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s)-f(1))ds - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\\
&+ \overline{R}(x,u_0,u_{1,0},f)\\
&= S_0(x,u_0,f(0)) + S_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) + S_m(x,f) + S_c(x,f) + \overline{R}(x,u_0,u_{1,0},f),
\end{aligned}$$

avec

$$S_0(x,u_0,f(0)) = e^{xQ}[u_0 + Q^{-2}f(0)],$$

$$\begin{aligned}
S_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) =& e^{(1-x)Q}\big[\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big) + HQ^{-1}(Au_0 - f(0)] + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\big]\\
&+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\big[-2e^{Q}u_0 + 2HQ^{-1}e^{Q}f(0) + e^{Q}Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)] - Q^{-2}e^{Q}f(1)\big]\\
&= S^1_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) + S^2_{0,1}(x,u_0,f(0),f(1)) + S^3_{0,1}(x,f(0)),
\end{aligned}$$

avec

$$S^1_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) = e^{(1-x)Q}\big[\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big)+HQ^{-1}(Au_0-f(0)]+\frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\big],$$

$$S^2_{0,1}(x,u_0,f(0),f(1)) = -e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}\big(u_0 + f(1) + Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)]\big),$$

$$S_{0,1}^3(x, f(0)) = \frac{1}{2} e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} H Q^{-1} e^Q f(0),$$

$$\begin{aligned} S_m(x, f) =& e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} H \int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} e^{xQ} Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0)) ds \\ &+ \frac{1}{2} e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} e^Q Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s) - f(1)) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_c(x, f) =& \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} Q^{-2} f(0) \\ &+ \frac{1}{2} Q^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s) - f(1)) ds - \frac{1}{2} Q^{-2} f(1), \end{aligned}$$

et

$$\overline{R}(x, u_0, u_{1,0}, f) = R(x, u_0, u_{1,0}, f) - \frac{1}{2} e^{(1+x)Q} Q^{-2} f(0).$$

Chapitre 3

Solution stricte et régularité

3.1 Lemmes techniques

Pour étudier la régularité de la solution nous avons besoin de quelques lemmes techniques et les propositions de Sinestrari [16].

Proposition 3.1.1 *Soit Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X,$(e^{\xi Q})_{\xi>0}$ non nécessairement continu en 0.*

1. *Soit $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

   ① $e^{\cdot Q}\varphi \in C([0,1];X)$.

   ② $\varphi \in \overline{D(Q)}$.

2. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

   ① $e^{\cdot Q}\varphi \in C^{\theta}([0,1];X)$.

   ② $\varphi \in (X, D(Q))_{\theta,+\infty} = (D(Q),X)_{1-\theta,+\infty}$.

3. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. On pose*

$$\omega_1(x,g) = \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds, x \in [0,1].$$

   Alors $\omega_1(.,g) \in C^{\theta}([0,1];X)$ et il existe $K > 0$ tel que

$$\|\omega_1(.,g)\|_{C^{\theta}([0,1];X)} \leqslant K\|g\|_{C^{\theta}([0,1];X)}.$$

4. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. On pose*

$$\omega_2(x,g) = \int_0^x e^{(x-s)Q}(g(s)-g(0))ds, x \in [0,1],$$

   alors $\omega_2(.,g) \in C^{1+\theta}([0,1];X) \bigcap C^{\theta}([0,1];D(Q))$.

5. *Soient* $\theta \in]0,1[$ *et* $g \in C^{\theta}([0,1];X)$ *et* $\varphi \in X$. *On pose*

$$\omega(x,\varphi,g) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}g(s)ds, x \in [0,1],$$

alors, les assertions suivantes sont équivalentes

① $\omega(.,\varphi,g) \in C^{1+\theta}([0,1];X) \bigcap C^{\theta}([0,1];D(Q))$.

② $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0) + Q\varphi \in (X, D(Q))_{\theta,+\infty}$.
En particulier, si $\varphi = 0_X$ *et* $g(0) \in (X, D(Q))_{\theta,+\infty}, 0 < \theta < 1$. *Alors il existe* $K > 0$ *tel que*

$$\| Q\omega(.,\varphi,g) \|_{C^{\theta}([0,1];X)} \leqslant K \| g \|_{C^{\theta}([0,1];X)} .$$

6. *Soient* $\theta \in]0,1[$ *et* $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. *Alors*

$$I := Q\int_0^1 e^{sQ}(g(s) - g(0))ds \in (X, D(Q))_{\theta,+\infty}.$$

En posant $\widetilde{g} = g(1-.)$, *alors*

$$J := Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}(\widetilde{g}(s) - \widetilde{g}(0))ds \in (X, D(Q))_{\theta,+\infty}.$$

7. *Soient* $\varphi \in X$ *et* $x \in [0,1]$, *alors*

$$\int_0^x e^{(x-s)Q}\varphi ds, \int_x^1 e^{(s-x)Q}\varphi ds \in D(Q).$$

L'assertion 3 est obtenue en appliquant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [7]. L'assertion 4. qui améliore l'assertion 3.est due à E.Sinestrari [16],voir aussi Da Prato [6] .On trouve dans Guidetti [11], une preuve simple de ces résultats,voir Proposition 2.5 page 132,Corollaire 2.1 et Théorème 2.4, page 136.
Pour l'assertion 6, voir E. Sinestrari [16], Proposition 1.2,page 20.

Lemme 3.1.1 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Soit* $f \in C^{\theta}([0;1],X)$ *et* $u_0 \in D(A)$ *alors:*

1. $\overline{R}, A\overline{R} \in C^{\infty}([0,1];X)$.

2. $S_0 \in C^2\big(]0,1];X\big) \cap C(]0,1];D(A)\big)$.

3. $AS_0 = e^{\cdot Q}(Au_0 - f(0))$ *et ainsi*

$$\begin{cases} AS_0 \in C([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ AS_0 \in C^{\theta}([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Preuve 3.1.1 1. *Pour* $\varphi \in X$ *on a* $e^{Q} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(Q^k)$ *donc*

$$\begin{cases} e^{\cdot Q}\varphi \text{ et } e^{\cdot Q}e^{Q}\varphi \in C^{\infty}([0,1];X), \\ -Q^2e^{Q}\varphi \text{ et } -Q^2e^{\cdot Q}e^{Q}\varphi \in C^{\infty}([0,1];X), \end{cases}$$

donc $\overline{R}$ *et* $A\overline{R} \in C^{\infty}([0,1];X)$.

2. *Évident.*

3. *Puisque* $A=-Q^2$ *nous avons*

$$\begin{aligned} AS_0(x,u_0,f(0)) =& -Q^2e^{xQ}(u_0+Q^{-2}f(0)) \\ &= e^{xQ}(Au_0-f(0)), \end{aligned}$$

donc d'après la proposition (3.1.1) on a

$$\begin{cases} AS_0 \in C([0;1],X) \Longleftrightarrow Au_0-f(0)\in \overline{D(A)}, \\ AS_0 \in C^\theta([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_0-f(0)\in D_A(\frac{\theta}{2},+\infty). \end{cases}$$

Lemme 3.1.2 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Soit* $f\in C^\theta([0,1];X)$, $u_0,u_{1,0}\in D(A)$ *alors:*

1. $S_{0,1}\in C^2\big([0,1[;X)\cap C([0,1[;D(A)\big)$.

2. $HQ^{-1}(Au_0-f(0))\in D(A)$,

$$\begin{cases} AS_{0,1} \in C([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_{1,0}-f(1)-Q^2HQ^{-1}(Au_0-f(0))\in \overline{D(A)}, \\ AS_{0,1} \in C^\theta([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_{1,0}-f(1)-Q^2HQ^{-1}(Au_0-f(0))\in D_A(\frac{\theta}{2},+\infty). \end{cases}$$

Preuve 3.1.2 1. *Évident*

2. *On a*

$$\begin{aligned} \Lambda\Lambda^{-1}=I &\Rightarrow (I-e^{2Q}-2HQe^{Q})\Lambda^{-1}=I \\ &\Rightarrow \Lambda^{-1}-e^{2Q}\Lambda^{-1}-2HQe^{Q}\Lambda^{-1}=I. \end{aligned}$$

D'oú

$$\Lambda^{-1}=e^{2Q}\Lambda^{-1}+2HQe^{Q}\Lambda^{-1}+I.$$

Alors

$$\begin{aligned} S^1_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) =& e^{(1-x)Q}\big[u_{1,0}+Q^{-2}f(1)+HQ^{-1}(Au_0-f(0))\big] \\ &+ e^{(1-x)Q}e^{2Q}\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big)+HQ^{-1}(Au_0-f(0))] \\ &+ 2e^{(1-x)Q}HQe^{Q}\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big)+HQ^{-1}(Au_0-f(0)], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} AS^1_{0,1}(x,u_0,u_{1,0},f(0),f(1)) =& -Q^2e^{(1-x)Q}\big[u_{1,0}+Q^{-2}f(1)+HQ^{-1}(Au_0-f(0))\big] \\ & -e^{(1-x)Q}e^{2Q}Q^2\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big)+HQ^{-1}(Au_0-f(0))] \\ & -2e^{(1-x)Q}Q^2HQe^{Q}\Lambda^{-1}[Q^{-2}\big(-Au_{1,0}+\frac{1}{2}f(1)\big)+HQ^{-1}(Au_0-f(0)], \end{aligned}$$

et

$$AS^2_{0,1}(x,u_0,f(0),f(1))=Q^2e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}e^{Q}\big(u_0+f(1)+Q^{-2}[e^{Q}f(0)-f(0)]\big),$$

et

$$AS^3_{0,1}(x, f(0)) = -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^2\Lambda^{-1}HQ^{-1}e^Q f(0),$$

donc d'après (2.1.5), (2.1.6) et (2.1.7):

$$\begin{cases} AS_{0,1} \in C([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}, \\ AS_{0,1} \in C^\theta([0,1];X) \Longleftrightarrow Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Lemme 3.1.3 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$ et $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ alors:*

1. $AS_m(., f) \in C^\theta([0,1];X)$.
2. $AS_c(., f) \in C^\theta([0,1];X)$.

Preuve 3.1.3 1. *Pour $f \in C^\theta([0,1];X)$*

$$\begin{aligned} AS_m(x,f) = &- Q^2e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}H\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds \\ &+ \frac{1}{2}e^{xQ}Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds \\ &- \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^2\Lambda^{-1}e^QQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds \\ &+ \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^2\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s)-f(1))ds, \end{aligned}$$

donc d'après le proposition (3.1.1), on a

$$Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds \in D_Q(\theta, +\infty)$$

d'oú

$$\frac{1}{2}e^{\cdot Q}Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds \in C^\theta([0,1];X),$$

grâce à l'hypothèse (2.1.5)∼(2.1.8) alors

$$AS_m(., f) \in C^\theta([0,1];X).$$

2. *D'après la Proposition (3.1.1), assertion* 4*, on a*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s)-f(0))ds \in C^\theta([0,1];X), \\ \frac{1}{2}Q\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s)-f(1))ds \in C^\theta([0,1];X). \end{cases}$$

Donc

$$AS_c(., f) \in C^\theta([0,1];X).$$

Finalement, on obtient les résultats suivants:

Théorème 3.1.1 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.0.1),(2.0.2) admet une unique solution stricte.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 3.1.2 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.0.1),(2.0.2) admet une unique solution stricte u qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

3.2 Cas particulier du problème

Dans ce paragraphe on considère un cas particulier de l'operateur H ou l'hypothése d'inversibilité est vérifiée .
On pose $H = \alpha I, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, Re\alpha \geq 0$ le problème devient:

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x)\ ,\ x \in]0;1[, \\ u(0) = u_0, \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

notre hypothèse principale sur A est

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X, \sigma(A) \subset]-\infty; 0[\text{ et} \\ \forall \theta \in]0;\pi[, \sup\limits_{\lambda \in S_\theta} ||\lambda(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < +\infty \end{cases} \tag{3.2.2}$$

avec $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$ puisque $H = \alpha I$ alors

$$\Lambda = I - 2\alpha Q e^Q - e^{2Q},$$

on considère les fonctions F et G définies par

$$\begin{cases} F(z) = 1 + G(z), \\ G(z) = 2\alpha z e^{-z} - e^{-2z}, z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

D'abord nous fixons $\varepsilon_0 > 0$ telque $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$.

Lemme 3.2.1 *On pose $S = S_{\frac{\pi}{4}}$ on a*

1. *F, G sont holomorphe sur $\overline{S}$.*

2. *$x > 0$ implique $|F(x)| > 0$.*

3. $\lim\limits_{Rez\to+\infty, z\in\overline{S}} 2\alpha ze^{-z} - e^{-2z} = 0$ *puis*

   (a) *il existe $x_0 > 0$ tel que $z \in \overline{S}$ et $Rez \geq x_0$ implique*
   $$2 \geq |F(z)| \geq \frac{1}{2}.$$

   (b) *F est borné sur $\overline{S}$.*

4. *Il existe $\theta_0 \in]0; \frac{\pi}{4}[$ tel que $F(z)$ s'annule pas sur*
   $$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : Rez \geq \varepsilon_0 \ et \ |\arg z| \leq \theta_0\},$$
   et $\min\limits_{z\in\Sigma_0}|F(z)| = r > 0$.

Preuve 3.2.1 1. *Évident.*

2. *Pour tout $x > 0$ on a*
   $$ReF(x) = (1 - e^{-2x}) + 2(Re\alpha)xe^{-x} > 0,$$

3. *On écrit pour $z \in \overline{S}$*
   $$\begin{aligned}|2\alpha ze^{-z} + e^{-2z}| \leq& 2|\alpha||z|e^{-Rez} + e^{-2Rez}\\ \leq& 2\sqrt{2}|\alpha|(Rez)e^{-Rez} + e^{-2Rez}.\end{aligned}$$

4. *On a $|F(z)| \leq \frac{1}{2}$ pour toute*
   $$z \in \Sigma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : Rez \leq x_0 \ \ et \ \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}.$$
   De plus F est holomorphe sur un voisinage de
   $$z \in \Sigma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \epsilon_0 \leq Rez \leq x_0 \ \ et \ \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}.$$
   Donc, sur Σ_2 ,F a au plus un nombre fini de zéros. Ainsi, nous pouvons trouver $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$, assez petit pour que F ne s'annule pas
   $$z \in \Sigma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon_0 \leq Rez \leq x_0 \ \ et \ \ |\arg(z)| < \theta_0\}.$$
   donc
   $$\min_{z\in\Sigma_0}|F(z)| = \min\left(\min_{z\in\Sigma_2}|F(z)|, \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Maintenant nous posons pour $z \in \Sigma_0$
$$\Psi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

Lemme 3.2.2 *On suppose (3.2.2) alors l'opérateur*

$$\Lambda = I - 2\alpha Q e^{Q} - e^{2Q},$$

est borné et inversibele et $\Lambda^{-1} = I - \Psi(-Q)$.

Preuve 3.2.2 *Soit* $\theta \in]0, \theta_0[$ *tel que* $\sigma(-Q) \subset S_\theta \setminus B(0, 2\epsilon_0)$. *Noter que* G *est holomorphe et borné a voisinage de* $S_\theta \setminus B(0, 2\epsilon_0)$ *donc il existe* $\sigma > 0$ *tel que*

$$|\Psi(z)| = O(|z|^{-\sigma}) \text{ quand } z \longrightarrow +\infty, z \in S_\theta \setminus B(0, 2\epsilon_0).$$

A fin que nous puissions définir $\Psi(-Q)$ *et* $G(-Q)$ *.(voir [12] subsection 2.5.1,p45, avec remarque 2.5.1 et 6,p.46)*
Nous avons aussi $\Lambda = I + G(-Q)$ *et*

$$\begin{aligned}(I - \Psi(-Q))\Lambda =& (1 - \Psi)(-Q) \circ (1 + G)(-Q) \\ =& [(1 - \Psi)(1 + G)](-Q) \\ =& \left(1 - \frac{G}{1 + G}\right)(1 + G)(-Q) \\ =& 1(-Q) \\ =& I.\end{aligned}$$

De même $\Lambda(I - \Psi(-Q))$.

Proposition 3.2.1 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (3.2.1) admet une unique solution stricte.*
2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) \in D(Q), \\ Au_{1,0} - f(1) - \alpha Q(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Proposition 3.2.2 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (3.2.1) admet une unique solution stricte* u *qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*
2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ Au_0 - f(0) \in D(Q), \\ Au_{1,0} - f(1) - \alpha Q(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Le cas $H = -\alpha Q^{-1}$,

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x)\ ,\ x \in]0;1[, \\ u(0) = u_0, \\ -\alpha Q^{-1}u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$\Lambda = I + 2\alpha e^{Q} - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$ et l'hypothèse (3.2.2) alors:

Proposition 3.2.3 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (3.2.3) admet une unique solution stricte.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_{1,0} - f(1) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Proposition 3.2.4 *Supposons (2.1.1)∼(2.1.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (3.2.3) admet une unique solution stricte u qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ Au_{1,0} - f(1) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Chapitre 4

Problème avec un paramètre spectral

Dans ce chapitre, en vue d'éliminer l'hypothése d'inversibilité du déterminant, on ajoute un paramètre dans l'équation :

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x); x \in [0;1]; \tag{4.0.1}$$

sous des conditions aux limites non locales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(0) \in D(H) \ \text{ et } \ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{4.0.2}$$

4.0.1 Étude du problème

Nous considérons $\omega_0 \geq 0$ fixe et pour $\omega \geq \omega_0$ on pose

$$A_\omega = A - \omega I,$$

alors le problème (2.0.1)-(2.0.2) devient (4.0.1)-(4.0.2) avec A remplacé par A_ω.
Nos hypothèse principale sur les opérateurs est

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \ \text{ est un opérteur linéaire fermé dans } \ X, [0;+\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}), \ \text{et} \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{4.0.3}$$

cette hypothèse implique $Q_{\omega_0} = -(-A_{\omega_0})^{\frac{1}{2}}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X.

$$H \ \text{ est un opérteur linéaire fermé,} \tag{4.0.4}$$

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^K) \subset D(H), \tag{4.0.5}$$

on a

$$D_{Q_\omega}(1+\theta, +\infty) = D_Q(1+\theta, +\infty),$$

$$\Lambda_\omega^{-1}\big(D_Q(1+\theta, +\infty)\big) \subset D(Q^2), \tag{4.0.6}$$

$$Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1}\big(D_Q(1+\theta, +\infty)\big) \subset \overline{D(Q)}, \tag{4.0.7}$$

$$Q_\omega^2 \big[\Lambda_\omega^{-1}\big(D_Q(1+\theta, +\infty)\big)\big] \subset D_Q(\theta, +\infty), \tag{4.0.8}$$

avec

$$\Lambda_\omega = -2HQ_\omega e^{Q_\omega} + I - e^{2Q_\omega},$$

On résumé quelques remarques:

Remarque 4.0.1 *pour tout $\omega \geq \omega_0$*

1.
$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérteur liniare fermé dans} X, \\ [\omega - \omega_0; +\infty[\subset \rho(A_\omega) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A_\omega - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{4.0.9}$$

et pour $c_0 = \sup\limits_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)}$,qui ne dépend pas de ω ;on obtient

$$\sup_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A_\omega - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\lambda \geq 0} ||\lambda(A_{\omega_0} - (\lambda + \omega - \omega_0)I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \geq c_0$$

2. $Q_\omega = -(-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ *génerent des semi-groupes analytiques sur X.*

3. $D(Q_\omega) = D(Q_{\omega_0})$.

4. $Q_\omega^2 \left[\Lambda_\omega^{-1}\big(D_{Q_\omega}(1+\theta, +\infty)\big)\right] = Q^2\left[\Lambda^{-1}\big(D_Q(1+\theta, +\infty)\big)\right]$.

5. *En raison du fait que pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$D(Q_\omega^{2k}) = D(A_\omega^k) = D(A^k) \subset D(Q_\omega^{2k-1}),$$

on a

$$\bigcap_{K=1}^{+\infty} D(Q_\omega^k) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A_\omega^k) = \bigcap_{K=1}^{+\infty} D(A^k).$$

Lemme 4.0.1 *On suppose (4.0.3) $\sim$ (4.0.9), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur Λ_ω inversible.*

Preuve 4.0.1 *On écrit $\Lambda_\omega = I - \mathcal{R}_\omega$ avec $\mathcal{R}_\omega = 2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}$ ainsi, pour montrer que l'opérateur Λ_ω a un inverse borné, il suffit d'avoir $||\mathcal{R}_\omega||_{\mathcal{L}(X)} < 1$.*
En utilisant G. Dore et Yakubov [9], p.103, on trouve

$$\begin{cases} \exists c > 0, \exists k > 0 : \forall \omega \geq \omega_0, \forall x \geq \frac{1}{2} \\ ||Q_\omega e^{xQ_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-kx\sqrt{\omega}} et ||e^{xQ_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-kx\sqrt{\omega}}. \end{cases}$$

D'aprés Haase [12], Proposition 3.17,p. 65, il existe $K > 0$ tel que $(T_\omega)_{\omega \geq \omega_0} \in \mathcal{L}(X)$ et pour tout $\omega \geq \omega_0$ on a

$$\begin{cases} ||T_{\omega-\omega_0}||_{\mathcal{L}(X)} \leq K\sqrt{\omega - \omega_0}, \\ (-A_{\omega_0})^{\frac{1}{2}} + T_{\omega-\omega_0} = (-A_{\omega_0+(\omega-\omega_0)}))^{\frac{1}{2}}, \\ A_\omega^{-1} T_{\omega-\omega_0} = T_{\omega-\omega_0} A_\omega^{-1}. \end{cases}$$

Posons $Q_\omega = Q_{\omega_0} - T_{\omega-\omega_0}$. On a

$$T_{\omega-\omega_0} = (\sqrt{z + \omega - \omega_0} - \sqrt{z})(-A_{\omega_0}),$$

en plus Q_{ω_0} et $T_{\omega-\omega_0}$ génerent des semi-groupes analytiques qui satisfont

$$e^{x(Q_{\omega_0} - T_{\omega-\omega_0})} = e^{xQ_{\omega_0}} e^{-xT_{\omega-\omega_0}}, x \geq 0.$$

Maintenant, on fixe $s > 0$ *tel que* $s(k+K) < \frac{k}{2}$ *(alors* $1 - s > \frac{1}{2}$*) et pour* $\omega \geq \omega_0$ *on a*

$$\begin{aligned}
||\mathcal{R}_\omega||_{\mathcal{L}(X)} =& ||2He^{sQ_\omega}Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega} + e^{2sQ_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} \\
=& ||2He^{sQ_{\omega_0} - sT_{\omega-\omega_0}}Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega} + e^{2sQ_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} \\
\leq& ||2He^{sQ_{\omega_0}}||_{\mathcal{L}(X)}||e^{-sT_{\omega-\omega_0}}||_{\mathcal{L}(X)}||Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} + ||e^{2sQ_\omega}||_{\mathcal{L}(X)} \\
\leq& 2||2He^{sQ_{\omega_0}}||_{\mathcal{L}(X)}e^{sK\sqrt{\omega-\omega_0}}ce^{-k(1-s)\sqrt{\omega}} + ce^{-2k\sqrt{\omega}} \\
\leq& 2c||He^{sQ_{\omega_0}}||_{\mathcal{L}(X)}e^{(-k+s(k+K))\sqrt{\omega}} + ce^{-2k\sqrt{\omega}} \\
\leq& 2c||He^{sQ_{\omega_0}}||_{\mathcal{L}(X)}e^{-(\frac{k}{2})\sqrt{\omega}} + ce^{-2k\sqrt{\omega}}.
\end{aligned}$$

alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geq \omega_0$, $||\mathcal{R}_\omega||_{\mathcal{L}(X)} < 1$,
donc $\Lambda_\omega = I - T_\omega$ *est inversible.*

Théorème 4.0.1 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour* $\omega^* \geq \omega_0$*. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (4.0.1)-(4.0.2) admet une unique solution stricte.*

2. $u_0 \in D(A)$, $u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 4.0.2 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour* $\omega^* \geq \omega_0$*. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.0.1)-(4.0.2) admet une unique solution stricte* u *qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. $u_0; u_{1,0} \in D(A)$

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Preuve 4.0.2 *Soit* $\omega \geq \omega^*$*. On remplace* A *par* A_ω *en (2.0.1) et (2.0.2) et les hypothèses (2.1.1)∼(2.1.8) correspondent aux hypothèses (4.0.3)∼(4.0.8), le lemme (5.0.1) et les hypothèses (4.0.3)∼(4.0.8) implique (2.1.4).*
Donc on applique les théorèmes (4.1.1) et (4.1.2) pour A_ω,
mais $\overline{D(A_\omega)} = \overline{D(A)}$ *et* $D(Q_\omega) = D(Q)$ *et*

$$A_\omega u_0 - f(0) \in \overline{D(A_\omega)} \Longleftrightarrow Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$

4.0.2 Cas particulier de problème

on considérons $H = \alpha(Q_{\omega_0})^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\beta \in]-\infty; 1]$ alors le problème devient

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0;1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) + \alpha(Q_{\omega_0})^\beta u'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{4.0.10}$$

Par exemple si $\beta = 0$ devient

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0;1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) + \alpha u'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{4.0.11}$$

Corollaire 4.0.1 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour $\omega^* \geq \omega_0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (4.0.11) admet une unique solution stricte.*

2. *$u_0 \in D(A)$, $u_{1,0} \in D(A)$ et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) \in D(Q), \\ Au_{1,0} - f(1) - \alpha Q_\omega(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Corollaire 4.0.2 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour $\omega^* \geq \omega_0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (4.0.11) admet une unique solution stricte u qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. *$u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ Au_0 - f(0) \in D(Q), \\ Au_{1,0} - f(1) - \alpha Q_\omega(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Chapitre 5

Application

On reprend ici l'exemple donné dans [4]. On définit l'opérateur linéaire fermé A dans $X := L^p(0,1), p \in]1,+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l} D(A) = W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1) \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{array}\right.$$

Ensuite, il n'est pas difficile de voir que pour $\psi \in L^p(0,1)$ et $y \in (0,1)$,

$$\left[A^{-1}\psi\right](y) = (y-1)\int_0^y s\psi(s)\,ds + y\int_y^1 (s-1)\psi(s)\,ds,$$

de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\sqrt{\lambda} > 0$, on a

$$\left[(A-\lambda I)^{-1}\psi\right](y) = \int_0^1 N_{\sqrt{\lambda}}(y,s)\psi(s)\,ds,$$

où

$$N_{\sqrt{\lambda}}(y,s) = -\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}(1-y)\sinh\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } 0 \leq s \leq y, \\ \\ \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}y\sinh\sqrt{\lambda}(1-s)}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } y \leq s \leq 1. \end{array}\right.$$

soit $q \in]1;+\infty[$ tel que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$ et considérons

$$H(\varphi)(y) = \int_0^y \phi(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \varphi \in X, \ y \in (0,1),$$

Où $\phi(.,.) : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction fixe vérifiant

$$\begin{cases} \phi(y,.) \in L^q(0,1), \quad pour\ p.p.\ y \in (0,1) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}(y,.), \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(y,.) \in L^q(0,1), \quad pour\ p.p.\ y \in (0,1) \\ \phi_1 : y \longmapsto \phi(y,y), \phi_2 : y \longmapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial y}(y,y) \in L^p(0,1) \\ \Phi : y \longmapsto \phi(y,.) \in L^q(0,1; L^q(0,1)) \\ \phi(1,.) = 0, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

notez que si $\sup\limits_{y\in[0,1]} \parallel \phi(y,.) \parallel_{L^q(0,1)} = C_\phi < +\infty$ puis

$$y :\longmapsto \phi(y,.) \in L^q(0,1;L^q(0,1)),$$

et nous pouvons construire un exemple simple d'une fonction ϕ satisfaisant (5.0.1), pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\phi(y,\xi) = (1-y)^n \psi(\xi) \quad \text{et} \quad \xi, y \in (0,1),$$

Où $\psi \in W^{2,q}(0,1) \cap W^{1,p}(0,1)$, alors $H \in \mathcal{L}(X)$ puisque pour tous $\varphi \in X$

$$\begin{aligned}
||H(\varphi)||_X &= \Big(\int_0^1 \Big| \int_0^y \phi(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi|^p dy\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(\int_0^1 \Big| \int_0^1 \phi(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big|^p dy\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big|\phi(y,\xi)\Big|^q d\xi\Big)^{1/q} \Big(\int_0^1 \Big|\varphi(\xi)\Big|^p d\xi\Big)^{1/p} dy \\
&\leqslant \|\Phi\|_{L^q(0,1;L^q(0,1))} \|\varphi\|_X.
\end{aligned}$$

Ici, le problème abstrait

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u_0. \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) = u_0(y), \quad y \in]0,1[\\ u(1,y) + \int_0^y \phi(y,\xi) \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\xi)\, d\xi = u_{1,0}(y), \ y \in]0,1[\\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \ x \in]0,1[\,. \end{cases} \tag{5.0.2}$$

Nous voulons appliquer les Theorèmes (5.0.1) et (5.0.2) au problème (5.0.2). Tout d'abord, nous indiquons explicitement les conditions citées dans ce theorème :

$$\begin{cases} u_0, u_{1,0} \in D(A) \\ Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \ \ ou \ \ D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q^2HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)} \ \ ou \ \ D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Les espaces d'interpolation $(D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$ sont d'écrits par

$$\begin{cases} (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = \big\{\varphi \in W^{2-1/p,p}(0,1) \ : \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\big\}, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = W^{1-1/p,p}(0,1) \ \text{si } p < 2, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in W^{1-1/p}(0,1) \ : \ \displaystyle\int_0^1 \frac{|\varphi(t)|^p}{t(1-t)} d\xi < +\infty\right\} \ \text{si } p = 2 \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = \big\{\varphi \in W^{1-1/p,p}(0,1) \ : \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\big\} \ \text{si } p > 2 \end{cases}$$

(voir [7], p. 385.)

nous rappelons que $f \in W^{k+\theta,p}$ où $k \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$, si $f \in W^{k,p}(0,1)$ et

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\left|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)\right|^p}{|x-y|^{1+\theta p}} dxdy < +\infty$$

Notons que, $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(Q)$ et $H \in \mathcal{L}(X)$ si (ii) est vérifiée.

On vérifie les hypothèses (avec $\omega_0 = 0$) des Theorèmes (5.0.1) et (5.0.2).

① Pour (4.0.9), voir [6], p.372, Lemme 8.1.

② $H \in \mathcal{L}(X)$ et donc les hypothèses (4.0.4) et (4.0.5) sont clairement vérifiées.

③ Pour l'hypothèse (4.0.8), il suffit de montrer (2.1.6) :

Soit $\varphi \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(A^k\right) \subset \mathcal{C}(0,1)$, puis pour $y \in (0,1)$

$$\begin{cases} \dfrac{dH(\varphi)}{dy}(y) & = \phi(y,y)\varphi(y) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \\ & = \phi_1(y)\varphi(y) \quad + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \\ \dfrac{d^2H(\varphi)}{dy^2}(y) & = \dfrac{d\phi_1}{dy}(y)\varphi(y) + \phi_1(y)\dfrac{d\varphi}{dy}(y) \\ & \quad + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(y,y)\varphi(y) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \end{cases}$$

donc $y \mapsto \phi_1(y)\varphi(y) \in L^p(0,1)$ car

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |\phi_1(y)\varphi(y)|^p\,dy\right)^{1/p} & \leq \sup_{z\in[0,1]} |\varphi(z)| \times \left(\int_0^1 |\phi_1(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\ & \leq \sup_{z\in[0,1]} |\varphi(z)| \times \|\phi_1\|_X < +\infty, \end{aligned}$$

de même $y \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \in L^p(0,1)$ car

$$\begin{aligned} \|H(\varphi)\|_X & = \left(\int_0^1 \left|\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\,d\xi\right|^p dy\right)^{1/p} \\ & \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\right|^q d\xi\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\varphi(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} dy \\ & \leq \left\|\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,.)\right\|_{L^q(0,1)} \|\varphi\|_X < +\infty. \end{aligned}$$

Alors $\dfrac{dH(\varphi)}{dy} \in L^p(0,1)$ et de la même manière, on montre que $\dfrac{d^2H(\varphi)}{dy^2} \in L^p(0,1)$.

En appliquant maintenant les Théorèmes (5.0.1) et (5.0.2), on obtient le résultat suivant:

Proposition 5.0.1 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour* $\omega^* \geq \omega_0$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (5.0.2) admet une unique solution stricte.*

2. $u_0 \in D(A)$, $u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Proposition 5.0.2 *On suppose (4.0.3)∼(4.0.9) et pour $\omega^* \geq \omega_0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (5.0.2) admet une unique solution stricte u qui satisfait la propriété de la régularité maximale.*

2. $u_0; u_{1,0} \in D(A)$

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty), \\ HQ^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D(A), \\ Au_{1,0} - f(1) - Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}(Au_0 - f(0)) \in D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Bibliographie

Bibliographie principale

[1] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *On Some Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Coeffcient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces*,EJQTDE,2013No.36,p.1-32.

[2] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *Nonlocal General Boundary Value Problems of Elliptic Type in L p Cases*,Mediterr. J. Math,15 july 2015.

[3] M. Cheggag, M. Kaid, R. Labbas and S. Maingot. : *New Results on Elliptic Equations with Nonlocal Boundary Coeffcient-operator Conditions in UMD Spaces :Noncommutative Cases* .Mediterr J Math, 1669–1683, 2015 .

[4] M. KAID. : Thèses de doctorat.:*Problèmes de type Robin à coeffcient opérateur H pour une équation différentielle abstraite d'ordre deux de type elliptique régie par un opérateur A: Cadre non commutatif entre* $-\sqrt{-A}$ *etH dans divers espaces.*

Bibliographie générale

[5] A. V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semi-groups Generated by them*, Pacif.J.Math.10(1960),419-437.

[6] G . Da Prato . : *Absract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearisation*, Proc . Symp . Pure Math. 45(1)(1986),p.359-370.

[7] G. Da Prato et P. Grisvard. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*,J.Math.Pures Appl.(9)54(1975),p.305-387..

[8] G. Dore, A. Venni : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196, 124–136 (1987).

[9] G. Dore, S. Yakubov : *Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems.* Semigroup Forum 60, 93–121 (2000).

[10] P. Grisvard. : *Spazi di trace applicazioni (Italian)*,Rend.Mat.(6),5(1972),657-729.

[11] D. Guidetti. : *A Introductionto Maximal Regularity for Parabolic Problems and Interpolation Theory with Application to an Inverse Problem, International Minicourse - Workshop, Interplay Between* (C_0)*- Semi groups and PDEs : Theory and Applications*, Bari/Italy September 22-26,2003,p.113-146.

[12] M. Haase : *The functional calculus for sectorial operators, operator theory: Advances and Applications*, vol. 169. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2006)

[13] R. Labbas,M. Moussaoui : *On the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients*. Semigroup Forum 60, 187–201 (2000).

[14] J. L. Lions. : *Théorèmes de trace et d'interpolation, I et II* . Annali S.N.S.di Pisa,13, (1959),389-403et14,(1960),317-331.

[15] J. L. Lionset J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation* .Publ.Math.,Inst. Hautes Etud.Sci. 19(1964),p.5-68.

[16] E . Sinestrari.: *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Space of Continuous Functions*, J . Math .Anal . Appl .107(1985),p.16-66.