MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Fathallah TAF

Solvabilité et positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

soutenu le 17 Juin 2021 *devant le jury composé de :*

Président :	Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	UMAB
Examinatrice :	Djemaia BENSIKADDOUR	MCB	UMAB
Encadreuse :	Zineb KAISSERLI	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2020 / 2021

MASTER

Remerciements

Louange à **ALLAH** le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime, tout d'abord, ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mon encadreuse **Zineb KAISSERLI**, pour ses efforts constants, sa disponibilité, sa grande générosité humaine et scientifique.

J'adresse ma reconnaissance et mes remerciements à Monsieur **Mohammed Amine GHEZZAR** et à Madame **Djemaia BENSIKADDOUR** pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon Jury de soutenance et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon mémoire de fin d'étude.

Mes remerciement vont également à tous les enseignants que j'ai rencontré ou côtoyé durant mon cursus universitaire sans oublier tout le personnel administratif.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues et mes amies en particulier à Hammou Mohamed, Ould khkettab Mohamed, Ghiles Noureddine, Mansour Abdenour, Kebir Najwa et à mon cher frère Taf Amar Abd Nour.

En dernier, mes plus vifs et fort remerciements et reconnaissances vont aux membres de ma famille tout particulièrement à mes parents et ma chère sœur pour leur présence constante.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{Z}_+$	:	Corps des nombres entiers relatifs positifs.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}_+^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles non négatifs.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles non négatives de taille $n \times m$.
i	:	Entier relatif positif (variable discrète).
t	:	Variable temporelle réelle.
v, w	:	Variables complexes.
$\alpha, \alpha_i, \beta_i$	:	Nombre réel positif, $i = 1, 2$.
$\mathbf{D}^\alpha$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo d'une fonction unidimensionnelle.
$\mathbf{I}_a^\alpha$	:	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville au point a d'ordre α d'une fonction unidimensionnelle.
$\mathbf{D}_a^\alpha$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville au point a d'ordre α d'une fonction unidimensionnelle.
$\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$	:	Dérivée partielle fractionnaire d'ordre α_i par rapport à t_i, $i = 1, 2$ d'une fonction bidimensionnelle.
$\mathbf{I}_{t_i}^{\beta_i}$	:	Intégrale fractionnaire d'ordre β_i par rapport à t_i , $i = 1, 2$ d'une fonction bidimensionnelle.
Δ^α	:	Dérivée fractionnaire discrète d'ordre α d'une fonction unidimensionnelle discrète.
$\Delta^{\alpha_1,\alpha_2}$	:	Dérivée partielle fractionnaire discrète d'ordre α_1 et α_2 d'une fonction bidimensionnelle discrète.
x^h, x^v, x_1, x_2	:	Vecteurs d'états .
$X_1(v, w), X_2(v, w)$	:	Transformées de Sumudu continues et discrètes des fonctions $x_1(t, i)$ et $x_2(t, i)$ respectivement.
$u(t, i)$	:	Vecteur d'entrée.
$U(v, w)$	:	Transformée de Sumudu continue et discrète de la fonction $u(t, i)$.
$y(t, i)$	:	Vecteur de sortie.
$Y(v, w)$	:	Transformée de Sumudu continue et discrète de la fonction $y(t, i)$.
Γ	:	Fonction Gamma d'Euler.
B	:	Fonction Bêta.
δ	:	Impulsion de Dirac.
$I_{n\times n}$	:	Matrice identité de dimension $n \times n$.

$\mathscr{S}$	:	Transformée de Sumudu continue.
$\mathscr{S}_d$	:	Transformée de Sumudu discrète.
G^{-1}	:	Inverse d'une matrice G de taille $n \times n$.
T_{pq}	:	Matrice transition.
$\star$	:	Produit de convolution.

Introduction

Lors de la première révolution industrielle, la science a joué un rôle limité. Mais à partir des années 50, la nouvelle révolution industrielle a été liée au progrès de la science. C'est le début de la théorie des systèmes dynamiques.

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques. Le but de cette théorie est de modéliser des processus à long terme qui se développent dans le temps afin d'étudier leur comportement pour obtenir des résultats, car ils sont créés à partir d'un ensemble de phénomènes liés entre eux et isolé artificiellement du monde extérieur [1, 10, 11, 13, 16] et [18].

En effet, la modélisation des systèmes dynamiques, laquelle nécessite un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié, peut être représentée par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou encore par des équations différentielles fractionnaire [1, 13, 18]. Ainsi, un système dynamique d'ordre fractionnaire est un système dynamique modélisé par des équations différentielles utilisant des dérivations non entière.

A travers ce mémoire, nous allons traiter la solvabilité d'une certaine classe d'un système dynamique bidimensionnel fractionnaire hybride [10] par le biais de la transformation de Sumudu à temps continu et discret [7, 8, 19]. Notre choix porte sur la transformée de Sumudu suite aux nombreux avantages tels que le maintien de la fréquence et de l'unité lors de la résolution de problèmes et de la forme de la fonction lors de la multiplication par un nombre [2, 3].

Après l'étude de la solvabilité, nous allons établir des conditions permettant la positivité du système dynamique en question.

Le présent manuscrit est organisé comme suit :

- Le premier chapitre regroupe les différentes notions préliminaires utiles pour la réalisation et la compréhension de ce document. En effet, des définitions et des notions fondamentales seront présentées en premier lieu suivit par un petit rappel sur les dérivées fractionnaires. En dernier, les différents modèles des systèmes dynamiques bidimensionnels seront exposés.

- Dans le deuxième chapitre, les différentes définitions et propriétés, existantes et d'autres que nous avons développé, de la transformée de Sumudu continue, discrète et fractionnaire seront présentées. Ensuite, la solvabilité d'un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel hybride est établie.

- Quant au troisième et dernier chapitre, nous présenterons quelques notions et définitions essentielles pour établir des conditions sur la positivité du système dynamique en question.

Le présent manuscrit sera clôturé par une conclusion qui regroupe nos contributions ainsi que quelques perspectives pour nos futurs travaux, suivie par les différents ouvrages et articles utilisés pour la réalisation de ce travail.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions de base. Il s'agit de quelques fonctions spéciales lesquelles jouent un rôle important dans la théorie de différentiation et dans la théorie des équations différentielles et qui seront utilisées par la suite, suivie par quelques définitions et résultats principaux sur les dérivées fractionnaires. En dernier, différents types de systèmes dynamiques bidimensionnels seront présentés.

2 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présenterons les définitions et quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta.

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 2.1 [15] *La fonction Gamma d'Euler, notée par Γ, est définie par l'équation*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.1}$$

où $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Proposition 2.2 [15] *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante*

1. $\forall z \in \mathbb{C}_+^* : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) = n!$.

Preuve.

1. Pour démontrer la première propriété, il suffit de passer par une intégration par partie. En effet,

$$\begin{aligned} \forall z > 0 : \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} dt, \\ &= [-e^{-t} t^{z}]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}, \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. En remplaçant z par $n \in \mathbb{N}^*$ dans la propriété précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n), \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1), \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2), \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1), \\
&= n!,
\end{aligned}$$

vu que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = 1$.

■

Exemple 2.3 *Montrons que*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En posant $t = u^2$ dans l'équation (1.1), nous obtenons

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2\frac{1}{2}-1} du, \\
&= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du, \\
&= \sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

car $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.2 Fonction Bêta

Définition 2.4 [15] *La fonction définie par*

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \tag{1.2}$$

où $p > 0$ et $q > 0$ est dite la fonction de Bêta.

Proposition 2.5 [15] *La fonction Bêta satisfait aux propriétés suivantes :*

1. *Dans sa définition sous forme d'intégrale, le changement de variable $s = 1 - x$ prouve que cette fonction est symétrique, c'est-à-dire,*

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p);$$

2. *Il suffit d'effectuer une intégration par partie pour prouver que*

$$p\mathrm{B}(p,q+1) = q\mathrm{B}(p+1,q);$$

3. $\mathrm{B}(p,1) = \frac{1}{p}$.

2.3 Relation entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta

Théorème 2.6 [15] *La fonction Bêta est reliée à de la fonction Gamma d'Euler par*

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.3}$$

Preuve. Nous avons

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx,$$

et

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy.$$

Donc

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy\right). \tag{1.4}$$

Pour

$$\left\{ \begin{array}{lll} u & = & x+y \\ v & = & \frac{x}{x+y} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & = & uv, \\ y & = & u(1-v), \end{array} \right.$$

l'équation (1.4) devient

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(p)\,\Gamma(q) & = & \displaystyle\int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-uv}(uv)^{p-1} e^{-u(1-v)} [u(1-v)]^{q-1}(-u) du dv, \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv, \\ & = & \displaystyle\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv\right)\left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du\right), \\ & = & \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q). \end{array}$$

Autrement dit,

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.5}$$

■

2.4 Impulsion de Dirac

Définition 2.7 [13] *On appelle impulsion de Dirac la fonction δ définie par*

$$\delta(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t \neq 0, \\ +\infty & \text{si} & t = 0. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Dans un cas discret, l'impulsion de Dirac est donnée par la formule suivante

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & i \neq j, \\ 1 & \text{si} & i = j. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

3 Quelques types des dérivées fractionnaires

Cette section est dédiée aux définitions et aux quelques propriétés pour l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et à la dérivée fractionnaires au sens de Caputo. Quelques définitions sur les dérivées fractionnaires pour des fonctions discrète sont aussi présentées dans cette section.

3.1 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 3.1 [11, 13, 15] *On appelle intégrale fractionnaire d'ordre* α, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *de la fonction* f, *et on la note* $\mathbf{I}_a^\alpha$, *la fonction définie par*

$$\mathbf{I}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \tag{1.8}$$

où $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma d'Euler définie par la formule* (1.1) *et* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 3.2 [11, 13, 15] *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* α, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *de la fonction* f *et on la note* $\mathbf{D}_a^\alpha$ *la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_a^\alpha f(x) &= \mathbf{D}^n \mathbf{I}_a^{n-\alpha} f(x), && (1.9)\\ &= \frac{d^n}{dx^n}\mathbf{I}_a^{n-\alpha} f(x), && (1.10)\end{aligned}$$

où n *est un entier naturel supérieure strictement à* α *et* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3.3 [11, 13, 15] *Soit* f *une fonction intégrable et bornée, et soient* α *et* β *deux nombres réels strictement positifs. Alors, nous avons*

$$\mathbf{I}_a^\alpha \left[\mathbf{I}_a^\beta f(t)\right] = \mathbf{I}_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right], \tag{1.11}$$

Preuve. Soit f une fonction intégrable et bornée, et soient α et β deux nombres réels strictement positifs. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a^\alpha \left[\mathbf{I}_a^\beta f\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\mathbf{I}_a^\beta f\right)(\tau)\,dt,\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds\right] d\tau,\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds\right] d\tau.\end{aligned}$$

Comme $a \le t \le x$ et $a \le \tau \le t$, alors, on peut prendre $a \le \tau \le t$ et $\tau \le t \le x$. Ainsi,

$$\mathbf{I}_a^\alpha \left[\mathbf{I}_a^\beta f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)\left(\int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\,dt\right) d\tau. \tag{1.12}$$

Si on prend,

$$u = \frac{t-\tau}{x-\tau}.$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\,dt &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\,dy,\\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha,\beta),\\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. && (1.13)\end{aligned}$$

En remplaçant (1.13) dans (1.12), il découle

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a^{\alpha}\left[\mathbf{I}_a^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)d\tau,\\ &= \mathbf{I}_a^{\beta+\alpha} f(x).\end{aligned}$$

■

Proposition 3.4 [11, 13, 15] *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville existent et soient λ et μ deux réels non nuls. Ainsi,*

1. $\mathbf{D}_a^{\alpha}\left[\lambda f(x)+\mu g(x)\right]$ *existe, et nous avons*

$$\mathbf{D}_a^{\alpha}\left[\lambda f(x)+\mu g(x)\right] = \lambda\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)+\mu\mathbf{D}_a^{\alpha} g(t). \tag{1.14}$$

2. *En général,*

$$\mathbf{D}_a^{\alpha}\left[\mathbf{D}_a^{\beta} f(x)\right] \neq \mathbf{D}_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.15}$$

Et aussi,

$$\mathbf{D}_a^{\alpha}\left[\mathbf{D}_a^{\beta} f(x)\right] \neq \mathbf{D}_a^{\beta}\left[\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)\right]. \tag{1.16}$$

Exemple 3.5 *Soit la fonction f définie pour tout $\beta>0$ par*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}.$$

Calculons sa dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_a^{\alpha} f(t) &= \mathbf{D}^n\mathbf{I}_a^{n-\alpha} f(t),\\ &= \mathbf{D}^n\mathbf{I}_a^{n-\alpha}(t-a)^{\beta},\\ &= \mathbf{D}^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta} ds\right].\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $s=a+w(t-a)$ et en utilisant la définition de la fonction Bêta (1.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_a^{\alpha} f(t) &= \mathbf{D}^n\left[\frac{(t-a)^{n-a+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 (1-w)^{n-\alpha-1} w^{\beta} dw\right],\\ &= \mathbf{D}^n\left[\frac{(t-a)^{n-a+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)}\mathrm{B}(\beta+1, n-\alpha)\right],\\ &= \mathbf{D}^n\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right],\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right].\end{aligned}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right] &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha},\\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

En dernier,

$$\mathbf{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.17}$$

3.2 Dérivée fractionnaires au sens de Caputo

Définition 3.6 [11, 13, 15] *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction f sur $[a,b]$, notée par $\mathbf{D}^{\alpha}$, est définie par l'intermédiaire du dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par*

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \mathbf{D}^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k \right]. \tag{1.18}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.18) prend la forme

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \mathbf{D}^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - f(a) \right]. \tag{1.19}$$

Théorème 3.7 [11, 13, 15] *Soit $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$,et n. Si $f \in A\mathscr{C}^n([a,b])$, alors, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f existe presque partout sur $[a,b]$ et est présentée par*

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds. \tag{1.20}$$

En particulier, pour $0 < \alpha < 1$ et $f \in A\mathscr{C}([a,\, b])$, nous obtenons

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\,ds. \tag{1.21}$$

Exemple 3.8 *Soit f une fonction définie par*

$$f(t) = (t-a)^{\beta},$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, avec $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, de la fonction f.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \mathbf{I}^{n-\alpha}_{a^+} \mathbf{D}^n f(t), & (1.22)\\ &= \mathbf{I}^{n-\alpha}_{a^+} \mathbf{D}^n (t-a)^{\beta}. & (1.23) \end{aligned}$$

En tenant compte

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^n (t-a)^{\beta} &= \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\beta}, \\ &= \beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n+1)(t-a)^{\beta-n}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}. & (1.24) \end{aligned}$$

En substituant le résultat (1.24) dans la formule (1.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \mathbf{I}^{n-\alpha}_{a^+} \mathbf{D}^n f(t), \\ &= \mathbf{I}^{n-\alpha}_{a^+}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \mathbf{I}^{n-\alpha}_{a^+}\left[(t-a)^{\beta-n} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds \right]. \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $s = a + w(t-a)$ *et en utilisant la définition de la fonction Bêta* (1.2), *il découle*

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \left[\frac{(t-a)^{-a+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-w)^{n-\alpha-1} w^{\beta-n} dw \right], \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \left[\frac{(t-a)^{-a+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)} \mathrm{B}(\beta+1-n, n-\alpha) \right], \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \left[\frac{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-a+\beta} \right].
\end{aligned}$$

En dernier,

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-a+\beta}.$$

3.3 Différence fractionnaire d'une fonction d'une seule variable

Définition 3.9 [10] *La fonction discrète unidimensionnelle définie par*

$$\Delta^{\alpha} x_{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i+1-k},$$

est appelée la différence fractionnaire discrète d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, *de la fonction unidimensionnelle* x_i *pour* $i \in \mathbb{N}$ *telle que*

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad k = 0, \\ \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} & \text{for} \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}.$$

3.4 Différence fractionnaire d'ordre α d'une fonction bidimensionnelle

Définition 3.10 [12] *La fonction discrète bidimensionnelle définie par*

$$\Delta^{\alpha} x_{i,j} = \sum_{k_1=0}^{i} \sum_{k_2=0}^{j-k_1} c_{\alpha}(k_1, k_2) x_{i-k_1, j-k_2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

est appelée la différence fractionnaire discrète d'ordre α *de la fonction bidimensionnelle* $x_{i,j}$ *pour* $i, j \in \mathbb{N}$ *telle que :* $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$,

$$c_{\alpha}(k_1, k_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k_1 = 0, k_2 = 0, \\ (-1)^{k_1+k_2} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k_1-k_2+1)}{k_1! k_2!} & \text{pour} \quad k_1 + k_2 > 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

3.5 Différence fractionnaire α_1 et α_2 d'une fonction bidimensionnelle

Définition 3.11 [12] *L'opérateur de la dérivation fractionnaire discrète suivant*

$$\Delta^{\alpha_1, \alpha_2} x_{i+1, j+1} = \sum_{k_1=0}^{i} \sum_{k_2=0}^{j} c_{\alpha_1, \alpha_2}(k_1, k_2)\, x_{i-k_1, j-k_2},$$

est appelé la différence d'ordre (α_1, α_2) *de la fonction* $x_{i,j}$ *où* $\mathrm{N}_1 - 1 \leq \alpha_1 < \mathrm{N}_1$, $\mathrm{N}_2 - 1 \leq \alpha_2 < \mathrm{N}_2$, *avec* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$c_{\alpha_1,\alpha_2}(k_1, k_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k_1 = 0 \quad \text{et} \quad k_2 = 0, \\ (-1)^{k_1} \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)\cdots(\alpha_1-k_1+1)}{k_1!} = c_{\alpha_1}(k_1) & \text{pour} \quad k_1 > 0 \quad \text{et} \quad k_2 = 0, \\ (-1)^{k_2} \frac{\alpha_2(\alpha_2-1)\cdots(\alpha_2-k_2+1)}{k_2!} = c_{\alpha_2}(k_2) & \text{pour} \quad k_1 = 0 \quad \text{et} \quad k_2 > 0, \\ c_{\alpha_2}(k_1)\, c_{\alpha_2}(k_2) & \text{pour} \quad k_1 > 0 \quad \text{et} \quad k_2 > 0. \end{cases}$$

4 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels

Cette section a pour objectif de présenter les différents types de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels.

4.1 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps discret

Il existe plusieurs systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps discret, parmi eux, nous trouvons

4.1.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser est décrit par le modèle suivant [9]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + Bu_{i,j}, \\ y_{i,j} &= C \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + Du_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

où $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie, avec $i, j \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.26) sont

$$\begin{cases} x^h_{0,j} \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}, \\ x^v_{i,0} \in \mathbb{R}^{n_2} & \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4.1.2 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret d'ordre α

Le modèle décrit par les équations suivantes lequel est une généralisation au cas fractionnaire des systèmes dynamiques linéaires à temps discret du type Rosser [12]

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x_{i+1,j+1} &= A_0 x_{i,j} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B_0 u_{i,j} + B_1 u_{i+1,j} + B_2 u_{i,j+1}, \\ y_{i,j} &= C x_{i,j} + D u_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

est appelé système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ telle que $x_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pour $k = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Δ^α est la dérivée fractionnaire décrite dans la définition 3.10

Les conditions initiales associées à l'équation (1.27) sont

$$x_{0,j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_{i,0} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

4.1.3 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret d'ordre α_1 et α_2

Un autre type de système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret d'ordre α_1 et α_2 est décrit dans cette partie.

Un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel d'ordre α_1 et α_2 $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+)$ à temps discret est décrit par l'équation [12]

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha_1,\alpha_2} x_{i+1,j+1} &= \mathrm{A}_0 x_{i,j} + \mathrm{A}_1 \Delta^{\alpha_1} x_{i+1,j} + \mathrm{A}_2 \Delta^{\alpha_2} x_{i,j+1} + \mathrm{B} u_{i,j}, \\ y_{i,j} &= \mathrm{C} x_{i,j} + \mathrm{D} u_{i,j}. \end{aligned}$$

où

$$\Delta^{\alpha_1,\alpha_2} x_{i+1,j+1} = \sum_{k_1=0}^{i} \sum_{k_2=0}^{j} c_{\alpha_1,\alpha_2}(k_1, k_2) x_{i+1-k_1, j+1-k_2},$$

et $x_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ et $y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $k = 0, 1, 2$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système précédent sont

$$x_{0,j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_{i,0} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

4.2 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps continu

Cette section fait l'objet d'une présentation des différents types de système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu. Dans ce genre de système les variables sont représentées par $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

4.2.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu

La représentation d'état d'un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu est de la forme [9]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h}{\partial t_1}(t_1, t_2) \\ \frac{\partial x^v}{\partial t_2}(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{B} u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) &= \mathrm{C} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{D} u(t_1, t_2), \end{aligned}$$

où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie. A, B, C et D sont des matrices de dimension appropriées.

Les conditions initiales associées au système dynamique précédent sont

$$\begin{aligned} x^h(0, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad &\text{pour} \quad t_2 \in \mathbb{R}_+, \\ x^v(t_1, 0) \in \mathbb{R}^{n_2} \quad &\text{pour} \quad t_1 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

4.2.2 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps continu de type Roesser

Un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps continu de type Rosser est décrit par [16]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1}x^h(t_1,t_2)\\ \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2}x^v(t_1,t_2)\end{bmatrix} &= A\begin{bmatrix}x^h(t_1,t_2)\\ x^v(t_1,t_2)\end{bmatrix}+Bu(t_1,t_2),\\ y(t_1,t_2) &= C\begin{bmatrix}x^h(t_1,t_2)\\ x^v(t_1,t_2)\end{bmatrix}+Du(t_1,t_2),\end{aligned}\tag{1.28}$$

où $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ représente la dérivée partielle fractionnaire par rapport t_i, $N_i-1\le\alpha_i<N_i$, $\alpha_i\in\mathbb{R}_+$, $N_i\in\mathbb{N}$ pour $i=1,2$; $x^h(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $(n=n_1+n_2)$ sont les vecteurs d'état horizontal et vertical respectivement et $u(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^m$ et $y(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ et $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.28) sont

$$x^{h(k_1)}(0,t_2)=\left[\frac{\partial^{k_1}x^h}{\partial t_1^{k_1}}(t_1,t_2)\right]_{t_1=0}=x_0^{h(k_1)}(t_2),$$

où $k_1=0,1,\cdots N_1-1$; $t_2>0$ et

$$x^{v(k_2)}(t_1,0)=\left[\frac{\partial^{k_2}x^v}{\partial t_2^{k_2}}(t_1,t_2)\right]_{t_2=0}=x_0^{v(k_2)}(t_1),$$

où $k_2=0,1\cdots N_2-1$; $t_1>0$.

4.2.3 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel d'ordre α à temps continu de type Fornasini-Marchesini

Le système linéaire fractionnaire bidimensionnel d'ordre α_1 et α_2 décrit par le second modèle de *Fornasini-Marchesini* [17] est

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2}x(t_1,t_2) &= \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1}A_1x(t_1,t_2)+A_2\mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2}x(t_1,t_2)+B_1\mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1}u(t_1,t_2)+\mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2}B_2u(t_1,t_2),\\ y(t_1,t_2) &= Cx(t_1,t_2)+Du(t_1,t_2),\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ représente la dérivée partielle fractionnaire par rapport t_i avec $N_i-1\le\alpha_i<N_i$, $N_i\in\mathbb{N}$, $\alpha_i\in\mathbb{R}_+$ pour $i=1,2$; $x(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A_1,A_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1,B_2\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ et $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système dynamique décrit précédemment sont

$$x^h(0,t_2)=\left[\frac{\partial^{k_1}x^h}{\partial t_1^{k_1}}(t_1,t_2)\right]_{t_1=0}=x_0^{h(k_1)}(t_2),$$

où $k_1=0,1,\cdots N_1-1$; $t_2\ge0$, et

$$x^v(t_1,0)=\left[\frac{\partial^{k_2}x^v}{\partial t_2^{k_2}}(t_1,t_2)\right]_{t_2=0}=x_0^{v(k_2)}(t_1),$$

où $k_2=0,1\cdots N_2-1$; $t_1\ge0$.

4.3 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels hybride

Dans cette partie, nous allons présenter les différents types de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps continu-discret, connu aussi sous le terme systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels hybrides. Dans ce type de système, la variable continue est représenté par $t \in \mathbb{R}_+$ tandis que la variable discrète est notée par $i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

4.3.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser est défini par les équations suivantes [12]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t,i) \\ x^v(t,i+1) \end{bmatrix} &= \mathrm{A}\begin{bmatrix} x^h(t,i) \\ x^v(t,i) \end{bmatrix} + \mathrm{B}u(t,i), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}x(t,i) + \mathrm{D}u(t,i), \end{aligned} \tag{1.29}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{N}$ avec $\dot{x}^h(t,i) = \frac{\partial x^h}{\partial t}(t,i)$. $x^h(t,i) \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x^v(t,i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, avec $n = n_1 + n_2$, sont les vecteurs d'état horizontal et vertical respectivement. $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.29) sont

$$\begin{aligned} x^h(0,i) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad &\text{pour} \quad i \in \mathbb{N}, \\ x^v(t,0) \in \mathbb{R}^{n_2} \quad &\text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

4.3.2 Système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret d'ordre α

Le système suivant [12]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha x(t,i+1) &= \mathrm{A}_0 x(t,i) + \mathrm{A}_1 x(t,i+1) + \mathrm{B}u(t,i), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}x(t,i) + \mathrm{D}u(t,i), \end{aligned} \tag{1.30}$$

est dit système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret où $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}$ et $x(t,i) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$, $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, le vecteur d'état, d'entrée et de sortie. $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les états $x(t,0) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $x(0,i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ représentent les conditions initiales. Notons que la dérivation fractionnaire de l'équation (1.30) est définie au sens de Caputo (formule (1.20)).

4.3.3 Système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret d'ordre α et β

Soit le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations suivantes [10]

$$\mathbf{D}^\alpha x_1(t,i) = \mathrm{A}_{11}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{12}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_1\, u(t,i), \tag{1.31}$$

$$\varDelta^\beta x_2(t,i+1) = \mathrm{A}_{21}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_2\, u(t,i), \tag{1.32}$$

où $\mathbf{D}^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x_1(t,i)$ par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$ (formule (1.20)). $\varDelta^\beta$, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire discrète de la fonction $x_2(t,i)$ par rapport $i \in \mathbb{Z}_+$ (définition (3.9)). $x_1(t,i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \mathbb{R}^{n_2}$,

($n = n_1 + n_2$) sont les vecteurs d'états, $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{12}, B_1 et B_2 sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (2.19) est

$$x_1(t_0,i) = x_1(0,i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.33}$$

et la condition initiale associée au système (2.20) est

$$x_2(t,i_0) = x_2(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.34}$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions sur les fonctions spéciales. Les différentes définitions de quelques dérivées fractionnaires avec leur propriétés sont, également, présentées. En dernier, des généralités sur les différents types de systèmes dynamiques bidimensionnels sont présentées.

Chapitre 2

Solvabilité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

1 Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre un sujet qui a connu un grand développement lequel est la solvabilité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride introduit par *T. Kaczorek* [11]. Ces systèmes ont fait l'objet de nombreuses recherches, cela vient du fait que plusieurs phénomènes liés à la technologie digitale, le traitement d'image, l'électronique, la robotique, la géophysique, peuvent être représentés à travers la théorie des systèmes dynamiques bidimensionnels.

Il est à noter que la solvabilité est traité via une nouvelle transformation, dite transformation de Sumudu, vu ses nombreuses avantages. Elle sera étayée dans la section qui suit.

2 Transformation de Sumudu unidimensionnel continue et discrète

Cette section a pour objective de présenter les définitions et les différentes propriétés d'une nouvelle transformation, dite transformée de Sumudu, à la fois dans un cas continue et discret.

2.1 Transformation de Sumudu unidimensionnelle continue

Considérons l'ensemble des fonctions $\mathscr{A}$ donnée par

$$\mathscr{A} = \left\{ g(t)/\exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0, |g(t)| < \mathrm{M}e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ si } t \in (-1)^j \times [0,\infty[\right\}.$$

2.1.1 Transformée de Sumudu directe

Définition 2.1 [2, 3, 19] *La transformée de Sumudu d'une fonction $g \in \mathscr{A}$ réelle et continue est donnée par l'expression suivante*

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(v) &= \mathscr{S}[g(t)](v), \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{v} e^{\frac{-t}{v}} g(t)\, dt, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2), \quad \mathrm{Re}(v) > 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.2 [2, 3, 19] *Si $g \in \mathscr{A}$, alors, g admet la transformée de Sumudu continue*

$$\mathscr{S}[g(t)](v) = \int_0^{\infty} e^{-v} g(vt)dt, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2), \quad \mathrm{Re}(v) > 0. \tag{2.1}$$

Exemple 2.3 *Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty]$ par*

$$g(t) = \frac{t^a}{\Gamma(a+1)}, \quad a \in \mathbb{R}_+^+.$$

Calculons sa transformée de Sumudu. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathscr{S}[g(t)](v) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{v} e^{\frac{-t}{v}} g(t)\, dt, \\ &= \frac{1}{v\,\Gamma(a+1)} \int_0^{\infty} t^a e^{\frac{-t}{v}}\, dt, \end{aligned}$$

en utilisant une intégration par partie a fois, nous obtenons

$$\mathscr{S}[g(t)](v) = v^a.$$

Ainsi,

$$\mathscr{S}\left[\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](v) = v^a, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

2.1.2 Transformée de Sumudu inverse

Définition 2.4 [2, 3, 19] *La transformée de Sumudu inverse de l'image $\mathrm{G}(v)$ est la fonction $g(t)$ définie par*

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{S}^{-1}[\mathrm{G}(v)](t), \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{vt}\, \mathrm{G}\left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{v}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Exemple 2.5 *Soit la transformée de Sumudu $\mathrm{G}(v) = \dfrac{1}{v}$ avec $v \in \mathbb{C}^*$. Cherchons la fonction $g(t)$.*

En utilisant la formule de la transformée de Sumudu inverse (2.2), il découle,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{S}^{-1}[\mathrm{G}(v)](t), \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{vt}\, \mathrm{G}\left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{v}, \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{vt}\, dv. \end{aligned}$$

En dernier, en utilisant les résultats de [20], nous obtenons

$$f(t) = \delta(t).$$

2.1.3 Quelques propriétés de la transformée de Sumudu

Proposition 2.6 [2, 3] *Pour toutes fonctions f et g de $\mathscr{A}$ admettent des transformées de Sumudu* F *et* G *respectivement, et pour tous deux réels a et b, nous avons les propriétés suivantes*

A) Linéarité :

$$\mathscr{S}[af(t)+bg(t)](v) = a\mathrm{F}(v)+b\mathrm{G}(v). \tag{2.3}$$

B) Dérivation :

$$\mathscr{S}\left[f^{(n)}(t)\right](v) = v^{-n}\mathrm{F}(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-n} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.4}$$

En particulier, pour $n=1$, nous avons

$$\mathscr{S}\left[f'(t)\right](v) = \frac{1}{v}\mathrm{F}(v) - \frac{1}{v}f(0). \tag{2.5}$$

C) Produit de convolution : *La transformée de Sumudu du produit de convolution entre f et g définit par*

$$(f\star g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{2.6}$$

est donnée par

$$\mathscr{S}\left[(f\star g)(t)\right](v) = v\mathrm{F}(v)\mathrm{G}(v). \tag{2.7}$$

Preuve. Soient a et b deux constantes réelles quelconques et soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues de $\mathscr{A}$ dont les transformées de Sumudu, respectivement, $\mathrm{F}(v)$ et $\mathrm{G}(v)$.

A) Linéarité : Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}[af(t)+bg(t)](v) &= \frac{1}{v}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{v}}[af(t)+bg(t)]dt,\\
&= \frac{a}{v}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{v}}f(t) + \frac{b}{v}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{v}}g(t)dt,\\
&= a\mathrm{F}(v)+b\mathrm{G}(v).
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété (2.3) est vérifiée

B) Dérivation : Pour démontrer la propriété (2.4), nous allons procéder par une démonstration par récurrence.

En effet, pour $n=1$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\left[f^{(1)}(t)\right] &= v^{-1}\mathrm{F}(v) - \sum_{k=0}^{1-1} v^{k-1} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0},\\
&= \frac{1}{v}\mathrm{F}(v) - \frac{1}{v}f(0),
\end{aligned}$$

Comme la propriété (2.4) est vérifiée pour $n=1$, alors, nous supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n et nous démontrons que reste vrai jusqu'à l'ordre $n+1$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\left[f^{(n+1)}(t)\right](v) &= \mathscr{S}\left[\left(f^{(n)}\right)'(t)\right](v),\\
&= \frac{\mathscr{S}\left[f^{(n)}(t)\right](v) - f^{(n)}(0)}{v},\\
&= \frac{\mathrm{F}(v)}{v^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{v^{n+1-k}}.
\end{aligned}$$

Et donc, la propriété (2.4) est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

C) Produit de convolution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\left[(f \star g)(t)\right](v) &= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{v}} (f \star g)(t)dt,\\
&= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{v}} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] dt.
\end{aligned}$$

Appliquons le changement variable $y = t - \tau$. Ainsi,

$$\mathscr{S}\left[(f \star g)(t)\right](u) = \left(\frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{v}} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t e^{\frac{-t}{v}} g(y)dy\right).$$

En utilisant l'extension valide de la limite supérieure des intégrales à $t \to \infty$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\left[(f \star g)(t)\right](v) &= \left(\frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{v}} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{v}} g(y)dy\right),\\
&= v\,\mathrm{F}(v)\,\mathrm{G}(v).
\end{aligned}$$

Et donc, la propriété (2.6) est vérifiée.

■

Remarque 2.7 [3] *Soit $g \in \mathscr{A}$ une fonction dont sa transformée de Laplace est $\mathscr{L}[g]$ et sa transformée de Sumudu est $\mathscr{S}[g]$. La transformée de Sumudu de $g(t)$ est donnée par*

$$\mathscr{S}[g(t)](v) = \frac{1}{v}\mathscr{L}[g(t)]\left(\frac{1}{v}\right). \tag{2.8}$$

2.1.4 Transformée de Sumudu fractionnaire

Définition 2.8 [4] *La transformée de Sumudu de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f \in \mathscr{A}$ de classe $\mathscr{C}^n$ est donnée par*

$$\mathscr{S}\left[\mathbf{D}^{\alpha} f(t)\right](v) = v^{-\alpha}\mathscr{S}\left[f(t)\right](v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-\alpha} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}, \tag{2.9}$$

où $n-1 \leq \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction $f(t)$ au point $t = 0$.

Exemple 2.9 *Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, au sens de Caputo de la fonction δ de Dirac.*

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\left[\mathbf{D}^{\alpha}\delta(t)\right](v) &= v^{-\alpha}\mathscr{S}[\delta(t)](v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-\alpha}\delta^{(k)}(t)\Big|_{t=0},\\
&= v^{-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.10 [14] *Soit f une fonction définie sur $\mathscr{A}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = 0$. Ainsi,*

$$\mathscr{S}\left[\mathbf{D}^{\alpha} f(t)\right](v) = v^{-\alpha}\mathscr{S}\left[f(t)\right](v). \tag{2.10}$$

2.2 Transformation de Sumudu unidimensionnelle discrète

2.2.1 Définitions

Définition 2.11 [8] *Soit $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction. La transformée de Sumudu discrète, notée par $\mathscr{S}_d$, d'une fonction $x[n]$ réelle et discrète est donnée par l'expression suivante*

$$\mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w) = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\left(\frac{w}{w+1}\right)^{n+1}, \quad w \neq -1. \tag{2.11}$$

Exemple 2.12 *Soit l'impulsion de Dirac discrète définie par*

$$\delta[i] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa transformée de Sumudu est donnée par

$$\mathscr{S}_d\left[\delta[i]\right](w) = \frac{1}{w+1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_d\left[\delta[i]\right](w) &= \frac{1}{w}\sum_{i=0}^{\infty}\delta[i]\left(\frac{w}{w+1}\right)^{i+1}, \\ &= \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{0+1}\delta[0] + \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{1+1}\delta[1] + \cdots, \\ &= \frac{1}{w}\left[\frac{w}{w+1}\right]^{1}\delta[0], \\ &= \frac{1}{w+1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.13 [8] *Vu les résultats sur le rayon de convergence de la série (2.11), trois cas peuvent se présenter*

- *Si* $0 < \mathrm{R} < \infty$. *Alors, la série* (2.11) *est convergente pour* $\left|\frac{w+1}{w}\right| > \mathrm{R}$, *autrement, elle diverge.*
- *Si* $\mathrm{R} = 0$. *Alors, la série* (2.11) *est convergente pour tout w sauf possiblement pour* $w = -1$.
- *Si* $\mathrm{R} = \infty$. *Alors, la série* (2.11) *diverge partout.*

2.2.2 Quelques propriétés de la transformée de Sumudu discrète

Proposition 2.14 [7, 8] *Pour toutes fonctions x et $y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ admettent des transformées de Sumudu discrètes, et pour tout réel a, nous avons les propriétés suivantes*

A) Linéarité :

$$\mathscr{S}_d\left[(x+y)[n]\right](w) = \mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w) + \mathscr{S}_d\left[y[n]\right](w), \tag{2.12}$$

et

$$\mathscr{S}_d\left[a\,x[n]\right](w) = a\mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w). \tag{2.13}$$

B) Avance :

$$\mathscr{S}_d\left[x[n+m]\right](w) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^m \mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(w+1)^{m-k-1}}{w^{m-k}} x[k]. \qquad (2.14)$$

C) Retard :

$$\mathscr{S}_d\left[x[n-m]\right](w) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^m \mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w) + \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1} x[m-k]. \qquad (2.15)$$

D) Convolution :

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_d\left[(x\star y)[n]\right](w) &= \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(x\star y)[n]\left(\frac{w}{w+1}\right)^{n+1}, \qquad (2.16)\\ &= (w+1)\,\mathscr{S}_d\left[x[n]\right](w)\,\mathscr{S}_d\left[y[n]\right](w),\end{aligned}$$

où

$$(x\star y)[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]\,y[m]. \qquad (2.17)$$

Proposition 2.15 *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\mathscr{S}_d\left[\delta[i-q]\right](w) = \frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}. \qquad (2.18)$$

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}$. L'utilisation de la formule de la transformation de Sumudu discrète du retard (formule (2.15)), donne

$$\mathscr{S}_d\left[\delta[i-q]\right](w) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^q \mathscr{S}_d[\delta[i]](w) + \frac{1}{w}\sum_{i=0}^{q-1}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{i+1} \delta[i-q].$$

Comme

$$\delta[i-q] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\mathscr{S}_d\left[\delta[i]\right](w) = \frac{1}{w+1},$$

il résulte

$$\mathscr{S}_d\left[\delta[i-q]\right](w) = \frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}.$$

■

3 Solvabilité d'un système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel

La résolution d'un système dynamique linéaire fractionnaire hybride bidimensionnel par la transformation de Sumudu continue et discrète est traitée dans cette section.

3.1 Préliminaires

Soit le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations suivantes

$$\mathbf{D}^{\alpha} x_1(t,i) = \mathrm{A}_{11}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{12}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_1\, u(t,i), \tag{2.19}$$

$$\Delta^{\beta} x_2(t,i+1) = \mathrm{A}_{21}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_2\, u(t,i), \tag{2.20}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0<\alpha<1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x_1(t,i)$ par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$. Δ^{β}, avec $0<\beta<1$, est la différence fractionnaire discrète de la fonction $x_2(t,i)$ par rapport $i \in \mathbb{Z}_+$. $x_1(t,i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $(n = n_1 + n_2)$ sont les vecteurs d'états, $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie. $\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{21}, \mathrm{A}_{22}, \mathrm{A}_{12}, \mathrm{B}_1$ et B_2 sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (2.19) est

$$x_1(t_0,i) = x_1(0,i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.21}$$

et la condition initiale associée au système (2.20) est

$$x_2(t,i_0) = x_2(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.22}$$

En s'inspirant des résultats établi dans [10], il découle

Définition 3.1 *Le système décrit par les équations (2.19) et (2.20) est dit régulier si et seulement si*

$$\det \mathrm{G}(v,w) = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_{n_1\times n_1} - v^{\alpha}\mathrm{A}_{11} & -v^{\alpha}\mathrm{A}_{12} \\ -\dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{21} & \mathbf{I}_{n_2\times n_2} - \dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{22} + \displaystyle\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k \binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^k \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.23}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C} - \{-1\}$.

Et aussi

Proposition 3.2 *Si pour un certain $v \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C} - \{-1\}$, $\det \mathrm{G}(v,w) \neq 0$ où*

$$\mathrm{G}(v,w) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1\times n_1} - v^{\alpha}\mathrm{A}_{11} & -v^{\alpha}\mathrm{A}_{12} \\ -\dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{21} & \mathbf{I}_{n_2\times n_2} - \dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{22} + \displaystyle\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k \binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^k \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\mathrm{G}^{-1}(v,\, w) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{pq}\, v^{\alpha p}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q, \tag{2.24}$$

où T_{pq} est appelée la matrice de transition. Elle est donnée par

$$\mathrm{T}_{pq} = \begin{cases} \mathbf{I}_{n\times n} & \text{pour} \quad p=q=0, \\ \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour} \quad p=1,\ q=0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} + \binom{\beta}{1}\mathbf{I}_{n_2\times n_2} \end{bmatrix} & \text{pour} \quad p=0,\ q=1, \\ \mathrm{T}_{1,0}\mathrm{T}_{p-1,q} + \mathrm{T}_{0,1}\mathrm{T}_{p,q-1} & \text{pour} \quad p,q\geq 0,\ p+q>1, \\ 0 & \text{pour} \quad p<0 \text{ et ou } q<0, \end{cases} \tag{2.25}$$

et

$$\mathrm{T}_{0,q} = \mathrm{T}_{0,1}^{q} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{q-1}\binom{\beta}{q}\mathbf{I}_{n_2\times n_2} \end{bmatrix}, \quad q = 2, 3, \cdots.$$

3.2 Résultats

Considérons le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations suivantes

$$\mathbf{D}^{\alpha} x_1(t,i) = \mathrm{A}_{11}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{12}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_1\, u(t,i), \tag{2.26}$$

$$\Delta^{\beta} x_2(t,i+1) = \mathrm{A}_{21}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_2\, u(t,i), \tag{2.27}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0<\alpha<1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x_1(t,i)$ par rapport à $t\in\mathbb{R}_+$. Δ^{β}, avec $0<\beta<1$, est la différence fractionnaire discrète de la fonction $x_2(t,i)$ par rapport $i\in\mathbb{Z}_+$. $x_1(t,i)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,i)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $(n=n_1+n_2)$ sont les vecteurs d'états, $u(t,i)\in\mathbb{R}^{m}$ et $y(t,i)\in\mathbb{R}^{p}$ sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie. $\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{21}, \mathrm{A}_{22}, \mathrm{A}_{12}, \mathrm{B}_1$ et B_2 sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (2.26) est

$$x_1(t_0,i) = x_1(0,i), \quad i\in\mathbb{Z}_+, \tag{2.28}$$

et la condition initiale associée au système (2.27) est

$$x_2(t,i_0) = x_2(t,0), \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{2.29}$$

Supposons que le système dynamique décrit pas les deux équations (2.26) et (2.27) est régulier, i. e. ;

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_{n_1\times n_1} - v^{\alpha}\mathrm{A}_{11} & -v^{\alpha}\mathrm{A}_{12} \\ -\dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{21} & \mathbf{I}_{n_2\times n_2} - \dfrac{w}{w+1}\mathrm{A}_{22} + \displaystyle\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^k \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.30}$$

pour un certain $v\in\mathbb{C}$ et un certain $w\in\mathbb{C}-\{-1\}$.

Ainsi, la trajectoire du système dynamique décrit pas les deux équations (2.26) et (2.27) par le biais des transformations de Sumudu continue et discrète est décrite par le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Le système dynamique linéaire fractionnaire décrit par les équations* (2.26) *et* (2.27) *admet comme trajectoire*

$$\begin{pmatrix} x_1(t,i) \\ \\ x_2(t,i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(\alpha(p+1))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}\mathrm{B}_1 u(\tau,q)\,d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x_1(0,q) \\ \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha p-1}\mathrm{B}_2 u(\tau,q)\,d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)\,d\tau \end{pmatrix}$$

où Γ représente fonction Gamma d'Euler et $\mathrm{T}_{i,j}$ est la matrice de transition définie par la formule (2.25).

Preuve. Considérons le système dynamique décrit par les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} x_1(t,i) &= A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i)+B_1u(t,i), && (2.31)\\ \Delta^{\beta} x_2(t,i+1) &= A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)+B_2u(t,i). && (2.32)\end{aligned}$$

D'après la définition 3.9, l'équation (2.32) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k} x_2(t,i+1-k)=A_{21}\,x_1(t,i)+A_{22}\,x_2(t,i)+B_2\,u(t,i),$$

ou encore,

$$x_2(t,i+1)+\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}x_2(t,i+1-k)=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)+B_2u(t,i).$$

Ainsi, le système dynamique décrit par les deux équations (2.31) et (2.32) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} x_1(t,i) &= A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i)+B_1u(t,i), && (2.33)\\ x_2(t,i+1)+\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}x_2(t,i+1-k) &= A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)+B_2u(t,i). && (2.34)\end{aligned}$$

Supposons que les fonctions $X_1(v,w)$, $X_2(v,w)$ et $U(v,w)$ sont, respectivement, les transformées de Sumudu des fonctions $x_1(t,i)$, $x_2(t,i)$ et $u(t,i)$. Ainsi, l'application de la transformation de Sumudu continue et discrète (formules (2.9) et (2.14)) aux équations (2.33) et (2.34) donne

$$v^{-\alpha}X_1(v,w)-v^{-\alpha}X_1(0,w)=A_{11}X_1(v,w)+A_{12}X_2(v,w)+B_1U(v,w),$$

$$\begin{aligned}\frac{w+1}{w}X_2(v,w)-\frac{1}{w}X_2(v,0) &+ \sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k-1}X_2(v,w)\\ &= A_{21}X_1(v,w)+A_{22}X_2(v,w)+B_2U(v,w),\end{aligned}$$

ou encore

$$\left(\mathbf{I}_{n_1\times n_1}-v^{\alpha}A_{11}\right)X_1(v,w)-v^{\alpha}A_{12}X_2(v,w)=v^{\alpha}B_1U(v,w)+X_1(0,w), \qquad (2.35)$$

$$\begin{aligned}-\frac{w}{w+1}A_{21}X_1(v,w)+\left(\mathbf{I}_{n_2\times n_2}-\frac{w}{w+1}A_{22}+\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k}\right)X_2(v,w)\\ =\frac{w}{w+1}B_2U(v,w)+\frac{1}{w+1}X_2(v,0).\end{aligned} \qquad (2.36)$$

L'écriture matricielle des équations (2.35) et (2.36) est

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{n_1\times n_1}-v^{\alpha}A_{11} & -v^{\alpha}A_{12}\\ -\frac{w}{w+1}A_{21} & \mathbf{I}_{n_2\times n_2}-\frac{w}{w+1}A_{22}+\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(v,w)\\ X_2(v,w)\end{pmatrix}\\ &\qquad=\begin{pmatrix}v^{\alpha}B_1\\ \frac{w}{w+1}B_2\end{pmatrix}U(v,w)+\begin{pmatrix}X_1(0,w)\\ \frac{1}{w+1}X_2(v,0)\end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad (2.37)$$

Comme le système décrit par les deux équations (2.31) et (2.32) est régulier (formule (2.30)), alors, l'expression (2.37) devient

$$\begin{pmatrix} X_1(v,\,w) \\ \\ X_2(v,\,w) \end{pmatrix} = G^{-1}(v,\,w)\begin{pmatrix} v^{\alpha} B_1 \\ \\ \dfrac{w}{w+1} B_2 \end{pmatrix} U(v,\,w) + G^{-1}(v,\,w)\begin{pmatrix} X_1(0,\,w) \\ \\ \dfrac{1}{w+1} X_2(v,\,0) \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

où,

$$\begin{aligned} G^{-1}(v,w) &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1\times n_1} - v^{\alpha} A_{11} & -v^{\alpha} A_{12} \\ \\ -\dfrac{w}{w+1} A_{21} & \mathbf{I}_{n_2\times n_2} - \dfrac{w}{w+1} A_{22} + \displaystyle\sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\beta}{k} \left(\dfrac{w}{w+1}\right)^k \end{pmatrix}^{-1}, \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{\alpha p} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $G^{-1}(v,w)$ par son expression dans l'expression (2.38), il s'en suit

$$\begin{pmatrix} X_1(v,\,w) \\ \\ X_2(v,\,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{(p+1)\alpha} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q B_1\, U(v,\,w) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{\alpha p} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q X_1(0,\,w) \\ \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{\alpha p} \left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1} B_2\, U(v,\,w) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{\alpha p} \frac{w^q}{(w+1)^{q+1}} X_2(v,\,0) \end{pmatrix}$$

Afin de retrouver les expressions de $x_1(t,i)$ et $x_2(t,i)$, il suffit d'appliquer les transformations de Sumudu inverses continue et discrète. Pour ce faire, nous nous basons sur les expressions présenter dans l'exemple 2.3, la proposition 2.6, l'exemple 2.12, la proposition 2.14 et en dernier la proposition 2.15.

En effet,

i/ Posons

$$I_1(v,\,w) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q}\, v^{(p+1)\alpha} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q B_1\, U(v,\,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}^{-1}[I_1(v,\,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q B_1\, \mathscr{S}^{-1}\left[v\, v^{(p+1)\alpha-1}\, U(v,\,w)\right](t,\,w), \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} \left(\frac{w}{w+1}\right)^q B_1 \left(\frac{1}{\Gamma((p+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(p+1)\alpha-1}\, U(\tau,\,w)\, d\tau\right). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}\left[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_1(v,w)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\Bigg(\frac{1}{\Gamma((p+1)\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{(p+1)\alpha-1} \\
&\qquad \times \mathscr{S}_d^{-1}\left[(w+1)\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\,\mathrm{U}(\tau,w)\right](t,i)\,d\tau\Bigg), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\Bigg(\frac{1}{\Gamma((p+1)\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{(p+1)\alpha-1} \\
&\qquad \times \left(\delta[\bullet-q]\star u(\tau,\bullet)\right)(t,i)\,d\tau\Bigg), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\Bigg(\frac{1}{\Gamma((p+1)\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{(p+1)\alpha-1} \\
&\qquad \times \sum_{m=0}^{\infty}\delta[i-q-m]\,u(\tau,m)\,d\tau\Bigg) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(\alpha(p+1))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}\mathrm{B}_1\,u(\tau,q)\,d\tau.
\end{aligned}$$

ii/ Posons

$$\mathrm{I}_2(v,w) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,v^{\alpha p}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q \mathrm{X}_1(0,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_2(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q \mathrm{X}_1(0,w)\,\mathscr{S}^{-1}\left[v^{\alpha p}\right](t,w), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}\left(\frac{w}{w+1}\right)^q \mathrm{X}_1(0,w).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}\left[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_2(v,w)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}\,\mathscr{S}_d^{-1}\left[(w+1)\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{X}_1(0,w)\right](t,i), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}\left(\delta[\bullet-q]\star x_1(0,\bullet)\right)(t,i), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\delta[i-q-m]x_1(0,m)\right), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}\,x_1(0,q).
\end{aligned}$$

iii/ Posons

$$\mathrm{I}_3(v,w) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,v^{\alpha p}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{B}_2\,\mathrm{U}(v,w).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_3(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{B}_2\,\mathscr{S}^{-1}\left[v\,v^{\alpha p-1}\,\mathrm{U}(v,w)\right](t,w), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{q+1}\mathrm{B}_2\,\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{\infty}(t-\tau)^{\alpha p-1}\,\mathrm{U}(\tau,w)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}\left[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_3(v,w)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{\infty}(t-\tau)^{\alpha p-1}\\
&\qquad\times\mathscr{S}_d^{-1}\left[(w+1)\frac{w^{q+1}}{(w+1)^{q+2}}\mathrm{U}(\tau,w)\right](t,i)\,d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{\infty}(t-\tau)^{\alpha p-1}\\
&\qquad\times\big(\delta[\bullet-q-1]\star u(\tau,\bullet)\big)(t,i)\,d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{\infty}(t-\tau)^{\alpha p-1}\\
&\qquad\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\delta[i-q-1-m]\,u(\tau,m)\right)d\tau,\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}\mathrm{B}_2u(\tau,q)d\tau.
\end{aligned}$$

iv/ Posons

$$\mathrm{I}_4(v,w)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,v^{\alpha p}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathrm{X}_2(v,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_4(v,w)](t,w) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\mathscr{S}^{-1}\left[v\,v^{\alpha p-1}\mathrm{X}_2(v,0)\right](t,w),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_d^{-1}\left[\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{I}_4(v,w)]\right](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)\,d\tau\\
&\qquad\times\mathscr{S}_d^{-1}\left[\frac{w^q}{(w+1)^{q+1}}\right](t,i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)\,d\tau\,\delta[i-q],\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)d\tau.
\end{aligned}$$

En dernier, de **i**/, **ii**/, **iii**/ et **iv**/, la solution du système dynamique linéaire fractionnaire décrit par les deux équations (2.31) et (2.32) est

$$\begin{pmatrix} x_1(t,i)\\ \\ x_2(t,i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(\alpha(p+1))}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}\mathrm{B}_1u(\tau,q)d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x_1(0,q)\\ \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q-1}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}\mathrm{B}_2u(\tau,q)d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^{t}(t-\tau)^{\alpha p-1}x_2(\tau,0)d\tau\end{pmatrix}.$$

■

Corollaire 3.4 *La trajectoire du système dynamique linéaire bidimensionnel*

$$\frac{\partial}{\partial t}x_1(t,i) = A_{11}\,x_1(t,i) + A_{12}\,x_2(t,i) + B_1\,u(t,i), \tag{2.39}$$

$$x_2(t,i+1) = A_{21}\,x_1(t,i) + A_{22}\,x_2(t,i) + B_2\,u(t,i), \tag{2.40}$$

où $x_1(t,i)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,i)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $(n = n_1 + n_2)$ *sont les vecteurs d'états,* $u(t,i)\in\mathbb{R}^m$ *et* $y(t,i)\in\mathbb{R}^p$ *sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement,* $A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{12}, B_1$ *et* B_2 *sont des matrices réelles de dimensions appropriées, avec les conditions initiales*

$$x_1(t_0,i) = x_1(0,i), \quad i\in\mathbb{Z}_+ \quad et \quad x_2(t,i_0) = x_2(t,0), \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

associées aux équations (2.39) *et* (2.40) *respectivement, est*

$$\begin{pmatrix} x_1(t,i) \\ \\ x_2(t,i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{T_{p,i-q}}{\Gamma(p+1)}\int_0^t (t-\tau)^p B_1 u(\tau,q)\,d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} T_{p,i-q}\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}x_1(0,q) \\ \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{T_{p,i-q-1}}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} B_2 u(\tau,q)\,d\tau + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{T_{p,i}}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} x_2(\tau,0)\,d\tau \end{pmatrix}$$

où Γ *désigne la fonction Gamma d'Euler et* $T_{p,q}$ *est la matrice de transition donnée par la formule* (2.25).

4 Conclusion

L'étude que nous avons mené dans ce chapitre concerne la résolution d'un système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire hybride par l'utilisation de la transformation de Sumudu discrète et continue. Les différentes propriétés de la transformation de Sumudu discrète et continue existantes et d'autre que nous avons développer nous ont aidé à la solution du système dynamique en question.

Chapitre 3

Positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

1 Introduction

Durant ces dernières années, il a eu un intérêt croissant pour les systèmes bidimensionnels fractionnaires qui sont sujets à des contraintes de positivité de leurs variables dynamiques. Ces systèmes positifs doivent avoir pour des conditions initiales non-négatives, des variables d'état non-négatives. Ces systèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs dans [5, 10, 15, 16] et [17].

Pour ces raisons, l'objectif de ce chapitre est d'étudier la positivité du système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire hybride traité dans le chapitre précédent.

2 Préliminaire

Dans cette section, nous allons présenter des définitions de quelques matrices particulières telles les matrices non-négatives, strictement positives et les matrices de Metzler suivie par quelques lemmes et résultats essentiels pour déterminer les conditions de la positivité du système en question.

2.1 Matrices particulières

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})$ des matrices à entrées réelles.

Définition 2.1 [6] *On dit que* A *est une matrice non-négative si*

$$\forall i = \overline{1,n},\ \forall j = \overline{1,m}\ :\ a_{ij} \geq 0.$$

Autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives.
Une telle matrice est notée $\mathrm{A} \geq 0$ *ou* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.

Exemple 2.2 *La matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

est une matrice non-négative.

Définition 2.3 [6] *On dit que* A *est une matrice positive si* A *est non-négative et si*

$$\exists k = \overline{1,n},\ \exists l = \overline{1,m}\ :\ a_{kl} > 0.$$

Autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive.

Une telle matrice est notée $\mathrm{A} > 0$.

Exemple 2.4 *La matrice*

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

est une matrice positive.

Définition 2.5 [6] *On dit que* A *est une matrice de Metzler si*

$$\forall i = \overline{1,n},\ \forall j = \overline{1,m},\ i \neq j\ :\ a_{ij} \geq 0.$$

Autrement dit, toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives.

L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ *est notée* $\mathscr{M}_n$

Exemple 2.6 *La matrice*

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

est une matrice de Metzler.

2.2 Lemmes auxiliaires

Lemme 2.7 [10] *Si* $0 < \beta < 1$. *Alors,*

$$c_k = c_k(\beta) > 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.1}$$

où

$$c_k(\beta) = (-1)^{k-1}\binom{\beta}{k}, \tag{3.2}$$

avec

$$\binom{\beta}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0, \\ \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} & \text{pour} \quad k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve. Pour montrer que l'égalité (3.1) est vérifiée, nous utiliserons une démonstration par récurrence.

En effet, la relation (3.1) est vérifiée pour $k = 1$, car, de (3.2) et de (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1 &= \binom{\beta}{1}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supposons que l'hypothèse (3.1) est vraie jusqu'à l'ordre k, et démontrons qu'elle reste vraie pour l'ordre $k+1$.

De (3.2) et (3.3), il découle,

$$\begin{aligned} c_{k+1}(\beta) &= (-1)^k \binom{\beta}{k+1} \\ &= (-1)^k \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)(k-\beta)}{k!(k+1)} \\ &= (-1)^{k-1} \binom{\beta}{k} \frac{k-\beta}{k+1} \\ &= c_k \frac{k-\beta}{k+1} > 0 \end{aligned}$$

puisque $c_k > 0$ pour $k \geqslant 1$.

En donc

$$c_k = c_k(\beta) > 0,$$

pour tout $0 < \beta < 1$ et pour tout $k = 1, 2, \cdots$. ∎

Lemme 2.8 [10] *Si* $0 < \beta < 1$ *et si* $A_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}$. *Alors,*

$$T_{0,q} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad \text{pour} \quad q = 2, 3, \cdots. \tag{3.4}$$

Preuve. De la proposition 3.2, nous avons

$$T_{0,q} = T_{0,1}^q + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{q-1} \binom{\beta}{q} \mathbf{I}_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}, \quad q = 2, 3, \cdots.$$

Ainsi, du lemme 2.7, nous obtenons

$$T_{0,q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} + \mathbf{I}_{n_2 \times n_2} c_1 \end{bmatrix}^q + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_2 \times n_2} c_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n},$$

pour $q = 2, 3, \cdots$, puisque $c_k > 0$ si $k = 1, 2, \cdots$. ∎

3 Conditions de positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

Soit le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations suivantes

$$\mathbf{D}^\alpha x_1(t,i) = A_{11} x_1(t,i) + A_{12} x_2(t,i) + B_1 u(t,i), \tag{3.5}$$
$$\Delta^\beta x_2(t,i+1) = A_{21} x_1(t,i) + A_{22} x_2(t,i) + B_2 u(t,i), \tag{3.6}$$

où $\mathbf{D}^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x_1(t,i)$ par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$. Δ^β, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire discrète de la fonction $x_2(t,i)$ par rapport $i \in \mathbb{Z}_+$. $x_1(t,i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $(n = n_1 + n_2)$ sont les vecteurs d'états, $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t,i) \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie. $A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{12}, B_1$ et B_2 sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (3.5) est

$$x_1(t_0, i) = x_1(0, i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.7}$$

et la condition initiale associée au système (3.6) est

$$x_2(t, i_0) = x_2(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.8}$$

Définition 3.1 [10] *Le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations* (3.5) *et* (3.6) *est dit internement positif si et seulement si*

- *les états x_1 et x_2 sont positifs, i.e. ; $x_1(t,i) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{Z}_+$;*
- *les conditions initiales sont positifs, i.e. ; $x_1(0,i) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$ et $x_2(t,0) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ;*
- *l'entrée est positive, i.e. ; $u(t,i) \in \mathbb{R}_+^m$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Le théorème suivant montre les conditions nécessaires pour que le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations (3.5) et (3.6) soit positif.

Théorème 3.2 [10] *Le système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par les équations* (3.5) *et* (3.6) *est dit internement positif si et seulement si*

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}, & \mathrm{A}_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}, & \mathrm{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}, \\ \mathrm{A}_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}, & \mathrm{B}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}, & b_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}, \\ \mathrm{C}_1 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_1}, & \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_2}, & \mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \end{array} \tag{3.9}$$

où $\mathcal{M}_n$ représente l'ensemble de des matrices de Metzler de taille $n \times n$.

Preuve. D'après l'équation (3.5) et la définition 3.1, nous obtenons [10]

$$\mathbf{D}^\alpha x_1(t,0) = \mathrm{A}_{11} x_1(t,0) + \mathrm{A}_{12} x_2(t) + \mathrm{B}_1 u(t,0), \tag{3.10}$$

et

$$x_1(t,0) = \Phi_0(t) x_1(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)[\mathrm{A}_{12} x_2(\tau) + \mathrm{B}_1 u(\tau,0)] d\tau, \tag{3.11}$$

où

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}_{11}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{3.12}$$

et

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}_{11}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}. \tag{3.13}$$

Dans [10], l'auteur a montré que $\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}$ et $\Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}$ pour $t \geq 0$ si et seulement si A_{11} est une matrice de Metzler.

Comme

$$\Delta^\beta x_2(t, i+1) = \mathrm{A}_{21} x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22} x_2(t,i) + \mathrm{B}_2 u(t,i),$$

est équivalente à

$$x_2(t, i+1) + \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\beta}{k} x_2(t, i+1-k) = \mathrm{A}_{21} x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22} x_2(t,i) + \mathrm{B}_2 u(t,i),$$

alors, pour $i=0$, nous obtenons

$$x_2(t,1)=\mathrm{A}_{21}x_1(t,0)+(\mathrm{A}_{22}+\mathbf{I}_{n_2\times n_2}c_1)x_2(t)+\mathrm{B}_2u(t,0). \tag{3.14}$$

Une substitution de (3.11) en (3.14) donne

$$\begin{aligned} x_2(t,1) &= \mathrm{A}_{21}\Phi_0(t)x_1(0)+\mathrm{A}_{21}\int_0^t \Phi(t-\tau)[\mathrm{A}_{12}x_2(\tau)+\mathrm{B}_1u(\tau,0)]d\tau \\ &\quad +(\mathrm{A}_{22}+\mathbf{I}_{n_2\times n_2}c_1)x_2(t)+\mathrm{B}_2u(t,0). \end{aligned} \tag{3.15}$$

De la définition 3.1 et l'équation (3.15), il s'ensuit que $x_2(t,1)\in\mathbb{R}_+^{n_2}$ si et seulement si $\mathrm{A}_{11}\in\mathcal{M}_{n_1}$, $\mathrm{A}_{21}\in\mathbb{R}_+^{n_2\times n_1}$, $\mathrm{A}_{22}\in\mathbb{R}_+^{n_2\times n_2}$, $\mathrm{B}_1\in\mathbb{R}_+^{n_1\times m}$, $\mathrm{B}_2\in\mathbb{R}_+^{n_2\times m}$ et $u(t,0)\in\mathbb{R}_+^m$ pour $t\geq 0$.

De même, nous obtenons

$$\mathbf{D}^{\alpha}x_1(t,1)=\mathrm{A}_{11}x_1(t,1)+\mathrm{A}_{12}x_2(t,1)+\mathrm{B}_1u(t,1) \tag{3.16}$$

et

$$x_1(t,1)=\Phi_0(t)x_1(0,1)+\int_0^t \Phi(t-\tau)\,[\mathrm{A}_{12}x_2(\tau,1)+\mathrm{B}_1u(\tau,1)]\,d\tau \tag{3.17}$$

De (3.17), il s'ensuit que $x_1(t,1)\in\mathbb{R}_+^{n_1}$ pour $t\geq 0$ si et seulement si $\mathrm{A}_{11}\in\mathcal{M}_{n_1}$, puisque $x_1(0,1)\in\mathbb{R}_+^{n_1}$ et $x_2(t,1)\in\mathbb{R}_+^{n_2}$ pour $t\geq 0$.

En reprenant la même procédure, nous pouvons conclure que le système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel hybride est positif décrit par les équations (3.5) et (3.6) si et seulement si les conditions (3.9) sont remplies. ■

4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des principaux notions et résultats sur la positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride.

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est l'étude de la solvabilité et de la positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride.

Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats préliminaires sur certaines fonctions spéciales, sur la dérivation et l'intégration fractionnaire pour des fonctions dépendant d'une variable continue ou discrète et, en dernier, sur les différents types de systèmes dynamiques bidimensionnels.

Ensuite, nous avons présenté quelques notions sur la transformée de Sumudu unidimensionnelle continue et discrète suivie par leurs propriétés existantes et d'autres que nous avons développé. Cette nouvelle transformation a été utilisée pour la résolution d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride en raison de ses larges utilisations dans divers domaines au cours de ces dernières années.

En dernier, des conditions assurant la positivité du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride ont été présentées et discutées.

Dans un futur proche, nous espérons étudier la positivité et la solvabilité des autres types de systèmes dynamiques fractionnaires bidimensionnels présentés dans le premier chapitre de ce manuscrit.

Bibliographie

[1] **Baleanu, D., Tenreiro Machado, J. A. and Luo, A. C. J.** (2012) *Fractional Dynamics and Control*, Springer Sciences+Business Media, LLC, New York. 1

[2] **Belgacem, F. B. M., Karaball, A. A. and Kalla, S.** (2003), *Analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations*, Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, **3**, 103–118. 1, 15, 16, 17

[3] **Belgacem, F. B. M. and Karaballi, A. A.** (2006), *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Hindawi Publishing Corporation, 2006, Article ID 91083, 23 pages. https ://doi.org/10.1155/JAMSA/2006/91083 1, 15, 16, 17, 18

[4] **Eltayeb, H. and Kiliçman, A.** (2010), *A Note on the Sumudu Transforms and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **4(22)**, 1089–1098. 18

[5] **Farina, L. and Rinaldi, S.** (2000), *Positive Linear Systems : Theory and Applications*, J. Wiley, New York. 28

[6] **Gantmache, F. R.** (2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society Chelsea Publishing, Rhode Island. 28, 29

[7] **Jarad, F., Bayram, K., Abdejawad, T. and Baleanu, D.** (2012), *On The Discrete Sumudu Transfrom*, Romanian Reports in Physics, **64(2)**, 347–356. 1, 19

[8] **Jarad, F. and Tas, K.** (2012), *On Sumudu Transform Method in Discrete Fractional Calculus*, Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, 2012, Article ID 270106, 16 pages. doi :10.1155/2012/270106. 1, 19

[9] **Kaczorek, T.** (2002), *Positive 1D and 2D systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd. 10, 11

[10] **Kaczorek, T.** (2008), *Positive fractional 2D hybrid linear systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences **56(3)**, 273–277. 1, 9, 13, 21, 28, 29, 30, 31

[11] **Kaczorek, T.** (2008), *Fractional 2D linear systems*, Journal of Automation, Mobile Robotics Intelligent Systems **2(2)**, 5–9. 1, 6, 7, 8, 15

[12] **Kaczorek, T.** (2011), *Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences **59(4)**, 575–579. 9, 10, 11, 13

[13] **Kaczorek, T. and Rogowski, K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, **13**, Springer International Publishing, Switzerland 1, 5, 6, 7, 8

[14] **Kaisserli, Z. and Bouagada, D.** (2021), *Application of the Sumudu transform to Solve Regular Fractional Continuous-Time Linear Systems*, Kragujevac Journal of Mathematics, **45(2)**, 267–274. 19

[15] **Podlubny, I.** (1999), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 28

[16] **Rogowski, K.** (2011), *General response formula for fractional 2D continuous-time linear systems described by the Roesser model*, Acta Mechanica et Automatica, **5**, 112–116. 1, 12, 28

[17] **Rogowski, K.**, (2017), *Solution to the Fractional-Order 2D Continuous Systems Described by the Second Fornasini-Marchesini*, IFAC PapersOnLine, **50(1)**, 9748–9752. 12, 28

[18] **Sabatier, J., Agrawal, O. P. and Tenreiro Machado, J. A.** (2007) *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, The Netherlands. 1

[19] **Watugala, G. K.** (1993), *Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **24**, 35–43. 1, 15, 16

[20] **Yosida, K.** (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 16

Solvabilité et positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

Résumé : L'objectif principal de ce travail est l'étude de la solvabilité et de la positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride.

La solvabilité a été traitée par le biais de la transformation de Sumudu continue et discrète lesquelles ont été rappelées suivies par leurs propriétés existantes et d'autres que nous avons développé.

Ensuite, nous avons présenté quelques notions et outils essentiels sur la théorie des matrices. Ces résultats nous ont permis de déterminer les conditions assurant la positivité du système dynamique en question.

Dans un futur proche, nous espérons étudier la positivité et la solvabilité des autres types de systèmes dynamiques fractionnaires bidimensionnels.

Mots-Clés. Dérivation fractionnaire, Intégration fractionnaire, Positivité, Solvabilité, Système dynamique linéaire bidimensionnel hybride, Transformée de Sumudu.

Solvability and positivity of a hybrid two-dimensional fractional dynamical system

Abstract : The present work focuses on the resolution and the positivity of two-dimensional fractional hybrid linear dynamical system.

The resolution of the dynamical system has been done through continuous and discrete Sumudu transformations that have been defined and recalled followed by their existing properties and others that we have developed.

Then, we have presented some main concepts and tools on matrix theory. These results allowed us to establish the conditions for the positivity of our dynamical system.

In the future, we plan to solve and to study the positivity of the different types of two-dimensional fractional dynamical systems.

Key words. Fractional derivative, Fractional integral, Positivity, Solvability, Two-dimensional hybrid linear dynamical system, Sumudu transform.