MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnele

Présenté par :

GOUCEM Nawal

THEME :

Quelques Propriétés des Solutions Méromorphes des Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Fonctions Méromorphes

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

ANDASMAS Maamar	MCA	Université de Mostaganem	Président
LATREUCH Zinelâabidine	MCA	Université de Mostaganem	Examinateur
BELAÏDI Benharrat	Prof.	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

Résumé :

Dans ce mémoire de master, on étudie la croissance des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions méromorphes. On établit un résultat qui généralise le théorème de Frei.

Abstract :

In this master thesis, we study the growth of meromorphic solutions of certain linear differential equations whose coefficients are meromorphic functions. We establish a result that generalizes Frei's theorem.

الملخص :

في هذه أطروحة الماستر، ندرس تزايد الحلول الميرومورفية لبعض المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الميرومورفية. نبرهن على نتيجة تعمم نظرية فري.

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux.

Je tiens en premier lieu, à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon Professeur et encadreur Monsieur Belaïdi Benharrat, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidé à progresser. Je le remercie aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie aussi Monsieur ANDASMAS Maamar, Maître de conférences à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de mon mémoire.

Je remercie avec autant de ferveur Monsieur LATREUCH Zinelâabidine, Maître de conférences à l'université de Mostaganem, qui a bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Je remercie également l'ensemble professoral ayant contribué, de près ou de loin, à ma formation et mon évolution.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion $2^{\text{ème}}$ année Master Analyse Fonctionnelle.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction **2**

1 Quelques notions de base de la théorie de Nevanlinna **3**

1.1 Éléments de la théorie de Nevanlinna 3

1.1.1 Formule de Jensen 3

1.1.2 Fonction a-points 5

1.1.3 Fonction de proximité 6

1.1.4 Fonction caractéristique de Nevanlinna 7

1.1.5 Théorème de Cartan 8

1.2 Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna 10

1.2.1 Lemme de la dérivée logarithmique 15

2 Quelques propriétés des solutions méromorphes des equations différentielles linéaires à coefficients fonctions méromorphes **19**

2.1 Thèorème de Frei 19

2.2 Preuve du Théorème 2.1.2 20

2.3 Exemples 24

Bibliographie **27**

INTRODUCTION

Dans ce travail, on étudie la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0$$

dont les coefficients $A_j(j = 0, ..., n-1)$ sont des fonctions méromorphes. On établit que si les coefficients A_j $(j = 0, ..., s-1, s+1, ..., n-1)$ possèdent une croissance plus lente que le coefficient A_s, alors l'équation ne peut avoir plus que s solutions méromorphes linéairement indépendantes, dont la croissance est limitée par la croissance du coefficient A_s. Ce travail est une synthèse de l'article :
Mokhon'ko, A. Z. ; Kolyasa, L. I. Some properties of meromorphic solutions of linear differential equation with meromorphic coefficients. Mat. Stud. 52 (2019), no. 2, 166–172.
Le mémoire est composé de deux chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie. Dans le premier, on donne les notions préliminaires de la théorie de Nevanlinna avec la premier théorème fondamental.
Dans la deuxième chapitre, on présente le théorème principal avec la démonstration.

Chapitre 1

Quelques notions de base de la théorie de Nevanlinna

Dans ce chapitre, on présente les définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, et on donne quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes qu'on aura besoin par la suite, voir $[1, 3, 4, 7, 8, 9]$.

1.1 Éléments de la théorie de Nevanlinna

1.1.1 Formule de Jensen

Théorème 1.1.1 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et $a_1, a_{2...}$, (resp. $b_1, b_2, ...$), ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. On démontre la théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni poles sur le cercle $|z| = r$. Posons

$$F(z) = f(z)\,\frac{\prod\limits_{|b_j|<r} \frac{r(z-b_j)}{r^2-\bar{b}_j z}}{\prod\limits_{|a_j|<r} \frac{r(z-a_j)}{r^2-\bar{a}_j z}}. \tag{1.1.1}$$

La fonction F n'admet pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq r$, donc $\log F(z)$ est analytique dans $|z| \leq r$. Alors, par le théorème de la valeur moyenne des fonctions analytiques, nous obtenons

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F\left(re^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

En prenant les parties réelles, et en utilisant $\mathrm{Re}(\log F(z)) = \log|F(z)|$, nous obtenons

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1.2}$$

De (1.1.1), on trouve

$$|F(0)| = |f(0)| \frac{\prod\limits_{|b_j|<r} \frac{b_j}{r}}{\prod\limits_{|a_j|<r} \frac{a_j}{r}}. \tag{1.1.3}$$

Pour tout $z = re^{i\varphi}$ et pour tout j, on a

$$\left|\frac{r(z-b_k)}{r^2 - \overline{b}_j z}\right| = \left|\frac{r(z-a_j)}{r^2 - \overline{a}_j z}\right| = 1. \tag{1.1.4}$$

De (1.1.1) et (1.1.4), on trouve

$$\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|. \tag{1.1.5}$$

En combinant (1.1.5) avec (1.1.2) et (1.1.3), nous obtenons l'affirmation

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|}. \tag{1.1.6}$$

L'équation (1.1.6) est appelée formule de Jensen, elle donne une idée sur le lien entre les zéros et les pôles situés à l'intérieur d'un disque $|z| < r$ avec la valeur moyenne de $\log|f(z)|$ sur la frontière $|z| = r$. □

Définition 1.1.1 ([7]) *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([7]) *On a les propriétés suivantes :*
(a) $\log x < \log^+ x \quad (x \geq 0)$.
(b) $\log^+ x \leq \log^+ y \quad (0 \leq x \leq y)$.
(c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} \quad (x \geq 0)$.
(d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} \quad (x \geq 0)$.
(e) $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \log^+ x_i \quad (x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n)$.
(f) $\log^+(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \leq \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} \log^+ x_i \quad (x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n)$.
(g) $\left|\log^+ |x| - \log^+ |y|\right| \leq \left|\log \left|\frac{x}{y}\right|\right| \quad (x, y \in \mathbb{R}^*)$.
(h) $\left|\log^+ |x| - \log^+ |y|\right| \leq \log^+ |x-y| + \log 2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^*)$.

1.1.2 Fonction a-points

Définition 1.1.2 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$ et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$ .Chaque racine ou pôle étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Posons*

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) := \int\limits_{0}^{r} \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \ a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) := \int\limits_{0}^{r} \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r.$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Exemple 1.1.1 *1. Soit $f(z) = e^{2z}$. On a $n(t, \infty, f) = n(t, 0, f) = 0$ car f n'a ni zéros ni pôles. Donc*

$$N(r, \infty, f) = N(r, 0, f) = 0.$$

2. Soit $f(z) = \frac{e^z}{z^p}$, $p \in \mathbb{N}^*$. On a $n(t, 0, f) = 0$ et $n(t, \infty, f) = p$.

$$N(r, 0, f) = \int\limits_{0}^{r} \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt + n(0, 0, f) \log r = 0,$$

$$N(r, \infty, f) = \int\limits_{0}^{r} \frac{p-p}{t} dt + p \log r = p \log r.$$

Définition 1.1.3 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $\overline{n}(t,a,f)$ le nombre de racines distinctes de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$ et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre de pôles distincts de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Posons*

$$\overline{N}(r,a,f)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right):=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,a,f)-\overline{n}(0,a,f)}{t}dt+\overline{n}(0,a,f)\log r,\ \ a\neq\infty$$

et

$$\overline{N}(r,\infty,f)=\overline{N}\,(r,f):=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)\log r.$$

$\overline{N}(r,a,f)$ est appelée fonction a-points distincts de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$.

Exemple 1.1.2 *Soit $f(z)=\frac{e^z}{z^p}$, $p\in\mathbb{N}^*$. On a $\overline{n}(t,0,f)=0$ et $\overline{n}(t,\infty,f)=1$.*

$$\overline{N}\,(r,0,f)=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,0,f)-\overline{n}(0,0,f)}{t}dt+\overline{n}(0,0,f)\log r=0,$$

$$\overline{N}(r,\infty,f)=\int_0^r\frac{1-1}{t}dt+\log r=\log r.$$

Proposition 1.1.1 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec le développement de Laurent de f autour de l'origine*

$$f(z)=\sum_{i=m}^{+\infty}c_iz^i,c_m\in\mathbb{C}^*,\ \ m\in\mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.4 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On définit la fonction de proximité de f par*

$$m(r,a,f)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}d\varphi,\ \ si\ f\not\equiv a\in\mathbb{C}$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi.$$

1.1.4 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 1.1.5 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction caractéristique de Nevanlinna de f est définie par*

$$T(r,f):=m(r,f)+N(r,f).$$

Exemple 1.1.3 *1. Soit $f(z)=e^{2z}$. On a $n(t,\infty,f)=0$ et $N(r,f)=0$. De plus*

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|e^{2r\cos\varphi+i\sin\varphi}\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2r\cos\varphi d\varphi=\frac{2r}{\pi}.$$

Donc $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)=\frac{2r}{\pi}$.
2. Soit $f(z)=\frac{e^z}{z^p}$, $p\in\mathbb{N}^*$. On a $n(t,\infty,f)=n(0,\infty,f)=p$ et

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r$$

$$=\int_0^r\frac{p-p}{t}dt+p\log r=p\log r,$$

de plus

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{e^{r\cos\varphi+i\sin\varphi}}{r^p}\right|d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{e^{r\cos\varphi}}{r^p}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi-p\log r)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\varphi d\varphi-\frac{p}{2}\log r=\frac{r}{\pi}-\frac{p}{2}\log r.$$

Donc

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)\ =\frac{r}{\pi}+\frac{p}{2}\log r.$$

1.1.5 Théorème de Cartan

Théorème 1.1.2 ([7]) *Si f est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$, alors*

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta + \log^+ |f(0)| .$$

Corollaire 1.1.1 ([7]) *$T(r,f)$ est une fonction croissance en r.*

Corollaire 1.1.2 ([7]) *$T(r,f)$ est une fonction convexe en $\log r$.*

Proposition 1.1.2 ([7]) *Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. Alors :*

(1) $T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) $T(r, f^n) = nT(r,f)$; $n \in \mathbb{N}$.
(3) $T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. (1) On a :

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \log^+ \left| f_i(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f_i(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

Si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_i \geq 0$ pour f_i , alors il est un pôle d'ordre égal au plus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\prod_{i=1}^{n} f_i$. Donc

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

d'où

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) = m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) = \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$$

2) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \Leftrightarrow |f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$,alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) + m(r, f^n) = nN(r, f) + nm(r, f) = nT(r, f).$$

3) On a

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \log^+ \left| f_i(re^{i\varphi}) \right| + \log n \right) d\varphi$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f_i(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + \log n = \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n.$$

Si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_i \geq 0$ pour f_i, alors il est un pôle d'ordre égal au plus $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$. Donc

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

d'où

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) = N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n = \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n.$$

□

1.2 Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2.1 ([7]) *Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Soit le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour de l'origine*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{+\infty} c_i z^i, c_m \in \mathbb{C}^*, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T(r, a, f) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r; f) - \log|c_m| + \varphi(r, a),$$

où $|\varphi(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$ *.*

Preuve. Supposons d'abord $a = 0$. Par le Lemme 1.1.1 (c) et la Proposition 1.1.1, on obtient

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)} \right| d\varphi + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$= m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

Ainsi

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r, f) + N(r, f) - \log|c_m|$$

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - \log|c_m| \tag{1.2.1}$$

Ce qui est l'affirmation avec $\varphi(r, 0) \equiv 0$.

Traitons maintenant le cas général $a \neq 0$, posons $h = f - a$. Il est clair que

$$m\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \ N\left(r, \frac{1}{h}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \ N(r, h) = N(r, f).$$

De plus

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2,$$

$$\log^+|f| = \log^+|f-a+a| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on obtient

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2,$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Par conséquent

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$$

satisfait

$$|\varphi(r,a)| \leq \log 2 + \log^+ a$$

En appliquant (1.2.1) pour h, on obtient

$$T\left(r,\frac{1}{h}\right) = m\left(r,\frac{1}{h}\right) + N\left(r,\frac{1}{h}\right) = m(r,h) + N(r,h) - \log|c_m|$$

$$= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a)$$
$$= T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a).$$

□

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit : Pour tout $a \in \mathbb{C}$,on a*

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \ r \to +\infty$$

Exemple 1.2.1 *Vérifions le Théorème 1.2.1 pour la fonction $f(z) = e^z$. On a*

$$T(r,f) = m(r,\infty,f) + N(r,\infty,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Calculons maintenant $T(r,a,f) = T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$. Si $a = 0$, alors $N(r,0,f) = 0$ et

$$m(r,0,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|e^{-r\cos\varphi}\right| d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-r\cos\varphi) d\varphi = -\frac{r}{2\pi} \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}.$$

Donc

$$T(r,0,f) = N(r,0,f) + m(r,0,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Si $a \neq 0, \infty$ *et* z_0 *est une solution de l'équation* $e^{z_0} = a$, *alors toutes les solutions s'écrivent* $z_0 + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. *D'où*

$$n(t,a,f) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\log|a|)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi}, \ t \longrightarrow +\infty$$

et par suite

$$N(r,a,f) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

Calculons $m(r,a,f)$. *On a*

$$m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|e^{re^{i\varphi}} - a\right|} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \log^+ \frac{1}{\left|e^{re^{i\varphi}} - a\right|} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+ \frac{1}{\left|e^{re^{i\varphi}} - a\right|} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \log^+ \frac{1}{\left|e^{re^{i\varphi}} - a\right|} d\varphi = O(1).$$

Donc

$$T(r,a,f) = N(r,a,f) + m(r,a,f) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

Proposition 1.2.1 ([9]) *Soit* f *une fonction méromorphe dans* $\mathbb{C}$. *Si* $g(z) = \frac{af+b}{cf+d}$ *et* $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ *tels que* $ad - cb \neq 0$, *alors*

$$T(r,g) = T(r,f) + O(1), \ f \not\equiv -\frac{d}{c}.$$

Preuve. Comme $g(z) = \frac{af+b}{cf+d}$, alors $f(z) = \frac{-df+b}{cf-a}$. Donc il suffit de montrer que

$$T(r,g) \leq T(r,f) + O(1).$$

Si $c = 0$, alors

$$T(r,g) = T\left(r, \frac{af+b}{d}\right)$$

$$\leq \log^+ \left|\frac{a}{d}\right| + T(r,f) + \log^+ \left|\frac{b}{d}\right| + \log 2 = T(r,f) + O(1).$$

Si $c \neq 0$, alors

$$T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)$$

$$\leq \log^+ \left|\frac{a}{c}\right| + \log^+ \left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| + T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \log 2$$

$$= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) = T\left(r, f+\frac{d}{c}\right) + O(1)$$

$$\leq \log^+ \left|\frac{d}{c}\right| + T(r,f) + O(1) = T(r,f) + O(1).$$

□

Exemple 1.2.2 *Soit* $g(z) = \tan z$. *Alors on peut écrire*

$$g(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

Donc

$$T(r,g) = T\left(r, -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\right) = T(r, e^{2iz}) + O(1) = \frac{2r}{\pi} + O(1).$$

Définition 1.2.1 ([3, 4]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Alors l'ordre de croissance $\rho(f)$ de f est défini par*

$$\rho(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2.3 *1. Soit* $f(z) = e^{e^z}$. *Alors* $T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}$, $r \longrightarrow +\infty$. *Donc*

$$\rho(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log e^r - \frac{1}{2}\log(2\pi^3 r)}{\log r}$$

$$= \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{r - \frac{1}{2}\log(2\pi^3 r)}{\log r} = +\infty.$$

2. Soit $f(z) = \frac{e^z}{z^p}$, $p \in \mathbb{N}^*$. *Alors* $T(r, f) = \frac{r}{\pi} + \frac{p}{2}\log r$. *Donc*

$$\rho(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{r}{\pi} + \frac{p}{2}\log r)}{\log r} = 1.$$

Théorème 1.2.2 ([3]) *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes non constantes dans* $\mathbb{C}$. *Alors*

1) $\rho(f + g) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$.
2) $\rho(fg) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$.
3) De plus , si $\rho(g) < \rho(f)$, alors $\rho(f + g) = \rho(fg) = \rho(f)$.

Preuve. **1**) Posons $\rho(f) = \rho_1$ et $\rho(g) = \rho_2$.Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \ln 2$$
$$\leq r^{\rho_1+\varepsilon} + r^{\rho_2+\varepsilon} + \log 2 \leq 2r^{\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon} + \log 2.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitaire, on obtient $\rho(f+g) \leq \max\{\rho_1, \rho_2\} = \max\{\rho(f), \rho(g)\}$. **2**) De même, on obtient

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) \leq 2r^{\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon}$$

d'où $\rho(fg) \leq \max\{\rho_1, \rho_2\} = \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.
3) Supposons que $\rho(g) < \rho(f)$. Alors $\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(f)$. De la relation :

$$T(r, f) = T(r, f + g - g) \leq T(r, f + g) + T(r, g) + \log 2,$$

on obtient

$$\rho(f) \leq \max\{\rho(f + g), \rho(g)\} = \rho(f + g),$$

d'où $\rho(f + g) = \rho(f)$. Ensuite de la relation

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{fg}{g}\right) \leq T(r, fg) + T\left(r, \frac{1}{g}\right)$$
$$= T(r, fg) + T(r, g) + O(1),$$

on obtient $\rho(f) \leq \max\{\rho(fg), \rho(g)\} = \rho(fg)$, d'où $\rho(fg) = \rho(f)$. $\square$

1.2.1 Lemme de la dérivée logarithmique

Lemme 1.2.1 ([3, 4]) *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r,f) = O(\log T(r,f) + \log r),$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si $\rho(f) < +\infty$, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r).$$

Corollaire 1.2.1 ([3, 4]) *Soient f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f) = O(\log T(r,f) + \log r),$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si $\rho(f) < +\infty$, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Preuve. On démontre le corollaire par récurrence. Pour $k = 1$, la relation est vraie

$$m\left(r, \tfrac{f'}{f}\right) = S(r,f).$$

Supposons ensuite que nous avons

$$m\left(r, \tfrac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f).$$

Alors

$$m(r, f^{(k)}) = m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f} \cdot f\right) \leq m(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = m(r,f) + S(r,f).$$

Si z_0 est un pôle d'ordre p pour f, alors z_0 est un pôle d'ordre $k + p \leq (1+k)p$ de $f^{(k)}$. Donc

$$N(r, f^{(k)}) \leq (1+k)N(r,f).$$

Par conséquent

$$T(r, f^{(k)}) = m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \leq (1+k)T(r,f) + S(r,f).$$

Ce qui inplique

$$m\left(r, \frac{\left(f^{(k)}\right)'}{f^{(k)}}\right) = S(r, f^{(k)}) = S(r, f),$$

donc

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{\left(f^{(k)}\right)'}{f^{(k)}}\right) = S(r, f) + S(r, f^{(k)}) = S(r, f).$$

$\square$

Lemme 1.2.2 ([3]) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) = 1$. Pour tout $0 < \alpha < 1$, on a*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{f'\left(re^{i\varphi}\right)}{f\left(re^{i\varphi}\right)}\right|^\alpha d\varphi \leq \frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)} T^\wedge\left(R, f\right) r^{-\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-(2\alpha)^\wedge},$$

où R et r sont deux nombres arbitaires satisfaisant la condition $R > r \geq 1$ et $x^\wedge = \max\left\{x, 1\right\}$.

Corollaire 1.2.2 ([3]) *Soient f une fonction méromorphe. Si $\rho\left(f\right) < 1$, alors on a*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = o(1), \ r \longrightarrow +\infty.$$

Preuve. D'après le Lemme 1.2.3, pour tout $0 < \alpha < 1$ et tout $R > r \geq 1$, on a

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)} T^\wedge\left(R, f\right) r^{-\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-(2\alpha)^\wedge}.$$

Pour $R = 2r$, il vient

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)} T^\wedge\left(2r, f\right) r^{-\alpha}\left(1 - \frac{r}{2r}\right)^{-(2\alpha)^\wedge}$$

$$= \frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)} \frac{T^\wedge\left(2r, f\right)}{2^{(2\alpha)^\wedge} r^\alpha} \leq \frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)} \frac{T\left(2r, f\right)}{2^{(2\alpha)^\wedge} r^\alpha}.$$

D'après la définition de l'ordre de f, pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$T\left(r, f\right) \leq r^{\rho(f)+\varepsilon}.$$

Donc

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leq\frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)}\frac{T\left(2r,f\right)}{2^{(2\alpha)^\wedge}r^{\alpha}}\leq\frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)}\frac{(2r)^{\rho(f)+\varepsilon}}{2^{(2\alpha)^\wedge}r^{\alpha}}.$$

En choisissant $\rho\left(f\right)+\varepsilon<\alpha<1$, on obtient

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leq\frac{32}{\alpha\left(1-\alpha\right)}\frac{(2r)^{\rho(f)+\varepsilon}}{2^{(2\alpha)^\wedge}r^{\alpha}}\longrightarrow 0,\ r\longrightarrow+\infty.$$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 1.2.2 ([3, 4, 9]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors on a*

$$T(r,f')\leq 2T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right).$$

Si f est d'ordre fini, alors

$$T(r,f')\leq 2T(r,f)+O\left(\log r\right).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}T(r,f')&=m(r,f')+N(r,f')\\&=m\left(r,\frac{f'}{f}\cdot f\right)+N(r,f')\\&\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m(r,f)+N(r,f').\end{aligned}$$

Puisque

$$N(r,f')=N(r,f)+\overline{N}(r,f)\leq 2N(r,f),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}T(r,f')&\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m(r,f)+2N(r,f)\\&\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2\left(m(r,f)+N(r,f)\right)=2T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right).\end{aligned}$$

Si f est d'ordre fini, alors d'après le Lemme de la dérivée logarithmique, on obtient

$$T(r,f')\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+O\left(\log r\right).$$

$\square$

Définition 1.2.2 ([3]) *Soit* $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *une fonction rationnelle irréductible. Alors*

$$\deg R = \max \{\deg P, \deg Q\} .$$

Exemple 1.2.4 *Soit* $R(z) = \dfrac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0}$ $(a_p \neq 0,\ b_q \neq 0,\ p,\ q \geq 1$ *des nombres entiers) une fonction rationnelle irréductible. Alors*

$$\deg R = \max \{p, q\} .$$

Théorème 1.2.3 ([3]) *Si* $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ *est une fonction rationnelle de degré* d*, alors*

$$T(r, R(z)) = d \log r + O(1).$$

Théorème 1.2.4 ([5]) *Soient* f *et* $a_0, \ldots, a_n$ *des fonctions méromorphes,* $n \geq 1$ *un nombre entier. Si* $a_n(z) \not\equiv 0$ *et* $F = a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n$*, alors*

$$T(r, F) = nT(r, f) + O\left(\sum_{k=0}^{n} T(r, a_k)\right).$$

Chapitre 2

Quelques propriétés des solutions méromorphes des equations différentielles linéaires à coefficients fonctions méromorphes

2.1 Thèorème de Frei

Théorème 2.1.1 ([2]) *Soit* $a_s(z)$ *le dernier coefficient fonction entière transcendante parmi la séquence des coefficients* $a_0(z), a_1(z), ..., a_{n-1}(z)$*. Alors, l'équation*

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \cdots + a_1(z) f' + a_0(z) f = 0$$

admet au plus s *solutions linéairement indépendantes d'ordre fini.*

Exemple 2.1.1 *L'équation différentielle*

$$f'' + e^{-z} f' - f = 0$$

admet une seule solution d'ordre fini $(s = 1)$*. On vérifie que* $f(z) = e^z + 1$ *est une solution de cette équation d'ordre égal à* 1*.*

Dans ce chapitre on étend le théorème de Frei pour l'équation

$$f^{(n)} + A_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0, \tag{2.1.1}$$

où $A_j (j = 0, ..., n-1)$ sont des fonctions méromorphes. On démontre le théorème suivant :

Théorème 2.1.2 ([6]) *Étant donnée l'équation différentielle* (2.1.1)*. Supposons que les coefficients* $A_j (j = 0, ..., n-1)$ *sont des fonctions méromorphes tels que*
1)

$$m(r, A_j) = O(1) \, (j = s+1, s+2, ..., n-1) \, , m(r, A_s) \neq O(1), \tag{2.1.2}$$

alors l'équation (2.1.1) *ne peut avoir plus de* s *solutions méromorphes linéairement indépendantes d'ordre* $\rho < 1$;
2)

$$m(r, A_j) = O(\log r) \;\; (j = s+1, s+2, ..., n-1) \, , \;\; m(r, A_s) \neq O(\log r), \tag{2.1.3}$$

alors l'équation (2.1.1) *ne peut avoir plus de* s *solutions méromorphes linéairement indépendantes d'ordre fini ;*
3)

$$m(r, A_{s+1}), m(r, A_{s+2}), ..., m(r, A_{n-1}) = o(m(r, A_s)), \;\; r \notin E, \tag{2.1.4}$$

alors l'équation (2.1.1) *ne peut avoir plus de* s *solutions méromorphes linéairement indépendantes telles que*

$$\log(rT(r, f)) = o(m(r, A_s)), \;\; r \notin E. \tag{2.1.5}$$

2.2 Preuve du Théorème 2.1.2

Soit tout d'abord dans l'équation (2.1.1) , $s = 0$, i.e.,

$$m(r, A_{n-1}), \;\; m(r, A_{n-2}), ..., \;\; m(r, A_1) = O(1), \tag{2.2.1}$$

$$m(r, A_0) \neq O(1). \tag{2.2.2}$$

et f est une solution de croissance $\rho < 1$, puis en prenant en compte du Corollaire 1.2.1, on obtient

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(1), \;\; k \in \mathbb{N}^*. \tag{2.2.3}$$

De (2.1.1) , il s'ensuit que

$$-A_0(z) \equiv \frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} + A_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)}, \;\; z \in \mathbb{C}. \tag{2.2.4}$$

En prenant en compte des propriétés de la fonction de proximité, de (2.2.1), (2.2.3) et (2.2.4) , on obtient

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{n} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} m(r, A_j) + O(1) = O(1).$$

Ce qui contredit la condition (2.2.2). Ainsi, si $s = 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation (2.1.1) n'a pas de solutions méromorphes f d'ordre $\rho < 1$.
On démontre par récurrence. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est prouvé que si dans l'équation (2.1.1) , on a

$$m(r, A_{n-1}), m(r, A_{n-2}), ..., m(r, A_m) = O(1),\ m(r, A_{m-1}) \neq O(1),$$

alors l'équation (2.1.1) n'a pas plus de $m - 1$ solutions méromorphes linéairement indépendantes f d'ordre $\rho < 1$. Prouvons cette assertion pour $s = m \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que dans l'équation (2.1.1) , on a

$$m(r, A_{n-1}),\ m(r, A_{n-2}), ...,\ m(r, A_{m+1}) = O(1),\ m(r, A_m) \neq O(1) \tag{2.2.5}$$

mais cette équation possède $m + 1$ solutions méromorphes linéairement indépendantes $w_1,\ w_2, ...,\ w_{m+1}$, d'ordre $\rho = \rho(w_j) < 1,\ j = 1, 2, ..., m + 1$. Faisons la substitution $f(z) = u(z)w_1(z)$. Ensuite, l'équation (2.1.1) peut être écrite sous la forme (on prend $w_1 = w,\ f^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} f$; $f^{(k)} = \sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j u^{(j)} w^{(k-j)},\ k = 0, 1, ..., n$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} C_k^j u^{(j)} w^{(k-j)} + u \sum_{k=0}^{n} a_k w^{(k)} = 0,\ a_n = 1.$$

Puisque $w = w_1$ est solution de (2.1.1), alors $\sum_{k=0}^{n} a_k w^{(k)} \equiv 0$ et l'équation précédente prend la forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} C_k^j u^{(j)} w^{(k-j)} = 0. \tag{2.2.6}$$

Divisons les deux côtés de l'équation (2.2.6) par w et regroupons les termes qui contiennent $u^{(s)},\ s = 1, ..., n$, on obtient

$$\sum_{s=2}^{n} (u')^{(s-1)} \sum_{k=s}^{n} a_k C_k^s \frac{w^{(k-s)}}{w} + u' \sum_{k=1}^{n} a_k C_k^1 \frac{w^{(k-1)}}{w} = 0, \tag{2.2.7}$$

où pour $u' = v$, $t = s - 1$, on a

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{(t)} \sum_{k=t+1}^{n} a_k C_k^{t+1} \frac{w^{(k-t-1)}}{w} = 0.$$

La dernière équation peut être écrite sous la forme

$$v^{(n-1)} + b_{n-2} v^{(n-2)} + ... + b_0 v = 0, \tag{2.2.8}$$

où

$$b_t = \sum_{k=t+1}^{n} a_k C_k^{t+1} \frac{w^{(k-t-1)}}{w}, \quad t = 0, 1, ..., n-1;\ a_n = b_{n-1} = 1. \tag{2.2.9}$$

En particulier

$$b_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k C_k^{m} \frac{w^{(k-m)}}{w} = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k C_k^{m} \frac{w^{(k-m)}}{w},$$

ou alors

$$a_m = b_{m-1} - \sum_{k=m+1}^{n} a_k C_k^{m} \frac{w^{(k-m)}}{w}. \tag{2.2.10}$$

De (2.2.9) en prenant en compte le Corollaire 1.2.1, il s'ensuit que

$$m(r, b_t) \leq \sum_{k=t+1}^{n} m(r, a_k) + \sum_{k=t+1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(k-t-1)}}{w}\right) + O(1)$$

$$= \sum_{k=t+1}^{n} m(r, a_k) + O(1),\ \ t = m,\ \ m+1, ..., n-1. \tag{2.2.11}$$

Ensuite, en utilisant les propriétés de la fonction de proximité, la relation (2.2.5) et le Corollaire 1.2.1, de (2.2.10) il vient

$$m(r, a_m) \leq m(r, b_{m-1}) + \sum_{k=m+1}^{n} m(r, a_k)$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(k-m)}}{w}\right) + O(1) = m(r, b_{m-1}) + O(1). \tag{2.2.12}$$

En tenant compte de (2.2.5) et (2.2.11) nous avons ($b_{n-1} = a_n = 1$)

$$m(r, b_{n-1}), ..., m(r, b_{m+1}), m(r, b_m) = O(1). \tag{2.2.13}$$

De (2.2.5) et (2.2.12) il s'ensuit que

$$m(r, b_{m-1}) \neq O(1).$$

Par la substitution $f = u.w_1$, les solutions méromorphes linéairement indépendantes $w_1(z), w_2(z), ..., w_{m+1}(z)$ de l'équation (2.1.1) deviennent les solutions méromorphes linéairement indépendantes

$$u_1 = \frac{w_2}{w_1}, ..., u_m = \frac{w_{m+1}}{w_1}$$

de l'équation (2.2.6), et ces solutions après la substitution $u' = v$ deviennent les solutions méromorphes linéairement indépendantes

$$v_j = u_j' = \left(\frac{w_{j+1}}{w_1}\right)', \; j = 1, ..., m,$$

de l'équation (2.2.8). Par hypothèse, l'ordre des w_j $(j = 1, 2, ..., m+1)$ vérifie $\rho(w_j) < 1$, $j = 1, 2, ..., m+1$, alors l'ordre $\rho(u_i)$ vérifie

$$\rho(u_i) = \rho\left(\frac{w_{j+1}}{w_1}\right) < 1, i = 1, ..., m.$$

En prenant en compte la Proposition 1.2.2 et le Corollaire 1.2.1, on obtient

$$T(r, v_i) = T(r, u_i') \leq 2T(r, u_i) + m\left(r, \frac{u_i'}{u_i}\right) + O(1) = 2T(r, u_i) + O(1), \; i = 1, ..., m.$$

D'où, de la définition de l'ordre, il s'ensuit que les solutions v_i, $i = 1, ..., m$ de l'équation (2.2.8) ont l'ordre de croissance $\rho(v_i) < 1$, $i = 1, ..., m$. Par conséquent, en supposant que l'équation (2.1.1) pour $s = m$ possède $m+1$ solutions méromorphes linéairement indépendantes $w_1, ..., w_m, w_{m+1}$ d'ordre $\rho(w_j) < 1$, $j = 1, ..., m+1$, il s'ensuit que l'équation (2.2.8) possède m solutions méromorphes linéairement indépendantes $v_1, ..., v_m$ d'ordre $\rho(v_i) < 1$, $i = 1, ..., m$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction. Les cas 2), 3) du Théorème 2.1.2 se démontrent de la même manière, seules les estimations du Théorème 1.2.3 sont utilisées au lieu de l'estimation du Corollaire 1.2.1.

2.3 Exemples

Exemple 2.3.1 *Considérons l'équation*

$$f' - (e^z - \frac{4}{z})f = 0.$$

cette équation est de la forme $f' + A_0(z)f = 0,\ A_0(z) = -e^z + \frac{4}{z}$.

Ici nous avons

$$|A_0(z)| = \left| e^{re^{i\varphi}} - \frac{4}{re^{i\varphi}} \right| = e^{r\cos\varphi} + o(1).$$

Par conséquent, en tenant compte du fait que $\log^+ x = \max(\log x, 0), x \geq 0,$ *la fonction de proximité*

$$m(r, A_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| A_0(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi = \frac{r}{\pi}, r \longrightarrow \infty.$$

Puisque dans cet exemple $s = 0$, *alors en prenant en considération la conclusion du théorème, cela signifie que l'équation considérée n'a pas de solutions méromorphe* f *satisfaisant* $\log(rT(r,f)) = o(m(r, A_0))$. *En effet, sa solution est la fonction* $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z^4}$. *En prenant en compte les propriétés de la fonction caractéristique, nous avons :*

$$T(r, f) = T(r, \frac{e^{e^z}}{z^4}) = T(r, e^{e^z}) + O(\log r).$$

Mais pour la fonction entière e^{e^z}, *on a*

$$T(r, e^{e^z}) = m(r, e^{e^z}) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}},\ r \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}},\ r \longrightarrow +\infty,$$

$$\log(rT(r, f)) \sim r,\ r \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent

$$r \sim \log(rT(r, f)) \neq o(m(r, A_0)),\ m(r, A_0) \sim \frac{r}{\pi},\ r \longrightarrow +\infty.$$

Exemple 2.3.2 *Les fonctions* $f_1(z) = e^{e^{\frac{z}{2}}}$ *et* $f_2(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$, *sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation* $f'' - \frac{e^{\frac{z}{2}}+1}{2} f' = 0$. *Cette équation est de la forme* $f'' + A_1(z)f' = 0 = 0$, $A_1(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}}+1}{2}$. *Ici nous avons*

$$\left|A_1(re^{i\varphi})\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\frac{r}{2}e^{i\varphi}} + 1\right| = \frac{1}{2}e^{\frac{r}{2}\cos\varphi} + O(1),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Par conséquent, de manière analogue à l'éxemple précédent, on a l'égalité

$$m(r, A_1) = (1 + o(1))\frac{r}{2\pi}.$$

Puisque dans cet exemple $s = 1$, *alors d'après les conclusions du théorème, l'équation que nous considérons n'a qu'une seule solution méromorphe* f *pour laquelle* $\log(rT(r,f)) = o(m(r,A_1))$, $r \notin E$.*Comme indiqué ci-dessus, une telle solution est* $f_2(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$. *Pour la solution* $f_1(z) = e^{e^{\frac{z}{2}}}$, *comme indiqué dans l'exemple précédent*

$$T(r, f_1) = T(r, e^{e^{\frac{z}{2}}}) \sim \frac{e^{\frac{r}{2}}}{(\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}},\ r \longrightarrow +\infty;\ \log(rT(r, f_1)) \sim \frac{r}{2},\ r \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent

$$\frac{r}{2} \sim \log(rT(r, f_1) \neq o(m(r, A_1)),\ m(r, A_1) = (1 + o(1))\frac{r}{2\pi},\ r \to +\infty.$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, la relation entre le taux de croissance des solutions méromorphes et les coefficients de l'équation différentielle d'ordre n a été établie. À savoir, l'assertion du théorème de Frei sur l'ordre de croissance des solutions entières de l'équation

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

est élargi au cas où les coefficients de l'équation et des solutions sont des fonctions méroomorphes, sans aucune restriction pour le taux de croissance des coefficients.

Bibliographie

[1] B. BELAÏDI, *Fonctions entières et théorie de Nevanlinna*, Éditions Al-Djazair, 2017.

[2] M. FREI, *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, Comment. math. helv., 35 (1961), 201–222.

[3] A. A. GOLDBERG, I. V. OSTROVSKII, *Value Distribution of Meromorphic Functions*, Translated from the 1970 Russian original by Mikhail Ostrovskii. With an appendix by Alexandre Eremenko and James K.Langley, Transl. Math. Monogr., vol.236, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[4] W. K. HAYMAN, *Meromorphic functions*, Claredon Press, Oxford, 1964.

[5] A. Z. MOKHON'KO, V. D. MOKHON'KO, *Estimates for the Nevanlinna characteristics of some classes of meromorphic functions and their applications to differential equations*. Sib. Math J. 15 (1974), 921–934.

[6] A. Z. MOKHON'KO, L. I. KOLYASA, *Some properties of meromorphic solutions of linear differential equation with meromorphic coefficients*. Mat. Stud. 52 (2019), no. 2, 166–172.

[7] I. LAINE, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[8] N. STEINMETZ, *Nevanlinna Theory, Normal Families, and Algebraic Differential Equations*, Springer International Publishing AG, 2017.

[9] C. C. YANG, H. X. YI, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.