MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

BOUYAKOUB MOKHTAR

THEME :

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES COMPLÈTES DE TYPE ELLIPTIQUE DANS LES ESPACES UMD

Devant le jury composé de :

Mr.	BOUZIT Hamid	Université de Mostaganem	MCA	Président
Mr.	LAID Djillali	Université de Mostaganem	MCB	Examinateur
Mr.	ANDASMAS Maamar	Université de Mostaganem	MCA	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par **: BOUYAKOUB MOKHTAR**

Intitulé

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES COMPLÈTES DE TYPE ELLIPTIQUE DANS LES ESPACES UMD

Juin 2021

Devant **le jury composé de**

Président	*Mr Bouzit Hamid, MCA, UMAB, Mostaganem*
Examinateur	*Mr Laid Djillali, MCB, UMAB, Mostaganem*
Encadreur	*Mr ANDASMAS Maamar, MCA, UMAB, Mostaganem*

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mes études et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps exprimer mes profonds remerciements à mon directeur de mémoire M. ANDASMAS Maamar pour l'aide compétente qu'il m'a apporté pour sa patience et son encouragement. Son œilcritique m'a été très précieux pour structurer ce travail et améliorer les différentes parties.
Toute ma gratitude s'adresse aussi à M. BOUZIT Hamid Maître de conférence à l'Université de Mostaganem, le présidenr de Jury et à l'éxaminateur de ce mémoire M. LAID Djillali Maître de conférence à l'Université de Mostaganem, je les remercie infiniment d'avoir acepter d'évaluer ce modeste travail.
Je remercie également tous les professeurs et intervenants qui par leurs conseils, leurs critiques et leurs soutiens ont guidé mes réflexions et ont répondu a mes questions durant mes recherches. Ils ont été un grand appui dans l'élaboration de ce mémoire.
J'exprime mes profonds remerciements à mes chers parents pour leur patience, leur amour et leurs encouragements.
Enfin, je remercie mes amis et mes camarades qui ont été toujours là pour moi.

A tous ces intervenants, je présente mes remerciements, ma gratitude et mon respect.

Résumé

Dans ce mémoire, on donne une synthèse sur l'article [13], c'est une étude qui donne quelques résultats sur les équations différentielles abstraites complètes du second ordre de type elliptique

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u\,(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{2}$$

posé dans un espace de Banach complexe E de type UMD tel que :

► A, B sont deux opérateurs fermés dans E avec les domaines $D\,(A)\,,\ D\,(B)$ resp.

► $u_0,\ u_1$ sont deux éléments donnés dans E,

► f est une fonction dans $L^p\,((0,1)\,,E)$ avec $1 < p < \infty$.

En utilisant les propriétés d'opérateurs avec des puissances imaginaires bornées (Classe des opérateurs BIP) et le Théorème de Dore-venni sur la somme de deux opérateurs linéaires fermés, on fait preuve l'existence, l'unicité et la régularité de la solution stricte u du problème (1) et (2), c'est-à-dire ; une fonction u vérifiant (1) et (2) , telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(A)) \\ u^{'} \in L^P(0,1;D(B)). \end{cases}$$

Ce travail complète naturellement les résultats obtenus dans le cadre des espaces de Hölder dans [11].

A la fin de cette étude, quelques applications aux équations aux dérivées partielles sont données.

Abstract

In this thesis, we give a synthesis on the article [13], it is a study which gives some results on complete abstract differential equations (of the second order) of elliptic type

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{2}$$

posed in a complex Banach space E of UMD type. Here,

- ▶ $A,\ B$ are two closed operators in E with the domains $D(A),\ D(B)$ resp.
- ▶ $u_0,\ u_1$ are two elements given in E,
- ▶ f is a function in $L^p(0,1;E)$ with $1 < p < \infty$.

By using the properties of operators with bounded imaginary powers (BIP) and the Dore-venni Theorem on the sum of two closed linear operators, we prove the existence, uniqueness and regularity of the strict solution u of (1) and (2), that is; a function u verifying (1) and (2) such that

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;E) \cap L^p(0,1;D(A)) \\ u' \in L^p(0,1;D(B)). \end{cases}$$

This work complements the results obtained in [11], on the Hölder's spaces.

At the end of this study, some applications to partial differential equations are given.

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières décennies, de nombreux chercheurs ont concentré leur attention sur la résolution du problème

$$u"(x) + 2Bu\prime(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u\,(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{2}$$

posé dans un espace X de Banach complexe et f est une fonction à valeurs dans X dont la régularité dépend usuellement des espaces ;

$$f \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right) \text{ ou } f \in W^{\theta,P}\left(0,1;X\right);\ 0 < \theta < 1,\ 1 < P < \infty.$$

Kerin [17], a donné une étude du problème (1)-(2), dans le cas où $B = 0$; même avec des conditions aux limites généralisées. D'autres approches, toujours concernant $B = 0$, sont utilisées dans le célèbre article de Da Prato-Grisvard [6] sur la somme des opérateurs linéaires. Une telle méthode a donné des résultats intéressants, sur des situations plus compliquées, par exemple le cas de coefficients des opérateurs variables $A(x)$ et $B = 0$, voir Labbas-Terreni [18], [19].

Le cas $B \neq 0$ est plus difficile à traiter, S. Yakubov et Y. Yakubov dans [30] ont utilisé des approches très intéressantes pour etudier le problème (1)-(2), lorsque A est un opérateur linéaire fermé, additionné par un paramètre spéctrale complexe λ. Ils ont travaillé dans un espace de Hilbert H, où $-A$ est supposé un opérateur positif (sectoriel) dans H, $D(A)$ étant un compacte dans H et B est un opérateur linéaire fermé dans H satisfaisant

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists C(\varepsilon) \geq 0 : \forall u \in D(A) \qquad \|Bu\|_H \leq \varepsilon \, \|u\|_{(D(A),H)_{1/2,1}} + C(\varepsilon)\, \|u\|_H \,.$$

Tel que, pour tout $\theta \in]0,1[,\ p \in [1,\infty]$, et $(D(A), A)_{\theta,P}$ est un espace d'interpolation réel, pour la définition voir le Chapitre 1 (ou Lions-Peetre [21]).
Par extension du cas où A et B sont deux scalaires, Labbas et les co-auteurs [13] ont considéré le problème (1)-(2) , sous l'hypothèse de positivité

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur fermé linéaire dans } X \\ \mathbb{R}_- \subset \rho\left(B^2 - A\right) \ et \ \exists C > 0 : \ \forall \lambda \geq 0 \\ \left\| \left(\lambda I + B^2 - A\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{(1+\lambda)}, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où le domaine $D(B^2 - A)$ peut ne pas être dense. Plus précisément El Haial et Labbas [9] ont prouvé que si (0.0.1),

$$B(B^2 - A)^{-1} y = (B^2 - A)^{-1} B y, \quad \forall y \in D(B), \tag{0.0.2}$$

et

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } \left(e^{xB}\right)_{x \in \mathbb{R}} \tag{0.0.3}$$

sont satisfaits, avec certaines estimations sur les résolvantes, alors le problème (1)-(2) a une solution stricte, unique et vérifiant

$$u \in C^2\left([0,1]\,; X\right) \cap C\left([0,1]\,; D(A)\right) \text{ et } u' \in C\left([0,1]\,; D\left(B\right)\right),$$

lorsque f est dans un espace de Hölder, u_0, u_1 appartiennent à un sous-espace convenable dans X (espace d'interpolation).

L'utilisation d'une nouvelle approche differente, et par la technique du semi-groupe (Voir Kerin [17]). Favini, Labbas, Tanabe et Yagi [11] ont prouvé que si $(B^2 - A)$ est un opérateur linéaire fermé densement défini dans X, telles que (0.0.1) , (0.0.2) et (2.3.1) se tiennent et que

$$D(A) \subseteq D(B^2), \tag{0.0.4}$$

et

$$D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(B), \tag{0.0.5}$$

lorsque f est Hölderienne et u_0, $u_1 \in D(A)$, alors le problème $(1) - (2)$ admet une solution stricte.

Afin d'éliminer l'hypothèse de groupe (2.3.1), Favini, Labbas, Maingot, Tanabe et Yagi [12] démontrent que si on ajoute les hypôthèses suivantes

$$A \text{ est inversible à inverse borné}, \tag{0.0.6}$$

$$D(BA) \subset D(B^3) \tag{0.0.7}$$

et

$$\pm B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}} \text{ génère un semi-groupe analytique sur } X, \qquad (0.0.8)$$

alors le problème $(1)-(2)$ admet une unique solution stricte pour $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0<\theta<1$,et $u_o,\ u_1 \in D(A)$. De plus,si

$$f(i),\ Au_i \in (D(A),X)_{\frac{2-\theta}{2},\infty},\ i=0,\ 1 \quad ,$$

alors u a la propriété de régularité maximale $u'',\ Bu',\ Au \in C^\theta([0,1];X)$.

Dans ce travail, on analyse le cas où $f \in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$, X étant un espace de Banach UMD, en appliquant la formule de représentation de la solution donnée dans Favini, Labbas, Maingot, Tanabe et Yagi [12].

Alors, on obtient le Théorème 4.2, qui affirme que sous les hypothèses $(H.0)\tilde{}(H.4)$ et $(H.7)\tilde{}(H.10)$ le problème $(1)-(2)$ a une solution stricte dans $L^p(0,1;X)$ à condition que $u_o, u_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}$, c'est-à-dire ; une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(A)) \\ u' \in L^P(0,1;D(B)). \end{cases}$$

et satisfaisant (1) et (2).
La téchnique du travail se base sur le célèbre Théorème de Dore-Venni [7] sur la somme de deux opérateurs linéaires fermés et sur le théorème de réitération en théorie de l'interpolation [21], [29].

Le plan de ce mémoire est le suivant.

Dans le chapitre 1, on donne quelques rappels sur les notions fondamentales de la théorie appliquée, qui sera nécéssaire pour comprendre notre travail, telles que : les opérateurs fermés, les espaces fonctionnels comme ceux de sobolève, la théorie des semi-groupes, la classe des opérateurs BIP.

Dans le chapitre 2, on donne la formule de représentation de la solution u, étude du cas $B=0$ qui est un bon modèle pour clarifications. On complète le travail dans le cas général $B \neq 0$. En premier temps, on étudie l'approche dont B génère un groupe. Dans une seconde, on suppose que $\pm B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}$ génèrent un semigroup analytique.

Dans le chapitre 3, on donne quelques exemples d'application aux équations différentielles partielles.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur les notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [2], [3], [16], [22], [24]).

Soit X un espace de Banach complexe, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de X à valeurs dans X.

1.1 Les opérateurs fermés

Définition 1.1.1 *On dit que A est un opérateur fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Définition 1.1.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est définie par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \quad \text{est inversible dans } L(X)\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est définie par

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Proposition 1.1.1 *Soit $A : D(A) \subset X \to F$ un opérateur linéaire.*
1. Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in L(X,F)$, l'opérateur $A+B : D(A) \subset X \to F$ est fermé.
2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X, alors A est continue de $D(A)$ dans X (Application directe du théorème du graphe fermé).
4. Si A est un opérateur continue de $D(A)$ dans X, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.
5. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.

Définition 1.1.3 *Soit $A : D(A) \subset X \to F$ un opérateur linéaire. On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|.\|_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y .$$

Proposition 1.1.2 *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.3 *Soient $A \in L(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in L(X)$.*

Preuve *: Il est clair que BA est défini sur X. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \ \text{dans } X, \\ (BA)\,x_n \to y \ \text{dans } X. \end{cases}$$

Alors comme $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_n$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in L(X)$ on a

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \ \text{dans } X, \\ B(Ax_n) \to y \ \text{dans } X. \end{cases}$$

B étant fermé et $Ax \in D(B)$, d'après la définition (1.1.1), on a $B(Ax) = y$. Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)x = y$. BA est donc un opérateur fermé et définie sur X. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient BA borné sur X i.e. $BA \in L(X)$.

Définition 1.1.4 *[16, p. 19] On dit que l'opérateur A est sectoriel d'angle $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, si*

$$\begin{cases} i) \ \sigma(A) \subset \overline{S_\omega} \\ ii) \ M(A, \omega') := \sup\left\{\|\lambda R(\lambda, A)\|, \ \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\right\} \ \text{pour tout } \omega' \in (\omega, \pi) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} S_\omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \ \text{et} \ |\arg z| < \omega\} & \text{si} \quad 0 < \omega \leqslant \pi \\ \quad := (0, \infty) & \text{si} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

Où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$. L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X toute famille $(G(t))_{t \geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant les axiomes suivants*
(i) *Pour tout $x \in X$, l'application*

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & G(t)x \end{array}$$

est continue.
(ii) $G(0) = I$
(iii) $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G(t+s) = G(t)G(s)$.
On dit aussi que $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarques
i) On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.
ii) On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leqslant 1.$$

Exemples
1) Soit A un opérateur borné dans X, alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur X.

2) Soit $X = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t)f)(x) = f(x-t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1 *Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\| \leqslant Me^{\omega t}.$$

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Remarques

1) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors A est fermé à domaine dense.

2) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A.

3) Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ où A est un opérateur borné dans X.

4) Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\| \leqslant Me^{-\omega t},$$

Alors l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\, x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| \leqslant M(\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors*

i) Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors

$$G(t)x \in D(A).$$

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(A)$.

De plus

$$\forall t \geqslant 0, \frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in X$ et tout $t \geqslant 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(A)$

$$A\int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3 *On appelle semi-groupe analytique de type $\alpha \in]0, \pi/2[$ toute application G définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que
(1) *$z \mapsto G(z)$ est analytique sur Σ_α.*
(2) *$\forall x \in X$, $G(0) = I$ et*

$$\lim_{z \in \Sigma_\alpha \quad z \to 0} G(z)\, x = x$$

(3) *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.*
De plus

$$G(t)\, x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{tz}\,(zI - A)^{-1}\, xdz = e^{tA}x.$$

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant*
(1) *A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*
(2) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant
(1) *$\exists C > 0$, $\forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$.*
(2) *$\forall t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.*

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.4.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit les espaces $L^p(0,T;X)$ pour $T > 0$ par :*
$L^p(0,T;X) = \{g : (0,T) \longrightarrow X,$ mesurable telle que la fonction
$x \mapsto \|g(x)\|_X^p$ est Lebesgue intégrable$\}$
Si p est fini. On munit cet espace de la norme :

$$\|g\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|g(x)\|_X^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$ on pose :
$L^\infty(0,T;X) = \left\{ g : [0,T] \longrightarrow X, \text{ mesurable telle que } \sup\limits_{x \in (0,T)} ess \|g(x)\|_X < +\infty \right\},$
muni de la norme : $\|g\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup\limits_{x\in(0,T)} ess \|g(x)\|_X$.

Théorème 1.4.1 *L'espace $L^p(0,T;X)$, $p \in [1,+\infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

Proposition 1.4.1 *Soient J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, X un espace de Banach, $f : J \times [a,b] \to X$ une application continue admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$. Soient α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a,b]$.*
Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} h & : & J \longrightarrow X \\ x & \longrightarrow & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$

$$h'(x) = \beta'(x) f(x,\beta(x)) - \alpha'(x) f(x,\alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

1.4.2 Les espaces d'interpolation

On désigne par X_0 et X_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé X (c'est à dire $X_0 \hookrightarrow X$, $X_1 \hookrightarrow X$). Considérons les espaces de Banach

$$X_0 \cap X_1 \text{ et } X_0 + X_1$$

Munis des normes

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1},$$

Et

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x = x_0 + x_1, \quad x_i \in X_i} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right).$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.2 *Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1 tout espace de Banach X tel que*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Les espaces X_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.3 *Soient $\theta \in \,]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre X_0, X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in X_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1), \end{cases}$$

où

$$L_*^p(X) = \left\{ f :]0, \infty[\to X : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in \,]0, 1[$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\omega,q}.$$

2) Si $p \leqslant q$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\theta,q}.$$

3) Si $X_0 = X_1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1.$$

4) Si $0 < \theta < 1$

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}. \tag{1.4.1}$$

Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$\left((X_0, X_1)_{\theta,p}, (X_0, X_1)_{\omega,q}\right)_{t,r} = (X_0, X_1)_{\alpha,r},$$

Avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Propriété de réitération

Soient X un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(X, D(A^n))_{\theta,p} = (X, D(A))_{n\theta,p} \tag{1.4.2}$$

Cas Particulier $(D(A), X)_{\theta,p}$

Soient X un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans X. Posons

$$X_0 = D(A) \text{ et } X_1 = X,$$

Alors

$$X_0 \cap X_1 = D(A) \text{ et } X_0 + X_1 = X,$$

donc, pour tout $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), X)_{\theta,p} \subset X.$$

Si $\rho\,(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall\lambda > 0 : \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

Alors

$$\begin{aligned}(D\,(A)\,, X)_{\theta,p} &= D_A\,(1-\theta, p) \\ &= \left\{x \in X : \left\|t^{1-\theta} A\,(A-t)^{-1}\,x\right\|_X \in L^p_*\right\}.\end{aligned}$$

Définition 1.4.4 *Pour tout* $\theta \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$D_A(\theta+k,p) = \left\{x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta,p)\right\},$$

Avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_X + \left\|A^k x\right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Théorème 1.4.2 (de Lions) *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(G(t))_{t\geqslant 0}$, *alors pour tout* $p \in [1,+\infty]$ *et* $\theta \in]0,1[$

$$(D(A),X)_{\theta,p} = \left\{x \in X : \left\|t^{\theta-1}(G(t)-I)x\right\|_X \in L^p_*\right\}$$

Muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),X)_{\theta,p}} = \|x\|_X + \left(\int_0^{+\infty} \left\|t^{\theta-1}(G(t)-I)x\right\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Avec les modifications usuelles si $p=\infty$.

1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega,X)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to X$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega,X)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,X)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,X)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,X)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega,X) = \left\{ f \in L^p(\Omega,X) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x)-f(y)\|_X^p}{|x-y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega,X)$. Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, on définit

$$B^s_{p,q}(\Omega,X) = \left\{ f \in L^p(\Omega,X) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\|f(x)-f(y)\|_X^p}{|x-y|^{sq+n}} dx\right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

Avec la modification classique quand $p=\infty$ et $q=\infty$.

Dans le cas où $p=q$ on a

$$B^s_{p,p}(\Omega,X) = W^{s,p}(\Omega,X).$$

1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach X, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale difference property), pour plus détails voir [2].

Définition 1.4.5 *On dit que X est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$$

Est bornée.

Définition 1.4.6 *X est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : X \times X \to \mathbb{R}$ convexe telle que*

i) $\xi(0,0) > 0$
ii) $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.4.3 *Soit X un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) X est UMD.
ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \forall x, y \in X$.

Exemples :

- ▶ Les espaces de Hilbert (On choisit $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y\rangle$ où le crochet $\langle ., . \rangle$ indique le produit scalaire).
- ▶ Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- ▶ Les espaces construits sur $L^p(\Omega, X)$, $1 < p < \infty$ tel que X est UMD

– Les espaces $C^\alpha(\Omega; X)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ ne sont pas UMD

1.5 Les puissances fractionnaires, classe $\mathbf{Bip}(\theta; X)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $\mathbf{A} : X \to X$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur $\mathbf{A}$ est définie par

$$\mathbf{A}^z x = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Si $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$\mathbf{A}^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} x dt,$$

Pour tout $x \in D(\mathbf{A})$ (voir Haase [16], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{A}^z x = \mathbf{A}^{z+1}\mathbf{A}^{-1} x = \frac{\sin(z+1)\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de $\mathbf{A}^z$ (voir Dore et Venni [7] et [8])

Théorème 1.5.1 *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*
1) Soit $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ *et* $m, n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ *alors*

$$\forall x \in X \quad \mathbf{A}^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} (\mathbf{A}(tI - \mathbf{A}))^{-1} \mathbf{A}^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \to \mathbf{A}^z$ *est holomorphe de* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *dans* $\mathcal{L}(X)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ *et* $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ *alors* $D(\mathbf{A}^m)$ *est dense dans* $D(\mathbf{A}^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ *alors*

$$\mathbf{A}^w \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^{w+z} \subseteq \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ *alors*

$$\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ *alors* $z \to \mathbf{A}^z x$ *est holomorphe pour* $\operatorname{Re} z < \alpha$.

6) Supposons que $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(X)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *donc*
(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w$.
(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^w = \mathbf{A}^{w+is} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$.
(c) Si $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^w \subseteq \mathbf{A}^{w+is} \subseteq \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$ *et la seconde inclusion est en fait une égalité si* $\operatorname{Re} w > 0$.

7) Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$ *alors*

$$\left\|\mathbf{A}^{-z}\right\| \leqslant M \left(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \operatorname{Im} z)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}\right).$$

8) Soit $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $s \in \mathbb{R}$, *pour* $\varphi \in]0, \pi/2[$ *fixé, on pose*

$$\Sigma_\varphi = \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi \right\},$$

alors $\mathbf{A}^{z+is} \to \mathbf{A}^{is}$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(X)$*).*

9) Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \|\mathbf{A}^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $\mathbf{A}^w \in \mathcal{L}(X)$ *et* $\mathbf{A}^z \to \mathbf{A}^w$ *où* $z \to w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(X)$*).*

10) Si $T \in \mathcal{L}(X)$ *alors*

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} T = T (\mathbf{A} - \lambda I)^{-1},$$

pour $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, *et*

$$\begin{array}{lcl} (a)\ T\mathbf{A}^z & = & \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ T\mathbf{A}^z & \subseteq & \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{array}$$

11) Si $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$ *et* $(\mathbf{B} - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*
(a) $\mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$.
(b) *si* $\mathbf{A}^{is}$ *et* $\mathbf{B}^{it} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $\mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z$
pour $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0$.

Définition 1.5.1 *On note Bip*$(\theta; X)$ *(Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur* X *qui admettent des puissances imaginaires bornées.*

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Soit X un espace de Banach complexe, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A})$ et $D(\mathbf{B})$ respectivement dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(\mathbf{A})$ et $\rho(\mathbf{B})$ non vides. La résolution du problème

$$\mathbf{A}u + \mathbf{B}u - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

repose sur la construction de l'inverse de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes, selon les deux cas suivants :

1- les résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent : i.e.,

$$\left[(\mathbf{A}-z)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]:=(\mathbf{A}-z)^{-1}(\mathbf{B}-\mu)^{-1}-(\mathbf{B}-\mu)^{-1}(\mathbf{A}-z)^{-1}=0$$

2- le cas non commutatif : i.e.

$$\left[(\mathbf{A}-z)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]\neq 0.$$

1.7 Sommes commutatives

Dans ce cas, il y a deux approches différentes.

1.7.1 Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

$$(DG.1)\quad\left\{\begin{array}{l}\exists\, C_{\mathbf{A}},C_{\mathbf{B}}>0,\ \theta_{\mathbf{A}},\theta_{\mathbf{B}}\in[0,\pi[\ \text{ tels que}\\ i)\ \rho(\mathbf{A})\supset\Sigma_{\mathbf{A}}=\{z\in\mathbb{C}^*:|\arg z|<\pi-\theta_{\mathbf{A}}\},\\ \forall z\in\Sigma_{\mathbf{A}};\left\|(\mathbf{A}-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C_{\mathbf{A}}(\theta)}{|z|}.\\ ii)\ \rho(\mathbf{B})\supset\Sigma_{\mathbf{B}}=\{z\in\mathbb{C}^*:|\arg z|<\pi-\theta_{\mathbf{B}}\},\\ \forall z\in\Sigma_{\mathbf{B}};\left\|(\mathbf{B}-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C_{\mathbf{B}}(\theta)}{|z|}.\\ iii)\ \theta_{\mathbf{A}}+\theta_{\mathbf{B}}<\pi.\\ iv)\ \overline{D(\mathbf{A})+D(\mathbf{B})}=X,\end{array}\right.$$

$$(DG.2)\quad\left\{\begin{array}{l}\quad\forall\lambda\in\rho(\mathbf{A}),\forall\mu\in\rho(\mathbf{B}):\\ \left[(\mathbf{A}-\lambda)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]=0.\end{array}\right.$$

Ces auteurs ont montré, pour $f\in D_{\mathbf{A}}(\theta,q)+D_{\mathbf{B}}(\theta,q)$, $\theta\in]0,1[$ et $q\in[1,+\infty]$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(\mathbf{A}-(z+\lambda)I)^{-1}(\mathbf{B}+zI)^{-1}f\,dz$$

Où γ_λ est une courbe simple orientée de $\infty\ e^{-i\theta_0}$ à $\infty\ e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0\in]\theta_{\mathbf{B}},\pi-\theta_{\mathbf{A}}[$, demeurant dans $\Sigma_{\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}}\cap\Sigma_{-\mathbf{B}}$.De plus, la solution a la régularité suivante

$$\mathbf{A}u,\mathbf{B}u\in D_{\mathbf{A}}(\theta,q)\,(\text{resp. } D_{\mathbf{B}}(\theta,q)).$$

1.7.2 Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

$$
\begin{array}{ll}
(DV.0) & X \text{ est un espace de Banach de type } UMD, \\
(DV.1) & \begin{cases} i)\rho(\mathbf{A}) \supset \left]-\infty, 0\right] \; et \; \exists M_{\mathbf{A}} > 0 : \left\| (\mathbf{A} + tI)^{-1} \right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{A}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \\ ii)\rho(\mathbf{B}) \supset \left]-\infty, 0\right] \; et \; \exists M_{\mathbf{B}} > 0 : \left\| (\mathbf{B} + tI)^{-1} \right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{B}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \end{cases} \\
(DV.2) & \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \quad \mu \in \rho(\mathbf{B}), \\ (\lambda I - \mathbf{A})^{-1} (\mu I - \mathbf{B})^{-1} = (\mu I - \mathbf{B})^{-1} (\lambda I - \mathbf{A})^{-1}. \end{cases} \\
(DV.3) & \begin{cases} i)\forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(X) \; et \\ \exists K_{\mathbf{A}} \geqslant 1, \; \theta_{\mathbf{A}} > 0, \; \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{A}^{is}\| \leqslant K_{\mathbf{A}} e^{\theta_{\mathbf{A}}|s|}, \\ ii)\forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{B}^{is} \in \mathcal{L}(X) \; et \\ \exists K_{\mathbf{B}} \geqslant 1, \; \theta_{\mathbf{B}} > 0, \; \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{B}^{is}\| < K_{\mathbf{B}} e^{\theta_{\mathbf{B}}|s|}, \\ iii) \; \theta_{\mathbf{A}} + \theta_{\mathbf{B}} < \pi. \end{cases}
\end{array}
$$

Alors, la somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$
(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{\mathbf{A}^{-z} \mathbf{B}^{z-1}}{\sin \pi z} dz,
$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$
\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\},
$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [25], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Comme application de cette théorie, on cite l'exemple de Dore et Venni [7] pages 196-197. Ils ont étudiés, dans le cadre $L^p(0, T, E)$ avec $1 < p < \infty$, le problème de Cauchy

$$
\begin{cases} u'(t) + \mathbf{A}u(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1.7.1}
$$

lorsque

$$
E \text{ est un espace } UMD, \tag{1.7.2}
$$

$\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé vérifie

$$
\rho(\mathbf{A}) \supset \left]-\infty, 0\right] \; et \; \exists M > 0 : \left\| (\mathbf{A} + t)^{-1} \right\| \leqslant \frac{M}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \tag{1.7.3}
$$

et

$$
\exists K \geqslant 1, \; \theta > 0, \; \forall s \in \mathbb{R} : \left\| \mathbf{A}^{is} \right\| \leqslant K e^{\theta|s|}. \tag{1.7.4}
$$

Le résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 1.7.1 *Sous les hypothèses (1.7.2), (1.7.3), (1.7.4) et pour*

$$f \in L^p(0,T,E), \quad 1 < p < \infty,$$

le problème (1.7.1) admet une unique solution stricte

$$t \longmapsto u(t) = \int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s)ds \in L^p(0,T,E),$$

de plus

$$t \mapsto \mathbf{A}u(t) = \mathbf{A}\int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s)ds \in L^p(0,T,E).$$

Chapitre 2

Equations differentielles complètes de type elliptique dans les espaces UMD.

On considère, dans un espace Banach complexe X, l'equation différentielle abstraite du second ordre

$$u"(x) + 2Bu\prime(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \tag{2}$$

Ici, A, B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X avec les domaines $D(A)$ et $D(B)$, respectivement, f étant une fonction dans $L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$ et u_0, u_1 sont deux éléments donnés dans X.

On cherche une solution stricte u au problème (1) et (2), c'est-à-dire ; cherchons une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)) \\ u' \in L^p(0,1;D(B)). \end{cases}$$

et satisfaisant l'équation (1) et les conditions (2).

2.1 Hypothèses et conséquences

On suppose dans la suite de ce travail que

$$X \text{ est un espace } UMD; \tag{H.0}$$

on rappelle qu'un espace Banach X est un espace UMD si et seulement si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$ est bornée de $L^p(\mathbb{R}, X)$ dans lui-même, voir Chapitre 1 (1.4.5) ainsi que [2] et [3].

De plus on suppose que

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé densement défini dans } X \\ \mathbb{R}_- \subset \rho(B^2 - A) \ et\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \geq 0, \\ \|(B^2 - A + \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{H.1}$$

l'hypothèse $(H.1)$ implique que $-(B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans X, voir Chapitre 1 et [17, p. 119], on suppose aussi que

$$D(A) \subseteq D(B^2), \tag{H.2}$$

$$B(B^2 - A)^{-1} y = (B^2 - A)^{-1} B y, \quad \forall y \in D(B), \tag{H.3}$$

$$D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(B). \tag{H.4}$$

Sous ces hypothèses, on étudiera le problème $(1) - (2)$ dans les deux cas suivants :

1. Premier cas :

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } \left(e^{xB}\right)_{x \in \mathbb{R}} \tag{H.5}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \quad (B^2 - A)^{is} \in L(X) \\ et \\ \exists c \geq 1,\ \theta_0 \in \left]0, \pi\right[: \forall s \in \mathbb{R},\ \|(B^2 - A)^{is}\| \leq c e^{\theta_0 |S|}, \end{cases} \tag{H.6}$$

on écrit

$$B^2 - A \in BIP(\theta_0, X)$$

classe des opérateurs à puissance imaginaire bornée, voir Chapitre 1.

2. Deuxième cas :

$$A \text{ est inversible à inverse borné}, \tag{H.7}$$

$$D(BA) \subset D(B^3), \tag{H.8}$$

$$\pm B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \text{ génère un semi-groupe analytique sur } X \tag{H.9}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ (\pm B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}})^{is} \in L(X) \\ \qquad\qquad et \\ \exists c \geq 1,\ \theta_\pm \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \\ \forall s \in \mathbb{R},\ \left\|(\pm B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\| \leq c e^{\theta_\pm |s|}. \end{cases} \tag{H.10}$$

Quelques Conséquences :

1. Si nous supposons $(H.0)$ alors X est réflexif, donc $(H.1)$ est équivalent à $(0.0.1)$; car de la sectorialité, on déduit que $D\left(B^2 - A\right)$ est dense dans X voir Haase [16, proposition 1.1. déclaration h, p. 18-19].

2. De $(H.1)\tilde{}(H.4)$ et $(H.7)$, on a $D\left(BA\right) \subset D\left(B^3\right)$, si et seulement si,

$$B + \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \text{ est infiniment inversible}$$

et est équivalent à

$$B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \text{ est infiniment inversible}$$

Voir [12].

De plus dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) A^{-1} \\ \left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) A^{-1} \end{array} \right. \tag{2.1.1}$$

3. De $(H.5)$, on déduit que B^2 génère un semi-groupe holomorphe borné dans X (voir Stone [28]), de plus, si on assume $(H.1)\tilde{}(H.3)$ et $(H.5)$, la théorie de la somme de Da Prato-Grisvard [6], appliquée aux opérateurs $-(B^2 - A)$ et B^2, donne

$$(A - \lambda I)^{-1} \in L\left(X\right) \quad , \left\| \left((A - \lambda I)^{-1}\right) \right\|_{L(X)} \leq \frac{K}{(1 + \lambda)},$$

pour tout $\lambda \geq 0$. En particulier $(H.7)$ est vérifiée.

4. Sous les hypothèses $(H.1)\tilde{}(H.5)$ et si en plus on a $D\left(BA\right) \subset D\left(B^3\right)$ alors $\pm B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi groupe analytique et pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$e^{-x\left[B + \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right]} = e^{-xB} e^{-x\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad e^{x\left[B - \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right]} = e^{xB} e^{-x\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}},$$

voir [11].

5. Si v est une solution stricte du problème

$$\left\{ \begin{array}{c} v"(x) + 2Bv\prime(x) + Av(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ v\left(0\right) = u_0, \quad v(1) = 0, \end{array} \right.$$

et w est une solution stricte du problème

$$\left\{ \begin{array}{c} w"(x) + 2Bw\prime(x) + Aw(x) = 0 , \quad x \in (0, 1), \\ w\left(0\right) = u_1, \quad w(1) = 0, \end{array} \right.$$

alors la solution stricte u du problème $(1) - (2)$, est donnée par

$$u\left(.\right) = v\left(.\right) + w\left(1 - .\right).$$

2.2 Représentation de la solution

On suppose ici $(H.0)\tilde{}(H.4)$ et $(H.7)\tilde{}(H.9)$. Notons $(T_o(x))_{x\geq 0}$ et $(T_1(x))_{x\geq 0}$ les deux semi-groupes analytiques générés par

$$-B-\left(B^2-A\right)^{1/2} \text{ et } B-(B^2-A)^{1/2}$$

La formule de représentation de la solution du problème (1)-(2) :

$$\begin{cases} u"(x)+2Bu\prime(x)+Au(x)=f(x), & p.p.\ x\in(0,1) \\ u\,(0)=u_0, \\ u(1)=u_1, \end{cases}$$

est donnée par pour $p.p.\ x\in(0,1)$,

$$\begin{aligned} u\,(x) &= T_0\,(x)\,\xi_0+T_1\,(1-x)\,\xi_1 \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^x T_0\,(x-s)\,f\,(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_x^1 T_1\,(s-x)\,f\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

on remplace les conditions initiales et on trouve ξ_0 et ξ_1;

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (I-Z)^{-1}\,(u_0-T_1\,(1)\,u_1)+\frac{1}{2}\,(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1\,(s)\,f\,(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}\,(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_1\,(1)\int_0^1 T_0\,(1-s)\,f\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (I-Z)^{-1}\,(u_1-T_0\,(1)\,u_0)+\frac{1}{2}\,(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_0\,(1-s)\,f\,(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}\,(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_0\,(1)\int_0^1 T_1\,(s)\,f\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

tel que

$$Z=e^{-2\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}},$$

(voir [12]).

On remarque que l'opérateur $I-Z$ est inversible à inverse borné, puisque l'axe imaginaire est contenu dans l'ensemble résolvant $\rho(-(B^2-A)^{\frac{1}{2}})$, voir Lunardi [22], p. 60.

2.2.1 On étudie le cas $B = 0$:

Dans ce cas, notre précédent problème devient

$$\begin{cases} u"(x) + Au(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Les hypothèses $(H.1)$˜$(H.6)$ se réduisent à

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé densement défini dans } X, \\ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \\ \exists C \geq 1 : \forall \lambda \geq 0, \quad \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{(1+\lambda)}, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

et

$$\exists C \geq 1, \ \theta \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \ \left\|(-A)^{is}\right\| \leq Ce^{\theta|s|}. \tag{2.2.6}$$

De (2.2.5), on a

1. $\left(-\sqrt{-A}\right)$ génère un semi-groupe analytique $(e^{-x\sqrt{-A}})_{x\geq 0}$ dans X.
2. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$

$$\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^{\beta} = (-A)^{\frac{\beta}{2}}$$

(voir Haase [16], Proposition 2.18, assertion e, p. 64). Des hypothèses $(H.0)$, (2.2.5), (2.2.6) et de la conséquence 2, on déduit que (2.2.6) équivaut à

$$\exists C \geq 1, \ \theta \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \ \left\|\left(\sqrt{-A}\right)^{is}\right\| \leq Ce^{\left(\frac{\theta}{2}\right)|s|}.$$

Le Théorème de Dore-Venni [7] implique que pour $g \in L^p(0,1;X)$, la fonction

$$x \to L(x,g) = \sqrt{-A}\int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g(s)\, ds \ \in L^P(0,1;X), \tag{2.2.7}$$

et par conséquent

$$x \to \mathcal{L}(x,g) = \sqrt{-A}\int_0^1 e^{-(x+s)\sqrt{-A}} g(s)\, ds \ \in L^P(0,1;X), \tag{2.2.8}$$

puisque

$$\mathcal{L}(x,g) = L(x,g_1) + e^{-2x\sqrt{-A}} L(1-x, g(1-.)),$$

où

$$g_1(s) = e^{-2s\sqrt{-A}} g(s).$$

Nous avons également le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Supposons* (2.2.5)*. Alors, pour tout* $\omega \in (D(A), X)_{\frac{1}{(2p)},p}$*, la fonction*

$$x \mapsto M(x,\omega) = Ae^{-x\sqrt{-A}}\omega \tag{2.2.9}$$

appartient à $L^p(0,1;X)$*.*

Preuve. L'opérateur $\left(-\sqrt{-A}\right)$ est un générateur d'un semi groupe analytique, Alors pour tout $\theta \in [0,1]$ et $p \in]1,+\infty[$, on a

$$\left(X, D\left((-\sqrt{-A})^m\right)\right)_{\theta,p} = \left(D\left(\left(-\sqrt{-A}\right)^m\right), X\right)_{1-\theta,p}$$

$$= \left\{\omega \in X \ ; \ \int_0^{+\infty} \left\| t^{m-m\theta}\left(-\sqrt{-A}\right)^m e^{-t\sqrt{-A}}\omega\right\|^p \frac{dt}{t} < \infty\right\}.$$

Pour $m = 2$, on trouve

$$(D(-A), X)_{1-\theta,p} = \left\{\omega \in X \ ; \ \int_0^{+\infty} \left\| t^{2(1-\theta)}(-A)e^{-t\sqrt{-A}}\omega\right\|^p \frac{dt}{t} < \infty\right\},$$

donc, pour $1 - \theta = \frac{1}{2p}$, on obtient

$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = \left\{\omega \in X \ ; \ \int_0^{+\infty} \left\| t^{2\left(\frac{1}{2p}\right)}(-A)e^{-t\sqrt{-A}}\omega\right\|_X^p \frac{dt}{t} < \infty\right\}.$$

Maintenant si $\omega \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| Ae^{-x\sqrt{-A}}\omega\right\|_X^p dx &= \int_0^1 x^{2\cdot\frac{1}{2p}\cdot p}\left\| \left(-\sqrt{-A}\right)^2 e^{-x\sqrt{-A}}\omega\right\|^p \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^1 \left\| x^{2\cdot\frac{1}{2p}}\left(-\sqrt{-A}\right)^2 e^{-x\sqrt{-A}}\omega\right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left\| x^{2\cdot\frac{1}{2p}}\left(-\sqrt{-A}\right)^2 e^{-x\sqrt{-A}}\omega\right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leq C\|\omega\|_{(D(A),X)_{\frac{1}{(2p)},p}}
\end{aligned}$$

voir le Théorème de Lions-Peetre [21].
Le résultat principal de cette section est

Théorème 2.2.1 *Supposons* $(H.0)$, (2.2.5) *et* (2.2.6)*. Si* $f \in L^P(0,1;X)$ *avec* $1 < p < \infty$*, et* $u_0,\ u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{(2p)},p}$ *, alors le problème* (2.2.4) *admet une unique solution stricte* u*,*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(A)),$$

et satisfait

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1,$$

Preuve. On peut supposer, sans perte de généralité, que $u_1 = 0$ (voir la conséquence 5.). La représentation de la solution (2.2.1) se réduit à

$$u(x) = e^{-x\sqrt{-A}}\xi_0 + e^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_1 - \frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_x^1 e^{-(s-x)\sqrt{-A}}f(s)\,ds,$$

avec

$$\xi_0 = (I-Z)^{-1}u_0 + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1(s)\,f(s)\,ds - \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}T_1(1)\int_0^1 T_0(1-s)\,f(s)\,ds$$

d'où

$$\xi_0 = (I-Z)^{-1}\left[u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1(s)\,f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}T_1(1)\int_0^1 T_0(1-s)\,f(s)\,ds\right],$$

qui donne

$$\xi_0 = (I-Z)^{-1}\left(u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-s\sqrt{-A}}f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right).$$

et

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (I-Z)^{-1}(-T_0(1)\,u_0) + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_0(1-s)\,f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}T_0(1)\int_0^1 T_1(s)\,f(s)\,ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left[-T_0(1)\,u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_0(1-s)\,f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}T_0(1)\int_0^1 T_1(s)\,f(s)\,ds\right],$$

qui donne

$$\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(-e^{-\sqrt{-A}}u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(1+s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right),$$

où

$$Z = e^{-2\sqrt{-A}}.$$

Par conséquent, *p.p.* $x \in (0,1)$

$$Au(x) = Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0 + Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_1 + \frac{1}{2}L(x,f) + \frac{1}{2}L(1-x, f(1-.))\ .$$

tel que

$$Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0 = (I-Z)^{-1}Ae^{-x\sqrt{-A}}\left(u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-s\sqrt{-A}}f(s)\,ds - \frac{1}{2}(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right)$$

On a

$$\begin{aligned} Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0 &= (I-Z)^{-1}\left(Ae^{-x\sqrt{-A}}u_0+\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(x+s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right.\\ &\left.-\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-x\sqrt{-A}}e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right),\end{aligned}$$

$$= (I-Z)^{-1}\left(Ae^{-x\sqrt{-A}}u_0+\frac{1}{2}\mathcal{L}(x,f)-\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-x\sqrt{-A}}e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right),$$

comme

$$\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-x\sqrt{-A}}e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds=\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(x+1-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds$$

par chengement de variable, on pose $S=1-s\Longrightarrow s=1-S$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-x\sqrt{-A}}e^{-(2-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds &= \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_{1-S=0}^{1-S=1} e^{-(x+S)\sqrt{-A}}f(1-S)(-dS)\\ &= -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_1^0 e^{-(x+S)\sqrt{-A}}f(1-S)\,dS\\ &= \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(x+S)\sqrt{-A}}f(1-S)\,dS\\ &= \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(x,f(1-.)).\end{aligned}$$

Donc

$$Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0=(I-Z)^{-1}\left\{Ae^{-x\sqrt{-A}}u_0+\frac{1}{2}\mathcal{L}(x,f)-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(x,f(1-.))\right\},$$

de la notation $(2.2.9)$, on a

$$Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0=(I-Z)^{-1}M(x,u_0)-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\mathcal{L}(x,f)-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}e^{-\sqrt{-A}}\mathcal{L}(x,f(1-.)),$$

de (2.2.8) et du lemme 2.2.1, on déduit que

$$x\to Ae^{-x\sqrt{-A}}\xi_0\in L^p(0,1;X). \tag{2.2.10}$$

De même

$$\begin{aligned}Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_1 &= (I-Z)^{-1}\left\{-Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}e^{-\sqrt{-A}}u_0+\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(1-x)\sqrt{-A}}e^{-(1-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right.\\ &\left.-\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(1-x)\sqrt{-A}}e^{-(1+s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right\},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_1 &= (I-Z)^{-1}\left\{-Ae^{-(2-x)\sqrt{-A}}u_0 + \frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(2-x-s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(2-x+s)\sqrt{-A}}f(s)\,ds\right\}, \end{aligned}$$

alors, on obtient

$$x \to Ae^{-(1-x)\sqrt{-A}}\xi_1 \in L^p(0,1;X). \tag{2.2.11}$$

De (2.2.7), (2.2.10) et (2.2.11) , on déduit que

$$Au \in L^p(0,1;X).$$

2.3 Cas général

Dans la suite, on étudiera deux cas, le cas où B génère un groupe et le cas où

$$-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}$$

génèrent des semi-groupes analytiques.

2.3.1 Première approche : B génère un groupe

Dans ce paragraphe, nous supposons $(H.0)\tilde{}(H.6)$.

Théorème 2.3.1 *On Assume* $(H.0)\tilde{}(H.6)$. *Si*

$$f \in L^p(0,1;X),\ 1<p<+\infty,\ \text{et } u_0,u_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{(2p)},P},$$

alors le problème (1)-(2) *admet une solution unique stricte* u,

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)) \text{ et } u' \in L^p(0,1;D(B)),$$

et satisfait

$$\begin{cases} u(0)=u_0, \\ u(1)=u_1, \end{cases}.$$

Preuve. En remplaçant dans le problème (1)-(2), $u(x)$ par $e^{-xB}v(x)$

$$u(x)=e^{-xB}v(x),$$

comme e^{-xB} est inversible et son inverse est e^{xB}, on déduit que

$$e^{xB}u(x)=v(x).$$

On a pour la solution u, et $p.p.\ x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} e^{xB}u(x) &= e^{xB}T_0(x)\,\xi_0 + e^{xB}T_1(1-x)\,\xi_1 \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^x T_0(x-s)\,e^{xB}f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_x^1 T_1(s-x)\,e^{xB}f(s)\,ds, \end{aligned}$$

d'après la conséquence 4. on obtient

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-x\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}\xi_0 + e^{-(1-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}\left(e^B\xi_1\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^x e^{-(x-s)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_x^1 e^{-(s-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

On remplace les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \Longleftrightarrow v(0) = u_0, \\ u(1) = u_1 \Longleftrightarrow e^{-B}v(1) = u_1, \end{cases}$$

on trouve ξ_0 et $e^B\xi_1 = \xi_2$;

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (I-Z)^{-1}\left(v_0 - e^{-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}v_1\right) + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-s\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{-(1-s)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_2 &= e^B\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(e^Bu_1 - e^BT_0(1)\,u_0\right) + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^BT_0(1-s)\,f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}e^BT_0(1)\int_0^1 T_1(s)\,f(s)\,ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi_2 &= e^B\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(v_1 - e^{-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}v_0\right) + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-(1-s)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{-s\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}e^{sB}f(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

tel que

$$Z = e^{-2\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

De la solution générale (2.2.1) , (2.2.2) et (2.2.3) , On remarque que (2.3.1) , (2.3.2) et (2.3.3) mentrent que v est une solution du problème

$$\begin{cases} v"(x) + (A - B^2) v(x) = e^{xB} f(x), \quad , \; x \in (0,1), \\ v(0) = u_0, \; v(1) = e^B u_1, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

D'après le Théorème 2.2.1 (en remplaçant A par $A - B^2$), et puisque l'espace d'interpolation $(D(A), X)_{\frac{1}{2p},P}$ est invariant par l'opérateur e^B et que

$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p},P} = \left(D\left(A - B^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},P},$$

on obtient que le problème (2.3.4) ,admet une solution stricte

$$v \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1; D\left(A - B^2\right)). \tag{2.3.5}$$

Maintenant, on fait preuve que

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)) \text{ et } u' \in L^p(0,1;D(B)).$$

En effet, soit v une solution vérifiant (2.3.5) . On a

$$\begin{aligned} v'(x) = &-\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} \xi_0 + \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} e^{-(1-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} \left(e^B \xi_1\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-(x-s)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s)\, ds \\ &-\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \int_x^1 e^{-(s-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s)\, ds, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} Bv'(x) = &-B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right) e^{-x\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} \xi_0 + B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right) e^{-(1-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} \left(e^B \xi_1\right) \\ &-\frac{1}{2} B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-(x-s)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s)\, ds \\ &-\frac{1}{2} B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \int_x^1 e^{-(s-x)\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}} e^{sB} f(s)\, ds. \end{aligned}$$

d'où

$$Bv'(x) = B\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}} h(x).$$

En se basant sur (2.2.9) et sur (2.2.1) comme dans le premier cas, on trouve

$$Bv'(.) \in L^p(0,1;X),$$

d'où
$$v'(.) \in L^p(0,1;D(B)). \tag{2.3.6}$$

On a *p.p.* $x \in (0,1)$,
$$u(x) = e^{-xB}v(x), \quad .$$

Puisque $v \in D(A - B^2) = D(A) \subset D(B^2)$, on obtient
$$Au(.) = e^{-xB}Av(.) \in L^p(0,1;X), \tag{2.3.7}$$

et
$$u'(x) = e^{-xB}[-Bv(x) + v'(x)]$$

et puisque $v' \in D(B)$ (voir (2.3.6)), on a
$$\begin{aligned} Bu'(x) &= Be^{-xB}[-Bv(x) + v'(x)] \\ &= e^{-xB}\left[-B^2v(x) + Bv'(x)\right] \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

d'où
$$Bu'(.) \in L^p(0,1;X).$$

En fin, on a
$$u''(x) = e^{-xB}\left[B^2v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)\right], \tag{2.3.9}$$

qui donne
$$u''(.) \in L^p(0,1;X).$$

De (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.9), on obtient
$$\begin{aligned} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(.) &= e^{-xB}\left[B^2v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)\right] \\ &\quad +2e^{-xB}\left[-B^2v(x) + Bv'(x)\right] + e^{-xB}Av(x) \\ &= e^{-xB}\left[B^2v(x) - 2Bv'(x) + v''(x) - 2B^2v(x) + 2Bv'(x) + Av(x)\right] \\ &= e^{-xB}\left[v''(x) + \left(A - B^2\right)v(x)\right] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Alors u est une solution stricte du problème (1)-(2).

2.3.2 Deuxième approche : $\pm B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi groupe analytique

Dans ce cas, nous supposons $(H.0)\tilde{}(H.4)$ avec $(H.7)\tilde{}(H.10)$. Rappelons-nous que

$$(T_0(x))_{x\geq 0} \text{ et } (T_1(x))_{x\geq 0}$$

sont des semi-groupes analytiques générés par

$$-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans cette deuxième approche, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *Soient $g\in L^p(0,1;X)$ et*

$$T_0\left(s\right)=e^{s\left[-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$T_1\left(s\right)=e^{s\left[B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

avec $s\geq 0$. Alors, Les fonctions suivantes

$$x\longmapsto L_0\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\int_0^x T_0\left(x-s\right)g\left(s\right)ds$$

$$x\longmapsto L_1\left(x,g\right)=\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\int_0^x T_1\left(x-s\right)g\left(s\right)ds,$$

$$x\longmapsto L_{0,0}\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)T_0\left(x\right)\int_0^1 T_0\left(s\right)g\left(s\right)ds,$$

$$x\longmapsto L_{0,1}\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)T_0\left(x\right)\int_0^1 T_1\left(s\right)g\left(s\right)ds,$$

$$x\longmapsto L_{1,0}\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)T_1\left(x\right)\int_0^1 T_0\left(s\right)g\left(s\right)ds,$$

$$x\longmapsto L_{1,1}\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)T_1\left(x\right)\int_0^1 T_1\left(s\right)g\left(s\right)ds,$$

sont $L^p(0,1;X)$.
On note, pour $i,j\in\{0,1\}$;

$$L_{i,j}\left(x,g\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)T_i\left(x\right)\int_0^1 T_j\left(s\right)g\left(s\right)ds.$$

Preuve. En appliquant à nouveau le Théorème de Dore-Venni, comme dans (2.2.7), on obtient

$$L_0\left(.,g\right),\ \ L_1\left(.,g\right)\in L^p(0,1;X),$$

par conséquent

$$x\longmapsto L_0\left(1-x,g\left(1-.\right)\right)=\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\int_x^1 T_0\left(s-x\right)g\left(s\right)ds$$

et

$$x\longmapsto L_1\left(1-x,g\left(1-.\right)\right)=\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\int_x^1 T_1\left(s-x\right)g\left(s\right)ds$$

sont aussi des fonctions $L^p(0,1;X)$.
On donne un exemple pour prouver que, pour $i,j\in\{0,1\}$

$$L_{i,j}\left(.,g\right)=L^p(0,1;X),$$

par exemple, pour $i=0,j=1$ en effet

$$\begin{aligned}L_{0,1}\left(x,g\right) &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}L_0\left(x,T_0\left(.\right)T_1\left(.\right)g\left(.\right)\right)\\ &\quad+\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_0\left(x\right)T_1\left(x\right)L_1\left(1-x,g\left(1-.\right)\right).\end{aligned}$$

Lemme 2.3.2 *Supposons $(H.1)\sim(H.4)$. Alors, pour tout ω_0, ω_1 telles que*

$$\omega_0\in\left(D\left(\left(B+(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right),X\right)_{\frac{1}{(2p)},P},$$

$$\omega_1\in\left(D\left(\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right),X\right)_{\frac{1}{(2p)},P},$$

les fonctions

$$M_0\left(.,\omega_0\right)=\left(B+(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2T_0\left(.\right)\omega_0,$$

$$M_1\left(.,\omega_1\right)=\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2T_1\left(.\right)\omega_1,$$

appartiennent à $L^p(0,1;X)$.

Preuve. En remplaçant $-\sqrt{-A}$ par $\pm B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}$ dans le Lemme 2.2.1, on obtient

$$M_0\left(.,\omega_0\right)=\left(B+(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2T_0\left(.\right)\omega_0\in L^p(0,1;X)$$

$$M_1\left(.,\omega_1\right)=\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2T_1\left(.\right)\omega_1\in L^p(0,1;X),$$

à condition que

$$\omega_0 \in \left(D\left(\left(B+\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{(2p)},P},$$
$$\omega_1 \in \left(D\left(\left(B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{(2p)},P}.$$

Remarque 2.3.1 *Notons que, par le théorème de réitération (voir chapitre 1) et en prenant en compte* $(H.2)$ *et* $(H.4)$*, on a*

$$\left(D\left(\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{(2p)},P} = \left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{(2p)},P}.$$

En effet, on a

$$\left(D\left(\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p},$$

D'après le thèoreme de réitération

$$\left(D\left(\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)_{2-\frac{1}{p},p},$$

De $(H.2)$ *et* $(H.4)$*, on trouve*

$$\begin{aligned}
\left(D\left(\left(B\pm\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} &= \left(X, D\left(\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)_{2-\frac{1}{p},p} \\
&= \left(X, D\left(B^2-A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} \\
&= \left(X, D\left(A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} \\
&= \left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}.
\end{aligned}$$

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *Supposons* $(H.0)$˜$(H.4)$ *et* $(H.7)$˜$(H.10)$*. Si* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < +\infty$*, et* $u_0,\ u_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{(2p)},P}$*, alors le problème* (1)-(2) *admet une solution stricte unique* u*,*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),\ u' \in L^p(0,1;D(B)),$$

et satisfait (1)-(2)*.*

Preuve. On peut supposer que $u_1 = 0$. On a d'après $(2.2.2)$,

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (I-Z)^{-1}\left(u_0 - T_1\left(1\right)u_1\right) + \frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1\left(s\right)f\left(s\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_1\left(1\right)\int_0^1 T_0\left(1-s\right)f\left(s\right)ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} AT_0(x)\xi_0 &= AT_0(x)(I-Z)^{-1}u_0 + \frac{1}{2}AT_0(x)(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1(s)f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}AT_0(x)(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_1(1)\int_0^1 T_0(1-s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} AT_0(x)\xi_0 &= Ae^{x\left[-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right]}(I-Z)^{-1}u_0 \\ &\quad +\frac{1}{2}Ae^{x\left[-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right]}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 T_1(s)f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}Ae^{x\left[-B-\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}\right]}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}T_1(1)\int_0^1 T_0(1-s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

En raison de (2.1.1), on obtient, pour $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} AT_0(x)\xi_0 &= \left(B+(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(I-Z)^{-1}M_0(x,u_0) \\ &\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}L_{0,1}(x,f)-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}T_1(1)L_{0,0}(x,f(1-.)), \end{aligned}$$

Par conséquent

$$AT_0(.)\xi_0 \in L^p(0,1;X).$$

De même on a

$$AT_1(1-.)\xi_1 \in L^p(0,1;X).$$

Pour terminer, en utilisant (2.2.1), on peut en déduire que

$$\begin{aligned} Au(x) &= AT_0(x)\xi_0 + AT_1(1-x)\xi_1 - \frac{1}{2}\left(B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}L_0(x,f) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B+(B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}L_1(1-x,f(1-.)), \end{aligned}$$

donc $Au \in L^p(0,1;X)$.

Pour conclure, on montre que $Bu\prime \in L^p(0,1;X)$.

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= T_0(x)\xi_0 + T_1(1-x)\xi_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^x T_0(x-s)f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-\frac{1}{2}}\int_x^1 T_1(s-x)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

d'où

$$u'(x) = \left(-B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) T_0(x)\,\xi_0 - \left(B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) T_1(1-x)\,\xi_1$$
$$-\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}\left[f(x) + \left(-B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)\int_0^x T_0(x-s)\,f(s)\,ds\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}\left[-f(x) + \left(-B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)\int_x^1 T_1(s-x)\,f(s)\,ds\right],$$

D'après $(2.1.1)$, on trouve

$$u'(x) = -\left(B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} AT_0(x)\,\xi_0 - \left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} AT_1(1-x)\,\xi_1$$
$$+\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)\int_0^x T_0(x-s)\,f(s)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)\int_x^1 T_1(s-x)\,f(s)\,ds,$$

donc

$$\begin{aligned} Bu'(x) &= -B\left(B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} AT_0(x)\,\xi_0 - B\left(B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} AT_1(1-x)\,\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}B(B^2 - A)^{\frac{1}{2}} L_0(x, f) + \frac{1}{2}B(B^2 - A)^{\frac{1}{2}} L_1(1-x, f(1-.)), \end{aligned}$$

alors

$$Bu'(.) \in L^p(0,1;X).$$

Chapitre 3

Applications

On donne, dans ce chapitre, quelques exemples d'application aux équations différentielles partielles pour illusterer les résultats du chapitre 2.

Exemple 3.0.1 *(Conditions aux limites périodiques).*

Prenons $X = L^2(0,1)$ et considérons l'opérateur T dans X défini par

$$\begin{cases} D\left(T\right) = \left\{f \in H^1\left(0,1\right) : f\left(0\right) = f\left(1\right)\right\}, \\ Tf = if'. \end{cases}$$

Il est bien connu que T est auto-adjoint et que son spectre est $\sigma(T) = 2\pi\mathbb{Z}$ (voir Miklavéié [23], p. 75). (On peut montrer ce résultat en résolvant l'équation spéctrale

$$Tf - \lambda f = g.$$

En plus l'opérateur T^2 est défini par

$$\begin{cases} D\left(T^2\right) = \left\{f \in H^2\left(0,1\right) : f\left(0\right) = f\left(1\right),\ f'\left(0\right) = f'\left(1\right)\right\}, \\ T^2 f = -f'' \end{cases},$$

cet opérateur T^2 est positif, auto-adjoint.
Si on prend $B = -iT$ (générant un groupe continu) et introduisons A par

$$\begin{cases} D\left(A\right) = D\left(T^2\right), \\ Af = \left(-2T^2 - aI\right)f = 2f" - af \end{cases}$$

avec $a > 0$.
Alors l'opérateur

$$B^2 - A = T^2 + aI,$$

de domaine $D(T^2)$, est un opéra auto-adjoint positif.

Ainsi le domaine $D(T)$ coincide avec l'espace d'interpolation complexe $[X, D(T^2)]_{\frac{1}{2}}$, selon Triebel [29] (pour plus de détails, voir la page 143), et l'opérateur $(T^2 + aI)^{\frac{1}{2}}$ est auto-adjoint positif.
Le Théorème 2.3.1 nous permet donc de résoudre le problème aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - au(x,y) \\ = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(0,y) = u_0(y), \ u(1,y) = u_1(y), \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1), \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1), \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

à condition que $f \in L^p(0,1; L^2(0,1))$ et $u_0, \ u_1 \in (D(A), L^2(0,1))_{\frac{1}{(2p)},p}$ On peut alors appliquer l'argument précédent en réduisant un espace à un espace d'interpolation entre $D(T)$ et $L^2(0,1)$.

Exemple 3.0.2 *Prenons $X = L^q(\mathbb{R}), \ 1 < q < +\infty$, et o définit les opérateurs $A, \ B$ par*

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,q}(\mathbb{R}), \\ Au = au" - cu, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(B) = W^{1,q}(\mathbb{R}) \\ Bu = bu', \end{cases}$$

tels que $a - b^2 > 0$ et $c > 0$.
Alors

▶ *L'opérateur B^2 est défini par*

$$D\left(B^2\right) = W^{2,q}(\mathbb{R}), \qquad B^2 u = b^2 u'',$$

donc

$$D(A) \subseteq D\left(B^2\right),$$

▶ *L'opérateur $B^2 - A$ est défini par*

$$D\left(B^2 - A\right) = W^{2,q}(\mathbb{R}), \qquad \left(B^2 - A\right)u = \left(b^2 - a\right)u'' + cu,$$

et par conséquent

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right) = W^{1,q}(\mathbb{R}) \subseteq D(B)$$

Ainsi les hypothèses $(H.2)\tilde{}(H.4)$ sont vérifiées.

De plus, un simple calcul basé sur la résolution (à l'aide de la transformation de Fourier) de l'équation spéctrale

$$\left(b^2 - a\right)u'' + cu - \lambda u = g$$

montre que l'hypothèse $(H.1)$ *est vérifie.*

L'hypothèse $(H.5)$ *est également satisfaite. En vertu du théorème* C*, p.167, dans J. Prüss and H. Sohr [26] on trouve que* $(B^2 - A)$ *est un opérateur* BIP *est vérifie* $(H.6)$*.*

En appliquant le théorème 2.3.1 de la première approche, on obtient

Proposition 3.0.1 *Soit* $p, q \in]1, +\infty[$, $f \in L^p(0,1;L^q(\mathbb{R}))$ *et* $u_0,\ u_1 \in (W^{2,p}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{(2p)},p}$. *Alors le problème*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - cu(x,y) \\ = f(x,y), \quad (x,y) \in]0,1[\times \mathbb{R}, \\ u(0,y) = u_0(y), \\ u(1,y) = u_1(y), \qquad y \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{3.0.1}$$

admet une solution stricte unique u*,*

$$u \in W^{2,p}(0,1;L^P(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1;W^{2,p}(\mathbb{R})),\ u' \in L^p(0,1;W^{1,p}(\mathbb{R}))$$

et satisfait (3.0.1)*.*

Notons que l'espace d'interpolation $(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p}$ coincide avec l'espace de Besov $\beta_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$, d'après Grisvard [15], Teorema 7, p. 681.

Exemple 3.0.3 *Soit* H *un espace de Hilbert et* B *un opérateur auto-adjoint strictement positif dans* X*. Prenons*

$$A = -B^3,$$

c'est à dire

$$D(A) = D(B^3) \text{ et } Au = -B^3 u$$

Alors $B^2 - A$ *est auto-adjoint strictement positif, et*

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\right) = D\left(B^{3/2}\right).$$

De plus $\pm B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ *génère un semi-groupe analytique en* X *et nous avons aussi*

$$D(A) \subsetneq D(B^2)$$

(pour plus de détails, voir Example 3 cité dans [12]). Puisque $\pm B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ *est un opérateur positif, alors le Théorème 2.3.2 s'applique .*

A titre d'exemple, on prend B défini dans $X = L^2(\Omega)$ *par*

$$\begin{cases} D\left(B\right) = H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right), \\ Bu = -\Delta u, \end{cases}$$

où Ω *est un domaine borné dans* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *avec une* $\partial\Omega$ *frontière lisse, donc*

$$\begin{cases} D\left(A\right) = \left\{u \in H^6\left(\Omega\right) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = \Delta^2 u_{|\partial\Omega} = 0\right\}, \\ \qquad Au = -B^3 u = \Delta^3 u, \end{cases}$$

on peut alors considéré le problème aux dérivées partiélles suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right) - 2\Delta\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right) + \Delta^3 u\left(x,y\right) = f\left(x,y\right), \quad (x,y) \in (0,1) \times \Omega, \\ u\left(0,y\right) = u_0\left(y\right), \quad u\left(1,y\right) = u_1\left(y\right), \quad y \in \Omega, \\ u\left(x,\sigma\right) = \Delta u\left(x,\sigma\right) = \Delta^2 u\left(x,\sigma\right) = 0, \quad (x,\sigma) \in (0,1) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

lorsque

$$f \in L^2((0,1), \Omega)$$

et

$$u_0,\ u_1 \in (D(A), L^2(\Omega))_{\frac{1}{4},2}.$$

Cet espace d'interpolation peut être caractérisé, en utilisant le Théorème 4.4.1 (6), p.321 dans [29], ou encore les résultats de [21], p.59. Plus précisément, $(D(A), L^2(\Omega))_{\frac{1}{4},2}$ *coïncide avec l'espace*

$$\begin{aligned} &\left\{u \in H^4\left(\Omega\right) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0,\ \Delta^2 u \in \left(L^2\left(\Omega\right),\ H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right)\right)_{\frac{1}{4},2}\right\} \\ = &\left\{u \in H^4\left(\Omega\right) : u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0,\ \Delta^2 u \in B_{2,2}^{\frac{1}{2}}\left(\Omega\right),\ \int_\Omega d^{-1}\left(x\right)\left|\Delta^2 u\left(x\right)\right|^2 dx < \infty\right\} \end{aligned}$$

où $B_{2,2}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ est un espace de Besov et $d(x)$ désigne la distance entre $x \in \Omega$ et la frontière $\partial\Omega$. Ici,Pour montrer que les opérateurs sont de classe BIP, on utilise les propriétés des opérateurs auto-adjonts.

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] J. Bourgain : Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ark. Mat. 21 (1983), 163-168.

[3] D. L. Burkholder : A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Probab.9 (1981), 997-1011.

[4] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[5] M. Cheggag, A. Favini, A. Labbas, S. Maingot , K. Ould Melha : New results on complete elliptic equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case, Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr., 2017, Volume 10, Issue 1, 70–96

[6] G. Da Prato and P. Grisvard : Sommes d'opérateurs linéaires et equa-tions différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54(1975), 305-387.

[7] G. Dore and A. Venni : On the closedness of the sum of two closed operators, Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.

[8] G. Dore and A. Venni : Some results about complex powers of closed operators, J. Math. Anal. Appl., 149 (1990), 124-136.

[9] A. El Haial and R. Labbas : On the ellipticity and solvability of abstract second-order differential equation, Electronic Journal of Differential Equations, 57 (2001), 1-18.

[10] A. Eltaief and S. Maingot : SECOND ordre abstract differntial equations of elliptic type set in R+. demenstration mathematical, Vol. XLVI, No 4 2013.

[11] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe and A. Yagi : On the solvability of complete abstract differential equations of elliptic type, Funkc. Ekv.,47 (2004), 2052-224.

[12] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi : On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcial. Ekvac. 47 (2004), 423-452.

[13] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi : Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), 193-214.

[14] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, M. Meisner : Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non Commutative Cases. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, issue 8, pp. 1495 1510.

[15] P. Grisvard : Spazi di tracce e applicazioni, Rendiconti di Matematica (4), vol. 5, serie VI (1972), 657-729.

[16] M. Haase : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[17] S. G. Krein : Linear differential equations in Banach spaces, Moscow,1967, English transl. : AMS, Providence, 1971.

[18] R. Labbas and B. Terreni : Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1ére Partie. Boll. Un. Mat. Ital. 1-**B** (7) (1987), 545-569.

[19] R. Labbas and B. Terreni : Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 2ème Partie. Boll. Un. Mat. Ital. 2-**B** (7) (1988), 141-162.

[20] K. Limam : *Resolution, in Lp-spaces, of transmission problems set in an unbounded domains.* Appl. Math. Comput. 218 (9) (2012), pp. 5605-5619.

[21] J. L. Lions and J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68.

[22] A. Lunardi : Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhauser, Basel, 1995.

[23] M. Miklavéié : Applied functional analysis and partial differential equa-tions, Word Scientific, Singapore, 1998.

[24] A. Pazy : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[25] J. Prüss and H. Sohr : On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces, Math. Z. 203 (1990), 429-452.

[26] J. Prüss and H. Sohr : Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L^p , Hiroshima Math. J., 23(1993), 161-192.

[27] R. Seeley : Norms and domains of the complex powers $(A_B)^Z$, Am. J.Math. 93 (1971), 299-309.

[28] M. H. Stone : On one-parameter unitary groups in Hilbert space, Ann. Math. 33 (1932), 643-648.

[29] H. Triebel : Interpolation theory, function spaces, differential operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[30] S. Yakubov S. and Y. Yakubov : Differential-operator equations, ordi-nary and partial differential equations, Chapman & Hall/CRC, BocaRaton, 2000.

الملخص:

في هذه المذكرة، نقدم حوصلة للمقال أدناه، وهي دراسة بعض النتائج حول المعادلات التفاضلية المجردة الكاملة من الدرجة الثانية من النوع الإهليجي.

$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x)$، x في المجال (0،1)

مع شروط الحدية

$u(0)=u_0$ و $u(1)=u_1$

تم طرحه في فضاء بناخي E من النوع UMD

نأخذ :

A، B مؤثران مغلقان في E مع مجالات التعريف D(A)، D(B) على التوالي.

$u(0)=u_0$ و $u(1)=u_1$

عنصران في E، f دالة في L^{p}.

باستخدام خصائص المؤثرات ذات القوى التخيلية المحدودة ونظرية Dore-venni على مجموع مؤثرين خطيين مغلقين ، نثبت وجود الحل u وتفرده وانتظامه

هذه الدراسة تكمل بشكل طبيعي نتائج التي تم الحصول عليها في إطار فضاءات هولدر.

في نهاية هذا العمل، تم تحليل بعض التطبيقات كأمثلة لهذه المعادلات التفاضلية الجزئية.

A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi : Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), 193-214.