MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

UNIVERSITE Abdelhamid Ibn Badis MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :

Azzouz Belqassim

THEME :

Opérateur de Sturm-Liouville en calcul fractionnaire conformable.

Devant le jury composé de :

Mme.	**Bendahmane Hafida**	**Université de Mostaganem**	**Président**
Mr.	**Dahmani Zoubir**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mr.	**Berrabah Bendoukha**	**Université de Mostaganem**	**Encadreur**

Année Universitaire 2020-2021

Remerciements

Avant tout, louange à **ALLAH** le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Je dédie ce modeste travail à ma mère et l'âme de mon père pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

À mes frère, mes amis et mes camarades sans oublier mes chers professeurs pour l'achèvement de mon parcours et à leur tête mon cher encadreur monsieur **Berrabah Bendoukha** pour son soutien.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de la Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique.

❖ *Azzouz Belqassim*

Contents

0.1 Introduction

Le calcul différentiel fractionnaire discret et continu ainsi que ses applications dans différentes branches de la recherche scientifique et engineering ont ont suscité l'intérêt de beaucoup de beaucoup de chercheurs depuis les années 80 du siècle dernier (voir [1, 2, 7, 8, 10, 15, 21, 22] et d'autres cités dans ces références). Comme noté dans [5, 3], il existe principalement deux approches celle de Riemann-Liouville-Caputo et celle Letnikov. Comparé au calcul differentiel ordinaire, le calcul différentiel fractionnaire présente certaines insuffisances dont principalement: La dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est la fonction nulle, les règles classiques de dérivation d'un produit ou d'un quotient sont généralement mises à défaut. Pour contourner ces insuffisances, R. Khalil et al. dans leur article "A new definition of fractional derivative" (voir [13]) introduisirent le nouveau concept de "Calcul fractionnaire conformable" comme suit:

Définition 0.1.1. *Soit $\alpha \in]0,\ 1]$ et $f :]0,\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. On appelle dérivée fractionnaire conformable d'ordre α au point $t_0 \succ 0$ la quantité*

$$f^{(\alpha)}(t_0) == \lim_{\varepsilon \ \longrightarrow \ 0} \frac{f(t + \varepsilon {t_0}^{1-\alpha}) - f\,(t_0)}{\varepsilon} \tag{0.1.1}$$

si elle existe.

En effet, cette nouvelle façon de dériver satisfait toutes les propriétés de la dérivation usuelle à l'exception de celle du semi-groupe. Si R. Khalil et al. sont les "péres" de ce nouveau concept, T. Abdeljawad en posa les bases théoriques à travers son fameux article (à ce jour cité plus de 1000 fois) "On the conformable fractional calculus" [3]. Dans un article publié en 2019, A. A. Abdelhakim [4], montra que l'existence de la limite 0.1.1 équivaut à la dérivabilité au sens usuelle et par la même occasion le caractère fractionnaire de cette approche et toute la pertinence de la théorie initiée par R. Khalil et al., T. Abdeljawad et autres. Ceci a suscité et suscite toujours un débat entre adeptes et adversaires de cette approche.
présent mémoire est axé sur l'article de D. R. Anderson et D. J. Ulness, publié en 2015 sous le titre "Newly defined conformable derivatives" [6]. La définition donnée ci-dessous suppose dès le départ la dérivabilité usuelle. Elle constitue aussi une extension de celle de R. Khalil et al.
Dans le premier chapitre 1 du présent mémoire nous rappellons la définition de la dérivabilité conformable au sens de [6], énonçons sans preuve les principales règles de calcul établies dans [6] et puis nous établissons quelques nouvelles propriétés.
Le second chapitre est essentiellement consacré aux méthodes de résolution des équations différentielles conformables du second ordre. Nous étondons au cas conformable les méthodes du wronksian (formule d'abel, seconde solution pour l'équation homogène, solution particulière pour l'équation non homogène, ...). Nous établissons aussi un analogue généralisons de l'équation de Cauchy-Lagrange et en déduisons que la méthode de l'équation caractéristique connue dans le cas usuel s'étend au cas conformable avec coefficients constants et donnons la forme explicite des solutions. Nous n'abordons pas la question d'existence et d'unicité complétement traitée dans [6].
Le troisième et dernier chapitre représente notre contribution essentielle dans la thématique. Il est consacré à l'étude de l'opérateur de sturm-Liouville dans le cas conformable. Tout d'abord, nous donnons l'identité de Lagrange ainsi que le quotient de Rayleigh dans le cas général et montrons que les valeurs propres sont simples. Nous considérons après le cas où la fonction k_1 est identiquement nulle. Pour ce cas, montrons que les valeurs propres sont toutes réelles et à fonctions propres associées (r, α)-orthogonales. Quant à l'existence elle-même, elle est traitée par les méthodes variationnelles. Notons que les résultats de ce chapitre constituent une extension de ceux obtenus dans [5].

Chapter 1

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Dans tout ce qui suit, pour tout $\alpha \in [0,\ 1]$, $k_0(\alpha, .)$ et $k_1(\alpha, .)$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que

c1. $k_0(1, t) = 1 \quad \wedge \quad k_1(1, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

c2. $k_0(0, t) = 0 \quad \wedge \quad k_1(0, t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

c3. $k_0(\alpha, t) \neq 0, \quad \forall \alpha \in]0,\ 1] \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.0.1. *[6] Soit y une fonction réelle définie sur un intervalle fini $[a,\ b]$. On appelle dérivée α-conformable de y au point $t_0 \in [a,\ b]$ la quantité*

$$y^{(\alpha)}(t_0) = k_1(\alpha, t_0)y(t_0) + k_0(\alpha, t_0)y'(t_0). \tag{1.0.1}$$

Définition 1.0.2. *Si y admet une dérivée α-conformable de y en tout point de $[a,\ b]$, alors, on dira qu'elle est conformément α-dérivable sur $[a,\ b]$.*

Remarque 1.0.3. *Notons que par définition, une fonction admettant une dérivée α-conformable est nécessairement dérivable au sens usuel du terme. La terminologie conformable, trouve sa justification dans le fait que $y^{(0)} = y$ et $y^{(1)} = y$.*

Exemple 1.0.4. *Comme exemples de fonctions k_0, k_1 on peut prendre*

1. $k_0(\alpha, t) = w^{1-\alpha}$, $\quad k_1(\alpha, t) = (1-\alpha)\, w^{\alpha}$ *où, w est une constante strictement positive;*
2. $k_0(\alpha, t) = (1-\alpha)\, |t|^{\alpha}$, $\quad k_1(\alpha, t) = \alpha\, |t|^{1-\alpha}$;
3. $k_0(\alpha, t) = (1-\alpha)\, e^{\alpha t}$, $\quad k_1(\alpha, t) = \alpha e^{(1-\alpha)t}$;
4. $k_0(\alpha, t) = \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) |t|^{1-\alpha}$, $\quad k_1(\alpha, t) = \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) |t|^{\alpha}$;
5. $k_0(\alpha, t) = \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) |t|^{1-\alpha}$, $\quad k_1(\alpha, t) = \begin{cases} 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0 & si\ \alpha \neq 0 \end{cases}$.

Historiquement, le concept de dérivée α-conformable fut pour la première fois introduit par R. Khalil et al. dans [13] et presque simultanément par U. Katugampola dans [11]. Dans le premier cas,

$$y^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{\ 1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

tandis que dans le second cas,

$$y^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}$$

sous condition que ces limites existent.
Ces deux définitions de la dérivée α-conformable sont valables seulement pour $t \geq 0$ et supposent l'existence des limtes entrant dans leurs définitions. D'autre part, pour $\alpha = 0$, on ne retrouve pas la fonction initiale. Ces deux traits, constituent un désavantage de ces définitions par rapport à la définition que nous adoptons ici. D'autre part, dans le cas où, la fonction y est dérivable au sens usuel alors, chacune de ces deux définitions nous donnent

$$y^{(\alpha)}(t) = t^{\,1-\alpha} y'(t).$$

Ce cas de figure est couvert par notre définition dans le cas $0 \prec \alpha \leq 1$. Il suffit pour cela de prendre,

$$\forall t \in [a,\ b] :\ k_1(\alpha, t) = 0 \quad \wedge \quad k_0(\alpha, t) = t^{\,1-\alpha}.$$

Pour plus de détails les différentes définitions de la dérivée α-conformable, leurs propriétés et les liens existant entre eux, consulter [3, 6, 13]. Comme signalé dans [6], la notion de dérivée α-conformable peut être envisagée même pour la "Time scale Theory" [8].
Enfin, notons qu'en théorie du contrôle, un correcteur ou régulateur proportionnel-dérivé des output u est régi par l'équation

$$u(t) = k_p(t)E(t) + k_d(t)E'(t)$$

où, k_p est le gain proportionnel, k_d -le gain dérivé et $E(t)$ -l'erreur entre la variable d'état et la variable du processus [19]. Ceci peut fournir un domaine d'application très vaste de la dérivée α -conformable.

Notation 1.0.5. *Si f est une fonction donnée sur $[a,\ b]$ et $a \leq s \leq t \leq b$ alors, on notera*

$$\int_s^t f(\tau) d\alpha(\tau) := \int_s^t \frac{f(\tau)}{k_0(\alpha, \tau)} d\tau \tag{1.0.2}$$

si cette dernière intégrale existe (au sens de Riemann).

Comme on le verra plus loin, un rôle important en calcul différentiel conformable est joué par le concept d'exponentielle α -conformable qu'on définit comme suit,

Définition 1.0.6. *Soit $p : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \leq s \leq t \leq b$. On appelle exponentielle α -conformable de p la fonction*

$$e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \frac{p(\tau) - k_1(\alpha, \tau)}{k_0(\alpha, \tau)} d\tau\right) := \exp\left(\int_s^t (p(\tau) - k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right), \tag{1.0.3}$$

$$e_0(t, s) = \exp\left(-\int_s^t k_1(\alpha, \tau)\, d\alpha(\tau)\right).$$

Il est clair que l'exponentielle α -conformable d'une fonction existe toujours. De plus, dans le cas $\alpha = 1$, l'exponentielle usuelle d'une fonction.

Proposition 1.0.7. *[6] (Régles principales de dérivation et d'intégration α-conformables).*

Régle1. *Si f et g admettent des dérivées α -conformables alors, pour tous réels λ, μ, la fonction $\lambda f+\mu g$ admet aussi une dérivée α -conformable et on a:*

$$(\lambda f+\mu g)^{(\alpha)}=\lambda f^{(\alpha)}+\mu g^{(\alpha)}.$$

Régle2. *Pour toute constante réelle c,*

$$c^{(\alpha)}=ck_1\left(\alpha,\ .\right).$$

Régle3. *Si f et g admettent des dérivées α -conformables alors, il en est de même pour le produit fg et on a:*

$$(fg)^{(\alpha)}=f^{(\alpha)}g+fg^{(\alpha)}-k_1\left(\alpha,\ .\right)fg.$$

Régle4. *Si f et g admettent des dérivées α -conformables alors, il en est de même pour le quotient $\frac{f}{g}$ s'il est défini et on a:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(\alpha)}=\frac{f^{(\alpha)}g-fg^{(\alpha)}}{g^2}+k_1\left(\alpha,\ .\right)\frac{f}{g}.$$

Régle5. *Pour tout $\alpha\in]0,\ 1]$, la dérivée α -conformable par rapport à t de l'exponentielle α -conformable vérifie la relation:*

$$\left(e_p\left(t,s\right)\right)^{(\alpha)}=p(t)e_p\left(t,s\right).$$

Régle6. *Pour tout $\alpha\in]0,\ 1]$ et toute fonction f,*

$$\left(\int_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)\right)^{(\alpha)}=f(t).$$

Régle7. *(Régle d'intégration par parties)*

$$\int_a^b f(t)g^{(\alpha)}(t)e_0\left(b,t\right)d\alpha(t)=\left\{f(t)g(t)e_0\left(b,t\right)\right\}_a^b-\int_a^b g(t)\left[f^{(\alpha)}(t)-k_1\left(\alpha,t\right)f(t)\right]e_0\left(b,t\right)d\alpha(t).$$

Régle8. *(Formule de Leibnitz)*

$$\left(\int_a^t f(t,s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)\right)^{(\alpha)}=f(t,t)+\int_a^t\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial t}f(t,s)-k_1\left(\alpha,t\right)f(t,s)\right]e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)$$

où, l'écriture $\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial t}$ signifie que la dérivation α-conformable s'opére par rapport à la variable t.

On remarque qu'en posant $\alpha=1$, on retrouve toutes les régles de rérivation et intégration classiques.

Proposition 1.0.8. *On a les propriétés supplémentaires suuivantes:*

Prop1.

$$f^{(\alpha)} = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,\ b] :\ f(t) = ce_0\left(t,a\right)\ \ ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prop2.

$$f^{(\alpha)} = g^{(\alpha)} \Longrightarrow \forall t \in [a,\ b] :\ f(t) = g(t) + ce_0\left(t,a\right)\quad ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prop3.

$$g^{(\alpha)} = f \Longrightarrow \forall t \in [a,\ b] :\ g\left(t\right) = \int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s) + ce_0\left(t,a\right)\quad ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prop4. *Pour tout* $\alpha \in]0,\ 1]$,

$$\forall t \in [a,\ b] :\quad \int\limits_a^t f^{(\alpha)}(s)d\alpha(s) = f(t) + ce_0\left(t,a\right)\quad ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proof. Pour la première propriété, on distingue deux cas. Le cas $\alpha = 0$ qui est trivial car, dans ce cas, $f^{(\alpha)} = f$. Dans le cas $\alpha \neq 0$, l'hypothèse $f^{(\alpha)} = 0$ signifie que la fonction f vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$f\ ' = -\frac{k_1\left(\alpha,.\right)}{k_0\left(\alpha,.\right)}f$$

dont la solution générale est de la forme:

$$f(t) = c\exp\left(-\int\limits_a^t \frac{k_1\left(\alpha,\tau\right)}{k_0\left(\alpha,\tau\right)}d\tau\right) = ce_0\left(t,a\right).$$

En appliquant la propriété 1 à la fonction $h = f - g$, on obtient la propriété 2. Montrons la troisième propriété. On a,

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)\right)^{(\alpha)} &= k_1\left(\alpha,t\right)\int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s) + k_0\left(\alpha,t\right)\left(\int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)\right)' \\
&= k_1\left(\alpha,t\right)\int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s) + k_0\left(\alpha,t\right)\frac{f(s)e_0\left(t,t\right)}{k_0\left(\alpha,t\right)} \\
&\quad + k_0\left(\alpha,t\right)\int\limits_a^t f(s)\left(\frac{\partial}{\partial t}e_0\left(t,s\right)\right)d\alpha(s) \\
&= k_1\left(\alpha,t\right)\int\limits_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s) + f(t) \\
&\quad + k_0\left(\alpha,t\right)\int\limits_a^t f(s)\left(-\frac{k_1\left(\alpha,t\right)}{k_0\left(\alpha,t\right)}e_0\left(t,s\right)\right)d\alpha(s) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left(g-\int_a^t f(s)e_0\left(t,s\right)d\alpha(s)\right)^{(\alpha)}=0.$$

Pour obtenir le résultat recherché, il suffit d'appliquer encore une fois la propriété 1.
Pour la quatrième propriété, on utilise la régle 6 et on obtient:

$$\begin{aligned}\left(\int_a^t f^{(\alpha)}(s)d\alpha(s)\right)^{(\alpha)} &= \left(\int_a^t f^{(\alpha)}(s)\underbrace{e_0\left(s,t\right)e_0(t,s)}_{1}d\alpha(s)\right)^{(\alpha)}\\ &= f^{(\alpha)}(t)e_0\left(t,t\right)=f^{(\alpha)}(t).\end{aligned}$$

Donc, le résultat recherché découle directement de la propriété 2. □

Pour terminer ce chapitre et à titre complémentaire uniquement, nous donnons sans preuve la version α -conformable de l'inégalité de Gronwall et quelques unes de ses conséquences. Pour les preuves, voir [6]. A noter aussi qu'en posant $\alpha=1$ dans les inégalités qui vont suivre, on retrouve des résultats connus de la dérivation usuelle.

Théorème 1.0.9. *(Inégalité de Gronwall).*
Soient p, y et f trois fonctions continues sur $[a,\ +\infty[$ avec $p\geq 0$. Alors, l'inégalité

$$y(t)\leq\ f(t)+\int_a^t p(s)y(s)e_0(t,s)d\alpha(s)\qquad\forall t\geq a$$

implique

$$y(t)\leq\ f(t)+\int_a^t p(s)f(s)e_p(t,s)d\alpha(s)\qquad\forall t\geq a.$$

Corollaire 1.0.10. *Soient p, y deux fonctions continues sur $[a,\ +\infty[$ avec $p\geq 0$. Alors,*

$$\int_a^t p(s)y(s)e_0(t,s)d\alpha(s)\Longrightarrow y(t)\leq\ 0\qquad\forall t\geq a.$$

Corollaire 1.0.11. *Soient p, y deux fonctions continues sur $[a,\ +\infty[$ avec $p\geq 0$ et soit $\delta\in\mathbb{R}$. Alors, l'inégalité*

$$y(t)\leq\ \delta+\int_a^t p(s)y(s)e_0(t,s)d\alpha(s)\qquad\forall t\geq a$$

implique

$$y(t)\leq\ \delta e_p(t,s)+\delta\int_a^t k_1\left(\alpha,s\right)e_p(t,s)d\alpha(s)\qquad\forall t\geq a.$$

Chapter 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES CONFORMABLES LINÉAIRES

Dans le présent chapitre, on s'intéresse aux équations différentielles conformables du second ordre de la forme:

$$\begin{cases} \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y^{(\alpha)} + B(t)y = f(t), & t \geq a \\ t \geq a \ , \quad \alpha \in]0,\ 1] \end{cases} , \tag{2.0.1}$$

où, $A,\ B,\ f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données telles que A et B sont continues. Le but est de montrer que les techniques de résolution connues pour la dérivation usuelles s'étendent au cas conformable du second ordre. Il s'agit de la métode du Wronksian, la formule d'abel ainsi que la variation des constantes [9, 12].

Néanmoins, nous commençons par énoncer sans preuvre le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.0.1. *[6] (théorème d'existence et d'unicité pour les équations conformables du premier ordre).*
Supposons que les fonctions k_0 et k_1 vérifient les conditions c1., c2. et c3. du chapitre précédent. Soient $f,\ p :\ [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Alors, la solution générale du problème de Cauchy

$$(P_1) : \begin{cases} y^{(\alpha)} - p(t)y = f(t), & t \geq a \\ y\,(a) = y_0 \end{cases}$$

est de la forme:

$$y(t) = y_0 e_p(t,a) + \int_a^t e_p(t,s) f(s) d\alpha(s), \qquad t \in [a,\ b]\,. \tag{2.0.2}$$

Notons que si $\alpha = 1$ alors, $\forall t \in [a,\ b]$

$$k_0(1,t) = 1, \quad k_1(1,\ t) = 0\ , \quad e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right)$$

et donc, la formule 2.0.2 devient le résultat connu suivant:

$$y(t) = \exp\left(\int_a^t p(\tau)d\tau\right) y_0 + \int_a^t \exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right) f(s)ds.$$

2.1 Wronksian α-conformable

Définition 2.1.1. *Soient $\alpha \in]0,\ 1]$, $y_1,\ y_2$ deux fonctions α-différentiables sur $[a,\ b]$. On définit wronksian α-conformable de y_1 et y_2 comme suit:*

$$W_\alpha\left[y_1,\ y_2\right] = y_1 y_2^{(\alpha)} -\ y_1^{(\alpha)} y_2. \tag{2.1.1}$$

Proposition 2.1.2. *(Version α-conformable de la formule d'Abel).*
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène 2.0.1 $(f \equiv 0)$ alors,

$$\forall t \in [a,\ b]:\ W_\alpha\left[y_1,\ y_2\right](t) = W_{\alpha,\ 0}\ \left[y_1,\ y_2\right].\exp\left(-\int_a^t \left(A(\tau) + 2k_1\left(\alpha, \tau\right)\right) d\alpha(\tau)\right) \tag{2.1.2}$$

avec,

$$W_{\alpha,\ 0}\ \left[y_1,\ y_2\right] := W_\alpha\left[y_1,\ y_2\right](a)\ ,\qquad t \in [a,\ b]\,.$$

Proof. Notons tout d'abord que dans le cas $\alpha = 1$, correspondant à la dérivation classique, la formule 2.1.2 devient

$$W_1\left[y_1,\ y_2\right](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = W_1\left[y_1,\ y_2\right](a).\exp\left(-\int_a^t A(\tau)d\tau\right)$$

qui est la formule classique d'Abel pour le Wronksian. Pour cette raison, la formule 2.1.2 sera appelée version α-conformable de la formule d'Abel.
Puisque les fonctions y_1 et y_2 sont deux fois α-différentiables alors, le wronksian α-conformable $W_\alpha\left[y_1,\ y_2\right]$ est α-différentiable et on a:

$$\begin{aligned}
W_\alpha^{(\alpha)}\left[y_1,\ y_2\right] &= \left(y_1^{(\alpha)} y_2^{(\alpha)} + y_1\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - k_1\left(\alpha,\ .\right) y_1 y_2^{(\alpha)}\right) \\
&\quad - \left(y_1^{(\alpha)} y_2^{(\alpha)} + \left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} y_2 - k_1\left(\alpha,\ .\right) y_1^{(\alpha)} y_2\right) \\
&= \left(y_1\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - \left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} y_2\right) - k_1\left(\alpha,\ .\right)\left(y_1 y_2^{(\alpha)} - y_1^{(\alpha)} y_2\right) \\
&= y_1\left(-\ A(t)y_2^{(\alpha)} - B(t)y_2\right) - y_2\left(-A(t)y_1^{(\alpha)} - B(t)y_1\right) \\
&\quad -k_1\left(\alpha,\ .\right)\left(y_1 y_2^{(\alpha)} - y_1^{(\alpha)} y_2\right) \\
&= -\left(A(t) + k_1\left(\alpha,\ .\right)\right)\left(y_1 y_2^{(\alpha)} - y_1^{(\alpha)} y_2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$W_\alpha^{(\alpha)}\left[y_1,\ y_2\right] = p_\alpha(t) W_\alpha\left[y_1,\ y_2\right]\ ,\quad p_\alpha(t) - \left(A(t) + k_1\left(\alpha,\ .\right)\right).$$

Il suffit donc maintenant d'appliquer le théorème 2.0.1 en prenant comme second la fonction identiquement nulle. □

Remarque 2.1.3. *Notons que dans l'expression du wronksian, on peut remplacer a par n'importe quel point $t_0 \in [a,\ b]$ et dans ce cas, on aura*

$$\forall t \in [a,\ b]:\ W_\alpha [y_1,\ y_2](t) = W_\alpha \ \ [y_1,\ y_2](t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} (A(\tau) + 2k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right). \quad (2.1.3)$$

On en déduit en particulier que si le wronksian s'annule en un point alors, il est identiquement nul.

Proposition 2.1.4. *Si y_1 et y_2 sont solutions non identiquement nulles de l'équation homogène*

$$\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y^{(\alpha)} + B(t)y = 0, \qquad t \geq a$$

alors, elles sont linéairement dépendantes si et seulement si, le wronksian s'annule au moins en un point $t_0 \in [a,\ b]$.

Proof. Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes alors, il existe une constante c telle que $y_2 = cy_1$. Il est clair que dans ce cas,

$$W_\alpha [y_1,\ y_2] = y_1 (cy_1)^{(\alpha)} - \ y_1^{(\alpha)} (cy_1) = c\left(y_1 y_1^{(\alpha)} - \ y_1^{(\alpha)} y_1\right) = 0.$$

Inversement, supposons le wronksian $W_\alpha [y_1,\ y_2]$ s'annule au moins en un point t_0. D'après la remarque précédente, il est identiquement nul. Par conséquent,

$$0 = W_\alpha [y_1,\ y_2] = y_1 y_2^{(\alpha)} - \ y_1^{(\alpha)} y_2 = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(\alpha)} & y_2^{(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

En théorie des déterminants, cela implique deux possibiltés. Ou bien,les deux colonnes sont égales à une constante multiplicative près et dans ce cas, on a directement la dépendance linéaire. Ou bien, deux lignes sont égales à une constante multiplicative près. Dans ce cas, il existe une constante c telle que $y_1^{(\alpha)} = cy_1$ et $y_2^{(\alpha)} = cy_2$. Or,

$$y_1^{(\alpha)} = cy_1 \Longrightarrow y_1 = \beta \exp\left(\int_a^t (c - k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right).$$

Par conséquent, la relation $y_1 y_2^{(\alpha)} - \ y_1^{(\alpha)} y_2 = 0$ nous donne,

$$\beta \exp\left(\int_a^t (c - k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right) y_2^{(\alpha)} = c\beta \exp\left(\int_a^t (c - k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right) y_2$$

ce qui équivaut à l'équation $y_2^{(\alpha)} = cy_2$ dont la solution générale est donnée par laformule

$$y_2 = \gamma \exp\left(\int_a^t (c - k_1(\alpha, \tau))\, d\alpha(\tau)\right).$$

Il est clair que y_1 et y_2 sont linéairement dézpendantes. □

2.2 Quelques méthodes de résolution de l'équation homogène

On sait dans le cas classique (correspond à $\alpha = 1$) [9] que connaissant une solution non triviale y de l'équation homgène du second degré, on peut déterminer une deuxième solution linéairement indépendante grâce à la formule

$$z(t) = y(t) \int_a^t \frac{\exp\left(-\int_a^s A(\tau)\, d\tau\right)}{y^2(s)} ds. \tag{2.2.1}$$

La version α-conformable ($\alpha \in]0,\ 1]$) de cette formule est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *Supposons que $\alpha \in]0,\ 1]$ et que la fonction $k_0(\alpha, t)$ est dérivable en tout $t \in [a,\ b]$. Si y est une solution non triviale de l'équation homogène 2.0.1 $(f \equiv 0)$ alors, la fonction*

$$z = y \int_a^t \frac{\exp\left(-\int_a^s \{A(\tau) + 2k_1(\alpha, \tau) + k_0'(\alpha, \tau)\}\, d\alpha(\tau)\right)}{y^2(s)} ds \tag{2.2.2}$$

est aussi une solution de l'équation homogène. De plus, y et z sont linéairement indépendantes.

Proof. Posons

$$w(t) = \exp\left(-\int_a^s \{A(\tau) + 2k_1(\alpha, \tau) + k_0'(\alpha, \tau)\}\, d\alpha(\tau)\right). \tag{2.2.3}$$

On a alors,

$$\forall t \in [a,\ b]: \quad z(t) = y(t) \int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)} ds. \tag{2.2.4}$$

En utilisant les régles de dérivation α-conformables (voir proposition 1.0.7), on montre facilement que

$$w^{(\alpha)}(t) = -\{A(t) + k_1(\alpha, t) + k_0'(\alpha, t)\}\, w(t), \tag{2.2.5}$$

et

$$z^{(\alpha)}(t) = y^{(\alpha)}(t) \int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)} ds + k_0(\alpha, t) \frac{w(t)}{y(t)}. \tag{2.2.6}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left(z^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t) &= \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + y^{(\alpha)}(t)\left(\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds\right)^{(\alpha)} \\
&\quad -k_1(\alpha,t)y^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds \ + k_0^{(\alpha)}(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)} \\
&\quad +k_0(\alpha,t)\left(\frac{w(t)}{y(t)}\right)^{(\alpha)} - k_1(\alpha,t)k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)} \\
&= \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + y^{(\alpha)}(t)\left\{k_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y^2(t)}\right\} \\
&\quad - k_1(\alpha,t)y^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + \{k_1(\alpha,t)k_0(\alpha,t) + k_0(\alpha,t)k_0'(\alpha,t)\}\ \frac{w(t)}{y(t)} \\
&\quad + \ k_0(\alpha,t)\left\{\frac{w^{(\alpha)}(t)y(t) - w(t)y^{(\alpha)}(t)}{y^2(t)}\right\} + k_1(\alpha,t)k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)} \\
&\quad - \ k_1(\alpha,t)k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)} \\
&= \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)} + \\
&\quad \{k_1(\alpha,t)k_0(\alpha,t) + k_0(\alpha,t)k_0'(\alpha,t)\}\ \frac{w(t)}{y(t)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression 2.2.5 de $w^{(\alpha)}$, on obtient finalement,

$$\forall t \in [a,\ b] : \ \left(z^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t) = \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds - k_0(\alpha,t)A(t)\frac{w(t)}{y(t)}. \qquad (2.2.7)$$

D'où, pour tout $t \in [a,\ b]$,

$$\begin{aligned}
\left(z^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t) + A(t)z^{(\alpha)}(t) + B(t)z(t) &= \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds - k_0(\alpha,t)A(t)\frac{w(t)}{y(t)} \\
&\quad + A(t)\left\{y^{(\alpha)}(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds + k_0(\alpha,t)\frac{w(t)}{y(t)}\right\} \\
&\quad + B(t)y(t)\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds \\
&= \left\{\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}(t) + A(t)y^{(\alpha)}(t) + B(t)y(t)\right\}\int_a^t \frac{w(s)}{y^2(s)}ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La fonction z définie par la formule 2.2.2 est donc bien une solution non triviale de l'équation homogène 2.0.1 $(f \equiv 0)$.
Il reste à montrer que les solutions y et z sont linéairement indépendantes. En effet, en utilisant les expressions explicites de z et $z^{(\alpha)}$ (voir formules 2.2.4 et 2.2.6), on voit facilement que pour tout $t \in [a,\ b]$,

$$W_\alpha[y,\ z](t) = y(t)z^{(\alpha)}(t) - y^{(\alpha)}(t)z(t) = k_0(\alpha,t)w(t) \neq 0.$$

Ce qui d'après la proposition 2.1.4 signifie l'indépendance linaire recherchée. □

Proposition 2.2.2. *On suppose que Supposons que $\alpha \in]0,\ 1]$ et que la fonction $k_1(\alpha,t)$ est dérivable et non nulle sur tout $t \in [a,\ b]$. Si y est une solution non triviale de l'équation homogène 2.0.1 $(f \equiv 0)$ et si w est solution de l'équation,*

$$y\left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + [2k_0y' + A(t)y)]\,w^{(\alpha)} - \left[2k_1k_0y' + \left(k_1^2 + A(t)k_1 + k_0\frac{\partial k_1}{\partial t}\right)y\right]w = 0 \qquad (2.2.8)$$

alors, la fonction $z = yw$ est aussi une solution del'équation homogène 2.0.1 $(f \equiv 0)$.

Proof. En utilisant les régles de dérivation α-conformable, on obtient

$$z^{(\alpha)} = y^{(\alpha)}w + yw^{(\alpha)} - k_1yw$$

et

$$\begin{aligned}
\left(z^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} &= \left\{y^{(\alpha)}w + yw^{(\alpha)} - k_1yw\right\}^{(\alpha)} = \left(y^{(\alpha)}w\right)^{(\alpha)} + \left(yw^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - (k_1yw)^{(\alpha)} \\
&= \left\{\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}w + y^{(\alpha)}w^{(\alpha)} - k_1y^{(\alpha)}w\right\} + \left\{y^{(\alpha)}w^{(\alpha)} + y\left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - k_1yw^{(\alpha)}\right\} \\
&\quad - \left\{{k_1}^{(\alpha)}yw + k_1y^{(\alpha)}w + k_1yw^{(\alpha)} - 2k_1^2yw\right\} \\
&= w\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \left\{2w^{(\alpha)} - 2k_1w\right\}y^{(\alpha)} + \left\{\left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - 2k_1w^{(\alpha)} + 2k_1^2w - {k_1}^{(\alpha)}w\right\}y.
\end{aligned}$$

Posons:

$$L(t,z) = \left(z^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)z^{(\alpha)} + B(t)z, \quad t \in [a,\ b]\,.$$

En tenant compte du fait que y est solution del'équation homogène 2.0.1 ($f \equiv 0$), on obtient finalement,

$$\begin{aligned}
L(t,z) &= w\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \left\{2w^{(\alpha)} - 2k_1 w + A(t)w\right\} y^{(\alpha)} + \\
&\quad + \left\{\begin{array}{c} \left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - 2k_1 w^{(\alpha)} + 2k_1^2 w - {k_1}^{(\alpha)} w \\ +A(t)w^{(\alpha)} - A(t)k_1 w + B(t)w \end{array}\right\} y \\
&= w\left\{\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y^{(\alpha)} + B(t)y\right\} + y\left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \left[2y^{(\alpha)} - 2k_1 y + A(t)y\right] w^{(\alpha)} \\
&\quad + \left[-2k_1 y^{(\alpha)} + 2k_1^2 y - {k_1}^{(\alpha)} y - A(t)k_1 y\right] w \\
&= y\left(w^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \left[2k_0 y' + A(t)y\right] w^{(\alpha)} - \left[2k_1 k_0 y' + \left(k_1^2 + A(t)k_1 + k_0 \frac{\partial k_1}{\partial t}\right) y\right] w \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction $z = yw$ est solution de l'équation homogène 2.0.1 ($f \equiv 0$).

□

Considérons maintenant l'équation

$$\beta h\left(hy^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \gamma h y^{(\alpha)} + \delta y = 0, \qquad \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R} \tag{2.2.9}$$

où, h est une fnction continue et strictement positive sur $[a,\ b]$. Dans le cas, $h(t) = t$ et $\alpha = 1$, l'équation 2.2.9 porte le nom d'équation homogène de Cauchy-Euler [9]. Le cas $h(t) = t$ et $\alpha \in]0,\ 1]$ fut traité dans [6]. Dans le présent mémoire, nous appellerons cette équation "équation α-conformable homogène généralisée de Cauchy-Euler. Nous donnons une méthode de résolution de laquelle, on déduira la version α-conformable de la méthode de l'équation caractéristique connue dans le cas classique. Les résultats obtenus dans ce cadre généralisent aussi ceux obtenus dans [6].

Pour tout $r \in \mathbb{C}$, posons

$$z(r,t) = \exp\left(\int_a^t \frac{r - k_1(\alpha,s)\,h(s)}{h(s)} d\alpha\,(s)\right) \quad , \quad w(r,t) = z(r,t)\int_a^t \frac{d\alpha\,(s)}{h(s)}. \tag{2.2.10}$$

Théorème 2.2.3. *Pour la résolution de l'équation 2.2.9, on a:*

1. *Si r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique $\beta r^2 + \gamma r + \delta = 0$ alors, les fonctions $z_1(r,t) = z(r_1,t)$ et $z_2(r,t) = z(r_2,t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.9.*

2. *Si r est la racine double de l'équation caractéristique $\beta r^2 + \gamma r + \delta = 0$ alors, les fonctions $z(r,t)$ et $w(r,t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.9.*

3. *Si $r=\lambda+i\mu$ et $\overline{r}=\lambda-i\mu$ sont les deux racines complexes de l'équation caractéristique $\beta r^2+\gamma r+\delta=0$ alors, les fonctions*

$$\widetilde{z}_1(\lambda,\mu,t)=z(\lambda,t).\cos\left(\mu\int_a^t\frac{d\alpha\left(s\right)}{h(s)}\right)\quad,\quad\widetilde{z}_2(\lambda,\mu,t)=z(\lambda,t).\sin\left(\mu\int_a^t\frac{d\alpha\left(s\right)}{h(s)}\right)\tag{2.2.11}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.9.

Proof. Pour tout réel r, on a

$$\begin{cases} z^{(\alpha)}(r,t)=\left(k_1\left(\alpha,t\right)+\frac{r-k_1(\alpha,t)h(t)}{h(t)}\right)z(r,t) \\ h(t)z^{(\alpha)}(r,t)=rz(r,t) \\ \left(hz^{(\alpha)}(r,t)\right)^{(\alpha)}=r\left(k_1\left(\alpha,t\right)+\frac{r-k_1(\alpha,t)h(t)}{h(t)}\right)z(r,t)\end{cases}\quad,\quad t\in[a,\ b]\,.$$

Par conséquent,

$$\beta h\left(hz^{(\alpha)}(r,t)\right)^{(\alpha)}+\gamma hz^{(\alpha)}(r,t)+\delta z(r,t)=\left(\beta r^2+\gamma r+\delta\right)z(r,t).$$

Donc, si r est une racine réelle ou complexe de l'équation $\beta r^2+\gamma r+\delta=0$ alors, la focnction correspondante $z(r,t)$ est solution de 2.2.9. Ainsi, le cas de deux racines réelles distinctes est résolu. Si on a deux racines complexes (obligatoirement conjuguées), on utilise le fait que si $z(r=\lambda+i\mu,t)$ et $z(\overline{r}=\lambda-i\mu,t)$ sont solutions de 2.2.9 alors, les fonctions

$$\widetilde{z}_1(\lambda,\mu,t)=\frac{z(r,t)+z(\overline{r},t)}{2}\quad,\quad\widetilde{z}_1(\lambda,\mu,t)=\frac{z(r,t)-z(\overline{r},t)}{2i}$$

sont aussi solutions de 2.2.9. Il reste à montrer que dans le cas d'une racine double, la fonction $w(r,t)$ est aussi solution de 2.2.9. En effet, on vérifie facilement que dans ce cas,

$$\beta h\left(hw^{(\alpha)}(r,t)\right)^{(\alpha)}+\gamma hw^{(\alpha)}(r,t)+\delta w(r,t)=\left(2\beta r+\gamma\right)z(r,t).$$

Comme r est une racine double alors, forcément $(2\beta r+\gamma)=0$ ce qui implique que $w(r,t)$ est aussi solution de 2.2.9. Pour montrer l'indépendance linéaire, on vérifie que dans le cas des racines racines distinctes, on a:

$$\forall t\in[a,\ b]:\quad W^{(\alpha)}\left[z_1,z_2\right](t)=\frac{r_2-r_1}{h}z_1z_2\neq0.$$

Pour le cas de la racine double, on a:

$$\forall t\in[a,\ b]:\quad W^{(\alpha)}\left[z,w\right](t)=\frac{z^2}{h}\neq0.$$

Ainsi, dans tous les cas, on a donc indépendance linéaires des solutions correspondantes. □

En prenant $h(t)=1$ théorème 2.2.3, on obtient comme dans [6] le résultat suivant sur la résolution des équations différentielles homogènes α-conformables du second ordre.

Corollaire 2.2.4. *soit l'équation*

$$\beta\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+\gamma y^{(\alpha)}+\delta y=0,\qquad\beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{R}\tag{2.2.12}$$

et soit $\beta r^2+\gamma r+\delta=0$ l'équation caractéristique associée. Alors,

1. *Si r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique alors, les fonctions*

$$z_1(r,t) = \exp\left(\int_a^t (r_1 - k_1(\alpha,s))\, d\alpha(s)\right) \quad , \quad z_2(r,t) = \exp\left(\int_a^t (r_2 - k_1(\alpha,s))\, d\alpha(s)\right)$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.12.

2. *Si r est la racine double de l'équation caractéristique alors, les fonctions*

$$z(r,t) = \exp\left(\int_a^t (r - k_1(\alpha,s))\, d\alpha(s)\right) \quad , \quad w(r,t) = z(r,t). \int_a^t d\alpha(s)$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.12.

3. *Si $r = \lambda + i\mu$ et $\overline{r} = \lambda - i\mu$ sont les deux racines complexes de l'équation caractéristique alors, les fonctions*

$$\begin{cases} \widetilde{z}_1(\lambda,\mu,t) = \exp\left(\int_a^t (r - k_1(\alpha,s))\, d\alpha(s)\right).\cos\left(\mu \int_a^t d\alpha(s)\right) \\ \\ \widetilde{z}_2(\lambda,\mu,t) = \exp\left(\int_a^t (r - k_1(\alpha,s))\, d\alpha(s)\right).\sin\left(\mu \int_a^t d\alpha(s)\right) \end{cases}.$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.2.12.

2.3 Résolution de l'équation non homogène

On se propose maintenant de donner un procédé de résolution de l'équation non homogène 2.0.1:

$$\begin{cases} \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y^{(\alpha)} + B(t)y = f(t), \qquad t \geq a \\ \\ t \geq a\ , \quad \alpha \in]0,\ 1] \end{cases}.$$

Commençons par noter que si z_1 et z_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation non homogène alors, en vertu de la linéarité de la dérivation α-conformable, la fonction $z_h = z_1 - z_2$ est solution de l'équation homogène. On peut donc chercher la solution générale y de l'équation non homogène sous la forme:

$$y = y_h + y_p \tag{2.3.1}$$

où, y_h est une solution de l'équation homogène et y_p est une solution particulière de l'équation non homogène. Un premier pas dans la recheche de la solution générale est donné par le résultat suivant.

Théorème 2.3.1. *Soient y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Soient $u,\ v : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions α-dérivables sur $[a,\ b]$ et vérifiant:*

$$\begin{cases} u^{(\alpha)}y_1 + v^{(\alpha)}y_2 = 0 \\ \\ \left(u^{(\alpha)} - 2k_1(\alpha,t)u\right)y_1^{(\alpha)} + \left(v^{(\alpha)} - 2k_1(\alpha,t)v\right)y_1^{(\alpha)} = f \\ \\ 2k_1^2(\alpha,t) - k_1(\alpha,t) - A(t)k_1(\alpha,t) = 0 \end{cases}. \tag{2.3.2}$$

Alors, la fonction $y = uy_1 + vy_2$ est solution de l'équation non homogène.

Proof. En tenant compte des régles de la dérivation α-conformable et de la première hypothèse de 2.3.2, On obtient

$$\begin{aligned}\left((uy_1+vy_2)^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} &= \left\{\left(u^{(\alpha)}-2k_1u\right)y_1^{(\alpha)}+\left(v^{(\alpha)}-2k_1v\right)y_2^{(\alpha)}\right\}+u\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} \\ &+v\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}-k_1^{(\alpha)}\left(uy_1+vy_2\right)+2k_1^2\left(uy_1+vy_2\right).\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième hypothèse de 2.3.2, on trouve

$$\left((uy_1+vy_2)^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}=f+u\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+v\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}-k_1^{(\alpha)}\left(uy_1+vy_2\right)+2k_1^2\left(uy_1+vy_2\right). \quad (2.3.3)$$

Posons:

$$\mathcal{L}\left(u,v,y_1,y_2\right)=\left((uy_1+vy_2)^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+A(t)\left(uy_1+vy_2\right)^{(\alpha)}+B(t)\left(uy_1+vy_2\right). \quad (2.3.4)$$

Pour montrer que $y=uy_1+vy_2$ est solution de l'équation non homogène, il suffit donc de montrer que

$$\mathcal{L}\left(u,v,y_1,y_2\right)=f.$$

En utilisant 2.3.3, 2.3.2 et le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(u,v,y_1,y_2\right) &= f+u\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+v\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}-k_1^{(\alpha)}\left(uy_1+vy_2\right) \\ &+2k_1^2\left(uy_1+vy_2\right)+A(t)\left(uy_1+vy_2\right)^{(\alpha)}+B(t)\left(uy_1+vy_2\right) \\ &= f+u\left\{\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+A(t)y_1^{(\alpha)}+B(t)y_1\right\} \\ &+v\left\{\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}+A(t)vy_2^{(\alpha)}+B(t)y_2\right\} \\ &+\left(2k_1^2-k_1^{(\alpha)}-A(t)k_1\right)\left(uy_1+vy_2\right) \\ &= f.\end{aligned}$$

□

Notons que si $\alpha=1$ alors, le théorème 2.3.1 devient:

Théorème 2.3.2. *Soient y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Soient $u,\ v:[a,\ b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $[a,\ b]$ et vérifiant:*

$$\left\{\begin{array}{l} u'y_1+v'y_2=0 \\ u'y_1'+v'y_2'=f \end{array}\right. . \quad (2.3.5)$$

Alors, la fonction $y=uy_1+vy_2$ est solution de l'équation non homogène.

Ce résultat est un outil classique utilisé dans la recherche des solutions des équations différentielles ordinaires du second ordre [9, 12].
Le résultat que nous donnons maintenons permet d'établir le lien entre les solutions de l'équation homogène et les solutions particulières de l'équation non homogène. On notera aussi l'analogie avec le cas de dérivation usuelle [9, 12].

Théorème 2.3.3. *Si y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène et si le second membre f est une fonction continue sur $[a,\ b]$ alors, la fonction*

$$y_p(t) = \int_a^t \frac{y_2(t)y_1(s) - y_1(t)y_2(s)}{W_\alpha[y_1,\ y_2](s)} f(s)d\alpha(s), \quad t \in [a,\ b] \tag{2.3.6}$$

est une solution particulière de l'équation non homogène.

Proof. Posons:

$$\forall t \in [a,\ b]: \quad u(t) = -\int_a^t \frac{y_2(s)f(s)}{W_\alpha[y_1,\ y_2](s)} d\alpha(s) \quad , \quad v(t) = \int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{W_\alpha[y_1,\ y_2](s)} d\alpha(s).$$

Il est clair que

$$y_p = uy_1 + vy_2 \quad , \quad u^{(\alpha)} = k_1 u - \frac{y_1\ f}{W_\alpha[y_1,\ y_2]}, \quad v^{(\alpha)} = k_1 v + \frac{y_2\ f}{W_\alpha[y_1,\ y_2]}.$$

En utilisant ces trois formules ainsi que la définition du wronksian $W_\alpha[y_1,\ y_2]$, on établit facilement que

$$y_p^{(\alpha)} = uy_1^{(\alpha)} + vy_2^{(\alpha)} \quad , \quad \left(y_p^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} = f + u\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + v\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left(y_p^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y_p^{(\alpha)} + B(t)y_p &= \left\{f + u\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + v\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}\right\} + A(t)\left\{uy_1^{(\alpha)} + vy_2^{(\alpha)}\right\} \\
&\quad + B(t)\{uy_1 + vy_2\} \\
&= f + u\left\{\left(y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y_1^{(\alpha)} + B(t)y_1\right\} \\
&\quad + v\left\{\left(y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + A(t)y_2^{(\alpha)} + B(t)y_2\right\} \\
&= f + 0 + 0 = f.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.4. *La condition de continuité du second membre f est exigée pour assurer l'existence de 2.3.6. On peut la remplacer par la condition d'existence pour tout $t \in [a,\ b]$ des deux intégrales*

$$\int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{W_\alpha[y_1,\ y_2](s)} d\alpha(s) \qquad et \qquad \int_a^t \frac{y_2(s)f(s)}{W_\alpha[y_1,\ y_2](s)} d\alpha(s).$$

Chapter 3

OPÉRATEUR DE STURM-LIOUVILLE

3.1 Position du problème

Considérons le problème de Sturm-Liouvoille fractionnaire conformable (noté PSLCF dorénavant) suivant:

$$\begin{cases} \left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y(t) = -\lambda r(t)y \\ \forall t \in [0,\ \pi]: \quad p(t) \succ 0, \quad r(t) \succ 0 \\ \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in]0,\ 1] \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où, $p,\ p^{(\alpha)},\ q$ et le poids $r$sont des fonctions réelles continues sur $]0,\ \pi[$. Nous discuterons ce problème sous les conditions aux bornes suivantes:

$$\begin{cases} c_1 y(0) + c_2 y^{(\alpha)}(0) = 0, \qquad c_1^2 + c_2^2 \succ 0 \\ r_1 y(\pi) + r_2 y^{(\alpha)}(\pi) = 0, \qquad r_1^2 + r_2^2 \succ 0 \end{cases}. \tag{3.1.2}$$

Définissons l'opérateur différentiel fractionnaire, conformable $L_{p\ q}^{(\alpha)}$ comme suit:

$$\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y) = \left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y(t). \tag{3.1.3}$$

Dans ce cas, la première équation de 3.1.1 s'écrit sous la forme:

$$\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y) = -\lambda r(t)y \tag{3.1.4}$$

Définition 3.1.1. *Soient $\alpha \in]0,\ 1]$ et y une fonction définie sur $[0,\ \pi]$. On dira que $y \in C_\alpha^2([0,\ \pi])$ si, y et $y^{(\alpha)}$ sont α-différentiables sur $[0,\ \pi]$ et $\left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} \in C^1([0,\ \pi])$.*

Définition 3.1.2. *On appellera paire propre du problème posé tout couple $(\lambda,\ y)$ constitué d'un scalaire λ et d'une fonction $y \in C_\alpha^2([0,\ \pi])$ et vérifiant 3.1.1 et 3.1.2. Dans ce cas, la fonction y est dite fonction propre associée à la valeur propre λ.*

Remarque 3.1.3. *Notons qu'en posant $\alpha = 1$, on retrouve le problème de Sturm-Liouville classique [20].*

3.2 Quelques résultats généraux

Théorème 3.2.1. *(Version fractionnaire de l'identité de Lagrange). Si y_1 et y_2 sont deux fonctions de classe $C_\alpha^2([0,\ \pi])$ alors,*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left\{y_2\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_1\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2)\right\} e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) &= -\left\{p(t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\right\}_0^\pi \\ &\quad -\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t).\end{aligned}$$

Proof. Commençons par rappeler que conformément aux notations des deux chapitres précédents,

$$W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2] = y_1y_2^{(\alpha)} - y_2y_1^{(\alpha)}$$

et

$$e_0(s,t) = \exp\left(-\int_t^s \frac{k_1(\alpha,\tau)}{k_0(\alpha,\tau)}d\tau\right) := \exp\left(-\int_t^s k_1(\alpha,\tau)d\alpha(\tau)\right).$$

D'autre part, toutes les fonctions sous le signe d'intégral dans l'énoncé du thorème sont continues, ce qui implique que ces intégrales ainsi que celles qui vont figurer dans la preuve existent. On a,

$$\begin{aligned}y_2\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_1\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2) &= y_2\left\{\left(p(t)y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y_1(t)\right\} - y_1\left\{\left(p(t)y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y_2(t)\right\} \\ &= y_2\left(p(t)y_1^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} - y_1\left(p(t)y_2^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

D'où, en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(t)g^{(\alpha)}(t)e_0(b,t)\,d\alpha(t) = \{f(t)g(t)e_0(b,t)\}_a^b - \int_a^b g(t)\left\{f^{(\alpha)}(t) - k_1(\alpha,t)f(t)\right\} e_0(b,t)\,d\alpha(t),$$

on obtient pour la quantité

$$A(y_1,y_2) = \int_0^\pi \left\{y_2\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_2\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1)\right\} e_0(\pi,t)\,d\alpha(t),$$

$$\begin{aligned}A(y_1,y_2) &= \left\{y_2p(t)y_1^{(\alpha)}e_0(\pi,t)\right\}_0^\pi - \int_0^\pi p(t)y_1^{(\alpha)}\left\{y_2^{(\alpha)} - k_1(\alpha,t)y_2\right\} e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) \\ &\quad -\left\{y_1p(t)y_2^{(\alpha)}e_0(\pi,t)\right\}_0^\pi + \int_0^\pi p(t)y_2^{(\alpha)}\left\{y_1^{(\alpha)} - k_1(\alpha,t)y_1\right\} e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) \\ &= \left\{p(t)\left\{y_2y_1^{(\alpha)} - y_1y_2^{(\alpha)}\right\} e_0(\pi,t)\right\}_0^\pi + \int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)\left\{y_1^{(\alpha)}y_2 - y_1y_2^{(\alpha)}\right\} e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) \\ &= -\left\{p(t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\right\}_0^\pi - \int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.2. *Si y_1 et y_2 vérifient les conditions aux bornes 3.1.2 alors,*

$$\int_0^\pi \left\{ y_2 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_2 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) \right\} e_0(\pi, t)\, d\alpha(t) = -\int_0^\pi p(t) k_1(\alpha, t) W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t) e_0(\pi, t)\, d\alpha(t).$$

Proof. D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que sous ces conditions, on a:

$$\left\{ p(t) W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t) e_0(\pi, t) \right\}_0^\pi = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\{ p(t) W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t) e_0(\pi, t) \right\}_0^\pi &= p(\pi) \left\{ y_1(\pi) y_2^{(\alpha)}(\pi) - y_2(\pi) y_1^{(\alpha)}(\pi) \right\} \\ &\quad - p(0) \left\{ y_1(0) y_2^{(\alpha)}(0) - y_2(0) y_1^{(\alpha)}(0) \right\} e_0(\pi, 0). \end{aligned}$$

On peut sans perte de généralité supposer que dans les conditions 3.1.2, $c_2 r_2 \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \left\{ p(t) W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t) e_0(\pi, t) \right\}_0^\pi &= p(\pi) \left\{ -\frac{r_1}{r_2} y_1(\pi) y_2(\pi) + \frac{r_1}{r_2} y_1(\pi) y_2(\pi) \right\} \\ &\quad - p(0) \left\{ -\frac{c_1}{c_2} y_1(0) y_2(0) + \frac{c_1}{c_2} y_1(0) y_2(0) \right\} e_0(\pi, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.3. *Les valeurs propres du problème 3.1.1, 3.1.2 sont simples. En d'autres termes, deux fonctions propres associées à une même valeur propre, sont nécessairement linéairement dépendantes.*

Proof. Supposons qu'à une certaine valeur propre λ correspondent deux fonctions propres y_1 et y_2. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} 0 &= y_2 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_1 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2) = y_2 \left(p(t) y_1^{(\alpha)} \right)^{(\alpha)} - y_1 \left(p(t) y_2^{(\alpha)} \right)^{(\alpha)} \\ &= y_2 \left\{ p^{(\alpha)}(t) y_1^{(\alpha)} + p(t) \left(y_1^{(\alpha)} \right)^{(\alpha)} - k_1(\alpha, t) p(t) y_1^{(\alpha)} \right\} \\ &\quad - y_1 \left\{ p^{(\alpha)}(t) y_2^{(\alpha)} + p(t) \left(y_2^{(\alpha)} \right)^{(\alpha)} - k_1(\alpha, t) p(t) y_2^{(\alpha)} \right\} \\ &= p^{(\alpha)}(t) \left\{ y_2 y_1^{(\alpha)} - y_1 y_2^{(\alpha)} \right\} + p(t) \left\{ y_2 y_1^{(\alpha)} - y_1 y_2^{(\alpha)} \right\}^{(\alpha)} \\ &= \left\{ p(t) \left(y_2 y_1^{(\alpha)} - y_1 y_2^{(\alpha)} \right) \right\}^{(\alpha)} + k_1(\alpha, t) p(t) \left(y_2 y_1^{(\alpha)} - y_1 y_2^{(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a finalement l'équation différentielle conformable

$$\{ p(t) W_\alpha(y_1, y_2) \}^{(\alpha)} + k_1(\alpha, t) p(t) W_\alpha(y_1, y_2) = 0 \tag{3.2.1}$$

L'équation 3.2.1 admet une solution de forme générale (voir chapitre précédent)

$$p(t)W_\alpha(y_1,y_2)(t) = p(0)W_\alpha(y_1,y_2)(t)\exp\left(\int_0^t -2k_1(\alpha,\tau)d\alpha(\tau)\right). \tag{3.2.2}$$

Comme vu dans la preuve du corollaire 3.2.2, les conditions aux bornes nous donnent que les fonctions $W_\alpha(y_1,y_2)(t)$ et $p(t)W_\alpha(y_1,y_2)(t)$ sont identiquement nulles sur $[0,\ \pi]$. Par conséquent, d'après résultat chapitre précédent, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes. Le théorème est ainsi démontré. □

Définition 3.2.4. *Deux fonctions f et g sont dites (r,α)-orthogonales si,*

$$\int_0^\pi f(t)r(t)g(t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = 0.$$

En d'autres termes, les fonctions f et $\overline{g}$ sont orthogonales dans l'espace à poids $L^2\left([0,\ \pi],\ \frac{r(t)e_0(\pi,t)}{k_0(\alpha,t)}dt\right)$.

Théorème 3.2.5. *Deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes du problème 3.1.1, 3.1.2 sont (r,α)-orthogonales si et seulement si,*

$$\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = 0.$$

Proof. Soient y_1 et y_2 deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 du problème 3.1.1, 3.1.2. On a alors,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) = -\lambda_1 r(t)y_1 \\ \\ \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2) = -\lambda_2 r(t)y_2 \end{cases} \Longrightarrow y_1r(t)y_2 = \frac{y_2\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_1\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2)}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

D'où, en utilisant le corollaire 3.2.2, on obtient

$$\int_0^\pi f(t)r(t)g(t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = \int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = 0$$

si et seulement si,

$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y_1,\ y_2](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Théorème 3.2.6. *Une valeur propre λ du problème 3.1.1, 3.1.2 est réelle si et seulemnt si, la fonction correspondante y vérifie la condition*

$$\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}[y,\ \overline{y}](t)e_0(\pi,t)\,d\alpha(t) = 0$$

Proof. Supposons que y est une fonction propre associée à la valeur propre réelle λ du problème 3.1.1, 3.1.2. On a,

$$\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y) = -\lambda r(t)y \Longleftrightarrow \left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y(t) = -\lambda r(t)y.$$

D'où, en passant au conjugué complexe

$$-\lambda r(t)\overline{y} = \overline{-\lambda r(t)y} = \overline{\left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y(t)} = \left(p(t)\overline{y}^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)\overline{y}(t).$$

Cela signifie que la fonction $\overline{y}$ est aussi une fonction propre associé à la même valeur propre λ. Comme les valeurs propres sont simples (voir théorème 3.2.3) alors, il existe une constante c telle que $\overline{y} = cy$. Par conséquent,

$$\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}\left[y,\ \overline{y}\right](t)e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) = c\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}\left[y,\ y\right](t)e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) = 0.$$

Inversement, supposons que le couple (λ, y) est une paire propre du problème 3.1.1, 3.1.2 telle que

$$\int_0^\pi p(t)k_1(\alpha,t)W^{(\alpha)}\left[y,\ \overline{y}\right](t)e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) = 0.$$

En raisonnant de manière analogue au début de la preuve de la condition nécessaire, on peut facilement vérifier que le couple $\left(\overline{\lambda}, \overline{y}\right)$ est aussi une paire propre du problème 3.1.1, 3.1.2. Si on suppose que $\lambda \neq \overline{\lambda}$ alors, en utilisant la relation

$$yr(t)\overline{y} = \frac{\overline{y}\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y) - y\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(\overline{y})}{\overline{\lambda} - \lambda},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |y(t)|^2\, r(t)e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) &= \int_0^\pi y(t)r(t)\overline{y}(t)e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}-\lambda}\int_0^\pi \left\{\overline{y}\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y) - y\mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(\overline{y})\right\} e_0\left(\pi,t\right)d\alpha(t) = 0.\end{aligned}$$

Puisque on a

$$\frac{r(t)e_0\left(\pi,t\right)}{k_0(\alpha,t)} \succ 0$$

alors, forcément y est identiquement nulle sur tout $[0,\ \pi]$. Or, ceci contredit l'hypothèse de paire propre émise sur le couple (λ, y). $\square$

Théorème 3.2.7. *Si $(\lambda,\ y)$ est une paire propre du problème 3.1.1, 3.1.2 alors, on a la formule*

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi \left\{p(t)\left(y^{(\alpha)}\right)^2 - k_1\left(\alpha,t\right)yy^{(\alpha)} - q(t)y^2\right\} e_0(\pi,t)d\alpha(t)}{\int_0^\pi r(t)y^2 e_0(\pi,t)d\alpha(t)}. \tag{3.2.3}$$

Proof. On a par hypothèse,

$$\left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + q(t)y = -\lambda r(t)y.$$

En multipliant par y et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
-\lambda \int_0^\pi r(t)y^2 e_0(\pi,t)d\alpha(t) &= \int_0^\pi y\left(p(t)y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} e_0(\pi,t)d\alpha(t) + \int_0^\pi q(t)y^2 e_0(\pi,t)d\alpha(t) \\
&= \left\{yp(t)y^{(\alpha)}\right\}_0^\pi - \int_0^\pi p(t)y^{(\alpha)}\left\{y^{(\alpha)} - k_1(\alpha,t)y\right\} e_0(\pi,t)d\alpha(t) \\
&\quad + \int_0^\pi q(t)y^2 e_0(\pi,t)d\alpha(t) \\
&= -\int_0^\pi p(t)y^{(\alpha)}\left\{y^{(\alpha)} - k_1(\alpha,t)y\right\} e_0(\pi,t)d\alpha(t) + \int_0^\pi q(t)y^2 e_0(\pi,t)d\alpha.
\end{aligned}$$

D'où, le résultat recherché. □

Remarque 3.2.8. *En posant $\alpha = 1$, on retrouve un résultat classique de la théorie des opérateurs de Sturm-Liouville, connu sous le nom de quotient de Rayleigh. Dans notre cas, on appellera ce résultat "quotient de Rayleigh fractionnaire conformable".*

3.3 A propos des valeurs propres

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les fonctions $t \longmapsto k_1(\alpha,t)$ est identiquement nulles pour tout $\alpha \in]0,\ 1]$. Dans ce cas, on peut montrer en tenant compte du corollaire 3.2.2 que l'identité de Lagrange devient

$$\int_0^\pi \left\{y_2 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_1) - y_1 \mathcal{L}_{p\ q}^{(\alpha)}(y_2)\right\} d\alpha(t) = 0 \tag{3.3.1}$$

pour toutes fonctions y_1 et y_2 vérifiant les conditions aux bornes 3.1.2. De même, la condition de $(r,\ \alpha)$-orthogonalité devient

$$\int_0^\pi f(t)r(t)g(t)(t)d\alpha(t) = 0 \tag{3.3.2}$$

Pour le quotient de Rayleigh, la formule 3.2.3 devient,

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi \left\{p(t)\left(y^{(\alpha)}\right)^2 - q(t)y^2\right\} d\alpha(t)}{\int_0^\pi r(t)y^2 d\alpha(t)} \tag{3.3.3}$$

Il s'ensuit aussi d'après les théorèmes 3.2.6 et 3.2.5 que toutes les valeurs propres du problème 3.1.1, 3.1.2 sont réelles et que deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distintes sont (r,α)-orthogonales. On se propose dans cette section de donner des méthodes variationnelles pour caractériser les valeurs propres de l'opérateur $L_{p\ q}^{(\alpha)}$, $\alpha \in]0,\ 1]$.

Lemme 3.3.1. *(fondamental). Soit f une fonction continue sur l'intervalle fini $[a,\ b]$. On suppose que*

$$\int_a^b f(t)g(t)d\alpha\,(t) = 0 \tag{3.3.4}$$

pour toute fonction $g \in C^1([a,\ b])$ vérifiant $g(a) = g(b) = 0$. Alors, f est identiquement nulle sur $[a,\ b]$.

Proof. La formule 3.3.4 s'écrit sous la forme

$$\int_a^b \frac{f(t)}{k_0(\alpha, t)} g(t)dt = 0. \tag{3.3.5}$$

Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in]a,\ b[$ tel que $f(t_0) \neq 0$ (par exemple, $f(t_0) \succ 0$). Par continuité de f, il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que

$$t \in]t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon[\Longrightarrow f(t) \succ 0.$$

Considérons la fonction g_ε définie sur $[a,\ b]$ par:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t - t_0 - \varepsilon)^2 (t - t_0 + \varepsilon)^2 & si \quad t \in]t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon[\\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

On vérifie facilement que $g_\varepsilon \in C^1([a,\ b])$ et $g_\varepsilon(a) = g_\varepsilon(b) = 0$. Par hypothèse du lemme, on doit avoir

$$\int_a^b \frac{f(t)}{k_0(\alpha, t)} g_\varepsilon(t)dt = 0.$$

Or, le calcul direct nous donne

$$\int_a^b \frac{f(t)}{k_0(\alpha, t)} g_\varepsilon(t)dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \frac{f(t)}{k_0(\alpha, t)} (t - t_0 - \varepsilon)^2 (t - t_0 + \varepsilon)^2 dt \succ 0.$$

Nous aboutissons donc à une contradiction. Par conséquent, la fonction f est identiquement nulle sur $[a,\ b]$. □

Proposition 3.3.2. *Soit $H(t, u, v)$ une fonction réelle de classe $C^1\left([a,\ b] \times \mathbb{R}^2\right)$ et soit y une fonction définie sur $[a,\ b]$ et vérifiant:*

a. *y est α-différentiable sur $[a,\ b]$,*

b. *La fonction $t \longmapsto \frac{\partial H}{\partial v}(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t))$ est α-différentiable sur $[a,\ b]$.*

Si y est un point d'éxtrémum de la fonctionnelle

$$G(y) = \int_a^b H(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t))d\alpha(t)$$

alors, on a l'équation d'Euler-Lagrange suivante

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t)) - \left(\frac{\partial H}{\partial v}(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t))\right)^{(\alpha)} = 0 \tag{3.3.6}$$

Proof. Soit z une fonction-point d'extrémum pour la fonctionnelle G sur $[a,\ b]$ et vérifiant les conditions a. et b. de la proposition. Définissons la famille de fonctions

$$y_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon\eta(t)\ , \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

où, la fonction $\eta \in C^1([a,\ b])$ et vérifie $\eta(a) = \eta(b) = 0$.
Chaque fonction y_ε est α-différentiable sur $[a,\ b]$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{c} y_\varepsilon^{(\alpha)}(t) = z^{(\alpha)}(t) + \varepsilon\eta^{(\alpha)}(t) \ \ ,\ t \in [a,\ b] \\ \\ y_\varepsilon(a) = y_\varepsilon(b) \end{array} \right. .$$

Puisque la fonction z est un point d'extrémum pour la fonctionnelle G alors, la différentielle de Gateaux $\delta G(z)$ est identiquement nulle. Cela implique

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(G(y_\varepsilon) - G(z)\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_a^b H(t,\ y_\varepsilon(t),\ y_\varepsilon^{(\alpha)}(t))d\alpha(t) - \int_a^b H(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))d\alpha(t)\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \left\{H(t,\ z(t) + \varepsilon\eta(t),\ z^{(\alpha)}(t) + \varepsilon\eta^{(\alpha)}(t)) - H(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))\right\} d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \eta(t)\frac{\partial H}{\partial u}(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))d\alpha(t) + \int_a^b \eta^{(\alpha)}(t)\frac{\partial H}{\partial v}(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))d\alpha(t).
\end{aligned}$$

Après intégration par parties de la seconde intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \eta(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))d\alpha(t) + \left\{\eta(t)\frac{\partial F}{\partial v}(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t))\right\}_a^b \\
&\quad - \int_a^b \eta(t)\left(\frac{\partial F}{\partial v}(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t))\right)^{(\alpha)} d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial u}(t,\ z(t),\ z^{(\alpha)}(t)) - \left(\frac{\partial F}{\partial v}(t,\ y(t),\ y^{(\alpha)}(t))\right)^{(\alpha)}\right\}\eta(t)d\alpha(t).
\end{aligned}$$

En appliquant finalement le lemme fondamental 3.3.1, on trouve l'équation d'Euler-Lagrange recherchée. □

Soit maintenant

$$D^{(\alpha)}(p, q, r) = \left\{y \in C_\alpha^2([0,\ \pi]) : y(0) = y(\pi) = 0\right\}.$$

Comme conséquence immédiate de la proposition 3.3.2, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.3. *Soit λ un nombre réel. On suppose que les fonctions p , q et r sont $C^1([0,\ \pi])$. Si une fonction $y_\lambda \in D^{(\alpha)}(p,q,r)$ minimise la fonctionnelle*

$$G_\lambda(y) = \int_0^\pi H_\lambda(t, y(t), y^{(\alpha)}(t))d\alpha(t), \quad y \in D^{(\alpha)}(p,q,r), \quad H_\lambda(t,u,v) = p(t)v^2 - (q(t) + \lambda r(t))\, u^2$$

alors, le couple $(\lambda,\ y_\lambda)$ est une paire propre du problème 3.1.1, 3.1.2.

Proof. Les égalités

$$\begin{cases} \frac{\partial H_\lambda}{\partial t}(t,u,v) = p'(t)v^2 - (q(t) + \lambda r(t))'\, u^2, \\ \frac{\partial H_\lambda}{\partial u}(t,u,v) = -2\,(q(t) + \lambda r(t))\, u, \\ \frac{\partial H_\lambda}{\partial v}(t,u,v) = 2p(t)v \end{cases}$$

ainsi que les hypothèses émises sur les fonctions p, q et r montrent que toutes dérivées partielles existent et sont continues. Par conséquent, H_λ est $C^1\left([0,\ \pi] \times \mathbb{R}^2\right)$. D'autre part, $y \in D^{(\alpha)}(p,q,r)$ implique que y est α-différentiable en même temps que la fonction

$$t \longmapsto \frac{\partial H_\lambda}{\partial v}(t, y(t), y^{(\alpha)}(t)) = 2p(t)y^{(\alpha)}(t).$$

Ainsi, toutes les conditions de la proposition 3.3.2 sont vérifiées. L'équation d'Euler-Lagrange nous donne

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_\lambda}{\partial u}(t,\ y_\lambda(t),\ y_\lambda^{(\alpha)}(t)) - \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial v}(t,\ y_\lambda(t),\ y_\lambda^{(\alpha)}(t))\right)^{(\alpha)} \\ &= -2\,(q(t) + \lambda r(t))\, y_\lambda(t) - \left(2p(t)y_\lambda^{(\alpha)}(t)\right)^{(\alpha)} \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à,,

$$\left(p(t)y_\lambda^{(\alpha)}(t)\right)^{(\alpha)} + q(t)y_\lambda(t) = -\lambda r(t)y_\lambda(t).$$

□

Corollaire 3.3.4. *La valeur $\lambda_1 := \lambda$ du théorème précédent est la plus petite des valeurs propres du problème 3.1.1, 3.1.2.*

Proof. Soit $(\mu,\ y_\mu)$ est une paire propre quelconque du problème 3.1.1, 3.1.2. D'après la définition 3.1.2, c'est un élément de l'espace $D^{(\alpha)}(p,q,r)$. Par conséquent,

$$\min_{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r)} G_\lambda(y) = G_\lambda(y_\lambda) = 0 \leq G_\lambda(y_\mu) = (\mu - \lambda)\int_0^\pi r(t)y_\mu^2 d\alpha(t),$$

ce qui donne le résultat recherché. □

Remarque 3.3.5. *Pour trouver la seconde valeur propre λ_2, on utilise le fait que deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes sont $(r,\ \alpha)$-orthogonales. Par conséquent, sous conditions de validité des hypothèses émises sur les fonctions p, q et r dans le théorème 3.3.3, la paire propre $(\lambda_2,\ y_2)$ devra satisfaire la condition*

$$0 = G_{\lambda_2}(y_2) = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ y\ \perp\ y_1}} G_{\lambda_2}(y).$$

D'une manière générale, la paire $(\lambda_n,\ y_n)$ devra satisfaire la condition

$$0 = G_{\lambda_2}(y_2) = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ y\ \perp\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n\ -\ 1}}} G_{\lambda_2}(y).$$

Remarque 3.3.6. *Soit*

$$F(t,u,v) = p(t)v^2 - q(t)u^2.$$

Il est clair que

$$H_\lambda(t,u,v) = F(t,u,v) - \lambda r(t)u^2$$

et

$$G_\lambda(y) = J\,(y) - \lambda I(y).$$

avec,

$$J\,(\lambda) = \int_0^\pi F(t,y,y^{(\alpha)})d\alpha(t)\ ,\quad I(y) = \int_0^\pi r(t)y^2(t)d\alpha(t).$$

Il est clair que si y est une fonction propre associée à λ alors, $I(y) \neq 0$. Donc, si y_1 est une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 alors, la fonction $\widetilde{y_1} = \frac{y_1}{\sqrt{I(y_1)}}$ est aussi une valeur propre associée à la même première valeur propre λ_1. De plus, $I(\widetilde{y_1}) = 1$. D'autre part,

$$0 = \min_{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r)} G_{\lambda_1}(y) = G_{\lambda_1}(y_1) = 0 \Longrightarrow \int_0^\pi F(t,y_1,y_1^{(\alpha)})d\alpha(t) = \lambda_1 I(y_1).$$

D'où,

$$\lambda_1 = \frac{1}{I(y_1)}\int_0^\pi F(t,y_1,y_1^{(\alpha)})d\alpha(t) = \int_0^\pi F(t,\widetilde{y_1},(\widetilde{y_1})^{(\alpha)})d\alpha(t).$$

Cette dernière formule signifie que

$$\lambda_1 = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ I(y)\ =\ 1}} \int_0^\pi F(t,y,y^{(\alpha)})d\alpha(t) = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ I(y)\ =\ 1}} J(y). \tag{3.3.7}$$

De manière analogue,

$$\lambda_n = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ I(y)\ =\ 1,\ \ y\ \perp\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n\ -\ 1}}} \int_0^\pi F(t,y,y^{(\alpha)})d\alpha(t) = \min_{\substack{y\ \in\ D^{(\alpha)}(p,q,r) \\ I(y)\ =\ 1,\ \ y\ \perp\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n\ -\ 1}}} J(y). \tag{3.3.8}$$

Ce sont ces formules que nous utiliserons dans ce qui suit.

Exemple 3.3.7. *Considérons le problème de Sturm-Liouville suivant*

$$\begin{cases} \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)} + \lambda y = 0 \\ \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}\quad,\quad t \in [0,\ \pi]\,. \tag{3.3.9}$$

Dans ce cas, on a

$$p = r \equiv 1,\quad q \equiv 0,\quad L_{pq}^{(\alpha)}\,(y) = \left(y^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}. \tag{3.3.10}$$

D'après la formule 3.3.3, toutes les valeurs propres de ce problème sont strictement positives (c'est à dire qu'on peut supposer $\lambda \succ 0$). L'équation caractéristique de l'équation diférentielle 3.3.9 qui est $r^2 + \lambda = 0$ admet deux racines complexes $i\sqrt{-\lambda}$ et -$i\sqrt{-\lambda}$. D'après le corollaire 2.2.4, toute solution de l'équation 3.3.9 est de la forme:

$$z(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\int_0^t d\alpha(s)\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\int_0^t d\alpha(s)\right).$$

Les conditions aux bornes montrent que $c_2 = 0$, que les valeurs $(\lambda_n)_n$ et les fonctions propres associées $(y_n)_n$ sont données par les formules:

$$\lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{\left(\int_0^\pi d\alpha(s)\right)^2} \quad , \quad y_n(t) = \sin\left(n\pi \times \frac{\int_0^t d\alpha(s)}{\int_0^\pi d\alpha(s)}\right) \quad , \quad n \geq 1. \tag{3.3.11}$$

Notons enfin qu'en posant $k_0(\alpha, t) = t^{1-\alpha}$, $\alpha \in]0,\ 1]$, on retrouve tous les résultats obtenus dans [5].

3.4 Minimisation de la fonctionnelle J

Le théorème 3.3.3 du paragraphe précédent et les deux remarques le suivant, supposent l'existence du minimum pour la fonctionnelle $G_\lambda(y)$ ou ce qui est équivalent celui de la fonctionnell J définie par la formule 3.4.1. Dans le présent paragraphe, nous prouvons que sous certaines conditions, le minimum de la fonctionnelle J existe réellement et donnerons un procédé de calcul de la première valeur propre.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les fonctions $k_0(\alpha, t)$ et $r(t)$ sont $C^2([0,\ \pi])$. Rappelons aussi que

$$J(y) = \int_0^\pi \left\{p(t)\left(y^{(\alpha)}\right)^2 - q(t)y^2\right\} d\alpha(t), \qquad y \in D^{(\alpha)}(p, q, r), \tag{3.4.1}$$

$$I(y) = \int_0^\pi r(t)y^2 d\alpha(t) = 1, \qquad y \in D^{(\alpha)}(p, q, r). \tag{3.4.2}$$

et

$$D^{(\alpha)}(p, q, r) = \left\{y \in C_\alpha^2([0,\ \pi]) : y(0) = y(\pi) = 0\right\}. \tag{3.4.3}$$

Proposition 3.4.1. *La fonctionnelle J est bornée inférieurement sur l'ensemble $I(y) = 1$. En d'autres termes,*

$$-\infty \prec \inf_{I(y)=1} J(y). \tag{3.4.4}$$

Proof. Puisque la fonction p est strictement positive sur $[0,\ \pi]$ alors,

$$\begin{aligned} J(y) &\geq -\int_0^\pi q(t)y^2 d\alpha(t) = -\int_0^\pi \frac{q(t)}{r(t)} r(t)y^2 d\alpha(t) \\ &\geq -\max_{0 \leq t \leq \pi} \frac{q(t)}{r(t)} \int_0^\pi r(t)y^2 d\alpha(t) = -\max_{0 \leq t \leq \pi} \frac{q(t)}{r(t)} =: M_0 \succ -\infty. \end{aligned}$$

□

Pour tout naturel $n \geq 1$, posons:

$$\Lambda_n = \left\{ y_n(t) = \sqrt{\frac{k_0(\alpha,\ t)}{r(t)}} \sum_{j\ =\ 1}^{n} \beta_j \sin(jt) : \quad \beta_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.4.5}$$

Nous allons commencer par minimiser la fonctionnelle J sur chacun des ensembles Λ_n sous la condition $I(y_n) = 1$. Pour cela, notons tout d'abord que

$$\forall n \geq 1 :\ y_n \in \Lambda_n$$

et que

$$I(y_n) = 1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \sum_{j\ =\ 1}^{n} \beta_j^2 = 1. \tag{3.4.6}$$

Soit $[\beta]_n = (\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)$. Alors, pour tout $y_n \in \Lambda_n$,

$$J(y_n) = \sum_{j,\ s\ =\ 1}^{n} \beta_j \beta_s \int_0^\pi \left\{ \begin{array}{c} p(t) \left(\sqrt{\frac{k_0(\alpha,\ t)}{r(t)}} \sin(jt) \right)^{(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{k_0(\alpha,\ t)}{r(t)}} \sin(st) \right)^{(\alpha)} \\ -\ q(t) \frac{k_0(\alpha,\ t)}{r(t)} \sin(jt) \sin(st) \end{array} \right\} d\alpha(t) := \mathcal{J}([\beta]_n). \tag{3.4.7}$$

La fonction $\mathcal{J}$ ainsi définie est continue sur le sous-ensemble compact de Λ_n, caractérisé par la seconde partie de l'équivalence 3.4.6. Par conséquent, sur ce sous- ensemble, elle atteint son minimum $\lambda_n^{(1)}$ en un certain $\left[\beta^{(1)}\right]_n = \left(\beta_1^{(1)},\ \cdots,\ \beta_n^{(1)}\right)$. En d'autres termes, il existe $\left[\beta^{(1)}\right]_n = \left(\beta_1^{(1)},\ \cdots,\ \beta_n^{(1)}\right)$ vérifiant

$$\mathcal{I}(\left[\beta^{(1)}\right]_n) := \frac{\pi}{2} \sum_{j\ =\ 1}^{n} \left(\beta_j^{(1)}\right)^2 = 1 \quad \wedge \quad \mathcal{J}(\left[\beta^{(1)}\right]_n) = \min_{\frac{\pi}{2} \sum_{j\ =\ 1}^{n} \left(\beta_j^{(1)}\right)^2 = 1} \mathcal{J}([\beta]_n) = \lambda_n^{(1)}. \tag{3.4.8}$$

Cela signifie d'autre part, que la fonction

$$y_1(n,\ t) = \sqrt{\frac{k_0(\alpha,\ t)}{r(t)}} \sum_{j\ =\ 1}^{n} \beta_j^{(1)} \sin(jt), \tag{3.4.9}$$

vérifie la condition de minimisation

$$J(y_1(n,\ .)) = \min_{y_n\ \in\ \Lambda_n} J(y_n) = \lambda_n^{(1)}. \tag{3.4.10}$$

En identifiant l'élément $[\beta]_n = (\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)$ avec l'élément $[\beta]_{n\ +\ 1} = (\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n,\ 0)$, on peut identifier Λ_n à un sous-ensemble $\Lambda_{n\ +\ 1}$. Par conséquent, on peut affirmer que la suite $\left(\lambda_n^{(1)} = J(y_1(n,\ .))\right)_{n\ \geq\ 1}$ est décroissante. Comme elle est minorée (car $J(y)$ est bornée inférieurement) alors, il existe

$$\lambda^{(1)} = \lim_{n\ \longrightarrow\ +\infty} \lambda_n^{(1)} = \lim_{n\ \longrightarrow\ +\infty} J(y_1(n,\ .)). \tag{3.4.11}$$

Il est clair que

$$\lambda^{(1)} \geq \inf_{I(y)\ =\ 1} J(y) \tag{3.4.12}$$

Théorème 3.4.2. *Supposons qu'il existe une constante $m \succ 0$ indépendante de α, telle que*

$$\forall t \in [0,\ \pi]:\ m \leq \min(p(t),\ k_0(\alpha,t)) \tag{3.4.13}$$

et que la fonctionnelle J est continue sur $D^{(\alpha)}(p,q,r)$. Alors, la suite $(y_1(n,\ .))_{n\ \geq\ 1}$ contient une sous-suite $(z_1(n,\ .))_{n\ \geq\ 1}$ uniformément convergente vers une fonction z continue sur $[0,\ \pi]$ et telle que

$$I(z) = 1 \qquad \wedge \qquad J(z) = \lambda^{(1)}. \tag{3.4.14}$$

En d'autres termes, le minimum de la fonctionnelle J est bel et bien atteint en z. De plus, conformément à la remarque 3.3.4, $J(z) = \lambda^{(1)}$ est la première valeur propre du problème 3.1.1, 3.1.2 et la fonction z est la fonction propre associée.

Proof. L'idée fondamentale de la preuve est de montrer que la famille $\{y_1(n,\ .),\ n = 1,\ 2,\ \cdots\}$ est uniformément bornée et équicontinue ce qui, permettra d'utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli [16]. Comme la suite $\left(\lambda_n^{(1)} = J(y_1(n,\ .))\right)_{n\ \geq\ 1}$ est convergente alors, il existe une constante $M \succ 0$ telle que

$$\forall n \geq 1:\ \int_0^\pi \left\{p(t)\left(y_1^{(\alpha)}(n,\ t)\right)^2 - q(t)y_1^2(n,\ t)\right\} d\alpha(t) \leq M$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi p(t)\left(y_1^{(\alpha)}(n,\ t)\right)^2 d\alpha(t) &= \int_0^\pi \left\{p(t)\left(y_1^{(\alpha)}(n,\ t)\right)^2 - q(t)y_1^2(n,\ t)\right\} d\alpha(t) + \int_0^\pi q(t)y_1^2(n,\ t)d\alpha(t) \\
&\leq M + \left|\int_0^\pi q(t)y_1^2(n,\ t)d\alpha(t)\right| \\
&\leq M + \max_{0\ \leq\ t\ \leq\ \pi}\left|\frac{q(t)}{r(t)}\right| \int_0^\pi r(t)y_1^2(n,\ t)d\alpha(t) \\
&= M + \max_{0\ \leq\ t\ \leq\ \pi}\left|\frac{q(t)}{r(t)}\right| =: M_1.
\end{aligned}$$

Ainsi,,

$$\forall n \geq 1:\quad \int_0^\pi \left(y_1^{(\alpha)}(n,\ t)\right)^2 d\alpha(t) = \int_0^\pi \frac{1}{p(t)}p(t)\left(y_1^{(\alpha)}(n,\ t)\right)^2 d\alpha(t) \leq \frac{M_1}{m}.$$

En utilisant la relation

$$\forall n \geq 1:\ y_1(n,\ t) = \int_0^t y_1^{(\alpha)}(n,\ t)d\alpha(t)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient,

$$\forall n \geq 1:\ \ |y_1(n,\ t)|^2 = \left|\int_0^t \frac{y_1^{(\alpha)}(n,\ t)}{\sqrt{k_0\,(\alpha,\tau)}} \times \frac{1}{\sqrt{k_0\,(\alpha,\tau)}}dt\right|^2 \leq \pi \times \frac{M_1}{m^2}.$$

La famille $\{y_1(n,\ .),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ est donc uniformément bornée.
Par ailleurs, pour tout naturel $n \geq 1$ et tous réels t_1, t_2 tels que $0 \leq t_1 \prec t_2 \leq \pi$, on obtient après une seconde utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|y_1(n,\ t_1) - \ y_1(n,\ t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{y_1^{(\alpha)}(n,\ t)}{\sqrt{k_0(\alpha, \tau)}} \times \frac{1}{\sqrt{k_0(\alpha, \tau)}} dt \right| \leq \frac{\sqrt{\pi \times M_1}}{m} \sqrt{t_2 - t_1}.$$

Cette dernière estimation de la quantité $|y_1(n,\ t_1) - \ y_1(n,\ t_2)|$ permet d'affirmer que la famille $\{y_1(n,\ .),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ est équicontinue. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, elle est relativement compacte. En d'autres termes, elle contient une sous-suite $\{z_1(n,\ .),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ qui converge uniformément vers une fonction z continue sur $[0,\ \pi]$ (convergence dans l'espace $C_\infty([0,\ \pi])$). Par construction, chaque $z_1(n,\ .)$ est un élément de $D^{(\alpha)}(p, q, r)$. Posons:

$$\lambda_{n\ ,\ z}^{(1)} = J(z(n,\ .)). \tag{3.4.15}$$

D'après la formule 3.4.11, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_{n\ ,\ z}^{(1)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J(z(n,\ .)) = \lambda^{(1)}. \tag{3.4.16}$$

En utilsant la continuité de J et I, on obtient

$$I(z(n,\ .)) = 1 \ \ \forall n \geq 1 \implies I(z) = I(\lim_{n \longrightarrow +\infty} z(n,\ .)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} I\left(z(n,\ .)\right) = 1$$

et

$$J(z) = J(\lim_{n \longrightarrow +\infty} z(n,\ .)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J\left(z(n,\ .)\right) = \lambda^{(1)}.$$

□

Remarque 3.4.3. *La contuité de I sur l'espace $D^{(\alpha)}(p, q, r)$ découle du fait que sur cet est espace, I est la fonctionnelle constante égale à 1.*

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons dans un premier lieu introduit la notion de dérivation α-conformable au sens de [6], donné la définition α-conformable du wronksian et établi les versions correspondantes de la formule d'abel ainsi que les méthodes de résolution des équations différentielles α-conformables du second degré. A ce titre, on note une analogie parfaite entre l'approche classique et l'approche α-conformable.

Dans un second lieu nous avons définie l'opérateur de Sturm-Liouville α-conformable et montré que comme pour la dérivation usuelle, l'identité de Lagrange ainsi que le caractère simple des valeurs propres ainsi que la formule du quotient de Rayleigh restent vraies. Pour les autres paropriétés telles que caractère réel des valeurs propres ainsi que la α-orthogonalité des fonctions propres, d'autres conditions sont nécessaires. Dans notre cas, nous avons opté pour la condition k_1 est la fonction identiquement nulle ce qui a permis d'établir en utilisant les méthodes variationnelles l'équation d'Euler-Lagrange α-conforamble ensuite utilisée pour prouver l'existence des valeurs propres existent et vérifient les propriétés énoncées auparavant. Les résultats ainsi obtenus généralisent ceux de [5].

Comme possibles perspctives de développement et d'approfondissement du présent mémoire, nous pensons qu'il serait intéressant d'examiner les questions suivantes:

1. Sous quelles conditions sur les fonctions k_0, p, q et r, la fonctionnelle J (voir formule 3.4.1) est-elle continue? Cette condition de continuité a été fondamentale pour l'existence des valeurs propres (voir théorème 3.4.2).
2. Dans le cas général où k_1 n'est pas la fonction identiquement nulle, existe-t-il des valeurs propres. Si oui sont -elles toutes réelles?
3. Possibilité d'extension des résultats obtenus au cas multivariable en introduisant au préalable les définitions adéquates.

Bibliography

Bibliography

[1] T. Abdeljawad, F. M. Atici, On the definitions of Nabla fractional operators, Abstract and Applied Analysis (2012).

[2] T. Abdeljawad, Dualities in fractional difference calculus within Riemann, Advances in difference equations, (2013).

[3] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, Journal of computational and applied mathematics 279 (2015), 57-66.

[4] A. A. Abdelhakim, The Flaw in the conformable calculus: It is conformable because it is not fractional, Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 22 No2, (2019), 242-254.

[5] M. Al-Refai, T. Abdeljawad, Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problem, J. Complexity 2017 (4), 1-7.

[6] D.R. Anderson, D.J. Ulness, Newly defined conformable derivatives, Adv. Dy. Syst. Appl. 2015, 10(02), 109-137.

[7] F. M. Atici, P. W. Eloe, Initial value problems, Proceeding of the American Mathematical Society 137 (2009), 981-988.

[8] N. Benkhettou, S. Hassani, D.F.M. Torres, A conformable fractional calculus on arbitrary time scales, Journal of King Saud University 28(1) (2016), 93-98.

[9] E. A. Coddington, An introduction to ordinary differential equations, Englewood Cliffs, NJ: Printice Hall 1961; New-York Dover 1989.

[10] H. L. Gray, N. F. Zhang, On a new definition of the fractionnal difference, Mathematics of computation 50 (182), (1989), 513-529.

[11] U. Katugampula, A new fractional derivative with classical properties, arXiv:1410.6535.v2, 2014, arXiv-org.

[12] W. Kelley, A. Peterson, The theory of differential equations classical and qualitative, Pearson Printice Hall, Upper Saddle River, NJ (2004).

[13] R. Khalil, M. Al-Horani, A. Youcef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of computational and applied mathematics 264 (2014), 65-70.

[14] R. Khalil, A. Ma'mon, Abel's formula and wronksian for conformable differential equations, International Journal of Differential Equations and Applications Vol. 13 No3 (2014), 177-183.

[15] A. Kilbas, M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North Holland Mathematical Studies 204 (206).

[16] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Edition "Mir", Moscow, 1974.

[17] M. J. Lazo, D. F. Torres, Variational calculus with fractional derivatives, IEEE/CAA, Journal of Mathematica Sinica, Vol. 4 No2 (2017), 340-352.

[18] B. M. Levitan, Inverse Sturm-Liouville Problems, Nauka, Moscow, 1984, English Trans., VNU Sci. Press, Utrecht 1987.

[19] Y. Li, H. Ang, G. C. Y. Chang, PID control system analysis and designs. IEEE, Control System Magazine 26 No.1 (2006), 32-41.

[20] V.A. Marchenko, Sturm-Liouville operators and their applications, Naukova Dumka, Kiev 1977; English trans., Birkhauser, 1986.

[21] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press San Diego (CA), 1999.

[22] G. Samko, A. A. Kilbas, I. Marichev, Fractional integrals and derivatives:Theory and applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).