

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE  
Abdelhamid Ibn Badis  
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

*présenté par :*

**Nabila BOUTABAA**

**Modélisation d'ordre fractionnaire du COVID-19.**

*présenté le 10 Septembre 2021 devant le jury composé de :*

<b>Présidente :</b>	Houria ALIMERINA	MCB	UMAB
<b>Examineur :</b>	Leila BOUZID	MCB	UMAB
<b>Encadreur :</b>	Maghnia HAMOU-MAAMAR	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2020 / 2021

M  
A  
S  
T  
E  
R

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>iv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des abréviations</b>	<b>vi</b>
<b>Index des notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur la COVID-19</b>	<b>2</b>
1 COVID-19 . . . . .	2
2 Traitement et vaccination . . . . .	3
3 Comment se prévenir de la COVID-19? . . . . .	4
<b>2 Etat de l'art</b>	<b>6</b>
1 Modèle de A. Zeb et al. en 2020 . . . . .	6
2 Modèle de G. Giordano et al. en mars 2020 . . . . .	6
3 Modèle de F. Ndaïrou et al. en 2020 . . . . .	7
4 Modèle de I. Abdullahi Baba and B. Ahmad Nasidi en 2021 . . . . .	9
<b>3 Modélisation mathématique</b>	<b>10</b>
1 Le modèle fractionnaire . . . . .	11
2 Points d'équilibre . . . . .	11
3 Calcul de taux de reproduction $R_0$ . . . . .	12
4 L'écriture de $E_1^*$ en fonction de $R_0$ . . . . .	13
5 Stabilité . . . . .	14
6 Existence et unicité . . . . .	16
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>Annexe</b>	<b>21</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

# Liste des tableaux

# Table des figures

2.1 Schéma illustratif du modèle [17]. . . . .	8
2.2 Schéma illustratif du modèle [19]. . . . .	9

# Introduction

La COVID-19 constitue une grave menace pour la santé publique dans le monde entier car elle continue de se propager. Dans la situation actuelle, où le virus s'est propagé rapidement dans le monde entier et plusieurs variantes avancées de celui-ci ont commencé à apparaître, ce qui rend le défi de la lutte contre sa propagation se pose. D'un autre côté, divers modèles mathématiques ont été proposés dans la littérature [17, 19, 18] afin de comprendre et de prédire sa propagation dans le temps.

Le but de ce travail est de proposer un modèle épidémique pour la propagation de la COVID-19 en utilisant la dérivé d'ordre fractionnaire au sens du Caputo. Ce travail est structuré comme suit :

- Chapitre 1 donne des généralités sur la pandémie y compris la définition de la COVID-19, ses symptômes, les modes de transmissions, l'existence ou pas de traitement et de vaccination, les complications dues à la maladie et les moyens de prévention pour éviter sa propagation.
- Chapitre 2 présente quelques modèles mathématiques appliqués à la maladie de la COVID-19.
- Chapitre 3 présente la formulation du modèle ; ensuite, l'existence et l'unicité de la solution modèle. Par la suite, l'analyse de stabilité du modèle proposé est présentée.

# Chapitre 1

## Généralités sur la COVID-19

Les coronavirus (Cov) sont des virus à ARN fréquents qui appartiennent à la famille des Coronaviridae. Elles sont responsables d'infections digestives et respiratoires chez l'Homme et l'animal [3]. Le nom "coronavirus", signifie du latin "virus à couronne". On distingue trois types du Coronavirus [1] :

- le SARS-Cov, qui provoque des maladies respiratoires aiguës sévères avec un risque de transmission à d'autres personnes et pouvant provoquer la mort.
- le MERS-Cov, celui du syndrome respiratoire du Moyen-Orient dont la première épidémie a débuté en Arabie saoudite en 2012.
- le SARS-Cov2, celui de la maladie à coronavirus 2019 (COVID-19) apparue en Chine en 2019 et responsable d'une sévère pandémie en 2020-2021.

Dans ce chapitre on donne des généralités sur la COVID-19 y compris les symptômes, les différents modes de transmission, le traitement, la vaccination et comment prévenir de la maladie.

### 1 COVID-19

L'épidémie liée au nouveau coronavirus SARS-CoV-2, [6] a été signalée pour la première fois à Wuhan en Chine en décembre 2019. Au cours des premières semaines de janvier 2020, le virus est rapidement propagé à d'autres pays comme les Etats-Unis, la Corée et l'Iran [9], et plus tard déclaré comme une pandémie par l'organisation mondiale de la santé (OMS) le 11 mars 2020 [1].

La durée moyenne de la période d'incubation de la COVID-19 est de 5 jours à 14 jours au maximum [8]. Pendant cette période, la personne peut être contagieuse [1].

Pour contrôler plus efficacement la maladie, il est essentiel de mettre en place une période de quarantaine optimale afin qu'environ 95% des cas développant des symptômes soient retenus pour l'isolement. La période de quarantaine établie par l'OMS est de 14 jours [8].

#### 1.1 Symptômes

Il existe une variété de symptômes de la COVID-19, la plupart entre eux sont comme la fièvre, la toux, les maux de tête, la fatigue, la diarrhée, mal de gorge, écoulement nasal, nausées, difficultés respiratoires et perte de goût ou d'odeur [1]. Les symptômes peuvent apparaître un à quatorze jours après l'exposition au virus. Parmi les personnes qui développent des symptômes suffisamment visibles pour être classées comme patients, la plupart (81%) développent des symptômes légers à modérés (pneumonie légère), tandis

que 14 % développent des symptômes graves (dyspnée, hypoxie ou atteinte pulmonaire), et 5% souffrent de symptômes critiques (insuffisance respiratoire, choc ou dysfonctionnement multiviscéral) [7].

### 1.2 Modes de transmission

Le coronavirus se transmet essentiellement par :

#### **Transmission horizontale :**

Le virus se transmet principalement entre les personnes :

- Entre des personnes proches les unes des autres à moins de 2 mètres [1].
- Par les gouttelettes respiratoires émises par les humains lorsqu’elles toussent, éternuements ou paroles contaminées [1].
- Le contact direct avec des personnes infectées et par contact indirect avec des surfaces dans l’environnement immédiat ou avec des objets utilisés par la personne infectée [1].

De plus, les personnes religieuses qui ne présentent pas de symptômes peuvent transmettre la maladie [1].

#### **Transmission verticale :**

Toutes les études indiquent que la COVID-19 ne se transmet pas des femmes enceintes aux nouveau-nés [10].

Plusieurs études ont confirmé que l’infection des enfants de moins de 15 ans par le COVID-19 est peut être sévère, avec un petit pourcentage du nombre de décès. Les enfants sont plus souvent asymptomatiques. Cette catégorie représente une faible proportion du total des cas infectés.

## 2 Traitement et vaccination

Pour la plupart des personnes atteintes par la COVID-19 présentent des symptômes bénins ou modérés et peuvent guérir grâce à un traitement de soutien i.e. seulement des traitements symptomatiques. Par contre, les personnes atteintes d’une maladie plus grave peuvent avoir besoin d’être hospitalisées.

Il y a différentes techniques de vaccin qui sont actuellement utilisées. Elles sont regroupées dans deux classes [4] :

#### 1. Les vaccins basés sur le virus entier :

Il peut s’agir d’un virus entier (ici, le SARS-CoV-2), inactivé par de la  $\beta$ -propiolactone (ex : vaccins développés par les entreprises Sinovac et Sinopharm, ou d’un virus vivant mais atténué (ex : vaccin développé par Codegenix/serum institute of India) [4].

#### 2. Les vaccins basés sur une protéine virale (ici, la protéine S) ou partie de la protéine :

Il s’agit de vaccins protéiques et de particules de type viral, de vaccins d’acide nucléique et de vaccin de vecteur viral. Certains sont basés sur la protéine non modifiée, par exemple les vaccins vecteurs viraux développés par l’Université d’Oxford-AstraZeneca. MSD avait développé deux vaccins vecteurs viraux répliatifs basés sur le virus de la rougeole et le virus de la stomatite vésiculaire, mais leur développement clinique a été arrêté fin janvier pour des raisons d’immunogénicité jugées insuffisantes.

Les autres sont basés sur la protéine modifiée sous sa forme pré-fusion, par exemple les vaccins ARNm développés par Moderna [4][5].

## 2.1 Complications de la COVID-19

La maladie COVID-19 peut prendre une forme modérée ou sévère. Elle entraîne des complications, notamment une pneumonie. Le COVID-19 est dangereux non seulement pour les personnes âgées mais aussi pour les adultes d'âge moyen, Il peut aussi être mortel [1].

Le tableau suivant représente les taux de mortalités du virus par tranches d'âge :

la tranche d'âge	taux de mortalité
0-34	0.004%
35-44	0.065%
45-54	0.23%
55-64	0.75%
65-74	2.5%
75-84	8.5%
+85	28.3%

Les cas bénins se rétablissent généralement en deux semaines, tandis que ceux atteints de maladies graves ou critiques peuvent prendre trois à six semaines pour se rétablir.

La mortalité concerne principalement les personnes âgées, l'âge moyen des décès du à la COVID-19 étant de 81 ans [1]. Pour les personnes atteintes d'une maladie chronique développent souvent des formes sévères. Les maladies cardiaques, le diabète, le cancer, la maladie pulmonaire obstructive chronique, la maladie rénale chronique et l'obésité sont toutes des conditions qui augmentent le risque de maladie grave du à la COVID-19 [2].

## 3 Comment se prévenir de la COVID-19 ?

Comme jusqu'à présent il n'existe aucun médicament pour traiter le COVID-19, l'organisation mondiale de la santé [1] recommande un ensemble de mesures préventives, qui sont :

- La distance sociale : La distance sociale comprend des actions de contrôle des infections destinées à ralentir la propagation de la maladie en minimisant les contacts étroits entre les individus.
- Le lavage fréquent des mains au savon pendant au moins 20 secondes, surtout après être allé aux toilettes ou lorsque les mains sont visiblement sales, avant de manger et après s'être mouché. Et attention à ne pas toucher les yeux, la bouche et le nez avant de les laver.
- Mettre en quarantaine les personnes présentant des symptômes, et éviter tout contact avec elles.
- éviter le contact direct avec les malades.
- Nettoyage de surfaces : les coronavirus peuvent survivre sur des surfaces pendant des heures, voire des jours. Si une personne touche la surface sale, elle peut déposer le virus dans les yeux, le nez ou la bouche où il peut pénétrer dans le corps et provoquer une infection.
- Le port du masque : le port du masque peut réduire la propagation de la maladie chez les personnes asymptomatiques et présymptomatiques et est complémentaire aux mesures préventives établies telles que la distanciation sociale, le port

### 3. COMMENT SE PRÉVENIR DE LA COVID-19 ?

---

des masques limite le volume et la distance de déplacement des gouttelettes expiratoires dispersées lors de la parole, de la respiration et de la toux. plusieurs études ont montré que la propagation de virus augmente considérablement en l'absence du masque.

- Utiliser un désinfectant pour les mains à base d'alcool.
- Tousser dans le pli de son coude.

# Chapitre 2

## Etat de l'art

Dans ce chapitre, on va présenter quelques modèles mathématiques décrivant la transmission de la COVID-19.

### 1 Modèle de A. Zeb et al. en 2020

A. Zeb et al. [16] ont introduit un modèle mathématique où ils ont considéré que le contact humain est la première cause de la propagation de la COVID-19. Donc, l'isolement des personnes infectées dans son ensemble peut réduire le risque de transmission du virus. Pour ce faire, ils ont divisé la population totale en cinq compartiments : susceptible (S), exposé (E), infecté, quarantaine (Q) et résistant (R).

Le modèle mathématique est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \mu S(t) - \beta \frac{S(t)}{N} (E(t) + I(t)) \\ \frac{dE}{dt} = \beta \frac{S(t)}{N} (E(t) + I(t)) - \pi E(t) - (\mu + \gamma) E(t) \\ \frac{dI}{dt} = \pi E(t) - \delta I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dQ}{dt} = \gamma E(t) + \delta I(t) - \theta Q(t) - \mu Q(t) \\ \frac{dR}{dt} = \theta Q(t) - \mu R(t), \end{cases}$$

avec,

- A : Le taux de natalité.
- $\beta$  : Le taux auquel les susceptibles passent à la classe des infectées et exposées.
- $\pi$  : Le taux auquel la population exposée se déplace vers la population infectée.
- $\gamma$  : La vitesse à laquelle les personnes exposées prennent leur partie comme isolés.
- $\delta$  : Le taux auquel les personnes infectées ont été passées au compartiment du isolé.
- $\theta$  : Le taux de rétablissement des personnes isolées.
- $\mu$  : Le taux de mortalité naturelle plus le taux de mortalité liée à la maladie.

Ce travail montre que l'isolement des humains infectés de la population peut réduire le risque de la propagation de la COVID-19.

### 2 Modèle de G. Giordano et al. en mars 2020

Un autre modèle introduit par G. Giordano et al. [18], qui suppose que la population totale  $N(t)$  est subdivisée en huit sous-populations : classe des susceptibles (S), classe des infectés asymptomatiques (non détectés) (I), classe des infectés asymptomatiques détectés (D), classe des infectés symptomatiques non détectés (A), classe des infectés symptomatiques détectés (R), classe des menacés c'est à dire qui sont infectés avec des symp-

tômes potentiellement mortels détectés (T), classe des résistants (H) et la classe des décès (E). Dans ce cas, la distinction entre les personnes diagnostiquées et non diagnostiquées est très importante car les personnes non diagnostiquées sont plus susceptibles de propager l'infection que les personnes diagnostiquées, car ces dernières sont généralement isolées et peuvent expliquer les perceptions erronées du taux de létalité et de la gravité des cas. Il est aussi important de prédire le nombre de patients avec des symptômes potentiellement mortels, car dans cette situation la maladie nécessite une hospitalisation et remet en question la capacité du système de santé.

Le système dynamique SIDARTHE se compose de huit équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -S(t)(\alpha I(t) + \beta D(t) + \gamma A(t) + \delta R(t)), \\ \frac{dI(t)}{dt} = S(t)(\alpha I(t) + \beta D(t) + \gamma A(t) + \delta R(t)) - (\varepsilon + \zeta + \lambda) I(t), \\ \frac{dB(t)}{dt} = \varepsilon I(t) - (\eta + \rho) D(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \zeta I(t) - (\theta + \mu + k) A(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \eta D(t) + \theta A(t) - (v + \xi) R(t), \\ \frac{dT(t)}{dt} = \mu A(t) + v R(t) - (\sigma + \tau) T(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = \lambda I(t) + \rho D(t) + k A(t) + \xi R(t) + \sigma T(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \tau T(t), \end{array} \right.$$

avec,

- $\varepsilon$  et  $\theta$  représentent les probabilités de détection par rapport aux cas, asymptomatiques et légèrement symptomatiques respectivement.
- $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  représentent respectivement le taux de transmission du aux contacts entre les susceptibles et les infectés ( classe des infectés asymptomatiques non détectés, classe des infectés asymptomatiques détectés, classe des infectés symptomatiques non détectés, classe des infectés symptomatiques détecté).
- $\zeta, \eta$  représentent les taux auquel un infecté, respectivement inconscient et conscient d'être infectés.
- $\tau$  Le taux de mortalité.
- $\mu$  et  $v$  sont respectivement les taux auquel les individus infectés avec des symptômes non détectés et détectés deviennent infectés avec des symptômes potentiellement mortels détectés.
- $\lambda, k, \xi, \rho$  et  $\sigma$  représentent les taux de guérissons des cinq classes des infectés.

### 3 Modèle de F. Ndaïrou et al. en 2020

F. Ndaïrou et al. propose [17] un nouveau modèle à compartiment qui prend en considération l'impact des superinfecteurs sur la propagation de la maladie (un individu est déclaré superinfecteur quand son taux de reproduction individuel est supérieur au taux de reproduction de base). La population totale  $N(t)$  est subdivisée en huit sous-groupes : les individus susceptibles d'être infectés (S), les individus exposés (E), les individus symptomatiques et infectieux (I), les superinfecteurs (P), les individus infectieux mais asymptomatiques (A), les individus hospitalisés (H), les résistants (R), et les décès (F).

Le diagramme est représenté par :

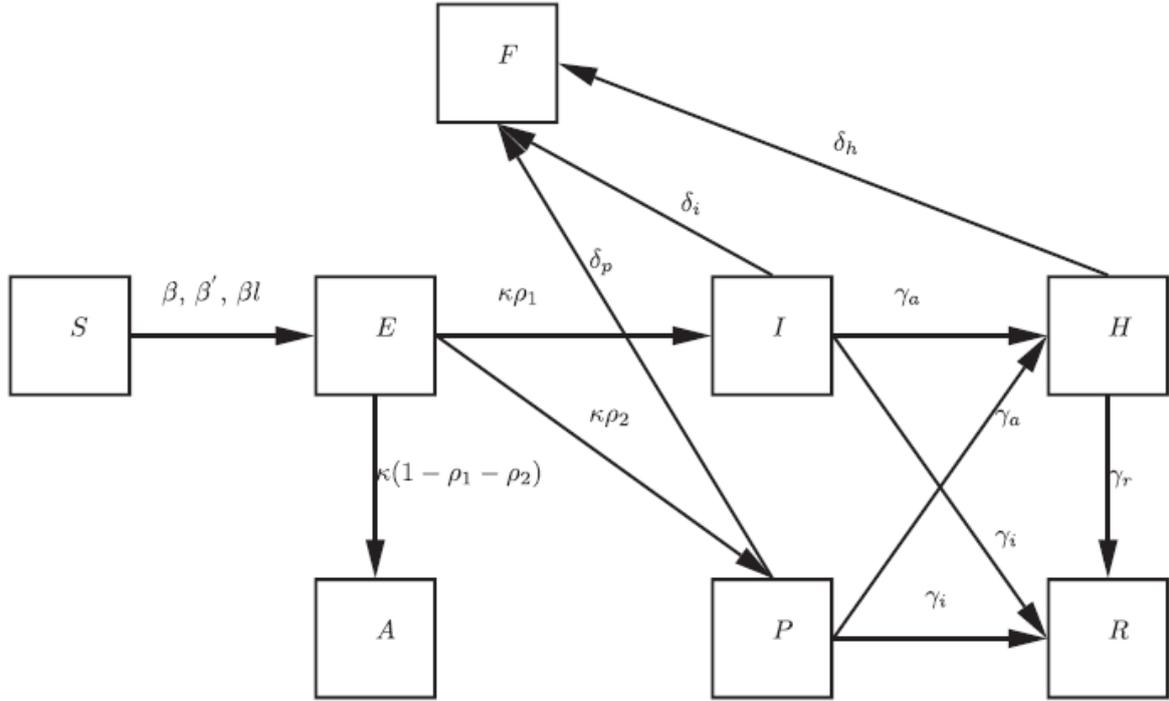


FIGURE 2.1 – Schéma illustratif du modèle [17].

Le modèle mathématique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I}{N} S - l\beta \frac{H}{N} S - \beta \frac{P}{N} S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta \frac{I}{N} S + l\beta \frac{H}{N} S + \beta \frac{P}{N} S - kE, \\ \frac{dI}{dt} = k\rho_1 E - (\gamma_a + \gamma_i) I - \delta_i I, \\ \frac{dP}{dt} = k\rho_2 E - (\gamma_a + \gamma_i) P - \delta_p P, \\ \frac{dA}{dt} = k(1 - \rho_1 - \rho_2) E, \\ \frac{dH}{dt} = \gamma_a (I + P) - \gamma_r H - \delta_h H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_i (I + P) + \gamma_r H, \\ \frac{dF}{dt} = \delta_i I + \delta_p P + \delta_h H, \end{array} \right.$$

avec,

- $\beta$  est le taux de transmission interhumaine par jour et par personne.
- $l$  représente la transmissibilité relative des patients hospitalisés.
- $\beta'$  est le taux de transmission dû aux superinfecteurs.
- $k$  représente le taux auquel une personne exposée devient infectieuse.
- $\rho_1$  représente le taux d'infection des personnes exposées.
- $\rho_2$  est le taux auquel les personnes exposées contribuent par des grandes propagation.
- $\gamma_a$  est le taux d'hospitalisation.
- $\gamma_i$  est le taux de guérison sans hospitalisation.
- $\gamma_r$  représente le taux de récupération des patients hospitalisés.
- $\delta_i$  représente le taux de mortalité induite par la maladie due à la classe infectée.
- $\delta_p$  est le taux de mortalité induite par la maladie due aux superinfecteurs.
- $\delta_h$  est le taux de mortalité induite par la maladie en raison de la classe hospitalisée.

Ce modèle donne une bonne approximation de la propagation de l'épidémie à Whuhan, et prédit une diminution du nombre quotidien des cas confirmés.

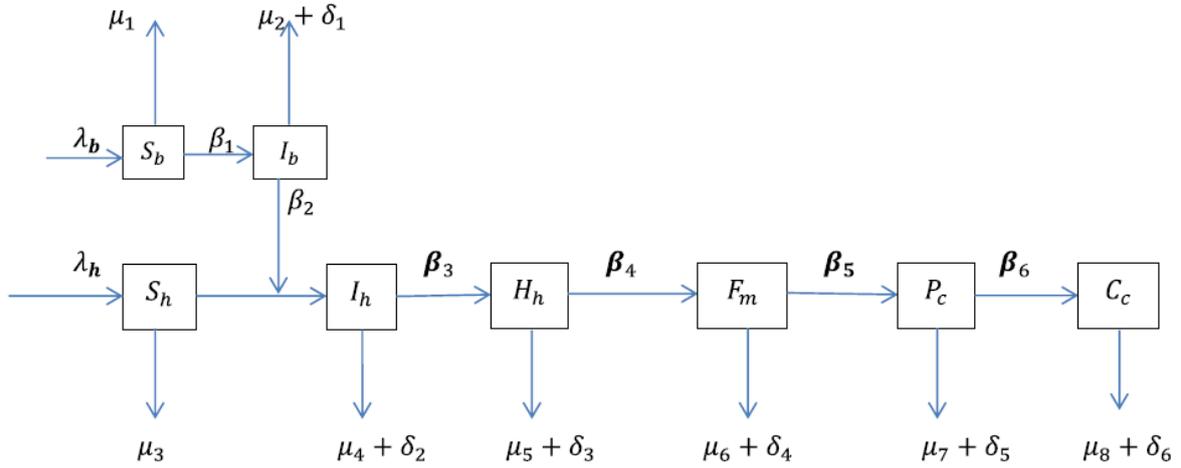


FIGURE 2.2 – Schéma illustratif du modèle [19].

## 4 Modèle de I. Abdullahi Baba and B. Ahmad Nasidi en 2021

Dans le travail [19], les auteurs ont introduit un modèle d'ordre fractionnaire pour le contrôle de l'épidémie. Ils ont intégré la population des chauves-souris et ont supposé que cette dernière est l'origine du virus. La population des chauves-souris est subdivisée en deux classes : la classe des susceptibles  $S_b$  et la classe des infectés  $I_b$ . Les nouveaux-nés de chauves-souris sont supposés nés dans la classe des susceptibles  $S_b$ , au taux  $k_b$ . La population des humains est subdivisée en six sous-populations : la classe des susceptibles  $S_h$ , la classe des infectés  $I_h$  à cause d'une chauve-souris infectées, la classe des infectés par un contact inter-humain  $H_h$ , la classe des infectés à cause contact d'un membre de la famille  $F_h$ , la classe des individus hospitalisés  $P_h$ , la classe des personnes qui se rétablissent  $C_h$ . La figure 2.2 donne le diagramme de la dynamique de la maladie

Le modèle est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha S_b(t) = \lambda_b^\alpha - \mu_1^\alpha S_b(t) - \beta_1^\alpha S_b(t) I_b(t) \\ D^\alpha I_b(t) = \beta_1^\alpha S_b(t) I_b(t) - (\mu_2^\alpha + \delta_1^\alpha) I_b(t) - \beta_2^\alpha S_h(t) I_b(t) \\ D^\alpha S_h(t) = \lambda_h^\alpha - \mu_3^\alpha S_h(t) - \beta_2^\alpha S_h(t) I_b(t) \\ D^\alpha I_h(t) = \beta_2^\alpha S_h(t) I_b(t) - (\mu_4^\alpha + \delta_2^\alpha) I_h(t) - \beta_3^\alpha I_h(t) H_h(t) \\ D^\alpha H_h(t) = \beta_3^\alpha I_h(t) H_h(t) - (\mu_5^\alpha + \delta_3^\alpha) H_h(t) - \beta_4^\alpha H_h(t) F_m(t) \\ D^\alpha F_m(t) = \beta_4^\alpha H_h(t) F_m(t) - (\mu_6^\alpha + \delta_4^\alpha) F_m(t) - \beta_5^\alpha P_c(t) F_m(t) \\ D^\alpha P_c(t) = \beta_5^\alpha P_c(t) F_m(t) - (\mu_7^\alpha + \delta_5^\alpha) P_c(t) - \beta_6^\alpha P_c(t) C_c(t) \\ D^\alpha C_c(t) = \beta_6^\alpha P_c(t) C_c(t) - (\mu_8^\alpha + \delta_6^\alpha) C_c(t) \\ S_b(0) \geq 0, I_b(0) \geq 0, S_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, H_h(0) \geq 0, F_m(0) \geq 0, P_c(0) \geq 0, C_c(0) \geq 0 \end{array} \right.$$

# Chapitre 3

## Modélisation mathématique

Dans ce chapitre, on va présenter une analyse mathématique du modèle fractionnaire SEIR. Où on va calculer les points d'équilibre, le taux de reproduction  $R_0$ , ensuite on va étudier la stabilité des points d'équilibre, enfin on va montrer que le modèle mathématique associé admet une unique solution.

### 0.1 Notre modèle

On suppose que la population totale notée  $N(t)$  est subdivisée en quatre sous-populations comme suit :

- $S(t)$  : Le nombre des individus susceptibles d'être infectés en  $t$ .
- $E(t)$  : Le nombre des individus exposés en fonction du temps  $t$ .
- $I(t)$  : Le nombre des individus infectés en fonction du temps  $t$ .
- $R(t)$  : Le nombre des individus rétablis en fonction du temps  $t$ .
- On suppose que la transmission verticale est négligeable.
- On suppose que le taux de natalité et mortalité chez les individus sont les mêmes et ils sont constants.
- $\frac{1}{\alpha}$  est la période d'incubation.
- $\beta$  signifie le taux de transmission horizontale.
- $\lambda$  est le taux de guérisons.
- $\tau$  est le taux qu'un malade guéri peut rattraper la maladie.
- $\mu$  est le taux de mortalité naturelle.

Le modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} S'(t) = \mu N + \tau R(t) - \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \mu S(t) \\ E'(t) = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - (\alpha + \mu) E(t) \\ I'(t) = \alpha E(t) - (\lambda + \mu) I(t) \\ R'(t) = \lambda I(t) - (\tau + \mu) R(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où,

$N$  : La population totale :

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t),$$

$\mu_N$  : Le taux de natalité.

$t$  : Le temps donné en jours.

## 1 Le modèle fractionnaire

Dans cette section, on introduit le modèle fractionnaire du système d'ordre entier donné par (3.1). La dynamique de la transmission de la COVID-19 est donnée par le système suivant,

$$\begin{cases} D^\gamma S(t) = \mu^\gamma N(t) + \tau^\gamma R(t) - \beta^\gamma \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \mu^\gamma S(t) \\ D^\gamma E(t) = \beta^\gamma \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - (\alpha^\gamma + \mu^\gamma) E(t) \\ D^\gamma I(t) = \alpha^\gamma E(t) - (\lambda^\gamma + \mu^\gamma) I(t) \\ D^\gamma R(t) = \lambda^\gamma I(t) - (\tau^\gamma + \mu^\gamma) R(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

La population est constante car,

$$\begin{aligned} D^\gamma N(t) &= D^\gamma S(t) + D^\gamma E(t) + D^\gamma I(t) + D^\gamma R(t) \\ &= \mu^\gamma N(t) - \mu^\gamma S(t) - \mu^\gamma E(t) - \mu^\gamma I(t) - \mu^\gamma R(t) \\ &= \mu^\gamma N(t) - \mu^\gamma N(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour normaliser le modèle (3.2), on note :

$$\mathbf{S}(t) = \frac{S(t)}{N}, \mathbf{E}(t) = \frac{E(t)}{N}, \mathbf{I}(t) = \frac{I(t)}{N} \text{ et } \mathbf{R}(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Donc,

$$D^\gamma \mathbf{S}(t) = \frac{1}{N} D^\gamma S(t), D^\gamma \mathbf{E}(t) = \frac{1}{N} D^\gamma E(t), D^\gamma \mathbf{I}(t) = \frac{1}{N} D^\gamma I(t) \text{ et } D^\gamma \mathbf{R}(t) = \frac{1}{N} D^\gamma R(t).$$

En divisant les équations du système (3.2) par N, on trouve,

$$\begin{cases} \frac{D^\gamma S(t)}{N} = \mu^\gamma + \tau^\gamma \frac{R(t)}{N} - \beta^\gamma \frac{I(t)}{N} \frac{S(t)}{N} - \mu^\gamma \frac{S(t)}{N} \\ \frac{D^\gamma E(t)}{N} = \beta^\gamma \frac{I(t)}{N} \frac{S(t)}{N} - (\alpha^\gamma + \mu^\gamma) \frac{E(t)}{N} \\ \frac{D^\gamma I(t)}{N} = \alpha^\gamma \frac{E(t)}{N} - (\lambda^\gamma + \mu^\gamma) \frac{I(t)}{N} \\ \frac{D^\gamma R(t)}{N} = \lambda^\gamma \frac{I(t)}{N} - (\tau^\gamma + \mu^\gamma) \frac{R(t)}{N}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{cases} D^\gamma \mathbf{S}(t) = \mu^\gamma + \tau^\gamma \mathbf{R}(t) - \beta^\gamma \mathbf{I}(t) \mathbf{S}(t) - \mu^\gamma \mathbf{S}(t) \\ D^\gamma \mathbf{E}(t) = \beta^\gamma \mathbf{I}(t) \mathbf{S}(t) - (\alpha^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{E}(t) \\ D^\gamma \mathbf{I}(t) = \alpha^\gamma \mathbf{E}(t) - (\lambda^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{I}(t) \\ D^\gamma \mathbf{R}(t) = \lambda^\gamma \mathbf{I}(t) - (\tau^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{R}(t). \end{cases}$$

Ici,

$$0 \leq \mathbf{S}(t), \mathbf{E}(t), \mathbf{I}(t), \mathbf{R}(t) \leq 1.$$

## 2 Points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibre du modèle 3.2 il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mu^\gamma + \tau^\gamma \mathbf{R} - \beta^\gamma \mathbf{I} \mathbf{S} - \mu^\gamma \mathbf{S} = 0, \\ \beta^\gamma \mathbf{I} \mathbf{S} - (\alpha^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{E} = 0, \\ \alpha^\gamma \mathbf{E} - (\lambda^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{I} = 0, \\ \lambda^\gamma \mathbf{I} - (\tau^\gamma + \mu^\gamma) \mathbf{R} = 0, \end{cases}$$

de l'équation 4, on a

$$\mathbf{R} = \frac{\lambda^Y}{(\tau^Y + \mu^Y)} \mathbf{I}, \quad (3.3)$$

d'après l'équation 3, on trouve

$$\mathbf{E} = \frac{(\lambda^Y + \mu^Y)}{\alpha^Y} \mathbf{I}, \quad (3.4)$$

de l'équation 2,

$$\beta^Y \mathbf{I} \mathbf{S} - (\alpha^Y + \mu^Y) \mathbf{E} = 0,$$

alors,

$$\beta^Y \mathbf{I} \mathbf{S} - (\alpha^Y + \mu^Y) \frac{(\lambda^Y + \mu^Y)}{\alpha^Y} \mathbf{I} = 0,$$

ce qui implique que,

$$\left( \beta^Y \mathbf{S} - (\alpha^Y + \mu^Y) \frac{(\lambda^Y + \mu^Y)}{\alpha^Y} \right) \mathbf{I} = 0,$$

on distingue deux cas :

**cas  $\mathbf{I} = 0$  :**

$$\mathbf{E}_0^* = (1, 0, 0, 0).$$

**cas  $\mathbf{I} \neq 0$  :** On a,

$$\left( \beta^Y \mathbf{S} - \frac{(\lambda^Y + \mu^Y)(\alpha^Y + \mu^Y)}{\alpha^Y} \right) = 0,$$

et donc,

$$\mathbf{S} = \frac{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)}{(\beta\alpha)^Y}.$$

En remplaçant les formules (3.3) et (3.4) dans l'équation 1, on obtient,

$$\mathbf{I} = \frac{-(\tau^Y + \mu^Y)(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y) + \beta\alpha^Y(\tau^Y + \mu^Y)}{\beta^Y(\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha\tau)^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y))}.$$

D'où,

$$\mathbf{E}_1^* = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)}{(\beta\alpha)^Y} \\ \frac{\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y)}{\alpha^Y} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \frac{\lambda^Y}{(\tau^Y + \mu^Y)} \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

### 3 Calcul de taux de reproduction $R_0$

on calcule  $R_0$  en utilisant la méthode introduite par P. Van Den Driessche et J. Watmough en 2001 [15].

Les deux matrices F et V sont respectivement données par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^Y \mathbf{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$V = \begin{pmatrix} -(\alpha^Y + \mu^Y) & 0 \\ \alpha & -(\lambda^Y + \mu^Y) \end{pmatrix},$$

alors

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^Y + \mu^Y} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} & -\frac{1}{\lambda^Y + \mu^Y} \end{pmatrix},$$

et donc,

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \beta^Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^Y + \mu^Y} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} & -\frac{1}{\lambda^Y + \mu^Y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{(\alpha\beta)^Y}{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} & -\frac{\beta^Y}{\lambda^Y + \mu^Y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$-\frac{(\alpha\beta)^Y}{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} \text{ et } 0.$$

donc,

$$R_0 = -\frac{(\alpha\beta)^Y}{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)}.$$

#### 4 L'écriture de $E_1^*$ en fonction de $R_0$

On a,

$$\mathbf{I}^* = \frac{\alpha^Y}{\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y) + \alpha\tau^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} \left( (\tau^Y + \mu^Y) - \frac{(\tau^Y + \mu^Y)(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)}{(\beta\alpha)^Y} \right)$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^* &= \frac{\alpha(\tau + \mu)}{\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y) + \alpha\tau^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} \left( 1 - \frac{(\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)}{(\beta\alpha)^Y} \right) \\ &= \frac{\alpha^Y(\tau^Y + \mu^Y)}{\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha\tau)^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) \\ &= \frac{\alpha^Y(\tau^Y + \mu^Y)}{\tau^Y(\lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha\tau)^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)(\lambda^Y + \mu^Y)} \left( \frac{R_0 - 1}{R_0} \right) \end{aligned}$$

Alors  $\mathbf{I}^*$  est strictement positive, si  $R_0 > 1$ .

## 5 Stabilité

Pour étudier la stabilité de ce modèle non linéaire il faut linéariser le système au voisinage des points d'équilibre.

La linéarisation de système par la matrice Jacobienne suivante :

$$J(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{R}) = \begin{pmatrix} -(\beta^Y \mathbf{I} + \mu^Y) & 0 & -\beta^Y \mathbf{S} & \tau^Y \\ \beta^Y \mathbf{I} & -(\alpha^Y + \mu^Y) & \beta^Y \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\lambda^Y + \mu^Y) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^Y & -(\tau^Y + \mu^Y) \end{pmatrix}.$$

### 5.1 Etude de stabilité du point d'équilibre sans maladie $E_0^*$

**Théorème 3.1** *Le point d'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable lorsque  $R_0 < 1$ .*

**Preuve.** Soit  $E_0^* = (1, 0, 0, 0)$ . On a,

$$J(E_0^*) = \begin{pmatrix} -\mu^Y & 0 & -\beta^Y & \tau^Y \\ 0 & -(\alpha^Y + \mu^Y) & \beta^Y & 0 \\ 0 & \alpha & -(\lambda^Y + \mu^Y) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -(\tau^Y + \mu^Y) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\begin{cases} v_1 = -\mu^Y \\ v_2 = -(\tau^Y + \mu^Y) \\ v_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha^Y - \lambda^Y)^2 + 4(\beta\alpha)^Y} - \frac{1}{2}(\lambda^Y + 2\mu^Y + \alpha^Y) \\ v_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{(\alpha^Y - \lambda^Y)^2 + 4(\alpha\beta)^Y} - \frac{1}{2}(\lambda^Y + 2\mu^Y + \alpha^Y). \end{cases}$$

■

On a  $v_1, v_2, v_4$  sont strictement négatives, il reste à montrer que  $v_3$  est aussi négative. Pour cela, on a,

$$\begin{aligned} v_4 v_3 &= \left( -\frac{1}{2} \sqrt{(\alpha^Y - \lambda^Y)^2 + 4(\beta\alpha)^Y} - \frac{1}{2}(\lambda^Y + 2\mu^Y + \alpha^Y) \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha^Y - \lambda^Y)^2 + 4(\beta\alpha)^Y} - \frac{1}{2}(\lambda^Y + 2\mu^Y + \alpha^Y) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (\lambda^Y + 2\mu^Y + \alpha^Y)^2 - (\alpha^Y - \lambda^Y)^2 \right) - (\alpha\beta)^Y \\ &= (\mu^Y + \alpha^Y) \mu^Y + (\alpha^Y + \mu^Y) - (\alpha\beta)^Y \\ &= (\mu^Y + \alpha^Y) (\mu^Y + \lambda^Y) - (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y) R_0 \\ &= (\mu^Y + \alpha^Y) (\mu^Y + \lambda^Y) (1 - R_0), \end{aligned}$$

donc, si  $R_0 < 1$ ,  $v_4 v_3 > 0$  et d'autre part on a  $v_4 < 0$  c'est à dire que  $v_3 < 0$ .

### 5.2 Etude de stabilité du point d'équilibre avec maladie $E_1^*$

Soit

$$J(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{R}) = \begin{pmatrix} -(\beta^Y \mathbf{I} + \mu^Y) & 0 & -\beta^Y \mathbf{I} & \tau^Y \\ \beta^Y \mathbf{I} & -(\alpha^Y + \mu^Y) & \beta^Y \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \alpha^Y & -(\lambda^Y + \mu^Y) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^Y & -(\tau^Y + \mu^Y) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 = 0,$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \\ a_2 = (\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + 3\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) + (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\alpha^Y + \mu^Y) \\ \quad + (\lambda^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + 2\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) - S (\alpha\beta)^Y \\ = ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + 2\mu^Y) + (\tau^Y + 3\mu^Y + \alpha^Y + \lambda^Y) (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})) \\ a_3 = (\tau^Y + \mu^Y) ((\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\alpha^Y + \mu^Y) + (\lambda^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + 2\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) - S (\alpha\beta)^Y) \\ \quad + (\alpha\beta)^Y S (\mathbf{I}\beta^Y + (\alpha^Y + \mu^Y)) + (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y) - S (\alpha\beta)^Y (\alpha^Y + 2\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \\ = ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y)) \mathbf{I}\beta^Y \\ a_4 = (\tau^Y + \mu^Y) \times \\ \left( \left( \begin{array}{c} \alpha^Y (S\mathbf{I}\beta^{2Y} + S (\alpha^Y + \mu^Y) \beta^Y) + (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y) \\ - S (\alpha\beta)^Y (\alpha^Y + 2\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \end{array} \right) - (\alpha\beta\lambda\tau)^Y \mathbf{I} \right) \\ = ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y) - (\alpha\lambda\tau)^Y) \beta^Y \mathbf{I} \\ = (\tau^Y \mu^Y \alpha^Y + \tau^Y \mu^Y \lambda^Y + \tau^Y \mu^{2Y} + \alpha^Y \mu^Y \lambda^Y + \alpha^Y \mu^{2Y} + \mu^{2Y} \lambda^Y + \mu^{3Y}) \beta^Y \mathbf{I}. \end{array} \right.$$

On remarque que  $a_i > 0, i = 0 : 4, \forall \mathbf{I} > 0$ .

On utilise le critère de Routh-Hurwitz [14]. En calculant les principaux mineurs de la matrice H,

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$

on obtient,

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ &= (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \times \\ &\quad ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \mu^Y + \mu^Y) + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})) \\ &\quad - ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y)) \mathbf{I}\beta^Y \\ &= (\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \mu^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y) \\ &\quad + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\lambda^Y + \tau^Y + 3\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \\ &\quad + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\alpha^Y + \mu^Y) - (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y) \mathbf{I}\beta^Y \\ &= (\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \mu^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y) \\ &\quad + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) (\lambda^Y + \tau^Y + 3\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I}) \\ &\quad + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y) (\mu^Y) + (\tau^Y + \mu^Y + \alpha^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y) (\beta^Y \mathbf{I}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 \\
&= a_3 \Delta_2 \\
&\quad - (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})^2 \times \\
&\quad (\tau^Y \mu^Y \alpha^Y + \tau^Y \mu^Y \lambda^Y + \tau^Y \mu^2 \mu^Y + \alpha^Y \mu^Y \lambda^Y + \alpha^Y \mu^2 \mu^Y + \mu^2 \lambda^Y + \mu^3 \mu^Y) \beta^Y \mathbf{I} \\
&= ((\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y) (\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \lambda^Y + \mu^Y + \mu^Y) + (\tau^Y + \alpha^Y + 2\mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y) (\beta^Y \mathbf{I})) \times \\
&\quad ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y)) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad + ((\tau^Y + \alpha^Y + 3\mu^Y + \lambda^Y) ((\alpha^Y + \mu^Y) \mu^Y + (\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})) (\lambda^Y + \tau^Y + 3\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})) \times \\
&\quad ((\tau^Y + \mu^Y) (\alpha^Y + \mu^Y + \lambda^Y + \mu^Y) + (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y)) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad - (\alpha^Y + \lambda^Y + \tau^Y + 4\mu^Y + \beta^Y \mathbf{I})^2 (\tau^Y \mu^Y (\alpha^Y + (\lambda^Y + \mu^Y)) + \mu^Y (\alpha^Y + \mu^Y) (\lambda^Y + \mu^Y)) \beta^Y \mathbf{I},
\end{aligned}$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
a &= \alpha^Y + \mu^Y \\
b &= \tau^Y + \mu \\
c &= \lambda^Y + \mu^Y \\
d &= \mu^Y + \beta^Y \mathbf{I},
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= ((a + b + c + d) (b) (a + c) + (a + b) \alpha^Y + \mu^Y (\beta^Y \mathbf{I})) ((b + c) \alpha^Y + \mu^Y + (b) (c)) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad + (a + b + c) ((a) \mu^Y + d) (b + c + d) ((b) (a + c) + ac) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad - ((a + b)^2 + (c + d)^2 + 2(a + b) (c + d)) (\tau^Y \mu^Y (\alpha^Y + (c)) + \mu^Y (a) (b)) \beta^Y \mathbf{I} \\
&= ((a + b + c + d) b (a + c) + (a + b) \alpha^Y + \mu^Y (\beta^Y \mathbf{I})) ((b + c) \alpha^Y + \mu^Y + (b) (c)) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad + (a + b + c) (\mu^Y (ab + ac + ad) + (db + dc + d^2)) (b (a + c) + ac) \mathbf{I} \beta^Y \\
&\quad - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + ad + bc + bd)) (\tau^Y \mu^Y (\alpha^Y + c) + \mu^Y (a) (b)) \beta^Y \mathbf{I} \\
&= ab^2 + a^2 b + ac^2 + a^2 c + bc^2 + b^2 c + \beta^{2Y} \mathbf{I}^2 + 3abc + (b\alpha^Y \mu^Y + c\alpha^Y \mu^Y + bc\mu^Y) \beta^{2Y} \mathbf{I}^2 \\
&\quad + b^2 \alpha^{2Y} + b^2 c^3 + b^3 c^2 + ab\alpha^{2Y} + ac\alpha^{2Y} + bc\alpha^{2Y} + ab^3 \alpha^Y + ab^2 \mu^Y \\
&\quad + a^2 b \mu^Y + b^2 c \alpha^Y + bc^3 \alpha^Y + b^3 c \alpha^Y + bc^2 \mu^Y \\
&\quad + b^2 c \mu^Y + ab^3 c + a\alpha^Y \mu^Y + b\alpha^Y \mu^Y + a^2 b^2 \alpha^Y + 2b^2 c^2 \alpha^Y \\
&\quad + 2ab^2 c^2 + a^2 b^2 c + b^2 c^2 d + 2abc^2 \alpha^Y + 3ab^2 c \alpha^Y + a^2 bc \alpha^Y \\
&\quad + ab^2 d \alpha^Y + bc^2 d \alpha^Y + b^2 cd \alpha^Y + ab^2 cd + abc \alpha^Y + 2abc \mu^Y \\
&\quad + abd \mu^Y + bcd \mathbf{I} + abcd \alpha^Y) \beta^Y \mathbf{I} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

On a

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0,$$

donc le point  $E_1^*$  est stable.

## 6 Existence et unicité

Le modèle (3.2) est un système d'équations différentielles non linéaires, autonome du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha X(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(X(t)) \\ f_2(X(t)) \\ f_3(X(t)) \\ f_4(X(t)) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{cases} f_1(X(t)) = \mu^\alpha + \tau^\alpha R(t) - \beta B^\alpha S(t) I(t) - \mu^\alpha S(t) \\ f_2(X(t)) = \beta B^\alpha S(t) I(t) - (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) E(t) \\ f_3(X(t)) = \gamma^\alpha E(t) - (\delta^\alpha + \mu^\alpha) I(t) \\ f_4(X(t)) = \delta^\alpha I(t) - (\tau^\alpha + \mu^\alpha) R(t). \end{cases}$$

Notons par  $I = [0, T]$ ,  $N(\cdot)$  la norme de l'espace de fonctions continues définie de  $I$  dans l'espace de Banach  $\mathbb{R}^5 C(I, \mathbb{R}^5)$  et elle est définie par

$$N(X) = \sup_{t \in I} \|X(t)\|$$

avec  $\|\cdot\|$  est la norme de  $\mathbb{R}^5$ .

Le théorème suivant va nous garantir l'existence d'une unique solution sur l'intervalle de définition du modèle (3.2).

**Théorème 3.2** *Si  $F$  est une application continue et globalement lipschitzienne au sens suivant :*

*pour tout intervalle compact  $K \subset I, \exists k > 0 \in I$  tel que pour tout  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^5$ ,*

$$\|F(X_1) - F(X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|,$$

*et de plus si,*

$$\frac{\bar{k} T^\gamma}{\Gamma(\gamma)} < 1,$$

*alors le problème (3.5) admet une unique solution  $X$  définie sur  $I$  tout entier.*

**preuve.**

1- Montrer que  $F$  est globalement lipschitzienne revient à montrer que pour tout  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $5$   $f_i$  est globalement lipschitzienne : Soient  $K \subset I, t \in K, X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}^5$ .

–  $f_1$  est globalement lipschitzienne :

On a

$$\begin{aligned} |f_1(X_1(t)) - f_1(X_2(t))| &= \left| \begin{aligned} &(\mu^\alpha + \tau^\alpha R_1(t) - \beta B^\alpha S_1(t) I_1(t) - \mu^\alpha S_1(t)) \\ &- (\mu^\alpha + \tau^\alpha R_2(t) - \beta B^\alpha S_2(t) I_2(t) - \mu^\alpha S_2(t)) \end{aligned} \right| \\ &= |\tau^\alpha (R_1(t) - R_2(t)) + \beta B^\alpha (S_2(t) I_2(t) - S_1(t) I_1(t)) + \mu^\alpha (S_2(t) - S_1(t))| \end{aligned}$$

En rajoutant et retranchant le terme  $S_1(t) I_2(t)$ , on a

$$\begin{aligned} f_1(X_1(t)) - f_1(X_2(t)) &= \tau^\alpha (R_1(t) - R_2(t)) + \beta B^\alpha (S_2(t) I_2(t) - S_1(t) I_2(t) + S_1(t) I_2(t) - S_1(t) I_1(t)) \\ &\quad + \mu^\alpha (S_2(t) - S_1(t)) \\ &= \tau^\alpha (R_1(t) - R_2(t)) + \beta B^\alpha ((S_2(t) - S_1(t)) I_2(t) + S_1(t) (I_2(t) - I_1(t))) \\ &\quad + \mu^\alpha (S_2(t) - S_1(t)), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |f_1(X_1(t)) - f_1(X_2(t))| &\leq \tau^\alpha |\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)| + \beta B^\alpha |(\mathbf{S}_2(t) - \mathbf{S}_1(t)) \mathbf{I}_2(t)| \\ &\quad + \beta B^\alpha |\mathbf{S}_1(t) (\mathbf{I}_2(t) - \mathbf{I}_1(t))| + \mu^\alpha |\mathbf{S}_2(t) - \mathbf{S}_1(t)| \\ &\leq \tau^\alpha |\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)| + (\beta B^\alpha + \mu^\alpha) |\mathbf{S}_2(t) - \mathbf{S}_1(t)| + \beta B \beta B^\alpha |\mathbf{I}_2(t) - \mathbf{I}_1(t)|, \end{aligned}$$

car

$$\mathbf{I}_2(t), \mathbf{S}_1(t) \leq 1.$$

en utilisant le fait que

$$\left| X_1^i(t) - X_2^i(t) \right| \leq \|X_1(t) - X_2(t)\|, \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } 5$$

on obtient

$$|f_1(X_1(t)) - f_1(X_2(t))| \leq k_1 \|X_1(t) - X_2(t)\|,$$

avec

$$k_1 = \tau^\alpha + (\beta B^\alpha + \mu^\alpha) + \beta B \beta B^\alpha > 0,$$

alors  $f_1$  est globalement lipschitzienne.

– De la même manière, on montre que les  $f_i$  pour  $i = 2, 3$  et  $4$ . On trouve,

$$\begin{aligned} |f_2(X_1(t)) - f_2(X_2(t))| &= |\beta B^\alpha (\mathbf{S}_1(t) \mathbf{I}_1(t) - \beta B^\alpha \mathbf{S}_2(t) \mathbf{I}_2(t)) - (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) (\mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t))| \\ &\leq \left| \begin{array}{c} \beta B^\alpha (\mathbf{S}_1(t) \mathbf{I}_1(t) - \mathbf{S}_1(t) \mathbf{I}_2(t) + \mathbf{S}_1(t) \mathbf{I}_2(t) - \mathbf{S}_2(t) \mathbf{I}_2(t)) \\ - (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) (\mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t)) \end{array} \right| \\ &\leq \left| \begin{array}{c} \beta B^\alpha (\mathbf{S}_1(t) (\mathbf{I}_1(t) - \mathbf{I}_2(t)) + (\mathbf{S}_1(t) - \mathbf{S}_2(t)) \mathbf{I}_2(t)) \\ - (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) (\mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t)) \end{array} \right| \\ &\leq \beta B^\alpha |\mathbf{I}_1(t) - \mathbf{I}_2(t)| + \beta B^\alpha |\mathbf{S}_1(t) - \mathbf{S}_2(t)| + (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) |\mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t)| \\ &\leq k_2 \|X_1(t) - X_2(t)\|, \end{aligned}$$

avec

$$k_2 = \beta B^\alpha + \beta B^\alpha + (\gamma^\alpha + \mu^\alpha) > 0,$$

alors  $f_2$  est globalement lipschitzienne.

–  $f_3$  est globalement lipschitzienne :

On a

$$\begin{aligned} |f_3(X_1(t)) - f_3(X_2(t))| &= |(\gamma^\alpha \mathbf{E}_1(t) - (\delta^\alpha + \mu^\alpha) \mathbf{I}_1(t)) - (\gamma^\alpha \mathbf{E}_2(t) - (\delta^\alpha + \mu^\alpha) \mathbf{I}_2(t))| \\ &= |(\gamma^\alpha (\mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t)) - (\delta^\alpha + \mu^\alpha) (\mathbf{I}_1(t) - \mathbf{I}_2(t)))| \\ &\leq k_3 \|X_1(t) - X_2(t)\|, \end{aligned}$$

avec

$$k_3 = \gamma^\alpha + (\delta^\alpha + \mu^\alpha) > 0$$

par conséquent  $f_3$  est globalement lipschitzienne.

–  $f_4$  est globalement lipschitzienne :

On a

$$|f_4(X_1(t)) - f_4(X_2(t))| \leq k_4 \|X_1(t) - X_2(t)\|,$$

avec

$$k_4 = \delta^\alpha + \tau^\alpha + \mu^\alpha > 0,$$

donc  $f_4$  est globalement lipschitzienne.

Comme les  $f_i$   $i = 1, 2, 3, 4$  sont globalement lipschitziennes, alors

$$\|F(t, X_1(t)) - F(t, X_2(t))\| \leq \bar{k} \|X_1(t) - X_2(t)\|$$

avec

$$\bar{k} = \max_{i=1,4} (k_i),$$

ce qui implique que

$$N(F(X_1) - F(X_2)) \leq kN(X_1 - X_2),$$

d'où,  $F$  est globalement lipschitzienne.

2- En intégrant (3.2), on trouve,

$$X(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X(\tau)) d\tau.$$

On définit l'opérateur intégrale,

$$T(X)(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X(\tau)) d\tau.$$

On a

$$\begin{aligned} \|T(X^1)(t) - T(X^2)(t)\| &= \left\| X_0^1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X^1(\tau)) d\tau - X_0^2 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X^2(\tau)) d\tau \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X^1(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} F(X^2(\tau)) d\tau \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} (F(X^1(\tau)) - F(X^2(\tau))) d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \|(t-\tau)^{\gamma-1} (F(X^1(\tau)) - F(X^2(\tau)))\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \|(t-\tau)^{\gamma-1}\| \|F(X^1(\tau)) - F(X^2(\tau))\| d\tau \\ &\leq \frac{\bar{k}\Gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \|X_1(t) - X_2(t)\|. \end{aligned}$$

Si  $\frac{\bar{k}\Gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} < 1$ , alors d'après le théorème du point fixe du Banach ([13],[12]) le problème (3.2) admet une unique solution. ■

# Conclusion

On a proposé dans de ce travail, une modélisation mathématique d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche du Caputo de l'évolution de la COVID-19. Une analyse mathématique a été faite où on a montré l'existence et l'unicité de la solution de notre système sous certaines conditions de régularités. On a déterminé le taux de reproduction de base  $R_0$  pour étudier l'existence et la stabilité des points  $E_0^*$  et  $E_1^*$ .

# Bibliographie

- [1] [www.who.int](http://www.who.int) [2](#), [3](#), [4](#)
- [2] K. A. Hacker et al. COVID-19 and Chronic Disease : The Impact Now and in the Future. *Prev Chronic Dis* 2021 ;18 :210086. [4](#)
- [3] M. Segondy, Les Coronavirus humains [Human coronaviruses]. *Rev Francoph Lab.* 2020 ;2020(526) :32-39. [2](#)
- [4] E. Padron-Regalado, Vaccines for SARS-CoV-2 : Lessons from Other Coronavirus Strains, *Infect. Dis. Ther.*, vol. 9, no. 2, pp. 255–274, 2020. [3](#)
- [5] J.H. Kim, F. Marks and J.D. Clemens, Looking beyond COVID-19 vaccine phase 3 trials. *Nat Med* 27, 205–211 (2021). [3](#)
- [6] A. Diemer, Modéliser le COVID 19, Défis et perspectives, 2020. [2](#)
- [7] Z.Kettani, Echelle de somatisation : faire la différence entre les symptômes du COVID-19 et la somatisation chez le jeune adulte et chez les sujets âgés, *Somatization Scale : Differentiating between the symptoms of COVID-19 and somatization in young adults and in the elderly*, 2020. [3](#)
- [8] N. Kyrychko, B. Blyuss and I. Brovchenko, Mathematical modelling of the dynamics and containment of COVID-19 in Ukraine, 2020. [2](#)
- [9] M. Karimi -Zarchi et al, Vertical Transmission of Coronavirus Disease 19 (COVID-19) from Infected Progrant Mothers to Neonates : A Review, 20 Mars 2020. [2](#)
- [10] COVID-19 et GROSSESSE : Quel risque de transmission verticale ?, 2020. [3](#)
- [11] S.Olayini, Mathematical modelling and optimal cost-effective control of COVID-19 transmission dynamics, 2020.
- [12] R. P. Agarwal, M. Benchohra, and S. Hamani, Boundary value problems for differential inclusions with fractional order, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, vol. 16, no. 2, pp. 181–196, 2008, doi : 10.7151/dmdico.1099. [19](#)
- [13] Y. Sun, Z. Zeng, and J. Song, Existence and Uniqueness for the Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equation, *Appl. Math.*, vol. 08, no. 03, pp. 312–323, 2017, doi : 10.4236/am.2017.83026. [19](#)
- [14] F. Pfeiffer and T. Schindler, *Introduction to Dynamics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2015. [15](#)
- [15] P. van den Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission,” *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, Nov. 2002, doi : 10.1016/S0025-5564(02)00108-6. [12](#)
- [16] A. Zeb, E. Alzahrani, V. S. Erturk, and G. Zaman, Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 ( COVID-19 ) Containing Isolation Class, vol. 2020, 2020. [6](#)

- [17] ENdaïrou et al, Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan, 2020. [v, 1, 7, 8](#)
- [18] G. Giordano et al., A SIDARTHE Model of COVID-19 Epidemic in Italy, ArXiv, 2020. [1, 6](#)
- [19] I. Abdullahi Baba and B. Ahmad Nasidi, Fractional order epidemic model for the dynamics of novel COVID-19, Alexandria Eng. J., vol. 60, no. 1, pp. 537-548, 2021. [v, 1, 9](#)

## Résumé

**Résumé :** Dans ce travail, une modélisation mathématique d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche du Caputo de l'évolution de la COVID-19 a été proposée. Une analyse mathématique a été faite où on a montré l'existence et l'unicité de la solution du système sous certaines conditions de régularités. On a déterminé le taux de reproduction de base  $R_0$  pour étudier l'existence et la stabilité des points  $E_0^*$  et  $E_1^*$ .

**Mots-Clés.** Modélisation mathématique, COVID-19, dérivée du Caputo, calculs fractionnaires, taux de reproduction de base.

---

## Abstract

**Abstract :** In this work, a fractional order mathematical modeling of the evolution of COVID-19 using the Caputo approach was proposed. A mathematical analysis was made where it was shown the existence and uniqueness of the solution of the system under certain conditions of regularities. The basic reproduction rate  $R_0$  was determined to study the existence and stability of the points  $E_0^*$  and  $E_1^*$ .

**Key words.** Mathematical modeling, Covid-19, derived from Caputo, fractional calculations, basic reproduction rate.

