MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

BEDDANI HAYET

le 26 Juin 2016

Etude des systèmes différentiels fractionnaires impliquant la q-dérivée de Caputo

Encadeur : **Louiza TABHARIT (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Djemia BENSIKADDOUR,	MCB	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Mansouria SAIDANI,	MCB	Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Remerciements

Avant tout je remercie *ALLAH* Clément et Miséricordieux,

Louange à *ALLAH* le tout puissant pour la volonté, le courage, la santé et la force qu'il m'a donné pour accomplir ce travail.

J'aimerais exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à m'encadreur de mémoire Madame Louiza TABHARIT pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et pour sa patience, ses conseils, son aide et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mon profond respect et ma reconnaissance à l'ensemble des membres du jury, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir lu ce travail, en l'occurrence :

Madame : Djemia Bensikaddour, d'avoir accepté la présidence du jury.
Madame : Mansouria Saidani, d'avoir accepté l'examinateur du jury.

Aussi je remercie également mes enseignants de mathématiques.

Enfin, je remercie mes parents, mes soeurs et mes frères, toute ma famille et mes amies qui m'ont soutenu durant ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existance à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis.
À ma mère qui m'a encouragé sur ma étude, est fatiguée pour nous.
À mon père, qui a été mon ombre durant tous les années des études, qui a viellé a me donner l'aide, a m'encourager et ma protéger.
À ma encadreur Louiza TABHARIT pour tous les conseils et les remarques fournis pour terminer le travail.
À tous mes chers enseignants de mathématiques de l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostagnam.
À mes frères, mes soeurs et à ma famille.
À mes amis et à tous les étudiants de math et info.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différentiation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire, réel ou cemplexe. Ce terme peut-être considéré comme mal approprié, car une meilleure description pourrait être *"La différentiation et de l'intégration à un ordre arbitraire",* mais alors pourquoi lui avoir attribué le nom de *"Calcul fractionnaire" ?*

A la fin du $17^{ème}$ siècle, époque à laquelle Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. Leibniz à notamment introduit le symbole :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

pour désigner la $n^{iéme}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a rapporté cela dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

$$\ll \text{Que signifie } \tfrac{d^n}{dt^n} f(t) \text{ si } n = \tfrac{1}{2} \gg .$$

Le fait que de l'Hôpital ait spécifiquement demandé pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction, a en réalité donné le nom à cette partie des mathématiques. Après la question initiale qui a conduit au nom *"Calcul fractionnaire",* la quation est devenue : n peut être n'importe quel nombre : fractionnel, irrationnel ou complexe ? parceque la réponse était affirmative que le calcul fractionnaire est devenu un terme peu approprié, mais est tout de même rester en usage.

Les équations différentilles fractionnaires peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie tels que l'acoustique, électrochimie, viscoélasticité, rhéologie, fractales, dynamique chaotique, physique des polymères, électromagnétique, médecine, économie, astrophysique, génie chimique, physique, statistique, thermodynamique, bio-ingénierie, etc.

Plusieurs mathématiciens sont intéressés par le calcul quantique qui a essentielement débuté en 1748. Au $19^{ième}$ siècle (1846), Heine introduit la notion de q-analogue ou q-extension (sous entenu que la formule originale se trouve être limite quand q tend vers 1 de sa q-déforme). En 1867 son élève Thomae a utilisé les travaux de Fermat en probabilité pour introduitre la notion de q-intégrale entre 0 et 1, Cette notion est prolongée au début du vingtième siècle par F. H . Jackson [1870-1960] : il a introduit la q-théorie de q-analogue, il s'intéressé aux q-analogues de certaines fonctions spéciales, de même il s'est construit les notions de q-dérivée, q-intégrale.

Pendant le $20^{ième}$ siècle l'application de cette théorie a trouvé des assises dans plusieurs domaines scientifiques : physique, mécanique quantique et combinatoire.

Pusieurs mathématiciens et physiciens ont construit à l'essor de cette théorie par des travaux considérables.

La théorie de stabilité pour les équations fonctionnelles a commencé avec un problème lié à la stabilité des homomorphismes de groupe qui a été soulevé par S. M. Ulam en 1940 dans une conférence donnée à l'Université du Wisconsin. Le problème posé par Ulam était le suivant :

Soit G_1 un groupe et soit G_2 un groupe métrique muni de la distance $d(.,.)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, existe-t-il un $\delta > 0$ tel que si une fonction $h : G_1 \to G_2$ satisfait l'inégalité :

$$d(h(ts), h(t)h(s)) < \delta$$

pour tout $t, s \in G_1$, alors il existe un homomorphisme $H : G_1 \to G_2$ tel que :

$$d(h(t), H(t)) < \varepsilon, \ \forall t \in G_1?$$

En 1941, Hyers a répondu affirmativement à la question d'Ulam pour le cas où G_1 et G_2 sont des espaces de Banach, d'ailleurs ce fut la raison pour laquelle on appelle ce type de stabilité, stabilité d'Ulam-Hyers. Puis en 1978, le résultat de Hyers a été généralisé par Rassias.

Le concept de stabilité pour une équation fonctionnelle apparaît lorsque nous remplaçons l'équation fonctionnelle par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation. Ainsi, la question de stabilité des équations fonctionnelle est de savoir comment les solutions de l'inégalité diffèrent de celles de l'équation fonctionnelle donnée? Une attention considérable a été accordée à l'étude de stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers-Rassias de toutes sortes d'équations fonctionnelles.

Ce mémoire se compose essentiellement de trois chapitres, et d'une conclusion.

Le premier chapitre comporte quelques notions de base. Nous commençons par un rappel sur les fonctions essentielles du calcul fractionnaire. Aussi, nous introduisons l'intégrale arbitraire de Riemann-Liouville d'ordre non entier, suivi par des propriétés et quelques exemples. Puis, nous définissons la dérivée au sens de Riemann-Liouville pour un ordre réel positif en donnant quelques propriétés et exemples. Ce chapitre se termine par la définition de la dérivée au sens de Caputo pour un ordre réel positif ainsi que leurs propriétés et quelques exemples.

Dans le deuxième chapitre, nous avons énoncé tous les outils de base du q-calcul fractionnaire en rappelant les fonctions q-spéciales. Par la suite, nous définissons la q-intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre non entier ainsi que ses propriétés et des exemples. A la fin de ce chapitre nous donnons la définition des q-dérivées fractionnaires et quelques propriétés de la q-dérivée de Riemann-Liouville et celle Caputo et des exemples.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le problème au limite différentiel d'ordre fractionnaire avec condition q-intégrale fractionnaire non locale. En suite, on donne deux type de stabilité d'Ulam-Hyers, suivi par l'étude de l'existence et l'unicité de solution de ce problème. Dans le dernier section, nous avons étudé la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de problème précédent et la stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias.

Nous terminons notre mémoire par une conclusion qui résume les principaux résultats obtenus dans ce travail et une biblographie est donnée à la fin de ce document.

Chapitre 1

Notions de base du calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, on rappelle les fonctions spéciales Gamma et Béta d'Euler.

Ensuite, on définit l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville en donnant quelques propriétés et exemples. A la fin de ce chapitre, on présente la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1 Fonctions spéciales de calcul fractionnaire

1.1 La Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est en mathématiques une fonction cemplexe, considérée également comme une fonction spéciale, elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 [10] *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \,; \;\; \mathrm{R}e(z) > 0 \tag{1.1}$$

Cette intégrale convergente absolument sur le demi plan complexe ou la partie réelle est strictement positive.

Proposition 1.1 [10], [4]

1.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \,; \quad \mathrm{R}e(z) > 0 \tag{1.2}$$

2.

$$\Gamma(1) = 1, \; \Gamma(2) = 1, \; \Gamma(3) = 2, ..., \; \Gamma(n+1) = n!; \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Preuve. On va demontrer la deusième proposition :

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{a \to +\infty} -e^{-t}|_0^a \\ &= 1. \end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1,\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 2\times 1\Gamma(1).$$

D'où

$$\Gamma(n+1) = n!;\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

■

Exemple 1.1 1. *On calcule* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt,$$

On fait le changement de variable $u = \sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dt = 2\sqrt{t}du$, *si* $t = 0$, *alors* $u = 0$ *et si* $t = +\infty$ *alors* $u = +\infty$, *ainsi :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Sachant que l'intégrale de Gauss est donnée par $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, *alors on a :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

2. *Et pour* $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$, *En utilisant* (3.2), *on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}\times(-2)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

1.2 La Fonction Béta d'Euler

Définition 1.2 [7] *La fonction Béta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt;\ \mathrm{Re}(x) > 0,\ \mathrm{Re}(y) > 0 \tag{1.4}$$

Proposition 1.2 [7]

1. *La fonction Béta est symétrique :*

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x);\quad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0 \tag{1.5}$$

2. $\forall \mathrm{Re}(x)>0, \mathrm{Re}(y)>0$, *on a :*

$$x\mathrm{B}(x,y+1)=y\mathrm{B}(x+1,y) \tag{1.6}$$

3. *La relation entre la fonction Gamma d'Euler et Béta d'Euler est :*

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};\quad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0 \tag{1.7}$$

1. On fait le changement de variable $u=1-t \Longrightarrow dt=-du$, si $t=0$ alors $u=1$ et si $t=1$ alors $u=0$, donc on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\\ &= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-1)du\\ &= -(1)\int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du\\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du\\ &= \mathrm{B}(y,x).\end{aligned}$$

2. Par définition, on a :

$$\mathrm{B}(x,y+1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt.$$

En multipliant par x, on a :

$$x\mathrm{B}(x,y+1)=x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt.$$

Puis, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}x\mathrm{B}(x,y+1) &= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt\\ &= \left[t^x(1-t)^y\right]_0^1-\int_0^1 -yt^x(1-t)^{y-1}dt\\ &= y\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt\\ &= y\mathrm{B}(x+1,y).\end{aligned}$$

3. On montre que

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y).$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^{+\infty} e^{-z}z^{y-1}dz\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+z)}t^{x-1}z^{y-1}dtdz.\end{aligned}$$

On pose $t+z=u$ alors $0\le t\le u$; $0\le u\le +\infty$ et $dtdz=dtdu$.

Ainsi, on a :

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}e^{-u}\int_0^u t^{x-1}(u-t)^{y-1}dtdu.$$

Puis, on fait le changement de variable $v=\frac{t}{u}$, alors $udv=dt$; si $t=0$ alors $v=0$ et si $t=u$ alors $v=1$,

on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}e^{-u}\int_0^1 (uv)^{x-1}(u-uv)^{y-1}udvdu\\ &= \int_0^{+\infty}e^{-u}u.u^{x-1}u^{y-1}\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dvdu\\ &= \int_0^{+\infty}e^{-u}u^{x+y-1}du\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\\ &= \mathrm{B}\left(x,y\right)\Gamma\left(x+y\right).\end{aligned}$$

Exemple 1.2 *1. Pour calculer* $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, *on utilise la formule* (3.7) *et on a :*

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1}=\pi.$$

2. De même pour $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, *on utilise les formules* (3.2), (3.3) *et* (3.7) *et on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{3\times 2\times\Gamma(1)}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{3!}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}\right)\left(\frac{3}{4}\times\sqrt{\pi}\right)}{6}=\frac{1}{16}\pi.\end{aligned}$$

2 L'intégration fractionnaire

2.1 La formule de cauchy des intégales n-ème

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on note :

$$\left(\mathrm{J}_a^1 f\right)(x)=\int_a^x f(t)dt=\mathrm{F}(x).$$

Si on fait une intégration de F encore une fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{J}_a^1\mathrm{F}\right)(x) &= \int_a^x \mathrm{F}(u)du=\int_a^x \mathrm{J}_a^1 f(u)du=\mathrm{J}_a^1(\mathrm{J}_a^1 f(u))=\left(\mathrm{J}_a^2 f\right)(x)\\ \left(\mathrm{J}_a^2 f\right)(x) &= \int_a^x \mathrm{J}_a^1 f(u)d=\int_a^x dt\int_a^u f(u)du.\end{aligned}$$

Et comme $f\in\mathrm{C}\,[a,b]$ et intégrable on appliquant la théorème de fubini en permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\left(\mathrm{J}_a^2 f\right)(x)=\frac{1}{(2-1)!}\int_a^x (x-t)f(t)du.$$

Pour le $n^{ème}$ itéré, on a :

$$\begin{aligned}\left(J_a^n f\right)(x) &= \left(J_a^1 J_a^{n-1} f\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x J_a^{n-1} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt,\ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

2.2 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouvielle

A partir la formule de cauchy (3.8), on définit l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouvielle d'ordre non-entier positif α comme suit :

Définition 1.3 [7], [14] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale fractionnaire de f d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Riemann-Liouvielle et on note $J_a^\alpha f$, par :*

$$\begin{cases} \left(J_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt;\ \alpha > 0,\ x \in [a,b], \\ \left(J_a^0 f\right)(x) = f(x). \end{cases} \tag{1.9}$$

Proposition 1.3 [7], [14] $\forall f, g \in C[a,b]$; $\forall \delta, \lambda \in \mathbb{R}$; *on a :*

1. *La linéairtié :*
$$J_a^\alpha(\delta f + \lambda g)(x) = \lambda\left(J_a^\alpha f\right)(x) + \delta\left(J_a^\alpha g\right)(x);\ \forall \alpha > 0 \tag{1.10}$$
2. *Semi -groupe :*
$$\left(J_a^\alpha J_a^\beta f\right)(x) = \left(J_a^{\alpha+\beta} f\right)(x);\ \forall \alpha, \beta > 0 \tag{1.11}$$
3. *Commutativité :*
$$\left(J_a^\alpha J_a^\beta f\right)(x) = \left(J_a^\beta J_a^\alpha f\right)(x);\ \forall \alpha, \beta > 0 \tag{1.12}$$

Preuve.

1. La linéairtié est évidente.
2. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\left(J_a^\alpha J_a^\beta f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(J_a^\beta f\right)(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-u)^{\beta-1} f(u)\,du\,dt.\end{aligned}$$

Comme $a \leq t \leq x$ et $a \leq u \leq t$, alors : $u \leq t \leq x \Rightarrow a \leq u \leq x$,

$$\left(J_a^\alpha J_a^\beta f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_u^x (x-t)^{\alpha-1}(t-u)^{\beta-1} f(u)\,dt\,du$$

On pose le changement variable $z = \frac{t-u}{x-u} \Rightarrow dt = (x-u)\,dz$, si $t = u$ alors $z = 0$, si $t = x$ alors $z = 1$ et $(t-u)^{\beta-1} = z^{\beta-1}(x-u)^{\beta-1}$,

On a aussi :

$$\begin{aligned}t - u &= zx - zu \Rightarrow x = \frac{t-u+zu}{z} \\ &\Rightarrow\ x - t = \frac{z(x-u)(1-z)}{z} \\ &\Rightarrow\ (x-t)^{\alpha-1} = (1-z)^{\alpha-1}(x-u)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left(J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}(t-u)^{\alpha-1} z^{\beta-1}(t-u)^{\beta-1} f(u)(x-u)\,dz\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (t-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz\, f(u)\,du \\
&= \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\,du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\,du \\
&= \left(J_a^{\alpha+\beta} f\right)(x).
\end{aligned}$$

3. En utilisant (3.11), on a :

$$\left(J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f\right)(x) = \left(J_a^{\alpha+\beta} f\right)(x) = \left(J_a^{\beta+\alpha} f\right)(x) = \left(J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f\right)(x).$$

■

Exemple 1.3 *Calculer les intégrales fractionnaires des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x,\ x > 0,\ \alpha = \frac{1}{2}$.
   Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\left(J^{\frac{1}{2}} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\, t\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\left[-\frac{t\,(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,dt \right] \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[-\frac{(x-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = (x-a)^{\beta},\ x \geq a;\ \alpha, \beta > 0$.
   Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\left(J_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta}\,dt.
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $z = \frac{t-a}{x-a} \Rightarrow dz = \frac{dt}{x-a}$, si $t = a$ alors $z = 0$ et pour $t = x$ on a $z = 1$ et $(t-a)^{\beta} = z^{\beta}(x-a)^{\beta}$. On a aussi :

$$\begin{aligned} t-a &= z(x-a) \Rightarrow t-a = zx - za \\ &\Rightarrow x = \frac{za+t-a}{z} \\ &\Rightarrow x-t = ((x-a)(1-z)). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{J}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1} z^{\beta}(x-a)^{\beta}(x-a)\,dz \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta+1-1}\,dz \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}(\alpha, \beta+1). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.7), on a :

$$\left(\mathrm{J}_a^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, on aura :

$$\mathrm{J}_a^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{13}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{17}{6})}(x-a)^{\frac{11}{6}}.$$

3 Dérivation non-entière

Il y a des approches différentes de la dérivée fractionnaire. On cite la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de caputo.

3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4 [14, 8, 15, 11] *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha > 0$. On définit la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f et on note ${}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f$ par la formule :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{J}_a^{n-\alpha} f(x)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt, & n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n f}{dx^n}(x), & \alpha = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Proposition 1.4 [14, 8, 15, 11] *Soient $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall \alpha > 0$, on a :*

1.

$${}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) + \mu\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} g\right)(x) \tag{1.14}$$

2.

$$\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha} \mathrm{J}_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \tag{1.15}$$

3.

$$J_a^\alpha \left({}^{RL}D_a^\alpha f(x)\right) \neq f(x) \tag{1.16}$$

Preuve.

1. La linéairtié est évidente.
2. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\left({}^{RL}D_a^\alpha J_a^\alpha f\right)(x) &= \left(D_a^n J_a^{n-\alpha} J_a^\alpha f\right)(x)\\ &= \left(D_a^n J_a^n f\right)(x)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

3. *Contre exemple :* On prend $f(x) = x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha > 0$,

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) = \frac{d^n}{dx^n} J_a^{n-\alpha}\left(x^{\alpha-1}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)}(x)^{n-1}\right).$$

En utilisant l'expression de la dérivation classique, on obtient :

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x)^{n-1}\right) = 0.$$

D'où

$$\left(J_a^\alpha f\right)(x) = J_a^\alpha 0 = 0 \neq f(x).$$

■

Exemple 1.4 *Soit* $f(x) = (x-a)^\beta$, $x \geq a$; $\alpha, \beta > 0$.

Par définition, on a :

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) = \left(D_a^n J_a^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^\beta dt\right).$$

Comme,

$$\left(J_a^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha},$$

En utilisant l'expression de la dérivée classique :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta+n-\alpha-n}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha},\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

On pose $\alpha > 0$ et $\beta = 0$. Alors,

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}(x-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0.$$

c'est-à-dire que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle.

Et pour $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on aura :

$$\begin{aligned} \left(^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}(x-a)^{-1} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}(x-a)^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2(x-a)}. \end{aligned}$$

3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5 [14, 8, 15] *Soient $f \in \mathrm{C}^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$. On définit la dérivée fractionnaire au sens Caputo d'ordre α de la fonction f notée $\mathrm{D}_a^{\alpha} f$ comme suit :*

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \mathrm{J}_a^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) = \mathrm{J}_a^{n-\alpha}\left(f^{(n)}(x)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\,dt, & n-1 < \alpha \leq n,\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n f}{dx^n}(x), & \alpha = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Proposition 1.5 [14, 8, 15] *Soient $f, g \in \mathrm{C}^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall \alpha > 0$, on a :*

1.
$$\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) + \mu\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} g\right)(x) \tag{1.18}$$

2.
$$\left(\mathrm{J}_a^n \mathrm{D}_a^n f\right)(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i,\ n \in \mathbb{N}^*,\ c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!},\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.19}$$

3.
$$\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} \mathrm{J}_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \tag{1.20}$$

4.
$$\left(\mathrm{J}_a^{\alpha} \mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i;\ n = [\alpha] + 1,\ c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!},\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.21}$$

1. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (\lambda f + \mu g)^{(n)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\lambda f^{(n)}(t) + \mu g^{(n)}(t)\right) dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\,dt + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(t)\,dt \\ &= \lambda\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) + \mu\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} g\right)(x) \end{aligned}$$

2. D'aprés le développement deTaylor de f, si $f \in C^n[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \left(J_a^n f^{(n)}\right)(x) \\ \left(J_a^n D_a^n f\right)(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i. \end{aligned}$$

3. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \left(D_a^\alpha J_a^\alpha f\right)(x) &= \left(J_a^{n-\alpha} D_a^n J_a^\alpha f\right)(x) \\ &= \left(J_a^{n-\alpha} D_a^n J_a^{n+\alpha-n} f\right)(x) \\ &= \left(J_a^{n-\alpha} D_a^n J_a^n J_a^{\alpha-n} f\right)(x) \\ &= \left(J_a^{n-\alpha} J_a^{\alpha-n} f\right)(x) \\ &= \left(J_a^0 f\right)(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

4. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \left(J_a^\alpha D_a^\alpha f\right)(x) &= \left(J^\alpha J_a^{n-\alpha} D^n f\right)(x) \\ &= \left(J_a^{\alpha+n-\alpha} D^n f\right)(x) \\ &= \left(J_a^n D^n f\right)(x) \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i. \end{aligned}$$

Théorème 1.1 [14, 8, 15] *Soient* $f \in C^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall \alpha > 0$. *Alors l'équation* $\left(D_a^\alpha f\right)(x) = 0$ *admet comme solution :*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i, \ n = [\alpha]+1, \ c_i \in \mathbb{R} \tag{1.22}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\left(D_a^\alpha f\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \left(J_a^{n-\alpha} D^n f\right)(x) = 0.$$

Par application de $D_a^{n-\alpha}$, on obtient :

$$\left(D_a^{n-\alpha} J_a^{n-\alpha} D^n f\right)(x) = D_a^{n-\alpha} 0.$$

D'aprés la propriété (3.16), on a :

$$\left(D^n f\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i.$$

■

La relation la dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville :

Théorème 1.2 [15] *Soient* $f \in C^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall \alpha > 0$. *Alors, on a :*

$$\left(D_a^\alpha f\right)(x) = {}^{RL}D_a^\alpha \left[f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \right] \tag{1.23}$$

Preuve. On sait que :

$$f\,(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}(a)}{i\,!}(x-a)^{i}+\left(\mathrm{J}_a^n f^{\,(n)}\right)(x)$$

avec $\left(\mathrm{J}_a^n f^{\,(n)}\right)$ est le reste du développement de Taylor de la fonction f ;
On applique l'intégrale $\mathrm{J}_a^{n-\alpha}$ à cette identité, on obtient :

$$\left(\mathrm{J}_a^{n-\alpha}f\right)(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}(x-a)^{n-\alpha+i}+\left(\mathrm{J}_a^{2n-\alpha}\mathrm{D}_a^n f\right)(x).$$

Ensuite on applique D_a^n à la formule obtenue, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}_a^n\mathrm{J}_a^{n-\alpha}f\right)(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}\mathrm{D}_a^n(x-a)^{n-\alpha+i}+\mathrm{D}_a^n\mathrm{J}_a^{2n-\alpha}\mathrm{D}_a^n f(x)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}\left(\frac{\Gamma(n-\alpha+i+1)\,(x-a)^{n-\alpha+i-n}}{\Gamma(n-\alpha+i+1-n)}\right)+\left(\mathrm{D}_a^n\mathrm{J}_a^n\mathrm{J}_a^{n-\alpha}\mathrm{D}_a^n f\right)(x)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(x-a)^{i-\alpha}+\left(\mathrm{J}_a^{n-\alpha}\mathrm{D}_a^n f\right)(x).
\end{aligned}$$

Alors, par définition de la dérivée de *Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo, on a :*

$${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f\,(x)=\left(\mathrm{D}_a^{\alpha}f\right)(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{\,(i)}\,(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}\,(x-a)^{i-\alpha}.$$

Si $f^{\,(i)}(a)=0$ pour $i=0,1,2,.....,n-1$,

on aura :

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f\right)(x)=\left(\mathrm{D}_a^{\alpha}f\right)(x).$$

■

Remarque 1.1 *Les propriétés de semi-groupe et la commutativité, pour la dérivée de Caputo, sont vérifiées si et seulement si* $0<\alpha\le 1,\ 0<\beta\le 1$ *et* $0<\alpha+\beta\le 1$, *i.e.,*

$$\left(\mathrm{D}_a^{\alpha}\mathrm{D}_a^{\beta}f\right)(x)=\left(\mathrm{D}_a^{\alpha+\beta}f\right)(x)=\left(\mathrm{D}_a^{\beta}\mathrm{D}_a^{\alpha}f\right)(x) \tag{1.24}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}_a^{\alpha}\mathrm{D}_a^{\beta}f\right)(x) &= \left(\mathrm{J}_a^{1-\alpha}\mathrm{D}_a^1\mathrm{J}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{J}_a^{1-\alpha-\beta+\beta}\mathrm{D}_a^1\mathrm{J}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{J}_a^{1-(\alpha+\beta)}\mathrm{J}^{\beta}\mathrm{D}_a^1\mathrm{J}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{J}_a^{1-(\alpha+\beta)}[\mathrm{J}^{1-(1-\beta)}\mathrm{D}_a^1]\mathrm{J}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{J}_a^{1-(\alpha+\beta)}\mathrm{D}_a^{1-\beta}\mathrm{J}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f\right)(x)\,.
\end{aligned}$$

D'aprés la propriété (3.20), on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}f\right)(x) &= \left(\mathrm{J}_a^{1-(\alpha+\beta)}\mathrm{D}^1 f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\alpha+\beta}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\beta+\alpha}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{D}^{\alpha}f\right)(x).
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.5 1. *La dérivée de Caputo de la fonction constante est nule,* $f(x) = c$.
Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_a^\alpha(c) &= c\mathrm{D}_a^\alpha(1) \\ &= c[\mathrm{J}_a^{n-\alpha}\mathrm{D}^n](1) \\ &= c\mathrm{J}_a^{n-\alpha}0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. *La dérivée de Caputo de la fonction* $f(x) = (x-a)^\beta$, $x \geq a$; $\alpha, \beta > 0$ *est* $\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\alpha-\beta}$.

Par définition, on a :

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \mathrm{J}_a^{n-\alpha}\left(f^{(n)}(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Soit $0 \leq n-1 < \alpha < n$ *avec* $\beta > n-1$, *alors on a :*

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

D'où

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}\,dt.$$

On pose le changement de variable $z = \frac{t-a}{x-a} \Rightarrow dz = \frac{dt}{x-a}$, *si* $t = a$ *alors* $z = 0$, *si* $t = x$ *alors* $z = 1$ *et* $(t-a)^{\beta-n} = z^{\beta-n}(x-a)^{\beta-n}$. *On a aussi :* $t - a = z(x-a) \Rightarrow x - t = (x-a)(1-z)$.

Donc,

En utilisant la relation (3.7) , *on a :*

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma\left(\beta-n+1\right)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma\left(\beta-n+1\right)\Gamma\left(\beta+1-\alpha\right)}(x-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\alpha\right)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Pour $\alpha = \frac{5}{2}$ *et* $\beta = 2$, *on aura :*

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(x-a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi\,(x-a)}}.$$

Chapitre 2

Q-Calcul

Dans cette partie, on présente quelques concepts et des outils de base sur la théorie de calcul quantique et puis on introduit les q-fonctions spéciales. Dans la deuxième section on cite la q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que leurs propriétés et quelques exemples. On termine ce chapitre par une section qui définit la q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo et on donne quelques propriétés et exemples.

1 Généralités

Définition 2.1 [6] *Le q-analogue de nombre réelle a c'est l'expression* $f\left(q\right)$ *avec* $q \in \left]0,1\right[$*; tel que :*

$$\lim_{q\to 1} f\left(q\right) = a.$$

On écrit :

$$[a]_q := \frac{1-q^a}{1-q} = 1+q+q^2+\ldots+q^{a-2}+q^{a-1};\ a \in \mathbf{C} \tag{2.1}$$

On peut définir la q-factorielle, par [6] :

$$[n]_q! = \prod_{k=0}^{n-1} [k]_q = \frac{\left(q;q\right)_n}{\left(1-q\right)^n};\ n \in \mathbf{N} \text{ où } \left(q;q\right)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-q^k\right) \tag{2.2}$$

Le q-shift factorielle est défini par [6] :

$$\left(a;q\right)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right);\ \forall n \in \mathbf{N},\ \left(a;q\right)_0 = 1 \tag{2.3}$$

La q-fonction $(a-b)^{(n)}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$ est définie comme suit [6] :

$$(a-b)_q^n = (a-b)^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(a-bq^k\right), \qquad (a-b)^{(0)} = 1$$

Plus généralement, si $\alpha \in \mathbf{R}$, on a :

$$(a-b)^{(\alpha)} = a^\alpha \prod_{n=0}^{\infty} \frac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}}. \tag{2.4}$$

Si $b=0$, alors [6] :

$$(a)^{(\alpha)} = a^\alpha \tag{2.5}$$

$\forall\, a, b$ et $\alpha \in \mathbf{R}^{+}$ et $k, n \in \mathbf{N}$, [12]

$$\left(a-bq^{k}\right)^{(\alpha)} = a^{\alpha}\left(1-q^{k}\frac{b}{a}\right)^{(\alpha)}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\left(a-bq^{k}\right)^{(\alpha)}}{(a-b)^{(\alpha)}} = \frac{\left(q^{\alpha}\frac{b}{a};q\right)_{k}}{\left(q\frac{b}{a};q\right)_{k}}, \tag{2.7}$$

$$\left(q^{n}-q^{k}\right)^{(\alpha)} = 0, \quad (k\leq n). \tag{2.8}$$

1. **La q-dérivée ordinaire**

Définition 2.2 [6] *La q-dérivée d'une fonction f est définie par :*

$$\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)=\frac{d_{q}f\;(x)}{d_{q}x}=\frac{f\;(qx)-f\;(x)}{(q-1)\,x},\;(x\neq 0);\;\left(\mathrm{D}qf\right)(0)=\lim_{x\to 0}\mathrm{D}qf\;(0). \tag{2.9}$$

Remarque 2.1 [9] *Si f est dérivable, alors,*

$$\lim_{q\to 1}\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)=\lim_{q\to 1}\frac{f\;(qx)-f\;(x)}{(q-1)\,x}=\frac{df\;(x)}{dx}=f^{\prime}(x). \tag{2.10}$$

Proposition 2.1 [6, 12] *Soient f et g deux fonctions avec $g(x)\neq 0$ et $g(qx)\neq 0$, et soient $\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$.*

1. *D_{q} est un opérateur linéaire :*

$$\mathrm{D}_{q}\left(\alpha f\;(x)+\beta g\;(x)\right)=\alpha\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)+\beta\left(\mathrm{D}_{q}g\right)(x) \tag{2.11}$$

2. *On définit la q-dérivée du produit de la fonction f la fonction g par :*

$$\mathrm{D}_{q}[f\;(x)g\;(x)]=\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)g(qx)+f(x)\left(\mathrm{D}_{q}g\right)(x) \tag{2.12}$$

3. *Et on définit aussi la q-dérivée de fraction de la fonction f sur la fonction g par :*

$$\mathrm{D}_{q}\left[\frac{f\;(x)}{g\;(x)}\right]=\frac{\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)\,g(qx)-f(qx)\left(\mathrm{D}_{q}g\right)(x)}{g(qx)\,g(x)}. \tag{2.13}$$

4. *Pour tout entier n,*

$$\mathrm{D}_{q}(x-a)_{q}^{n}=[n]_{q}(x-a)_{q}^{n-1}. \tag{2.14}$$

5. *$\forall\, n\in \boldsymbol{N}$,*

$$\mathrm{D}_{q}(a-x)_{q}^{n}=-[n]_{q}\left(a-qx\right)_{q}^{n-1}. \tag{2.15}$$

Preuve. ■

1. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{q}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right) &= \frac{\alpha f(qx)+\beta g(qx)-\alpha f(x)-\beta g(x)}{(q-1)\,x}\\
&= \frac{\alpha\left(f(qx)-f(x)\right)+\beta\left(g(qx)-g\;(x)\right)}{(q-1)\,x}\\
&= \alpha\frac{\left(f(qx)-f(x)\right)}{(q-1)\,x}+\beta\frac{\left(g(qx)-g((x)\right)}{(q-1)\,x}\\
&= \alpha\left(\mathrm{D}_{q}f\right)(x)+\beta\left(\mathrm{D}_{q}g\right)(x).
\end{aligned}$$

2. Par définition, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_q[f(x)g(x)] &= \frac{f(qx)g(qx)-f(x)g(x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{f(qx)g(qx)-f(x)g(qx)+f(x)g(qx)-f(x)g(x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{(f(qx)-f(x))g(qx)}{(q-1)x}+\frac{f(x)(g(qx)-g(x))}{(q-1)x} \\
&= \left(\mathrm{D}_q f\right)(x)g(qx)+f(x)\left(\mathrm{D}_q g\right)(x).
\end{aligned}
$$

3. Par définition, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{1}{\left(q-1\right)x}\left[\frac{f(qx)}{g(qx)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right] \\
&= \frac{1}{\left(q-1\right)x}\left[\frac{f(qx)}{g(qx)}-\frac{f(qx)}{g(x)}+\frac{f(qx)}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right] \\
&= \frac{1}{\left(q-1\right)x}\left[\frac{f(qx)(g(x)-g(qx))}{g(qx)g(x)}\right]+\frac{1}{\left(q-1\right)x}\left[\frac{(f(qx)-f(x))g(qx)}{g(qx)g(x)}\right] \\
&= -\frac{1}{g(qx)g(x)}\left[\frac{f(qx)(g(qx)-g(x))}{\left(q-1\right)x}\right]+\frac{1}{g(qx)g(x)}\left[\frac{(f(qx)-f(x))g(qx)}{\left(q-1\right)x}\right] \\
&= \frac{\left(\mathrm{D}_q f\right)(x)g(qx)-f(qx)\left(\mathrm{D}_q g\right)(x)}{g(qx)g(x)}.
\end{aligned}
$$

4. On va démontrer par récurrence. La propriété est vraie pour $n=0$, car $[0]_q=0$, et on suppose qu'elle est vraie pour un certain rang k, i.e., $\mathrm{D}_q\,(x-a)_q^k=[k]_q\,(x-a)_q^{k-1}$. On vérifié la propriété pour $k+1$, sachant que $(x-a)_q^{k+1}=(x-a)_q^k\left(x-q^k a\right)$. En utilisant la dérivée du produit (3.13), on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\,(x-a)_q^{k+1} &= \mathrm{D}_q\,(x-a)_q^k\left(x-q^k a\right) \\
&= (x-a)_q^k+[k]_q\left(qx-q^k a\right)(x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k+[k]_q\,q\left(x-q^{k-1}a\right)(x-a)_q^{k-1} \\
&= \left(1-q\,[k]_q\right)(x-a)_q^k \\
&= [k+1]_q\,(x-a)_q^k.
\end{aligned}
$$

Donc, la propriété est vraie pour $k+1$, D'ou, la propriété (3.15) est vérifiée.

5. D'aprés la définition (3.4), $\forall n\geq 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)\left(a-qx\right)\left(a-q^2x\right)\ldots\left(a-q^{n-1}x\right) \\
&= (a-x)\,.q\left(q^{-1}a-x\right).q^2\left(q^{-2}a-x\right)\ldots q^{n-1}\left(q^{1-n}a-x\right) \\
&= (-1)^n\,q^{n(n-1)/2}\left(a-q^{1-n}a\right)\ldots\left(x-q^{-2}a\right)\left(x-q^{-2}a\right)(x-a).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
(a-x)_q^n=(-1)^n\,q^{n(n-1)/2}\left(x-q^{1-n}a\right)_q^n. \tag{2.16}
$$

En utilisant la formule (3.17) et la propriété (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
D_q (a-x)_q^n &= (-1)^n q^{n(n-1)/2} D_q \left(x-q^{1-n}a\right)_q^n \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2} [n]_q \left(x-q^{1-n}a\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}.(-1)^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} \left(x-q^{2-n}\left(q^{-1}a\right)\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}.\left(q^{-1}a-x\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q \left(a-qx\right)_q^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.1 *On calcul les q-dérivées des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}_+^*$.

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n-1)x^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n-1)}{(q-1)} x^{n-1} \\
&= [n]_q! x^{n-1}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$.

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= D_q \sqrt{x} = \frac{\sqrt{qx}-\sqrt{x}}{(q-1)x} \\
&= \frac{\sqrt{q}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(\sqrt{q}-1)\sqrt{x}}{(q-1)x} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{q}-1)\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

2 La q-intégrale ordinaire

Définition 2.3 [5] *La q-intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[0,b]$ est définie par :*

$$\left(J_q f\right)(x) = \int_0^x f(t)\, d_q t = (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} f\left(xq^i\right) q^i;\ x \in [0,b] \tag{2.17}$$

Et la q- intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est :

$$\left(J_{q,a} f\right)(x) = \int_a^b f(t)\, d_q t = \int_0^b f(t)\, d_q t - \int_0^a f(t)\, d_q t \tag{2.18}$$

Définition 2.4 [5] *Soit $0 < q < 1$, $b > 0$, et $n \in \mathbb{Z}^+$. La q- intégrale restreinte qui dépend uniquement de q, b et n, est définie comme suit :*

$$\int_a^b f(t)\, d_q t = \int_{bq^n}^b f(t)\, d_q t = (1-q)\, b \sum_{i=0}^{n-1} f\left(bq^i\right) q^i. \tag{2.19}$$

Proposition 2.2 [9]

1. *Si* F *une q-primitive de la fonction* f, *continue en* $x=0$, *alors la q-primitive est :*

$$\int_a^b f(x)\,d_qx = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a),\ 0\leq a\leq b\leq\infty. \tag{2.20}$$

2.

$$\mathrm{D}_q\left(\int_0^x f(t)\,d_qt\right)=f(x). \tag{2.21}$$

1. Comme $\mathrm{F}(x)$ est continue en point 0, alors on peut appliquer la formule de Jackson, en ajoutant une constante, c'est daire :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= (1-q)\,x\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{D}_q\mathrm{F}\left(xq^i\right)q^i+\mathrm{F}(0)\\ &= (1-q)\,x\sum_{i=0}^{\infty}f\left(xq^i\right)q^i+\mathrm{F}(0),\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d_qx &= \int_0^b f(x)\,d_qx-\int_0^a f(x)\,d_qx\\ &= \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).\end{aligned}$$

2. D'après la propriété (3.21), pour $b=x$ et $a=0$, on a :

$$\int_0^x f(u)\,d_qu=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0),$$

En appliqant la q- dérivée ordinaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_q\left(\int_0^x f(u)\,d_qu\right) &= \mathrm{D}_q(\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0))\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Théorème 2.1 [9] *Soient f et g sont deux fonctions q-dérivalbes sur $[a,b]$ la q-intégration par parties est définie comme :*

1.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{D}_qg(x)d_qx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b\mathrm{D}_qf(x)\,g(qx)d_qx \tag{2.22}$$

2.

$$\int_a^b f(qx)\mathrm{D}_qg(x)d_qx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b\mathrm{D}_qf(x)\,g(x)d_qx \tag{2.23}$$

Preuve. En appliquant la propriété (3.21) à notre fonction $f(x)\,g(x)$, on trouve :

$$\int_a^b\mathrm{D}_q\left(f(x)\,g(x)\right)d_qx=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a),$$

d'autre part, par la règle de produit, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{D}_qg(x)d_qx+\int_a^b\mathrm{D}_qf(x)g(qx)d_qx=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a),$$

D'où

$$\int_a^b f(x)\mathrm{D}_qg(x)d_qx=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b\mathrm{D}_qf(x)g(qx)d_qx.$$

■

Proposition 2.3 [13] *Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :*

1.
$$\left(\mathrm{D}_q^n \mathrm{J}_{q,a}^n f\right)(x) = f(x), \tag{2.24}$$

2.
$$\left(\mathrm{J}_{q,a}^n \mathrm{D}_q^n f\right)(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\mathrm{D}_q^i f\right)(a)}{[i]_q!}(x-a)^{(i)}. \tag{2.25}$$

Exemple 2.2 *Calcul les q-intégrales des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ *et* $x \in [0, b]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \int_0^x f(t)\, d_q t = \int_0^x t^n d_q t \\
&= (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} (xq)^{in} q^i \\
&= (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} x^n q^{in} q^i \\
&= (1-q)\, x^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(n+1)} \\
&= \frac{(1-q)\, x^{n+1}}{1-q^{n+1}} \\
&= \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [0, b]$ *avec* $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \int_0^x f(t)\, d_q t = \int_0^x \frac{1}{t^2} d_q t \\
&= (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(xq)^{2i}} q^i \\
&= (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 q^{2i}} q^i \\
&= (1-q) \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q^i} \\
&= \frac{(1-q)}{(q-1)} \frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

3 Les deux fonctions q-exponentielles

Définition 2.5 [6] *On définit deux q-analogues de les fonctions exponentielles par :*

$$e_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]_q!} = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} \tag{2.26}$$

et,

$$\mathrm{E}_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{x^i}{[i]_q!} = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty} \tag{2.27}$$

Proposition 2.4 [6]

1.
$$D_q e_q^x = e_q^x \tag{2.28}$$

2.
$$D_q E_q^x = E_q^{qx} \tag{2.29}$$

Preuve.

1. Pour démontrer (2.28), on a besoin d'utiliser la définition (2.26) :

$$\begin{aligned} D_q e_q^x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_q x^i}{[i]_q!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[i]_q x^{i-1}}{[i]_q!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{[i-1]_q!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]_q!} = e_q^x \end{aligned}$$

2. Pour démontrer (2.29), il suffit aussi d'utiliser la définition (2.28) :

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{i=0}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{D_q x^i}{[i]_q!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{[i]_q x^{i-1}}{[i]_q!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} q^{\frac{(i-1)(i-2)}{2}} q^{i-1} \frac{x^{i-1}}{[i-1]_q!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{q^i x^i}{[i]_q!} = E_q^{qx} \end{aligned}$$

■

2 Fonctions q-spéciales

Dans cette section, on étudie le q-analogue des fonctions spéciales et leurs propriétés.

2.1 Fonction q- Gamma d'Euler

Définition 2.6 [6] *la fonction q-Gamma d'Euler notée Γ_q est définie par :*

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z} = \frac{(1-q)^{(z-1)}}{(1-q)^{z-1}},\ où\ z \in \boldsymbol{C}\setminus\{0,-1,-2,.....\}, \tag{2.30}$$

Et elle admet une représentation q- intégrale,

$$\Gamma_q(z) = \int_0^\infty x^{z-1} E_q^{-qx} d_q x, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{2.31}$$

Proposition 2.5 [6]

1.

$$\Gamma_q(z+1)=[z]_q\Gamma_q(z),\quad \mathrm{Re}(z)>0 \tag{2.32}$$

2.

$$\Gamma_q(1)=1,\ \Gamma_q(2)=1,\ \Gamma_q(3)=2,...,\Gamma_q(n+1)=[n]_q!,\ \forall n\in \boldsymbol{N} \tag{2.33}$$

Preuve.

1. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_q(z+1) &= \frac{(1-q)^{(z)}}{(1-q)^z}\\ &= \frac{(1-q^z)(1-q)^{(z-1)}}{(1-q)(1-q)^{z-1}}\\ &= [z]_q\Gamma_q(z).\end{aligned}$$

2. En utilisant la propriété (2.32), on prend $z=n, n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_q(n+1) &= [n]_q\Gamma_q(n)\\ &= [n]_q[n-1]_q\Gamma_q(n-1)\\ & \quad .\\ & \quad .\\ & \quad .\\ &= [n]_q[n-1]_q[n-2]_q\times ...\times 2\times 1\Gamma_q(1)\\ &= [n]_q!.\end{aligned}$$

■

2.2 Fonction q-Béta d'Euler

Définition 2.7 [6] *La fonction q-Béta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\mathrm{B}_q\left(x,y\right)=\int_0^1 t^{x-1}\left(1-qt\right)^{y-1}d_qt,\ \ \mathrm{Re}\left(x\right)>0,\ \mathrm{Re}\left(y\right)>0. \tag{2.34}$$

Proposition 2.6 [6]

1. Si $\mathrm{Re}(x)>0,\ n\in\boldsymbol{N}$*, on a :*

$$\mathrm{B}_q\left(x,n\right)=\frac{\left(1-q\right)\left(1-q\right)_q^{n-1}}{\left(1-q^x\right)_q^n} \tag{2.35}$$

2. $\forall\mathrm{Re}\left(x\right)>0,\ \mathrm{Re}\left(y\right)>0$*, on a :*

$$\mathrm{B}_q\left(x,y\right)=\frac{\left(1-q\right)\left(1-q\right)_q^{\infty}\left(1-q^{x+y}\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^x\right)_q^{\infty}\left(1-q^y\right)_q^{\infty}} \tag{2.36}$$

3. La relation entre la fonction Gamma d'Euler et Béta d'Euler est :

$$\mathrm{B}_q(x,y)=\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)},\ \ \forall\mathrm{Re}(x)>0,\mathrm{Re}(y)>0 \tag{2.37}$$

1. D'abord, en utilisant la propriété (3.16) et la q-intégration par partie pour calculer $\mathrm{B}_q(x,y)$, pour tout $x>1$, $y>0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(x,y) &= -\frac{1}{[y]_q}\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{D}_q(1-t)_q^y\, d_qt\\ &= \frac{[x-1]_q}{[y]_q}\int_0^1 t^{x-2}(1-qt)_q^y\, d_qt,\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\mathrm{B}_q(x,y)=\frac{[x-1]_q}{[y]_q}\mathrm{B}_q(x-1,y+1). \tag{2.38}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(x,n+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-qt)_q^{n-1}(1-q^nt)\,d_qt\\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-qt)_q^{n-1}\,d_qt-q^n\int_0^1 t^x(1-qt)_q^{n-1}\,d_qt,\end{aligned}$$

et donc,

$$\mathrm{B}_q(x,n+1)=\mathrm{B}_q(x,n)-q^n\mathrm{B}_q(x+1,n). \tag{2.39}$$

Combinant les formules (2.38) et (2.39) , on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(x,n+1) &= \mathrm{B}_q(x,n)-q^n\frac{[x]_q}{[n]_q}\mathrm{B}_q(x,n+1)\\ &= \frac{1-q^n}{1-q^{x+n}}\mathrm{B}_q(x,n).\end{aligned}$$

Pour tout $x>0$ et n un entier positif,

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(x,1) &= \int_0^1 t^{x-1}d_qt\\ &= \frac{1}{[x]_q}.\end{aligned}$$

Alors, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(x,n) &= \frac{(1-q^{n-1})\dots(1-q)}{(1-q^{x+n-1})\dots(1-q^{x+1})[x]_q}\\ &= \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^x)_q^n}.\end{aligned}$$

2. On va utiliser les deux définitions suivantes, pour démontrer la propriété (2.36) :

$$(1-q)_q^{n-1}=\frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}, \tag{2.40}$$

Et,

$$\frac{1}{(1-q^t)_q^n}=\frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty}. \tag{2.41}$$

la proporiété (2.36) est vraie pour $s = 1,2,3,...$ A ce que reste vraie pour $s \in \mathbf{R}$?

$$\int_0^1 t^{x-1}\frac{(1-qt)_q^{\infty}}{(1-q^y)_q^{\infty}}d_q t,$$

En utilisant la propriété (2.35) , pour écrire son second membre,

$$\frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{x+y})_q^{\infty}}{(1-q^x)_q^{\infty}(1-q^y)_q^{\infty}}.$$

D'où le resultat.

3. En utilisant (2.40) dans la définition (2.30), on obtient :

$$\Gamma_q(x) = \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{x-1}(1-q^x)_q^{\infty}}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x)\Gamma_q(y) &= \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{x-1}(1-q^x)_q^{\infty}}\frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{y-1}(1-q^y)_q^{\infty}}\\
&= \frac{(1-q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{x+y-2}(1-q^x)_q^{\infty}(1-q^y)_q^{\infty}}\\
&= \frac{(1-q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-q^{x+y})_q^{\infty}}{(1-q)^{x+y-2}(1-q^x)_q^{\infty}(1-q^y)_q^{\infty}(1-q^{x+y})_q^{\infty}}\\
&= \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{x+y-1}(1-q^{x+y})_q^{\infty}}\frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{x+y})_q^{\infty}}{(1-q^x)_q^{\infty}(1-q^y)_q^{\infty}}\\
&= \Gamma_q(x+y)\mathrm{B}_q(x,y).
\end{aligned}$$

3 Q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.8 [12] *Soit $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue. On définit la q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha \geq 0$, noté par $\mathrm{J}_{q,a}^{\alpha} f(x)$ par :*

$$\left\{\left(\mathrm{J}_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)} f(t)\, d_q t,\ \alpha > 0,\ x \in [a,b] \right. \tag{2.42}$$

Théorème 2.2 [12]*La relation suivante est vérifiée pour tout $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+}$ et $x \in [a,b]$, on a :*

$$\left(\mathrm{J}_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = \mathrm{J}_{q,a}^{\alpha+1}\left(\mathrm{D}_q f\ (x)\right) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(\alpha+1)}(x-a)^{(\alpha)}. \tag{2.43}$$

Preuve. En utilisant la propriété (3.16) , pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on a :

$$\mathrm{D}_q\left((x-qt)^{(\alpha)}\right) = -[\alpha]_q \mathrm{D}_q\left((x-qt)^{(\alpha-1)}\right),$$

Et en utilisant la q-intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned}\left(J_{q,a}^{\alpha}f\right)(x) &= -\frac{1}{[\alpha]_q\Gamma_q(\alpha)}\int_a^x D_q\left((x-qt)^{(\alpha)}\right)f(t)\,d_qt\\ &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left((x-qt)^{(\alpha)}f(a)+\int_a^x D_q\left((x-qt)^{(\alpha)}\right)f(t)\,d_qt\right)\\ &= J_{q,a}^{\alpha+1}\left(D_qf\ (x)\right)+\frac{f(a)}{\Gamma_q(\alpha+1)}(x-qt)^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1 [2] *Soit* $\alpha,\beta>0$, *et* $0<q<1$. *Alors on a :*

$$\int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)}t^{\beta}d_qt = x^{\alpha+\beta}B_q(\alpha,\beta+1). \tag{2.44}$$

Preuve. En utilisant les définitions de la fonction q-puissance et la fonction q-Béta, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)}t^{\beta}d_qt &= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}q^n(x-qxq^n)^{(\alpha-1)}(xq^n)^{\beta}\\ &= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}q^nx^{(\alpha-1)}(1-qq^n)^{(\alpha-1)}x^{\beta}q^{n\beta}\\ &= (1-q)x^{\alpha+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}q^n(1-qq^n)^{(\alpha-1)}q^{n\beta}\\ &= x^{\alpha+\beta}\int_0^1(1-qt)^{(\alpha-1)}t^{\beta}d_qt\\ &= x^{\alpha+\beta}B_q(\alpha,\beta+1)\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2 [2]*Soit* $\alpha,\beta,\gamma>0$, *et* $0<q,p,r<1$. *Alors on a :*

$$\begin{aligned}&\int_a^x\int_a^y\int_a^z(x-py)^{(\alpha-1)}(y-qz)^{(\beta-1)}(z-rt)^{(\gamma-1)}d_rtd_qzd_py \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta+\gamma}}{[\gamma]_r}B_q(\beta,\gamma+1)B_p(\alpha,\beta+\gamma+1).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Preuve. D'aprés (2.44), on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_a^x\int_a^y\int_a^z(x-py)^{(\alpha-1)}(y-qz)^{(\beta-1)}(z-rt)^{(\gamma-1)}d_rtd_qzd_py\\ &= \frac{1}{[\gamma]_r}\int_a^x\int_a^y(x-py)^{(\alpha-1)}(y-qz)^{(\beta-1)}z^{(\gamma)}d_qzd_py\\ &= \frac{1}{[\gamma]_r}\int_a^x(x-py)^{(\alpha-1)}\int_a^y(y-qz)^{(\beta-1)}z^{(\gamma)}d_qzd_py\\ &= \frac{1}{[\gamma]_r}B_q(\beta,\gamma+1)\int_a^x(x-py)^{(\alpha-1)}y^{(\beta+\gamma)}d_py\\ &= \frac{1}{[\gamma]_r}B_q(\beta,\gamma+1)B_p(\alpha,\beta+\gamma+1)x^{\alpha+\beta+\gamma}.\end{aligned}$$

■

Lemme 2.3 [12] *Pour tout* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^{+}$, *on a :*

$$\int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \left(J_{q,a}^{\alpha} f\right)(t) d_q t = 0, \quad (0<a<x<b). \tag{2.46}$$

Preuve. En utilisant les définitions (3.7), (3.9) et (3.20), pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(J_{q,a}^{\alpha} f\right)(aq^n) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^{aq^n} (aq^n - qt)^{(\alpha-1)} f(t) d_q t \\
&= -\frac{a}{\Gamma_q(\alpha)} (1-q) \sum_{i=0}^{n-1} \left(aq^n - aq^{i+1}\right)^{(\alpha-1)} f\left(aq^i\right) q^i \\
&= -\frac{a^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha)} (1-q) \sum_{i=0}^{n-1} \left(q^n - q^{i+1}\right)^{(\alpha-1)} f\left(aq^i\right) q^i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors, selon la définition de la q-intégrale, on trouve :

$$\int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \left(J_{q,a}^{\alpha} f\right)(t) d_q t = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \left(x - aq^{n+1}\right)^{(\beta-1)} \left(J_{q,a}^{\alpha} f\right)(aq^n) q^n = 0.$$

■

Lemme 2.4 [12]*Pour tout* $\alpha, \beta, \mu \in \boldsymbol{R}^{+}$, *l'identité suivant est vérifié :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\mu q^{1-n}\right)^{(\alpha-1)} \left(1-q^{1+n}\right)^{(\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{(\beta-1)}} q^{\alpha n} = \frac{(1-\mu q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}}. \tag{2.47}$$

Proposition 2.7 ([10])*Soit* $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^{+}$, *la q-intégrale fractionnaire vérifié les propriétés de commulatativité et semi-groupe suivantes :*

$$\left(J_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\beta} f\right)(x) = \left(J_{q,a}^{\alpha+\beta} f\right)(x) = \left(J_{q,a}^{\beta} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x), \ x \in [a,b] \tag{2.48}$$

Preuve. Par définition et la definition (3.19) , et la relation (2.46) , on a :

$$\begin{aligned}
\left(J_{q,a}^{\beta} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\beta)} \int_a^x (x-qt)^{(\beta-1)} J_{q,a}^{\alpha} f(t) d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_a^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_a^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \left[\int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} - \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)}\right] \times \\
&\quad \times \left[\int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u - \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u\right] d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de [1],

$$\left(J_{q,0}^{\beta}J_{q,0}^{\alpha}f\right)(x)=\left(J_{q,0}^{\alpha+\beta}f\right)(x)$$

De plus,

$$\left(J_{q,a}^{\alpha+\beta}f\right)(x)=\left(J_{q,0}^{\alpha+\beta}f\right)(x)-\left(J_{q,0}^{\alpha+\beta}f\right)(a) \tag{2.49}$$

On déduit que,

$$\left(J_{q,a}^{\beta}J_{q,a}^{\alpha}f\right)(x)=\left(J_{q,0}^{\alpha+\beta}f\right)(x)-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\int_0^x(x-qt)^{(\beta-1)}\int_0^a(t-qu)^{(\alpha-1)}f(u)d_qud_qt$$

D'après la formule (2.49), on trouve :

$$\begin{aligned}\left(J_{q,a}^{\beta}J_{q,a}^{\alpha}f\right)(x) &= \left(J_{q,a}^{\alpha+\beta}f\right)(x)+\left(J_{q,0}^{\alpha+\beta}f\right)(a)-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\int_0^x(x-qt)^{(\beta-1)}\int_0^a(t-qu)^{(\alpha-1)}f(u)d_qud_qt\\ &= \left(J_{q,a}^{\alpha+\beta}f\right)(x)+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^a(x-qt)^{(\alpha+\beta-1)}f(t)d_qt\\ &\quad -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\int_0^x(x-qt)^{(\beta-1)}\int_0^a(t-qu)^{(\alpha-1)}f(u)d_qud_qt.\end{aligned}$$

Alors,

$$\left(J_{q,a}^{\beta}J_{q,a}^{\alpha}f\right)(x)=\left(J_{q,a}^{\alpha+\beta}f\right)(x)+\mathrm{I}.$$

Où

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^a(x-qt)^{(\alpha+\beta-1)}f(t)d_qt-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\int_0^x(x-qt)^{(\beta-1)}\int_0^a(t-qu)^{(\alpha-1)}f(u)d_qud_qt.$$

En utilisant la définition (3.20), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \frac{a(1-q)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}f\left(aq^k\right)q^k\\ &\quad -\frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-xq^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\sum_{k=0}^{\infty}a(1-q)\left(xq^i-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}f\left(aq^k\right)q^kq^i\\ &= a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}f\left(aq^k\right)q^k\\ &\quad -a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-xq^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\left(xq^i-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}q^if\left(aq^k\right)q^k\\ &= a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{c}\frac{\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\\ -\frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-xq^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\left(xq^i-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}q^i\end{array}\right]f\left(aq^k\right)q^k,\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{I}=a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}cf\left(aq^k\right)q^k.$$

avec

$$c=\frac{\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}-\frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-xq^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\left(xq^i-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}q^i.$$

D'après la définition (2.30), on a :

$$\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)=\frac{(1-q)^{(\alpha-1)}}{(1-q)^{\alpha-1}}\frac{(1-q)^{(\beta-1)}}{(1-q)^{\beta-1}}, \tag{2.50}$$

et

$$\Gamma_q(\alpha+\beta)=\frac{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{\alpha+\beta-1}}. \tag{2.51}$$

En utilisant les formules (2.50) et (2.51), on trouve :

$$\begin{aligned} c &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1}\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\ &\quad -\frac{x\left(1-q\right)(1-q)^{\alpha+\beta-2}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}}\sum_{i=0}^{\infty}x^{\beta-1}\left(1-q^{i+1}\right)^{(\beta-1)}x^{\alpha-1}\left(q^i-\frac{a}{x}q^{k+1-i}\right)^{(\alpha-1)}q^i \\ &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha+\beta-1}\left(1-\frac{a}{x}q^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\ &\quad -\frac{x^{\alpha+\beta-1}(1-q)^{\alpha+\beta-1}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\left(1-\frac{a}{x}q^{k+1-i}\right)^{(\alpha-1)}q^{\alpha i}. \end{aligned}$$

Si on prend $\mu=\frac{a}{x}q^k$, on obtient :

$$\begin{aligned} c &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha+\beta-1}\left(1-\mu q^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\ &\quad -\frac{x^{\alpha+\beta-1}(1-q)^{\alpha+\beta-1}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{i+1}\right)^{(\beta-1)}\left(1-\mu q^{1-i}\right)^{(\alpha-1)}q^{\alpha i} \end{aligned}$$

En appliquant la relation (2.47), on a :

$$c=\frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha+\beta-1}\left(1-\mu q^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}}-\frac{x^{\alpha+\beta-1}(1-q)^{\alpha+\beta-1}\left(1-\mu q^{1-i}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}(1-q)^{(\beta-1)}}=0.$$

Donc,

$$\mathrm{I}=a\left(1-q\right)\sum_{k=0}^{\infty}cf\left(aq^k\right)q^k=0$$

D'où

$$\left(\mathrm{J}^{\beta}_{q,a}\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=\left(\mathrm{J}^{\alpha+\beta}_{q,a}f\right)(x).$$

■

Exemple 2.3 *Calculer les q-intégrales fractionnaires des fonctions suivantes :*

1. $f(x)=(x-a)^{(\beta)};\ 0<a<x<b;\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{R}^{+},\ \beta\in\left]-1,+\infty\right[.$

   Par définition, on a :

$$\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^x\left(x-qt\right)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt.$$

   D'après la définition (3.19), on a :

$$\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\left[\int_0^x\left(x-qt\right)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt-\int_0^a\left(x-qt\right)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt\right].$$

En utilisant les définitions (3.9) *et* (3.20)*, on trouve :*

$$\begin{aligned}\int_0^a (x-qt)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt &= a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}\left(aq^k-a\right)^{(\beta)}q^k\\ &= a^{\beta+1}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-aq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}\left(q^k-1\right)^{(\beta)}q^k\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après la définition (3.20) *et la relation* (2.47)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt &= x(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-xq^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}\left(xq^k-a\right)^{(\beta)}q^k\\ &= x^{\alpha+\beta}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-q^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}\left(q^k-\frac{a}{x}\right)^{(\beta)}q^k\\ &= x^{\alpha+\beta}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-q^{k+1}\right)^{(\alpha-1)}\left(1-\frac{a}{xq}q^{1-k}\right)^{(\beta)}q^{k(1+\beta)}\\ &= x^{\alpha+\beta}(1-q)\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{(\alpha+\beta)}(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}}\\ &= (1-q)\frac{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}}(x-a)^{(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

En appliquant la définition (2.30) *, on a :*

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)}(t-a)^{(\beta)}d_qt\\ &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\left[(1-q)\frac{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}}(x-a)^{(\alpha+\beta)}\right]\\ &= \frac{(1-q)^{\alpha-1}}{(1-q)^{(\alpha-1)}}(1-q)\frac{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta)}(1-q)^{\alpha+\beta}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}(1-q)(1-q)^{\alpha-1}(1-q)^{\beta}}(x-a)^{(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{(1-q)^{(\beta)}(1-q)^{\alpha+\beta}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}(1-q)^{\beta}}(x-a)^{(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

D'où

$$,\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) = \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{(\alpha+\beta)}$$

Si on prend $\beta = 0$*, on a :*

$$\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}(x-a)^{(0)} = \left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)}d_qt.$$

En appliquant la propriété (3.16) *pour* $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+}$*, on a :*

$$\mathrm{D}_q(x-t)^{(\alpha)} = -[\alpha]_q(x-t)^{(\alpha-1)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}1\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^x -\frac{1}{[\alpha]_q}\mathrm{D}_q(x-t)^{(\alpha)}d_qt\\ &= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}\int_a^x \mathrm{D}_q(x-t)^{(\alpha)}d_qt\end{aligned}$$

En utilisant la q-intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{J}_{q,a}^{\alpha}1\right)(x) &= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left[(x-t)^{(\alpha)}\right]_a^x \\ &= \frac{(x-a)^{(\alpha)}}{\Gamma_q(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

2. $f(x)=x$, $x>0$ *et* $\alpha\in\boldsymbol{R}^{+}$.
   En utilisant la propriété (3.16) *et on applique la q-intégration par partie, on obtient :*

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{J}_{q}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)}\, t d_q t \\ &= -\frac{1}{[\alpha]\,\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x \mathrm{D}_q\left(x-qt\right)^{(\alpha)}\, t d_q t \\ &= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left(\left[\left(x-qt\right)^{(\alpha)}\right]_0^x-\int_0^x \left(x-qt\right)^{(\alpha)} d_q t\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}\int_0^x -\frac{1}{[\alpha+1]}\mathrm{D}_q\left(x-qt\right)^{(\alpha+1)} d_q t \\ &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left[-\left(x-qt\right)^{(\alpha+1)}\right]_0^x \\ &= \frac{x^{(\alpha+1)}}{\Gamma_q(\alpha+2)}.\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha=\pi$, *alors :*

$$\left(\mathrm{J}_{q}^{\pi}f\right)(x)=\frac{x^{(\pi+1)}}{\Gamma_q(\pi+2)}.$$

4 Q-dérivée fractionnaire

4.1 Q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.9 [12] *La q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha\in\boldsymbol{R}$ *de la fonction* f *note* ${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha}f$ *est définie par :*

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha}f\right)(x)=\begin{cases}\left(\mathrm{J}_{q,a}^{-\alpha}f\right)(x),\ \alpha<0\\ f\ (x),\ \alpha=0\\ \left(\mathrm{D}_q^{\lceil\alpha\rceil}\mathrm{J}_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\mathrm{D}_q^{\lceil\alpha\rceil}\int_a^x (x-qt)^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha-1)}f\ (t)dt,\ \alpha>0,\end{cases} \tag{2.52}$$

Où $\lceil\alpha\rceil$ *signifie le plus petit entier superieur ou égal* α.

Théorème 2.3 [12] *Pour tout* $\alpha\in\boldsymbol{R}^{+}\setminus\boldsymbol{N}$ *et* $0<a<x<b$, *on a :*

1. $$\mathrm{D}_q\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha}f\right)(x)=\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha+1}f\right)(x), \tag{2.53}$$

2. $$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha}\mathrm{D}_q f\right)(x)=\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{q,a}^{\alpha+1}f\right)(x)-\frac{f\,(a)}{\Gamma_q(-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha-1)}. \tag{2.54}$$

Preuve.

1. On va considérer trois cas :

■

1^{er} cas : Pour $\alpha \leq -1$, solon la propriété (2.48), on trouve :

$$\begin{aligned}
D_q\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(D_qJ^{-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(D_qJ^{1-\alpha-1}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(D_qJ_{q,a}J^{-\alpha-1}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(J^{-(\alpha+1)}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left({}^{RL}D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x).
\end{aligned}$$

Preuve.

1. $2^{ème}$ cas : Pour $-1 < \alpha < 0$, i.e., $0 < \alpha + 1 < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
D_q\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(D_qJ^{-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(D_qJ^{1-(\alpha+1)}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left({}^{RL}D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x).
\end{aligned}$$

$3^{ème}$ cas : Pour $\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
D_q\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(D_qD^{\lceil\alpha\rceil}_qJ^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(D^{\lceil\alpha\rceil+1}_qJ^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left({}^{RL}D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x).
\end{aligned}$$

2 En utilisant la propriété (2.48), la formule (**??**), et la relation entre la q-dérivée ordinaire et la q-intégrale ordinaire, i.e.,

$$\left(J_{q,a}D_qf\right)(x) = f(x) - f(a).$$

On a deux cas :

1^{er} cas : Si $\alpha < 0$, solon (2.53), on a :

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}D_qf\right)(x) = D_q\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma_q(-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha-1)},$$

Alors,

$$\begin{aligned}
D_q\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(D_qJ^{-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= D_qJ^{-\alpha}_{q,a}\left(\left(J_{q,a}D_qf\right)(x) + f(a)\right)\\
&= \left(D_qJ^{-\alpha}_{q,a}J_{q,a}D_qf\right)(x) + f(a)\left(D_qJ^{-\alpha}_{q,a}1\right)(x)\\
&= \left(D_qJ^{-\alpha+1}_{q,a}D_qf\right)(x) + f(a)D_q\left(\frac{(x-a)^{(-\alpha)}}{\Gamma_q(-\alpha+1)}\right)\\
&= \left(D_qJ_{q,a}J^{-\alpha}_{q,a}D_qf\right)(x) + f(a)\frac{[-\alpha]_q(x-a)^{(-\alpha-1)}}{\Gamma_q(-\alpha+1)}\\
&= \left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a}D_qf\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

$2^{ème}$ cas : Si $\alpha > 0$, $\exists l \in \mathbf{N}_0$, tel que $l < \alpha < l+1$, alors, en appliquant même procédure, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(\mathrm{D}_q\mathrm{D}^{l+1}_q\mathrm{J}^{l+1-\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \mathrm{D}^{l+2}_q\mathrm{J}^{l+1-\alpha}_{q,a}\left(\left(\mathrm{J}_{q,a}\mathrm{D}_qf\right)(x)+f(a)\right)\\
&= \left(\mathrm{D}^{l+2}_q\mathrm{D}_q\mathrm{J}_{q,a}\mathrm{J}^{l+1-\alpha}_{q,a}\mathrm{D}_qf\right)(x)+\frac{f(a)}{\Gamma_q(l+2-\alpha)}\mathrm{D}^{l+1}_q\left((x-a)^{(l+1-\alpha)}\right)\\
&= \left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}\mathrm{D}_qf\right)(x)+\frac{f(a)}{\Gamma_q(-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.8 [13] *La q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche et l'inverse droite de la q-intégration fractionnaire, on a :*

$$\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=f\ (x),\ \forall\alpha\in\boldsymbol{R}^{+}\setminus\boldsymbol{N}\ et\ 0<a<x<b, \tag{2.55}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}f\ (x)\right) &= \left(\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}\mathrm{J}^{-\lceil\alpha\rceil}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{J}^{-\lceil\alpha\rceil}_{q,a}\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\lceil\alpha\rceil}_q\mathrm{J}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}\mathrm{J}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\lceil\alpha\rceil}_q\mathrm{J}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha+\alpha}_{q,a}f\right)(x)\\
&= \left(\mathrm{D}^{\lceil\alpha\rceil}_q\mathrm{J}^{\lceil\alpha\rceil}_{q,a}f\right)(x)\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.4 *Calculer la q-dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction* $f(x)=(x-a)^{(\beta)}$, *pour* $0<a<x<b$, $\alpha\in\boldsymbol{R}^{+}\setminus\boldsymbol{N}$, *et* $\beta>\lceil\alpha\rceil-1$.

Solon (**??**) , *on trouve :*

$$\begin{aligned}
\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}\right)(x-a)^{(\beta)}=\mathrm{D}^{\lceil\alpha\rceil}\left(\mathrm{J}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}(x-a)^{(\beta)}\right)\\
&= \mathrm{D}^{\lceil\alpha\rceil}\left(\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha+1)}(x-a)^{(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\right)\\
&= \frac{\Gamma_q(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha+1)}{\Gamma_q(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha+1-\lceil\alpha\rceil)}\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha+1)}(x-a)^{(\beta+\lceil\alpha\rceil-\alpha-\lceil\alpha\rceil)}\\
&= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{(\beta-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Si on prend $\beta=0$ *et* $\alpha\in\boldsymbol{R}^{+}\setminus\boldsymbol{N}$ *on a :*

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)=\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{q,a}1\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha)}.$$

4.2 Q-dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.10 [13] *On définit la q-dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *de la fonction* $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}([a,b])$ *note* $\left(D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x)$ *comme suit :*

$$\left(D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) = \begin{cases} \left(J^{-\alpha}_{q,a}f\right)(x), \ \alpha < 0 \\ f(x), \ \alpha = 0 \\ \left(J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}D^{\lceil\alpha\rceil}_{q} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_a^x (x-qt)^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha-1)}D^{\lceil\alpha\rceil}_q f(t)d_qt, \ \alpha > 0, \end{cases} \tag{2.56}$$

Où $\lceil\alpha\rceil$ *signifie le plus petit entier superieur ou égal* α.

Théorème 2.4 [13] *Pour tout* $\alpha \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \boldsymbol{N}$ *et* $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}([a,b])$, *on a :*

1.

$$\left(D^{\alpha}_{q,a}D_q f\right)(x) = \left(D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x), \tag{2.57}$$

2.

$$\left(D_q D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) = \left(D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x) + \frac{\left(D^{\lceil\alpha\rceil}_q f\right)(a)}{\Gamma_q(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}(x-a)^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha-1)}. \tag{2.58}$$

Preuve. Si $\alpha = n+\varepsilon, n \in \mathbf{N}_0$, $0 < \varepsilon < 1$, alors $\lceil\alpha\rceil = n+1$, $\lceil\alpha+1\rceil = n+2$. On a :

1.

$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x) &= \left(J^{\lceil\alpha+1\rceil-(\alpha+1)}_{q,a}D^{\lceil\alpha+1\rceil}_q f\right)(x) \\ &= \left(J^{1-\varepsilon}_{q,a}D^{n+2}_q f\right)(x) \\ &= \left(J^{1-\varepsilon}_{q,a}D^{n+1}_q D_q f\right)(x) \\ &= \left(J^{1-(\alpha-n)}_{q,a}D^{n+1}_q D_q f\right)(x) \\ &= \left(J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}_{q,a}D^{\lceil\alpha\rceil}_q D_q f\right)(x) \\ &= \left(D^{\alpha}_{q,a}D_q f\right)(x). \end{aligned}$$

2. En utilisant (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(D_q D^{\alpha}_{q,a}f\right)(x) &= \left(D_q J^{1-\varepsilon}_{q,a}D^{n+1}_q f\right)(x) \\ &= \left(D_q J^{2-\varepsilon}_{q,a}D^{n+2}_q f\right)(x) + \frac{\left(D^{n+1}_q f\right)(a)}{\Gamma_q(2-\varepsilon)}(x-a)^{(1-\varepsilon)} \\ &= \left(D^{\alpha+1}_{q,a}f\right)(x) + \frac{\left(D^{\lceil\alpha\rceil}_q f\right)(a)}{\Gamma_q(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}(x-a)^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha-1)} \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 [13] *D'aprés le théorème pécédent, on déduit que, la propriété de semi-groupe, pour la dérivée de Caputo n'est vérifiée pas, i.e :*

$$\left(D^{\alpha}_{q,a}D^{\beta}_{q,a}f\right)(x) \neq \left(D^{\beta}_{q,a}D^{\alpha+\beta}_{q,a}f\right)(x). \tag{2.59}$$

Lien entre la q-dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo :

Théorème 2.5 [13] *Soit* $\alpha \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \boldsymbol{N}$ *et* $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}([a,b])$. *Alors, on a :*

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(1+i-\alpha)}(x-a)^{(i-\alpha)}. \tag{2.60}$$

Preuve. Tout $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$ peut écrit sur la forme $\alpha = n+\varepsilon$, où $\varepsilon \in]0,1[$. On va démontrer la relation par récurrence,

pour $n \in \mathbf{N}_0$

Premièrement, soit $n = 0$, i.e., $\alpha \in]0,1[$. D'aprés (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(J^{1-\alpha}_{q,a} f\right)(x) &= \left(J^{2-\alpha}_{q,a} D_q f\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(2-\alpha)}(x-a)^{(1-\alpha)} \\ &= \left(J_{q,a} D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(2-\alpha)}(x-a)^{(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Par application la q-dérivée, on trouve :

$$\left(D_q J^{1-\alpha}_{q,a} f\right)(x) = \left(D_q J_{q,a} D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(2-\alpha)} D_q\left((x-a)^{(1-\alpha)}\right),$$

alors,

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(1-\alpha)}(x-a)^{(-\alpha)}.$$

On suppose que la relation est vérifiée pour un réel $\alpha = n+\varepsilon$, telque $0 < \varepsilon < 1$, pour un entier positif $n \in \mathbf{N}^+$ et on va montrer que elle est vérifiée pour $\alpha = n+1+\varepsilon$. En fait , d'aprés (2.53), on a :

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) = D_q\left({}^{RL}D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x).$$

Et l'hypothèse est satisfaite,

$$\left({}^{RL}D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) = \left(D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(1+i-n-\varepsilon)}(x-a)^{(i-n-\varepsilon)}$$

on peut écrire,

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) &= D_q\left(D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(1+i-n-\varepsilon)} D_q\left((x-a)^{(i-n-\varepsilon)}\right) \\ &= D_q\left(D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(i-n-\varepsilon)}(x-a)^{(i-n-\varepsilon-1)}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.58), on obtient :

$$D_q\left(D^{n+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) = \left(D^{n+1+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) + \frac{\left(D^{n+1}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(1-\varepsilon)}(x-a)^{(-\varepsilon)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) &= \left(D^{n+1+\varepsilon}_{q,a} f\right)(x) + \frac{\left(D^{n+1}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(1-\varepsilon)}(x-a)^{(-\varepsilon)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(i-n-\varepsilon)}(x-a)^{(i-n-\varepsilon-1)} \\ &= \left(D^{\alpha}_{q,a} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\left(D^{i}_{q} f\right)(a)}{\Gamma_q(i-n-\varepsilon)}(x-a)^{(i-n-\varepsilon-1)}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.9 [13] *Soit* $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+} \setminus \boldsymbol{N}$, *et* $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}([a,b])$. *Alors on a :*

1.
$$\left(D_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \tag{2.61}$$

2.
$$\left(J_{q,a}^{\alpha} D_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{\left(D_q^i f\right)(a)}{[i]_q!}(x-a)^{(i)}. \tag{2.62}$$

Preuve.

1. *On pose* $f \to J_{q,a}^{\alpha} f(x)$ *dans* (2.60) *et en utilisant la propriété* (2.55), *on trouve :*
$$\left({}^{RL}D_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) + \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{D_q^i\left(J_{q,a}^{\alpha} f(a)\right)}{\Gamma_q(1+i-\alpha)}(x-a)^{(i-\alpha)}.$$
et donc,
$$\begin{aligned}\left(D_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) &= \left({}^{RL}D_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) - \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{D_q^i\left(J_{q,a}^{\alpha} f(a)\right)}{\Gamma_q(1+i-\alpha)}(x-a)^{(i-\alpha)} \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{J_{q,a}^{\alpha-i} f(a)}{\Gamma_q(1+i-\alpha)}(x-a)^{(i-\alpha)} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

2. *D'aprés les propriétés* (2.48) *et* (2.24), *on a :*
$$\begin{aligned}\left(J_{q,a}^{\alpha} D_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(J_{q,a}^{\alpha} J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^{\lceil\alpha\rceil} f\right)(x) \\ &= \left(J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil} D^{\lceil\alpha\rceil} f\right)(x) \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{\left(D_q^i f\right)(a)}{[i]_q!}(x-a)^{(i)}.\end{aligned}$$
avec $\lceil\alpha\rceil$: *le plus petit entier superieur ou égal* α.

■

Lemme 2.5 [13] *Soit* $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+} \setminus \boldsymbol{N}$, $\beta \in \boldsymbol{R}^{+}$ *et* $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}([a,b])$. *On a :*
$$\left(J_{q,a}^{\beta} D_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{q,a}^{\alpha-\beta} f\right)(x) - \sum_{i=\lceil\alpha-\beta\rceil}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{\left(D_q^i f\right)(a)}{\Gamma_q\left(i-\alpha+\beta+1\right)}(x-a)^{(i-\alpha+\beta)}. \tag{2.63}$$

Exemple 2.5 *Calculer les q-dérivées fractionnaires des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = (x-a)^{(\beta)}$, $0 < a < x < b$; $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+} \setminus \boldsymbol{N}$, *Pout* $\beta > \lceil\alpha\rceil - 1$
Solon (2.49), *on trouve :*
$$\begin{aligned}\left(D_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) &= D_{q,a}^{\alpha}(x-a)^{(\beta)} = J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\left(D^{\lceil\alpha\rceil}(x-a)^{(\beta)}\right) \\ &= J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\left(\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\lceil\alpha\rceil+1)}(x-a)^{(\beta-\lceil\alpha\rceil)}\right) \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\lceil\alpha\rceil+1)} \frac{\Gamma_q(\beta-\lceil\alpha\rceil+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{(\beta-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{(\beta-\alpha)}.\end{aligned}$$

2. $f(x) = 1$, $\forall\, \alpha \in \boldsymbol{R}^{+} \setminus \boldsymbol{N}$ *et* $0 < a < x < 1$.
   Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\left(D_{q,a}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(D_{q,a}^{\alpha} 1\right)(x) = J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\left(D^{\lceil\alpha\rceil} 1\right)\\
&= J_{q,a}^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}(0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Equations différentielles fractionnaires au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on présente le problème, voir [2]. Puis, on énonce les théorèmes de point fixe pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème. On termine ce chapitre par l'étude de stabilité.

1 Présentation du problème

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème au limite différentiel d'ordre fractionnaire avec condition q-intégrale fractionnaire non locale, engendré par l'équation suivante,

$$\mathrm{D}_q^{\alpha} x(t) = f\left(t, x(t), \mathrm{J}_z^{\delta} x(t)\right), t \in]0, \mathrm{T}[\tag{3.1}$$

à laquelle on associe la condition fractionnaire non locale,

$$x(0) = 0,\ \lambda \mathrm{J}_p^{\beta} x(\eta) = \mathrm{J}_r^{\gamma} x(\xi) \tag{3.2}$$

Où $0 < q, p, z, r < 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $\beta, \delta, \gamma > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ est une constante donné, D_q^{α} est la q-dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, J_{Φ}^{Ψ} est la Φ-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre Ψ, avec $\Phi = p, z, r$ et $\Psi = \beta, \delta, \gamma$; $f : [0, \mathrm{T}] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue.

Le lemme suivant pour calculer la solution intégrale de problème (3.3) au dessous. On a :

Lemme 3.1 [2] *Soient* $\beta, \gamma > 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $0 < q, p, r < 1$, *et* $f \in \mathrm{C}([0, \mathrm{T}] \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. *Aalors la solution unique du problème au limite d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec condition q-intégrale fractionnaire non locale suivante,*

$$\begin{cases} \mathrm{D}_q^{\alpha} x(t) = f\left(t, x(t), \mathrm{J}_z^{\delta} x(t)\right),\ t \in]0, \mathrm{T}[, \\ x(0) = 0,\ \lambda \mathrm{J}_p^{\beta} x(\eta) = \mathrm{J}_r^{\gamma} x(\xi), \end{cases} \tag{3.3}$$

est donnée par,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta} \int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), \mathrm{J}_z^{\delta} x(u)\right) d_q u d_p s \\ &- \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi} \int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), \mathrm{J}_z^{\delta} x(u)\right) d_q u d_r s \\ &+ \int_0^t \frac{(t - qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, x(s), \mathrm{J}_z^{\delta} x(s)\right) d_q s, \end{aligned} \tag{3.4}$$

Où

$$\Omega=\frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)}\xi^{\alpha+\gamma-1}-\lambda\frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}\eta^{\alpha+\beta-1}\neq 0. \tag{3.5}$$

Preuve. En $1<\alpha\leq 2$, soit $n=\lceil\alpha\rceil=2$.

On appliquant la définition (2.56) à l'équation de problème (3.3), on a :

$$\left(J_q^\alpha D_q^\alpha x\right)(t)=\left(J_q^\alpha J_q^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}D_q^{\lceil\alpha\rceil}x\right)(t)=\left(J_q^\alpha J_q^{\alpha-n}D_q^n x\right)(t)=\left(J_q^\alpha f\right)\left(t,x(t),J_z^\delta x(t)\right)$$

D'aprés la relation (2.63), on obtient :

$$x(t)=k_1t^{\alpha-1}+k_2t^{\alpha-2}+\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f\left(s,x(s),J_z^\delta x(s)\right)d_qs,\quad k_1,k_2\in\mathbf{R} \tag{3.6}$$

Pour déterminer les constantes k_1 et k_2, on utilise les conditions du problème (3.3).

Or d'aprés la $1^{èr}$ condition $x(0)=0$, implique que :

$$k_2=0,$$

Tandis que la $2^{ème}$ condition fractionnaire non locale ramène à, si on applique la p-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\beta>0$ avec $k_2=0$ on a :

$$\begin{aligned}\left(J_p^\beta x\right)(t) &= \int_0^t\frac{(t-ps)^{(\beta-1)}}{\Gamma_p(\beta)}\times\left(k_1s^{\alpha-1}+\int_0^s\frac{(s-qu)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qu\right)d_qs\\
&= \frac{k_1}{\Gamma_p(\beta)}\int_0^t(t-ps)^{(\beta-1)}s^{\alpha-1}d_ps\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t\int_0^s(t-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_ps\\
&= k_1\frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta-1}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t\int_0^s(t-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_ps\end{aligned}$$

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(J_p^\beta x\right)(\eta) &= k_1\frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}\eta^{\alpha+\beta-1}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_ps\end{aligned}$$

et en appliquant r-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma>0$ et on répéte le même proceccus précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}\left(J_p^\beta x\right)(\xi) &= k_1\frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)}\xi^{\alpha+\gamma-1}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^\xi\int_0^s(\xi-rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_ps\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\lambda}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)}\times\int_0^\eta\int_0^s(\eta-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_ps\\
&\quad-\frac{1}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)}\times\int_0^\xi\int_0^s(\xi-rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}f\left(u,x(u),J_z^\delta x(u)\right)d_qud_rs\end{aligned}$$

Substituant k_1, k_2 dans (3.6), on obtient :

$$x(t) = t^{\alpha-1} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f(u, x(u), J_z^\delta x(u))\, d_q u d_p s \\ -\frac{1}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f(u, x(u), J_z^\delta x(u))\, d_q u d_r s \end{array} \right\}$$
$$+0t^{\alpha-2} + \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right) d_q s$$

D'où, la solution est :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right) d_q u d_p s \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right) d_q u d_r s \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right) d_q s, \end{aligned}$$

Où $\Omega = \frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)} \xi^{\alpha+\gamma-1} - \lambda \frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} \eta^{\alpha+\beta-1} \neq 0$. ■

2 L'existence et l'unicité

Dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution de problème (3.3) dans l'espace de Banach noté par $\mathscr{C}$ constitué des fonctions $x \in C([0.T], \mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}$,

$$\mathscr{C} = \{x(t) : x \in C([0.T], \mathbf{R}), \forall t \in [0.T]\}$$

muni la norme suivante,

$$\|x\| = \sup_{t \in [0.T]} |x(t)|$$

D'aprés (3.4), on défini l'opérateur :

$$\Pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

par :

$$\begin{aligned} \Pi(x)(t) &= \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right) d_q u d_p s \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right) d_q u d_r s \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right) d_q s, \end{aligned} \tag{3.7}$$

Où $\Omega = \frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)} \xi^{\alpha+\gamma-1} - \lambda \frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} \eta^{\alpha+\beta-1} \neq 0$. Il est claire que les points fixes de l'opérateur Π sont les solutions du problème (3.3). On défini μ, σ tel que :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega|\Gamma_p(\beta)} \times \left[\frac{\eta^{\alpha+\beta} B_p(\beta, \alpha+1) L_1}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{\eta^{\alpha+\beta+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_p(\beta, \alpha+\delta+1) L_2}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_z(\delta+1)} \right] \\ &\quad + \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega|\Gamma_r(\gamma)} \times \left[\frac{\xi^{\alpha+\gamma} B_r(\gamma, \alpha+1) L_1}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{\xi^{\alpha+\gamma+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_r(\gamma, \alpha+\delta+1) L_2}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_z(\delta+1)} \right] \\ &\quad + \frac{T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} L_1 + \frac{T^{\alpha+\delta} B_q(\alpha, \delta+1)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_z(\delta+1)} L_2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

et,

$$\sigma = \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}\eta^{\alpha+\beta} B_p\left(\beta,\alpha+1\right)}{|\Omega| \Gamma_p\left(\beta\right)\Gamma_q\left(\alpha+1\right)} + \frac{T^{\alpha-1}\xi^{\alpha+\gamma} B_r\left(\gamma,\alpha+1\right)}{|\Omega| \Gamma_r\left(\gamma\right)\Gamma_q\left(\alpha+1\right)} + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma_q\left(\alpha+1\right)}. \tag{3.9}$$

Dans le premièr résultat on va étudier l'unicité de la solution du problème (3.3) par Le principe de la contraction de Banach.

Théorème 3.1 [2](la contraction de Banach) *Soit* $f \in C\left([0,T]\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}\right)$, *si l'hypothèse :*

(H_1) *il exist deux constantes* $L_1, L_2 > 0$ *tel que :*

$$\left|f\left(t,\omega_1,\omega_2\right) - f\left(t,\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2\right)\right| \le L_1\left|\omega_1-\bar{\omega}_1\right| + L_2\left|\omega_2-\bar{\omega}_2\right|,\ \forall t\in[0,T] \ et\ \forall \omega_1,\omega_2,\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2 \in \boldsymbol{R} \tag{3.10}$$

avec $\mu \le \theta < 1$ *est satisfaite, alors le problème* (3.3) *ademt une unique solution sur l'intervalle* $[0,T]$.

Preuve. On transforme le problème (3.3) en un problème de point fixe, $x = \Pi x$, où Π est défini par la formule (3.7).

En appliquant le principe de la contraction de Banach, pour démontrer que Π ademt un unique point fixe qui est une unique solution de problème (3.3)

On pose $\sup\limits_{t\in[0.T]} \left|f(t,0,0)\right| = M < \infty$ et $r \ge \frac{\sigma M}{1-\varepsilon}$, où $\theta \le \varepsilon < 1$ et la constante σ est définie par (3.9), on montre que $\Pi B_r \subset B_r$, tel que $B_r = \{x \in \mathscr{C} : \|x\| \le r\}$. $\forall x \in B_r$, on a :

$$|\Pi x(t)| \le \sup_{t\in[0.T]} \left\{ \begin{array}{c} \frac{|\lambda| t^{\alpha-1}}{\left|\Omega\right|\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s \left(\eta-ps\right)^{(\beta-1)} \left(s-qu\right)^{(\alpha-1)} \times \left|f(u,x(u),J_z^\delta x(u))\right| d_q u d_p s \\ -\frac{t^{\alpha-1}}{\left|\Omega\right|\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s \left(\xi-rs\right)^{(\gamma-1)} \left(s-qu\right)^{(\alpha-1)} \times \left|f(u,x(u),J_z^\delta x(u))\right| d_q u d_r s \\ +\int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left|f(s,x(s),J_z^\delta x(s))\right| d_q s. \end{array} \right\}$$

D'aprés l'hypothèse (H_1), implique que :

$$\left|f\left(t,\omega_1,\omega_2\right)\right| \le \left|f\left(t,\omega_1,\omega_2\right) - f\left(t,0,0\right)\right| + \left|f\left(t,0,0\right)\right| \le L_1\left|\omega_1\right| + L_2\left|\omega_2\right| + M,$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\forall \omega_1,\omega_2 \in \mathbf{R}$.

En utilisant les relations (2.44) et (2.45), on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\mathit{\Pi} x(t)| &\leq \frac{|\lambda|\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta}\int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \times \left| f(u, x(u), \mathrm{J}_z^{\delta}\, x(u))\right| d_q u d_p s \\
&\quad - \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi}\int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \times \left| f(u, x(u), \mathrm{J}_z^{\delta}\, x(u))\right| d_q u d_r s \\
&\quad + \int_0^{\mathrm{T}} \frac{(\mathrm{T}-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left| f\left(s, x(s), \mathrm{J}_z^{\delta}\, x(s)\right)\right| d_q s \\
&\leq \frac{|\lambda|\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta}\int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{L}_2 r \int_0^{u} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v + \mathrm{M}\right) d_q u d_p s + \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha)} \\
&\quad \times \int_0^{\xi}\int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \times \left(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{L}_2 r \int_0^{u} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v + \mathrm{M}\right) d_q u d_p s \\
&\quad + \int_0^{\mathrm{T}} \frac{(\mathrm{T}-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{L}_2 r \int_0^{s} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v + \mathrm{M}\right) d_q s \\
&= \frac{|\lambda|\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_q(\alpha)} \times \left(\frac{\eta^{\alpha+\beta}}{[\alpha]_q}(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{M})\,\mathrm{B}_p(\beta, \alpha+1) + \frac{\mathrm{L}_2 r \eta^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma_z(\delta)\,[\delta]_z}\mathrm{B}_q(\alpha, \delta+1)\,\mathrm{B}_p(\beta, \alpha+\delta+1)\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi}\int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(\frac{\xi^{\alpha+\gamma}}{[\alpha]_q}(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{M})\,\mathrm{B}_r(\gamma, \alpha+1) + \frac{\mathrm{L}_2 r \xi^{\alpha+\gamma+\delta}}{\Gamma_z(\delta)\,[\delta]_z}\mathrm{B}_q(\alpha, \delta+1)\,\mathrm{B}_r(\gamma, \alpha+\delta+1)\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)\,[\alpha]_q}(\mathrm{L}_1 r + \mathrm{M}) + \frac{\mathrm{T}^{\alpha+\delta}\mathrm{B}_q(\alpha, \delta+1)}{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta)\,[\delta]_z}\mathrm{L}_2 r \\
&= \mu r + \sigma \mathrm{M} \leq r.
\end{aligned}
$$

Alors, on a $\|\mathit{\Pi} x\| \leq r$ implique que $\mathit{\Pi}\mathrm{B}_r \subset \mathrm{B}_r$.

Ensuite, $\forall x, y \in \mathscr{C}$ et $\forall t \in [0,T]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\Pi x(t) - \Pi y(t)\right| &\leq \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta} \int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(\left| f(u,x(u), J_z^{\delta} x(u)) - f(u,y(u), J_z^{\delta} y(u))\right|\right) d_q u d_p s \\
&\quad - \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi} \int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(\left| f(u,x(u), J_z^{\delta} x(u)) - f(u,y(u), J_z^{\delta} y(u))\right|\right) d_q u d_r s \\
&\quad + \int_0^{T} \frac{(T-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(\left| f(u,x(u), J_z^{\delta} x(u)) - f(u,y(u), J_z^{\delta} y(u))\right|\right) d_q s \\
&\leq \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta} \int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(L_1 \|x-y\| + L_2 \|x-y\| \int_0^{u} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_p s \\
&\quad + \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi} \int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
&\quad \times \left(L_1 \|x-y\| + L_2 \|x-y\| \int_0^{u} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_r s \\
&\quad + \int_0^{T} \frac{(T-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(L_1 \|x-y\| + L_2 \|x-y\| \int_0^{s} \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q s \\
&= \mu \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Le résultat précédent implique que $\|\Pi x - \Pi y\| \leq \mu \|x-y\|$. Comme $\mu < 1$, Π est une contraction. Donc, par le principe de la contraction de Banach, on déduit que Π ademt un unique point fixe qui est une unique solution du problème (3.3). ■

Maintenant, on va étudier l'existence de la solution du problème (3.3) par théorème de Schauder-Alternative.

Théorème 3.2 [15](Ascoli-Arzelà) *Soit $\mathscr{C}$ un espace de Banach, soit* E *une sous ensemble de $\mathscr{C}$. Alors* E *est relativement compact dans $\mathscr{C}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. E *est uniformément borné.*
2. E *est équicontinu.*

Théorème 3.3 ([2])(Alternative non linéaire) *Soit $\mathscr{C}$ un espace de Banach, soit* E *une sous ensemble fermé convexe dans $\mathscr{C}$, soit* U *une sous ensemble ouverte dans $\mathscr{C}$, et* $0 \in U$. *On suppose que* $G : \overline{U} \to E$ *est une application continue compacte (i.e,* $G\left(\overline{U}\right)$ *est une suos ensemble relativement compacte dans* E*). Alors, l'une des deux expressions suivantes est vraie :*

1. G *ademt un point fixe dans* $\overline{U}$.
2. *Il existe* $u \in \partial U$ *(la frontière de* U *dans* E*) et* $\exists \lambda \in]0,1[$ *avec* $u = \lambda G(u)$.

Pour démontrer le théorème précédent, on détermine N_1 et N_2 comme suit :

$$N_1 = \frac{|\lambda| T^{\alpha-1} \eta^{\alpha+\beta} B_p(\beta, \alpha+1)}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1} \xi^{\alpha+\gamma} B_r(\gamma, \alpha+1)}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned} N_2 \;=\; & \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}\eta^{\alpha+\beta+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)B_p\left(\beta,\alpha+\delta+1\right)}{|\Omega|\,\Gamma_p\left(\beta\right)\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)}+\frac{T^{\alpha+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)}{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)} \\ & +\frac{T^{\alpha-1}\xi^{\alpha+\gamma+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)B_r\left(\gamma,\alpha+\delta+1\right)}{|\Omega|\,\Gamma_r\left(\gamma\right)\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Théorème 3.4 [2](Schauder- Alternative)
On suppose que $f:[0,T]\times \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ *est une fonction continue. in addition on suppose que :* $\left(H_1'\right)$ *il existe une fonction croissante* $\Psi:[0,+\infty[\;\to\;]0,+\infty[$ *et la fonction* $\rho\in C\left([0,T],\boldsymbol{R}^{+}\right)$ *telles que*

$$\left|f(t,\omega_1,\omega_2)\right|\le\rho(t)\Psi(|\omega_1|+|\omega_2|),\;\forall(t,\omega_1,\omega_2)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^2 \tag{3.13}$$

et $\left(H_2'\right)$ *il existe une constante* $k>0$ *telle que :*

$$\frac{(1-N_2)\,k}{\|\rho\|\,\Psi(k)\,N_1}>1, \tag{3.14}$$

Où N_1 *et* N_2 *sont définis par les formules* (3.11) *et* (3.12) *respectivement, et* $N_2<1$. *Alors le problème* (3.3) *ademt au moins une solution sur l'intervalle* $[0,T]$.

Preuve. D'abord, on montre que l'opérateur Π défini sur ensemble fermé (la boule fermée) vers ensemble fermé dans $\mathscr{C}$. Pour un nombre positif R, on pose la boule fermée dans $\mathscr{C}$ par $B_R=\{x\in\mathscr{C}:\|x\|\le R\}$. Alors, pour $t\in[0,T]$, on trouve :

$$\begin{aligned} |\Pi x(t)| \;\le\; & \frac{|\lambda|T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_q(\alpha)}\times\int_0^{\eta}\int_0^{s}(\eta-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}\times\left|f\left(u,x(u),J_z^{\delta}x(u)\right)\right|d_qu\,d_ps \\ & -\frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha)}\times\int_0^{\xi}\int_0^{s}(\xi-rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}\times\left|f\left(u,x(u),J_z^{\delta}x(u)\right)\right|d_qu\,d_rs \\ & +\int_0^{T}\frac{(T-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\times\left|f\left(s,x(s),J_z^{\delta}x(s)\right)\right|d_qs \\ \le\; & \frac{|\lambda|T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_q(\alpha)}\times\int_0^{\eta}\int_0^{s}(\eta-ps)^{(\beta-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)} \\ & \times\left(\rho(u)\Psi(\|x\|)+\|x\|\int_0^{u}\frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)}d_zv\right)d_qu\,d_ps+\frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha)} \\ & \times\int_0^{\xi}\int_0^{s}(\xi-rs)^{(\gamma-1)}(s-qu)^{(\alpha-1)}\times\left(\rho(u)\Psi(\|x\|)+\|x\|\int_0^{u}\frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)}d_zv\right)d_qu\,d_ps \\ & +\int_0^{T}\frac{(T-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\times\left(\rho(s)\Psi(\|x\|)+\|x\|\int_0^{s}\frac{(s-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)}d_zv\right)d_qs \\ \le\; & \frac{|\lambda|T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_p(\beta)}\times\left(\frac{\eta^{\alpha+\beta}B_p\left(\beta,\alpha+1\right)\|\rho\|\Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{R\eta^{\alpha+\beta+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)B_p\left(\beta,\alpha+\delta+1\right)}{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)}\right) \\ & +\frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega|\,\Gamma_r(\gamma)}\times\left(\frac{\xi^{\alpha+\gamma}B_r\left(\gamma,\alpha+1\right)\|\rho\|\Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{R\xi^{\alpha+\gamma+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)B_r\left(\gamma,\alpha+\delta+1\right)}{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)}\right) \\ & +\frac{T^{\alpha-1}\|\rho\|\Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{RT^{\alpha+\delta}B_q(\alpha,\delta+1)}{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_z(\delta+1)} \\ :\;& =A \end{aligned}$$

Par conséquent, on conclude que $\|\Pi x\| \leq A$.

Deuxièmement, on montre que Π défini sur ensemble fermé vers ensemble équicontinu dans $\mathscr{C}$. Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$ avec $t_1 < t_2$ et B_R une boule fermée dans $C([0.T], \mathbf{R})$ comme dans l'étape précédente, soit $x \in B_R$. Alors on trouve :

$$
\begin{aligned}
|\Pi x(t_1) - \Pi x(t_2)| \leq\ & \frac{|\lambda| \left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \\
& \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} \times \left| f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right| d_q u d_p s \\
& - \frac{\left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \\
& \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} \times \left| f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right| d_q u d_r s \\
& + \left| \begin{array}{l} \int_0^{t_2} \frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \left| f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right)\right| d_q s - \\ \int_0^{t_1} \frac{(t_1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \left| f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right)\right| d_q s \end{array} \right| \\
\leq\ & \frac{|\lambda| \left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} \\
& \times \left(\rho(u) \Psi(\|x\|) + \|x\| \int_0^u \frac{(u - zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v\right) d_q u d_p s \\
& + \frac{\left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} \\
& \times \left(\rho(u) \Psi(\|x\|) + \|x\| \int_0^u \frac{(u - zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v\right) d_q u d_p s \\
& + \left| \begin{array}{l} \int_0^{t_2} \frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(\rho(s) \Psi(\|x\|) + \|x\| \int_0^s \frac{(s-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v\right) d_q s \\ - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(\rho(s) \Psi(\|x\|) + \|x\| \int_0^s \frac{(s-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v\right) d_q s \end{array} \right| \\
\leq\ & \frac{|\lambda| \left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_p(\beta)} \times \left(\begin{array}{c} \frac{\eta^{\alpha+\beta} B_p(\beta, \alpha+1) \|\rho\| \Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)} \\ + \frac{R \eta^{\alpha+\beta+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_p(\beta, \alpha+\delta+1)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)} \end{array} \right) + \frac{\left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right|}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma)} \\
& \times \left(\frac{\xi^{\alpha+\gamma} B_r(\gamma, \alpha+1) \|\rho\| \Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{R \xi^{\alpha+\gamma+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_r(\gamma, \alpha+\delta+1)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)} \right) \\
& + \frac{\left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right| \|\rho\| \Psi(R)}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{R \left|t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}\right| B_q(\alpha, \delta+1)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)}.
\end{aligned}
$$

Évidemment, la partie droite de l' inégalité précédent tend vers zéro indépendamment de $x \in B_R$ si $t_1 \to t_2$. Donc, par application de théorème *Ascoli-Arzelà*, on déduit que $\Pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est complément continu.

Le résultat suivant sur le théorème de leray Schauder-Alternative non linéaire une fois, on montre que l'ensemble fermé de tout les solutions par l'équation $x(t) = \omega(\Pi x)(t)$ pour tout $0 < \omega < 1$.

Soit x est un solution. Alors, pour $t \in [0,\mathrm{T}]$, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(x)(t) &= \frac{\omega\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), \mathrm{J}_z^\delta x(u)\right) d_q u d_p s \\ &- \frac{\omega t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, x(u), \mathrm{J}_z^\delta x(u)\right) d_q u d_r s \\ &+ \omega \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, x(s), \mathrm{J}_z^\delta x(s)\right) d_q s,\end{aligned}$$

Comme précédement, on peut facilement trouver que :

$$\|x\| = \sup_{t\in[0.\mathrm{T}]} |\omega(\Pi x)(t)| \le \|\rho\| \Psi(\|x\|)\mathrm{N}_1 + \|x\|\mathrm{N}_2,$$

sinon, on peut écrire comme :

$$\frac{(1-\mathrm{N}_2)\|x\|}{\|\rho\| \Psi(\|x\|)\mathrm{N}_1} \le 1.$$

Équivalent à $\left(\mathrm{H}_2'\right)$, il existe k tel que $\|x\| \neq k$.

Soit ensemble

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathrm{C}([0.\mathrm{T}], \mathbf{R}) : \|x\| < k\}.$$

On note que l'opérateur $\Pi : \overline{\mathcal{U}} \to \mathrm{C}([0.\mathrm{T}], \mathbf{R})$ est continu et complément continu. Depuis le choix de $\mathcal{U}$, il existe $x \in \partial\mathcal{U}$ tel que $x = \omega\Pi x$ pour tout $\omega \in]0,1[$. Par conséquent, d'aprés le théorème de leray Schauder-Alternative non linéaire, on déduit que Π ademt au moins un point fixe $x \in \overline{\mathcal{U}}$ qui est une solution de problème (3.3). ■

3 Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire

On va appliquer la définition de stabilité sur notre problème à étudier.

3.1 Type de stabilité

Le concept de stabilité d'Ulam-Hyers est assez important dans les problèmes réalistes en analyse numérique, en biologie et en économie.

Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Définition 3.1 [3] *L'équation de problème (3.3) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $y \in \mathrm{C}([0.\mathrm{T}], \boldsymbol{R})$ de l'inégalité suivante :*

$$\left|\mathrm{D}_q^\alpha y(t) - f\left(t, y(t), \mathrm{J}_z^\delta y(t)\right)\right| < \varepsilon, \quad t \in [0,\mathrm{T}], \tag{3.15}$$

*Il existe une solution $x \in \mathrm{C}([0.\mathrm{T}], \boldsymbol{R})$ de l'équation de problème (**3.3**) satisfait :*

$$x(0) = 0, \ \lambda \mathrm{J}_p^\beta x(\eta) = \mathrm{J}_r^\gamma x(\xi), \tag{3.16}$$

Avec

$$\|y - x\| < \mathrm{A}\varepsilon, \quad t \in [0,\mathrm{T}]. \tag{3.17}$$

Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.2 ([15]) *L'équation de problème* (3.3) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $\phi \in C\left([0.T], \boldsymbol{R}^{+}\right)$ *s'il existe un nombre réel* $A > 0$ *tel que* $\forall \varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $y \in C([0.T], \boldsymbol{R})$ *de l'inégalité suivante :*

$$\left|D_q^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t), J_z^{\delta} y(t)\right)\right| < \varepsilon\phi(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.18}$$

Il existe une solution $x \in C([0.T], \boldsymbol{R})$ *de l'équation de problème* (3.3) *satisfait :*

$$x(0) = 0, \ \lambda J_p^{\beta} y(\eta) = J_r^{\gamma} x(\xi), \tag{3.19}$$

Avec

$$\|y - x\| < A\varepsilon\phi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.20}$$

3.2 Etude de stabilité

Etude de stabilité au sens de Ulam-Hyers

Théorème 3.5 [3] *Supposons que* (H_1) *et* $\mu < \theta < 1$, *sont satisfaites, alors le problème* (3.3) *est stable au sens de Ulam-Hyers.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $y \in C([0.T], \mathbf{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$\left|D_q^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t), J_z^{\delta} y(t)\right)\right| < \varepsilon, \quad t \in [0, T], \tag{3.21}$$

et soit $x \in C([0.T], \mathbf{R})$ l'unique solution du problème est donnée par la formule(3.4) :

Par q-intégration de l'inégalité (3.21), on trouve :

$$\left|\begin{array}{c} y(t) - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\eta}\int_0^{s} (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^{\delta} y(u)\right) d_q u d_p s \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^{\xi}\int_0^{s} (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s - qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^{\delta} y(u)\right) d_q u d_r s \\ - \int_0^{t} \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, y(s), J_z^{\delta} y(s)\right) d_q s, \end{array}\right| < \frac{\varepsilon T^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)},$$

Où $\Omega = \frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)} \xi^{\alpha+\gamma-1} - \lambda \frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} \eta^{\alpha+\beta-1} \neq 0.$

Pour tuot $t \in [0,\mathrm{T}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|y(t)-x(t)\right| \leq & \left| \begin{array}{c} y(t) - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta-ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) d_q u d_p s \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi-rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) d_q u d_r s \\ - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s,y(s),\mathrm{J}_z^\delta y(s)\right) d_q s, \end{array} \right| \\
& + \left| \begin{array}{c} \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta-ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ \times \left(f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) - f\left(u,x(u),\mathrm{J}_z^\delta x(u)\right)\right) d_q u d_p s \\ - \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega\Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi-rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ \left(f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) - f\left(u,x(u),\mathrm{J}_z^\delta x(u)\right)\right) d_q u d_r s \\ + \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \times \left(f\left(s,y(s),\mathrm{J}_z^\delta y(s)\right) - f\left(s,x(s),\mathrm{J}_z^\delta x(s)\right)\right) d_q s, \end{array} \right| \\
\leq & \frac{\varepsilon \mathrm{T}^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{|\lambda| \mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta-ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
& \left| f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) - f\left(u,x(u),\mathrm{J}_z^\delta x(u)\right) \right| d_q u d_p s \\
& + \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi-rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
& \left| f\left(u,y(u),\mathrm{J}_z^\delta y(u)\right) - f\left(u,x(u),\mathrm{J}_z^\delta x(u)\right) \right| d_q u d_r s \\
& + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^\mathrm{T} (\mathrm{T}-qs)^{(\alpha-1)} \left| f\left(s,y(s),\mathrm{J}_z^\delta y(s)\right) - f\left(s,x(s),\mathrm{J}_z^\delta x(s)\right) \right| d_q s \\
\leq & \frac{\varepsilon \mathrm{T}^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{|\lambda| \mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta-ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
& \times \left(\mathrm{L}_1 \|y-x\| + \mathrm{L}_2 \|y-x\| \int_0^u \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_p s \\
& + \frac{\mathrm{T}^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi-rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\
& \times \left(\mathrm{L}_1 \|y-x\| + \mathrm{L}_2 \|y-x\| \int_0^u \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_r s \\
& + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^\mathrm{T} (\mathrm{T}-qs)^{(\alpha-1)} \times \left(\mathrm{L}_1 \|y-x\| + \mathrm{L}_2 \|y-x\| \int_0^u \frac{(u-zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_p s.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\|y-x\| \leq \frac{\varepsilon \mathrm{T}^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \mu \|y-x\|,$$

Donc,

$$\|y-x\| \leq \frac{\mathrm{T}^\alpha}{(1-\mu)\Gamma_q(\alpha+1)} \varepsilon := \mathrm{A}\varepsilon.$$

D'où le problème (3.3) est stable au sens d'Ulam-Hyers. ■

Etude de stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias

Théorème 3.6 [3] *Supposons que* (H_1), $\mu < \theta < 1$, *et :*

(H_2) *il exsite une fonction croissante* $\phi \in \mathrm{C}([0.\mathrm{T}], \boldsymbol{R})$ *et il existe* $\lambda_\phi > 0$ *telles que :*

$$\mathrm{J}_{q,a}^\alpha \phi(t) \leq \lambda_\phi \phi(t), \ \forall t \in [0.\mathrm{T}] \tag{3.22}$$

sont satisfaites, alors le problème (3.3) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $y \in C([0.T], \mathbf{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$\left| D_q^\alpha y(t) - f\left(t, y(t), J_z^\delta y(t)\right)\right| < \varepsilon\lambda_\phi \phi(t), \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.23}$$

et soit $x \in C([0.T], \mathbf{R})$ l'unique solution du problème est donnée par la formule(3.4) :

Par q-intégration de l'inégalité (3.23), on obtient :

$$\left| \begin{array}{c} y(t) - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) d_q u d_p s \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) d_q u d_r s \\ - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, y(s), J_z^\delta y(s)\right) d_q s, \end{array} \right| < \frac{\varepsilon\lambda_\phi \phi(t) T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)},$$

Où $\Omega = \frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)}\xi^{\alpha+\gamma-1} - \lambda \frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}\eta^{\alpha+\beta-1} \neq 0$.

D'autre part, $\forall\ t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} \left|y(t) - x(t)\right| &\leq \left| \begin{array}{c} y(t) - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) d_q u d_p s \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) d_q u d_r s \\ - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(s, y(s), J_z^\delta y(s)\right) d_q s, \end{array} \right| \\ &+ \left| \begin{array}{c} \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_p(\beta)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ \left(f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) - f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right) d_q u d_p s \\ - \frac{t^{\alpha-1}}{\Omega \Gamma_r(\gamma)\Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ \left(f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) - f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right) d_q u d_r s \\ + \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \left(f\left(s, y(s), J_z^\delta y(s)\right) - f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right)\right) d_q s, \end{array} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon\lambda_\phi \phi(t) T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ &\quad \left| f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) - f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right| d_q u d_p s \\ &\quad + \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ &\quad \left| f\left(u, y(u), J_z^\delta y(u)\right) - f\left(u, x(u), J_z^\delta x(u)\right)\right| d_q u d_r s \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^T (T - qs)^{(\alpha-1)} \left| f\left(s, y(s), J_z^\delta y(s)\right) - f\left(s, x(s), J_z^\delta x(s)\right)\right| d_q s \\ &\leq \frac{\varepsilon\lambda_\phi \phi(t) T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\eta \int_0^s (\eta - ps)^{(\beta-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ &\quad \times \left(L_1 \|y - x\| + L_2 \|y - x\| \int_0^u \frac{(u - zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_p s \\ &\quad \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma) \Gamma_q(\alpha)} \times \int_0^\xi \int_0^s (\xi - rs)^{(\gamma-1)} (s-qu)^{(\alpha-1)} \\ &\quad \times \left(L_1 \|y - x\| + L_2 \|y - x\| \int_0^u \frac{(u - zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q u d_r s \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^T (T - qs)^{(\alpha-1)} \times \left(L_1 \|y - x\| + L_2 \|y - x\| \int_0^u \frac{(u - zv)^{(\delta-1)}}{\Gamma_z(\delta)} d_z v \right) d_q s. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|y-x\| \leq \frac{\varepsilon\lambda_\phi \phi(t) T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \mu \|y-x\|,$$

Donc,

$$\|y-x\| \leq \frac{\lambda_\phi T^\alpha}{(1-\mu)\Gamma_q(\alpha+1)} \varepsilon\phi(t) := A\varepsilon\phi(t).$$

D'où le problème (3.3) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.

Exemple 3.1 *On considére le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{3/2}_{1/2} x(t) = \frac{2\sin(\pi t)}{(e^t+4)^2} \cdot \frac{|x(t)|}{2+|x(t)|} + \frac{e^{-t^2}}{(6+t)^2} J^{7/5}_{3/4} x(t) + \frac{1}{2},\ t \in]0,3[, \\ x(0) = 0,\ \frac{1}{5} J^{1/2}_{3/5} x\left(\frac{5}{2}\right) = J^{5/2}_{2/3} x\left(\frac{3}{2}\right), \end{cases} \tag{3.24}$$

alors $\alpha = 3/2$, $q = 1/2$, $\delta = 7/5$, $z = 3/4$, $\lambda = 1/5$, $\beta = 1/2$, $p = 3/5$, $\eta = 5/2$, $\gamma = 5/2$, $r = 2/3$, $\xi = 3/2$, $T = 3$, *et* $f\left(t, x(t), J^\delta_z x(t)\right) = \frac{2\sin(\pi t)}{(e^t+4)^2} \cdot \frac{|x(t)|}{2+|x(t)|} + \frac{e^{-t^2}}{(6+t)^2} J^{7/5}_{3/4} x(t) + \frac{1}{2}$.

Comme $\left| f(t, \omega_1, \omega_2) - f\left(t, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\right) \right| \leq \frac{1}{25} \left| \omega_1 - \bar{\omega}_1 \right| + \frac{1}{36} \left| \omega_2 - \bar{\omega}_2 \right|$, *alors l'hypothèse* (H_1) *est satisfaite avec* $L_1 = 1/25$ *et* $L_2 = 1/36$, *on trouve :*

$$\Omega = \frac{\Gamma_r(\alpha)}{\Gamma_r(\alpha+\gamma)} \xi^{\alpha+\gamma-1} - \lambda \frac{\Gamma_p(\alpha)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} \eta^{\alpha+\beta-1} \approx 0.4141558,$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{|\lambda| T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_p(\beta)} \times \left[\frac{\eta^{\alpha+\beta} B_p(\beta, \alpha+1) L_1}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{\eta^{\alpha+\beta+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_p(\beta, \alpha+\delta+1) L_2}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)} \right] \\ &\quad + \frac{T^{\alpha-1}}{|\Omega| \Gamma_r(\gamma)} \times \left[\frac{\xi^{\alpha+\gamma} B_r(\gamma, \alpha+1) L_1}{\Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{\xi^{\alpha+\gamma+\delta} B_q(\alpha, \delta+1) B_r(\gamma, \alpha+\delta+1) L_2}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)} \right] \\ &\quad + \frac{T^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} L_1 + \frac{T^{\alpha+\delta} B_q(\alpha, \delta+1)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_z(\delta+1)} L_2 \\ &\approx 0.8514717 < 1. \end{aligned}$$

Donc, par de théorème de contraction de Banach, le problème (3.24) *admet une unique solution sur* $[0,3]$, *et par le théorème de stabilité, le problème* (3.24) *est stable au sens de Ulam-Hyers.*

■

Bibliographie

[1] **R. P. Agarwal** : *Certain Fractional q-Integrals and q-Derivatives,* Proc. Cambridge Philos., Soc. 66(1969) 365-370. 30

[2] **S. Asawasamrit, J. Tariboon and S. K. Ntouyas** : *Existence of Solutions for Fractional q-Integrodifference Equations with Nonlocal Fractional q-Integral Conditions,* Abstract and Applied Analysis, (2014). 28, 40, 43, 45, 46

[3] **M. Benchohra and S. Bouriah :** *Existence and stability results for nonlinear boundary value problem for implicit differential equations of fractional order. Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis 1,* 1(2015) , 22-37. 48, 49, 50

[4] **R. Gorenflo and F. Mainardi** : *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order,* Springer Verlag, Wien, 1997, pp. 223-276. 6

[5] **F. H. Jackson** : *On a q-Definite Integrals,* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 41 21

[6] **V. G. Kac, P.Cheung** : *Quantum Calculus,* Universitext, Springer-Verlag, New York, (2002) . (1910) , 193-203. 18, 19, 23, 24, 25

[7] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava. J. J Trujillo**, *Theory and Applications of Fractional Equations,* North- Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006). 7, 8, 10

[8] **K. S. Miller and B. Ross :** *Theory and Applications and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, (1993). 12, 14, 15

[9] **S. oney** :*The Jackson Integral.* May 19, (2007) . 19, 22

[10] **I. Podlubny** : *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego. (1999). 6

[11] **I. Podlubny** : *Fractional Differential Equations,* Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, (1999). 12

[12] **P. M. Rajkovié, S. D. Marinkovié and M. S. Stankovié** : *Fractional integrals and derivatives in q-calculus,* Applicable Anal-ysis and Discrete Mathematics, 1(2007) , 311-323 19, 27, 29, 33

[13] **P. M. Rajkovié, S. D. Marinkovié and M. S. Stankovié** : On The *Fractional* q-*Derivative of Caputo Type,* Mathematiques Transformations Integrales, November 3, (2009). 23, 35, 36, 37, 38

[14] **S. G. Samko, A. A. Kilbas. O. I. Marichev**, *Fractional Integrals and Derivatives : theory and* 10, 12, 14, 15

[15] **J. Spanier and k. B. Oldham :** *The Fractional Calculus,* Academic Press., New York, (1974). *applications,* Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).

12, 14, 15, 45

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'établir la stabilité au sens d'Ulam-Hyers pour le problème au limite d'une équation différentielle fractionnaire impliquant la q-dérivée de Caputo et d'ordre compris entre 1 et 2 avec une condition q-intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville non locale dans un espace de Banach, et l'autre étude par Ulam-Hyers-Rassias. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur le principe de conrtraction de Banach.

Mots-clés : Calcul fractionnaire, q-analogue, Point fixe, Équations différentielles, q-dérivée de Caputo, Éxistence, Unicité, Stabilité.

Abstract

The main objective of this paper is to estalish stability in the Ulam-Hyers sense for boundary value problem of a fractional differential equation involving the Caputo q-derivative and of order between 1 and 2 with a condition fractional q-integral in the sense Riemann-Liouville nonlocal in a Banach space, and the other study by Ulam-Hyers-Rassias. The results obtained in this work are based on the Banach contraction principle.

Keywords : Fractional calculus, q-analog, Fixed point, Differential equations, q-derivative of Caputo, Existence,Uniqueness, Stability.