République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes & Informatique
Département de Mathématiques & Informatique

Polycopié de Probabilités
Cours et Exercices Corrigés

Dr. MOHAMMEDI Mustapha

Année Universitaire 2021-2022

Table des matières

Avant-propos

Ce document est un support de cours pour les enseignements des probabilités. Il couvre l'analyse combinatoire, le calcul des probabilités, variables aléatoires et les lois de probabilités dans le cas discret et continu, la convergence et les théorèmes limites et les variables multivariées. Ce support correspond aux enseignements de la filière mathématiques du L2. Pour élaborer ce polycopié, je me suis appuyé sur plusieures références reconnues dans la spécialité, mais aussi des ressources en ligne qui sont de plus en plus présents aujourd'hui dans la transmission de la connaissance.

NB. Toutes suggestions ou commentaires qui peuvent être améliorer ce document sont les bienvenus.

Pré-requis :

Il est supposé que les étudiants ont déjà une connaissance en statistique descriptive et introduction aux probabilités correspondant au programme de la première année du tronc-commun mathématiques et informatique (MI).

Chapitre 1

Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

1.1 Rappel sur la théorie des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Soit Ω un ensemble fondamental. L'ensemble des parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Inclusion. A est inclus dans Ω si chaque élément e de A appartient également à Ω.

$$\forall e \in A \Rightarrow e \in \Omega, \text{ alors } A \subset \Omega.$$

   ◦ Propriétés de l'inclusion :
   - Transitivité : $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$,
   - Réflexivité : $A \subset A$ est toujours vraie,
   - Antisymétrie : $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A \equiv B$.

   L'inclusion est donc une relation d'ordre parmi les sous-ensembles de l'ensemble fondamental.
2. La Complémentarité. On appelle complémentaire de A par rapport à Ω, noté $\overline{A}$ ou C_Ω^A ou A^c, le sous-ensemble de Ω constitué de tous les éléments qui n'appartiennent pas à A. Exemple : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, si $A = \{1,3,5\}$ donc $\overline{A} = \{2,4,6\}$.
3. Ensembles disjoints. Deux ensembles A et B sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments en commun. On termes d'évènements, on dit que A et B sont incompatibles.
4. Réunion de deux ensembles. On appelle réunion de A et B, l'ensemble dont les éléments appartiennent soit à A, soit à B, soit simultanément à A et B. On note généralement par $A \cup B$.

   ◦ Propriétés de l'union :
   - $A \subset C$ et $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$,
   - $A \subset B \Rightarrow A \cup B \equiv B$,
   - Commutativité : $A \cup B \equiv B \cup A$,

- Associativité : $(A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C) \equiv A \cup B \sqcup C$.

5. Intersection de deux ensembles. On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On note par $A \cap B$.
   - Propriétés de l'intersection :
     - Si A et B sont disjoints, alors $A \cap B = \varnothing$,
     - $A \cap B \subset A \cup B$,
     - $A \subset C \;$ et $\; B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset A \cup B \subset C$,
     - Si $B \subset A \Rightarrow A \cap B \equiv B$,
     - Commutativité : $A \cap B \equiv B \cap A$,
     - Associativité : $(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \equiv A \cap B \cap C$,
     - Distributivité à droite par rapport à la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (C \cup$
6. La différence de deux ensembles. On appelle la différence de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B. On la note par $A \setminus B$.
7. Le cardinal d'un ensemble. On appelle cardinal de A, noté card(A) le nombre d'éléments de A.

1.2 Généralités sur l'analyse combinatoire

1.2.1 Les différentes dispositions (D)

Une disposition est l'ensemble formé d'éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble fondamental. Un élément figurant dans une disposition est caractérisé par :
— Le nombre de fois où il figure dans l'ensemble,
— Sa place dans la disposition.
Il y a plusieurs types de dispositions :

- Disposition ordonné (DO) : l'ordre d'obtention d'un élément est important. Sinon, on est devant une disposition non ordonné (DNO).
- Disposition avec répétition (DAR) : c'est une disposition où un élément peut apparaître plus d'une fois. Sinon, au plus 1 fois pour la disposition sans répétition (DSR).

1.2.2 Le Principe multiplicatif (PM)

Soit E une expérience qui comporte 2 étapes : la première qui a p résultats possibles et chacun de ces résultats donne lieu a q résultats lors de la deuxième étape. Alors l'expérience E a $p \times q$ résultats possibles.

Exemple1. On jette trois dés identiques. Combien y-a-t-il de résultats possibles ? Le nombre de résultats possibles est $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$.

Exemple2. Combien y-a-t-il de mots de 2 lettres ? Il y a 26 lettres dans l'alphabet latin. On peut donc former $26 \times 26 = 676$ mots de deux lettres.

Exemple3. Combien y-a-t-il de mots de 2 lettres formés d'une consonne (c) et d'une voyelle (v) (sans tenir compte de l'ordre) ? Il y a 20 consonnes et 6 voyelles (a,e,i,o,u,y). Nous pouvons former $20 \times 6 = 120$ couples $(c \times v)$ et $6 \times 20 = 120$ couples $(v \times c)$. Il y a donc 240 mots possibles formés par une consonne et une voyelle.

1.2.3 Arrangement avec répétition (AAR)

Si nous avons à choisir p éléments parmi n avec répétition, et si l'ordre est important, on dit qu'on a un arrangement de p éléments parmi n :

$$A_n^p = n^p = n \times n \times n \times ... \times n \tag{1.1}$$

1.2.4 Arrangement sans répétition (ASR)

La disposition est toujours ordonnée mais sans répétition, l'arrangement de p éléments parmi n :

$$\mathbf{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.2}$$

où $n!$: Factorielle n, $n! = 1 \times 2 \times ... \times n = \prod_{i=1}^{n} i$

Exemple4. Combien peut on former de lignes téléphoniques (une ligne est constituée de 6 chiffres). Chaque chiffre peut être choisi de 10 façons $\{0, 1, ..., 9\}$, c'est une arrangement avec répétition. Le nombre de lignes est alors $A_{10}^6 = 10^6$.

Exemple5. Combien y a-t-il de façons d'asseoir 8 personnes sur un banc qui ne comporte que 4 places. On a 8 possibilités pour occuper la 1ière place, 7 pour la deuxième, 6 pour la troisième et 5 pour la quatrième place. Il y a donc $\mathbf{A}_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$.

1.2.5 Permutation sans répétition (PSR)

C'est un arrangement sans répétition de n éléments parmi n.

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \tag{1.3}$$

1.2.6 Permutation avec répétition (PAR)

On appelle permutation avec répétition de n éléments, une disposition ordonnée de l'ensemble de ces éléments où le premier figure n_1 fois, le second n_2 fois,... etc., tel que $n_1 + n_1 + ... + n_k = n$.

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2!, ..., n_k!} \tag{1.4}$$

où k est le nombre de groupes.

Exemple6. Combien de mots (sans tenir compte du sens) peut-on former avec les lettres du mot PAPA ? Les lettres du mot PAPA constituent un ensemble de 4 éléments qu'on peut diviser en 2 groupes de lettres identiques ; chaque groupe contenant 2 lettres. Ainsi le nombre de mot possibles est

$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

1.2.7 Combinaison sans répétition (CSR)

Si la disposition est non-ordonnée et sans répétition, on dit que l'on a une combinaison sans répétition de p éléments parmi n.

$$\mathbf{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1.5}$$

Exemple7. Si $\Omega = \{a, b, c\}$ et on veut construire des sous-ensembles composés de deux éléments : $n = 3$, $p = 2$. $\mathbf{C}_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons sans répétition.

1.2.8 Combinaison avec répétition (CAR)

C'est une disposition non-ordonnée de p éléments à choisir parmi n éléments différents.

$$\tilde{\mathbf{C}}_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = \mathbf{C}_{n-1+p}^p \tag{1.6}$$

Même exmeple précédent, on a 6 combinaisons avec répétition : $\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; $\tilde{\mathbf{C}}_n^p = \mathbf{C}_{n+p-1}^p = \mathbf{C}_4^2 = 6$. On remarquera qu'il a plus de combinaisons avec répétition que de combinaisons sans répétition.

1.3 Exercices proposés

Exercice1 : Trouver des expressions plus simples pour désigner les événements :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$
2. $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

Exercice2 : Soit A, B, C trois événements quelconques. Exprimer les événements suivants. Parmi A, B, C :

1. A seul se produit.
2. A et B se produisent mais non C.
3. Les trois événements se produisent en même temps.
4. Au moins un des événements se produit.

5. Au moins deux des événements se produisent.
6. Un et un seulement se produit.
7. Deux et deux seulement se produisent.
8. Aucun événement ne se produit.

Exercice3 : Une machine a produit n pièces. Soit A_i l'événement "la i-ième pièce est défectueuse", $i = 1, ..., n$. Écrire les événements suivants :

1. B_1 : "aucune pièce n'est défectueuse".
2. B_2 : "au moins une pièce est défectueuse".
3. B_3 : "une seule pièce est défectueuse".
4. B_4 : "deux pièces sont défectueuses".
5. B_5 : "au moins deux pièces sont défectueuses".
6. B_6 : "au plus deux pièces sont défectueuses".

Exercice4 : Que peut-on dire des événements A et B d'un même espace d'événements si :$A \backslash B = \Omega$? $A \backslash B = \emptyset$? $A \cap B = A \cup B$? $A \backslash B = A$? $A \cap B = B$?

Exercice5 : Combien peut-on former de sigles d'entreprises ayant au plus deux lettres de l'alphabet latin ?

Exercice6 : Calculer le nombre de parties d'un ensemble á n éléments en utilisant les combinaisons.

Exercice7 : Avec les lettres du mot **ENTREPRISES**, combien peut-on former de mots de 11 lettres ayant un sens ou non

1. au total ?
2. commençant et finissant par une consonne ?
3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ?

Exercice8 : Dans une entreprise, six postes de travail présentant des caractéristiques identiques sont à pourvoir et font l'objet d'une offre d'emploi. Dix candidats se présentent dont six femmes et quatre hommes. Combien de sélections pourra opérer le chef du personnel si pour ces six postes, il veut embaucher deux hommes

1. exactement ?
2. au plus ?
3. au moins ?

Exercice9 : Combien existe-t-il de nombre de trois chiffres tous différents pris parmi les chiffres $\{1, 2, ..., 9\}$? De même, combien existe-t-il de nombre de trois chiffres tous différents mais pris parmi les chiffres $\{0, 1, 2, ..., 9\}$?

Exercice10 : Un code de sécurité d'un compte bancaire comporte 6 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 3, les autres chiffres sont libres. Combien y a-t-il de codes de sécurité différents peut-on former ?

Combien y a-t-il de codes de sécurité différents comportant des chiffres tous différents ?

Exercice11 : Une secrétaire dispose d'une pochette de timbres tous différents contenant huit timbres à 20DA, quatre timbres à 10DA, deux timbres à 100DA et un timbre à 200DA. Elle doit affranchir une lettre à 280DA. Calculer le nombre de façons différentes d'affranchir la lettre.

1.4 Solutions des exercices proposés

Solution de l'exercice1 :

1. $A \cup (B \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$,
2. $((A \cap A^c) \cup B) \cap (A \cup B^c) = B \cap (A \cup B^c) = (B \cap A) \cup (B \cap B^c) = B \cap A$,
3. $(A \cup B) \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup B$,

Solution de l'exercice2 :

— $A \cap B^c \cap C^c$,
— $A \cap B \cap C^c$,
— $A \cap B \cap C$,
— $A \cup B \cup C$,
— $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$,
— $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$,
— $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$,
— $A^c \cap B^c \cap C^c$,

Solution de l'exercice3 :

— $B_1 = \cap_{i=1}^n A_i^c$,
— $B_2 = \cup_{i=1}^n A_i$,
— $B_3 = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\right)$,
— $B_4 = \bigcup_{i=1, j=1, i<j}^{n} \left(A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \cdots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\right)$,
— $B_5 = B_1^c \cap B_3^c$,
— $B_6 = B_1 \cup B_3 \cup B_4$.

Solution de l'exercice4 :

1. Il est certain que l'événement A est réalisé et que l'événement B ne l'est pas, donc A est l'événement certain, $A = \Omega$ et B est l'événement impossible, $B = \emptyset$.
2. Il est impossible que l'événement A soit réalisé et en même temps que l'événement B ne le soit pas, donc si A est réalisé, B l'est aussi, donc $A \subseteq B$.
3. Dire que l'événements A et B sont réalisés en même temps, c'est dire que A est réalisé ou B est réalisé, donc A et B sont équivalents, $A = B$.
4. Dire que l'événement A est réalisé et l'événement B ne l'est pas, c'est dire que l'événement A est réalisé, donc les événements A et B ne sont jamais réalisés en même temps, par suite les événements A et B sont incompatibles, $A \cap B = \emptyset$.
5. Dire que l'événements A et B sont réalisés en même temps, c'est dire que l'événement B est réalisé, donc si l'événement B est réalisé, l'événement A l'est aussi, et par suite $B \subseteq A$.

Solution de l'exercice5 :

L'alphabet latin comporte 26 lettres. Pour $p \geq 1$, il y a 26^p sigles d'entreprises ayant exactement p lettres. Il en découle qu'il existe $26 + 26^2 = 702$ sigles d'entreprises ayant au plus deux lettres.

Solution de l'exercice6 :

Pour $0 \leq k \leq n$, il y a C_n^k parties de k éléments pris parmi n. Au total, il y a donc

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Note : Formule du binôme de Newton

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Solution de l'exercice7 :

1. On doit former des mots de 11 lettres ayant un sens ou non avec le mot ENTREPRISES. Il y a 11! mots formés avec les 11 lettres du mot ENTREPRISES, mais il y a des lettres qui se répètent. On obtient donc au total :
$$\frac{11!}{2!2!3!} = 1663200 \text{ mots différents.}$$
2. Les voyelles : A - E - I - O - U - Y (6 Voyelles). Dans l'exercice, il y a 4 voyelles et 7 consonnes. Il y a sept consonnes et $A_n^p = A_7^2 = 42$ façons de choisir la première et la dernière lettre (Arrangement Sans réétition). Pour les lettres au milieu, il reste 9! façons de les choisir. Finalement, on trouve
$$\frac{42 \times 9!}{2!2!3!} = 635040 \text{ mots différents.}$$
3. Il y a A_7^1 façons de choisir la première et A_4^1 façons de choisir la dernière lettre (Arrangement Sans réétition). Pour les lettres au milieu, il reste 9! façons de les choisir. Finalement, on trouve
$$\frac{A_7^1 A_4^1 \times 9!}{2!2!3!} = 423360 \text{ mots différents.}$$

Solution de l'exercice8 :

Le chef du personnel veut embaucher six personnes dont deux hommes. C'est une combinaison sans répètition.

1. S'il embauche deux hommes et quatre femmes : $C_4^2 \times C_6^4 = 90$ sélections possibles.
2. S'il embauche au plus deux hommes : $C_4^0 \times C_6^6 + C_4^1 \times C_6^5 + C_4^2 \times C_6^4 = 115$ sélections possibles.
3. S'il embauche au moins deux hommes : $C_4^2 \times C_6^4 + C_4^3 \times C_6^3 + C_4^4 \times C_6^2 = 185$ sélections possibles.

Solution de l'exercice9 :

Tout d'abord, on peut former $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ nombres différents de trois chiffres tous différents pris parmi les chiffres $\{1, 2, \cdots, 9\}$. En suite, avec les dix chiffres $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, on peut former $A_{10}^3 =$

$10 \times 9 \times 8 = 720$ nombres différents. Cependant, parmi ces nombres figurent les nombres commençant par 0 qui sont des nombres de deux chiffres distincts. Il faut donc les ôter au total des 720 nombres. Il existe seulement $A_9^2 = 72$ nombres différents débutant par 0. Finalement, on peut former $720 - 72 = 648$ nombres différents de trois chiffres et tous différents.

Solution de l'exercice10 :

$\Omega = \{0, \cdots, 9\}$, $\omega = \{C_1, \cdots, C_6\}$.

Pour le premier chiffre C_1 : il y a qu'une seule possibilité.

Pour le second chiffre C_2 : il y a trois possibilités.

1. Les codes de sécurité qu'on peut former sont : Pour les 4 derniers chiffres : C_3, C_4, C_5, C_6 le nombre d'arrangement avec répétition possible est $\mathcal{A}_{10}^4 = 10^4$. La capacité totale est $1 \times 3 \times 10^4 = 30000$ codes de sécurité différents.

2. Les codes de sécurité qu'on peut former sont : Pour les 4 derniers chiffres : C_3, C_4, C_5, C_6 le nombre d'arrangement sans répétition possible est $A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$. La capacité totale est $1 \times 3 \times 1680 = 5040$ codes de sécurité différents comportant des chiffres tous différents.

Par exemple, dans la deuxième réponse et dans le premier cas (i.e. le premier chiffre 0, le second c'est 1) les chiffres C_3, C_4, C_5, C_6 ne peuvent provenir que de $\Omega = \{2, 3, \cdots, 9\}$ d'où la formule de l'arrangement A_8^4.

Solution de l'exercice11 :

— Si la secrétaire appose un timbre de 200 DA, il y a

$$C_8^4 \times C_4^0 + C_8^3 \times C_4^2 + C_8^2 \times C_4^4 = 70 + (56 \times 6) + 28 = 434.$$

Donc, 434 façons de compléter l'affranchissement pour obtenir un total de 280DA.

— De même, si elle colle deux timbres de 100 DA, il y a aussi 434 façons de compléter l'affranchissement pour obtenir un total de 280DA.

— Enfin, si elle appose un timbre de 100DA, il y a

$$C_8^8 \times C_4^2 + C_8^7 \times C_4^4 = 6 + 8 = 14$$

façons de compléter l'affranchissement pour obtenir un total de 280DA.
Finalement, il y a $(2 \times 434) + (2 \times 14) = 896$ façons d'affranchir la lettre.

Chapitre 2

Calcul des Probabilités

2.1 Épreuves et Evènements

Une expérience est dite aléatoire si ses résultats ne sont pas prévisible avec certitude en fonction des conditions initiales.

Exemples1. Tirage d'une carte, lancement d'un dé, détermination du nombre de personnes arrivant à un guichet dans une période donnée, la mesure de la durée de vie d'une pièce électronique...

On appelle épreuve la réalisation d'une expérience aléatoire.

On appelle l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire : univers, espace d'états, espace échantillon, espace des épreuves ou espace des réalisations. On le note Ω, et on se restreint au cas où Ω est dénombrable. On considère $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

On appelle évènement la propriété du système qui une fois l'épreuve est effectuée (ou non), et est défini comme un sous-ensemble de Ω. Il est constitué d'une ou plusieurs résultats.

Exemple2. Soient l'expérience aléatoire : $\ll$ Lancer deux dés$\gg$ et l'évènement A : Obtenir un total des nombres supèrieur à 10. Donc, A se réalise pour les épreuves $(6,5)$, $(5,6)$ et $(6,6)$.
L'ensemble $\mathcal{A}$ définit les ensembles que l'on peut mesurer : ainsi, on appellera un ensemble $A \in \mathcal{A}$ ensemble mesurable ou évènement. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est quant à lui appelé espace mesurable.

La classe de tous les évènements $\mathcal{A}$ doit vérifier les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire,
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable,

Une telle classe est appelée tribu ou σ-algèbre sur Ω.

Remarque 2.1 — *Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés les évènements élémentaires,*
— *L'univers c'est l'ensemble des ses évènements élémentaires.*

A partir de ces notions, on peut préciser la probabilité d'un évènement A :

Définition 2.1 *Soit Ω un univers avec $card(\Omega) = n$ fini, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ par :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \subseteq \mathbb{R} \\ & A & \longrightarrow & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de réalisation de l'évènement A.
Soit A un évènement de Ω, constitué de n_A éventualités équiprobable (s'ils ont la même probabilité de se réalisés). La probabilité de réalisation de l'évènement A est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} \tag{2.1}$$

Exemple3. Lorsqu'on jette un dé bien équilibré, la probabilité d'avoir la face numéro 5 est $\frac{1}{6}$, et la probabilité d'avoir un nombre pair est $\frac{3}{6}$.
Il y a deux type de Probabilités :
— Probabilité théorique : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorable}}{\text{Nombre total de cas}}$,
— Probabilité expérimentale : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'épreuve qui réalisent } A}{\text{Nombre total d'épreuves}}$.
A chaque évènement, on associé un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. La théorie moderne des probabilités repose sur les axiomatiques suivantes :

2.2 Espace probabilisé

On appelle espace probabilisé le triplé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Une loi de probabilité n'est donc rien d'autre qu'une mesure positive de masse totale 1. On peut donc relier la théorie des probabilités à celle de la mesure.

2.2.1 Axiomes de Kolmogorov

L'application $\mathbb{P}$ est restreinte par 3 axiomes, dites axiomes de Kolmogorov.

1. **Axiome de positivité.** Toute probabilité de réalisation d'un évènement est toujours positif.

$$\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) \geq 0 \tag{2.2}$$

2. **Axiome de certitude.** $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que Ω est un évènement certain.
3. **Axiome d'additivité.** Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \tag{2.3}$$

2.2.2 Propriétés d'une probabilité

1. L'évènement impossible : la probabilité de l'évènement impossible est nulle. En d'autre termes $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. Probabilité d'un évènement complémentaire : Soit $\overline{A}$ le complémentaire de A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
3. Probabilité et réunion : Soient deux évènements A et B tels que $A \cap B \neq \emptyset$, alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \tag{2.4}$$
4. Probabilité et inclusion : Si $B \subset A$, alors
$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \tag{2.5}$$

Remarque. La généralisation de l'équation 2.4, pour toute famille d'évènements $A_1, A_2, \cdots A_n \in \Omega$, est donnée par

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \tag{2.6}$$

Exercice1. Montrer les quatres propriétés de la probabilité.

Remarque.

— Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors A est presque impossible. On écrit $A = \emptyset$ p.s.
— Si $\mathbb{P}(A) = 1$ alors A est presque sûr. On écrit $A = \Omega$ p.s.

Définition 2.2 *Soit Ω un ensemble fondamental fini, $\mathbb{P}$ une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$, est une probabilité si et seulement si*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\forall (A_i)_{i=1 \ldots n}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i),$$
3. $\forall (A_i)_{i \geq 1}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i).$$

Propriétés.

1. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, dite formule de Poincarré.
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Inégalité de Boole. De la formule de Poincarré, on déduit facilement l'inégalité suivante, dite de Boole :

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \tag{2.7}$$

quels que soient les évènements A_i, $i = 1, ..., n$.

Remarque. Si les évènements sont incompatibles, l'inégalité de Boole devient une égalité.

Exercice. On extrait d'une caisse contenant 20 pièces dont 4 défectueuses, 3 pièces au hasard. Soient A_1, A_2 et A_3 les évènements :

- A_1 : Avoir 3 bonnes pièces,
- A_2 : Avoir 2 bonnes pièces et 1 mauvaise,
- A_3 : Avoir au plus 2 bonnes pièces.

— Calculer les probabilités des évènements A_1, A_2 et A_3.

Les probabilités de ces évènements sont respectivements :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\text{Nombre d'épreuve qui réalisent } A_i}{\text{Nombre total d'épreuves}}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_1) & = & \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} \simeq 0.49 \\ \mathbb{P}(A_2) & = & \frac{C_{16}^2 C_4^1}{C_{20}^3} \simeq 0.42 \\ \mathbb{P}(A_3) & = & \frac{C_{16}^0 C_4^3 + C_{16}^1 C_4^2 + C_{16}^2 C_4^1}{C_{20}^3} \simeq 0.50 \end{array}$$

2.3 Probabilité Conditionnelle

Soit Ω un univers, $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Soient A, B deux évènements, $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) > 0$, $B \subset \Omega$ et $A \cap B \neq \emptyset$.
La probabilité de réalisation de l'évènement B lorsque l'évènement A est réalisé s'appelle Probabilité de B sachant A, que l'on note $\mathbb{P}(B \mid A)$. On calcule cette probabilité de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \tag{2.8}$$

2.3.1 Probabilités Composées

A partir du résultat précédent, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) \text{ Si } \mathbb{P}(A) > 0 \tag{2.9}$$

et de même

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})\mathbb{P}(B) \text{ Si } \mathbb{P}(B) > 0 \tag{2.10}$$

Théorème 2.1 *Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \end{array}$$

est une probabilité sur $\mathbb{P}(\Omega)$.

On montre que pour B fixé, $\mathbb{P}_B(\cdot)$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ on a :

(i) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, donc $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$. Par ailleurs, d'après le point 3) dans les propriétés précédentes, $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ et donc $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.

(ii) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

(iii) Si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une famille d'évènements 2 à 2 incompatibles, les évènements $(A_i \cap B)$ sont également 2 à 2 incompatibles et alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_B(\cup_{i \geq 1} A_i) & = & \mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i \geq 1} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i \mid B) \end{array}$$

La probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \mid B)$ est appelée probabilité conditionnelle de A relative à B ou encore probabilité de l'évènement A sachant l'évènement B.

2.3.2 Évènements Indépendants

Soient deux évènements A, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. On dit que A est indépendant de B, si

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \tag{2.11}$$

Interprétation. Ceci signifie que le fait de savoir que l'évènement B s'est réalisé, n'influe pas sur la probabilité de réalisation de l'évènement A.

On dit encore que A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de réalisation simultanée de ces évènements est égale au produit des probabilités individuelles :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \tag{2.12}$$

2.3.3 Généralisation de la probabilité composée

On déduit de la formule 2.8 la relation suivante :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$$

En tenant compte de la relation 2.10 et de la propriété d'associativité de l'intersection, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cap B) \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(C \mid A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B).\end{aligned}$$

La généralisation pour n évènements quelconques $A_1, A_2, ..., A_n$ s'écrit :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \quad (2.13)$$

Exemple4. On tire au hasard une famille parmi les familles ayant trois enfants. Sachant que cette famille tirée a des enfants des deux sexes, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?

Soient A et B les évènements :
A : {la famille a deux garçons}, B : {la famille a des enfants des deux sexes}.

En symbolisant par exemple GGF l'évènement {le premier enfant est un garçon, le second un garçon et le troisième est une fille}, on peut expliciter l'espace des évènements comme suit :

$$\Omega = \{GGG, GGF, GFG, FGG, GFF, FGF, FFG, FFF\},$$

le cardinal de Ω est $|\Omega| = 8$.

$A \cap B = \{GGF, GFG, FGG\}$, $B = \{GGF, GFG, FGG, GFF, FGF, FFG\}$

$|A \cap B| = 3$ et $|B| = 6$,

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{8}$.

Soit

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}.$$

2.3.4 Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet de Ω tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ $\forall i = 1, 2, ..., n$ et A un évènement quelconque.

L'évènement A peut se décomposer sous la forme :

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} (A \cap A_i).$$

Vu que les A_i sont 2 à 2 incompatibles par définition d'un système complet, les évènements $(A \cap A_i)$ sont aussi 2 à 2 incompatibles.

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A \mid A_i).\end{aligned}$$

La dernière égalité est dite formule des probabilités totales.

Exemple5. Un candidat doit passer un examen oral chez un des trois examinateurs E_1, E_2 et E_3. Il a 55% de réussir chez E_1, 50% chez E_2 et 60% chez E_3. Quelle est la probabilité que ce candidat réussisse ? (On suppose que le candidat a les mêmes chances de passer chez un des trois examinateurs).

On considère les évènements suivants :

E_i : le candidat passe son examen chez l'examinateur E_i, $i = 1, 2, 3$.

$\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{3}$ $i = 1, 2, 3$.

R : le candidat a réussi à son examen.

Les données du problème sont alors :

$\mathbb{P}(R \mid E_1) = 0.55$, $\mathbb{P}(R \mid E_2) = 0.50$, $\mathbb{P}(R \mid E_3) = 0.60$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(R \mid E_i) \\ &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(R \mid E_1) + \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(R \mid E_2) + \mathbb{P}(E_3)\mathbb{P}(R \mid E_3) \end{aligned}$$

2.3.5 Formule de Bayes

Reprenons l'exemple précédent et supposons maintenant que le candidat a réussi et on voudrait savoir chez quel examinateur a t-il passé son examen.

D'une façon générale, considérons un système complet d'évènements A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ relatif à un évènement A et supposons que cet évènement A s'est réalisé.

On se propose de chercher la probabilité que A soit réalisé à travers A_i, pour i fixé, $i = 1, 2, ..., n$; autrement dit la probabilité de A_i sachant A.

A partir de la définition d'un système complet et d'après la définition d'une probabilité on déduit :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i),$$

par la probabilité conditionnelle et le fait que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A \mid A_i),$$

on déduit alors :

$$\mathbb{P}(A_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A \mid A_i)}{\mathbb{P}(A)},$$

comme $\mathbb{P}(A)$ est donné par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A \mid A_i)}. \tag{2.14}$$

La formule 2.14 est appelée formule de Bayes.

Application. Dans l'exemple précédent, la probabilité que le candidat ait passé son examen chez l'examinateur E_1, sachant qu'il a réussi est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1 \mid R) &= \frac{\mathbb{P}(R|E_1)\mathbb{P}(E_1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(R \mid E_i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(R|E_1)}{\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(R|E_1)+\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(R|E_2)+\mathbb{P}(E_3)\mathbb{P}(R|E_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\times 0.55}{(\frac{1}{3}\times 0.55)+\frac{1}{3}\times 0.50)+\frac{1}{3}\times 0.60)} \\
&= 0.33.
\end{aligned}$$

Exercice. Probabilités des causes. Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 objets. M_1 produit 5% d'objets défectueuses et M_2 en produit 6%. Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ? Soit A : $\{$l'objet est défectueux$\}$. Les causes sont les machines M_1 et M_2. $\mathbb{P}(M_1) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(M_2) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$ La probabilité qu'un objet est défectueux sachant qu'elle est fabriquée par M_1 et M_2 respectivement $\mathbb{P}(A \mid M_1) = \frac{5}{100}$, $\mathbb{P}(A \mid M_2) = \frac{6}{100}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_1 \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(A|M_1)}{\mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(A|M_1)+\mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}(A|M_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{5}{100}}{(\frac{1}{3}\times\frac{5}{100})+(\frac{2}{3}\times\frac{6}{100})} \\
&= \frac{5}{17} \simeq 0.29.
\end{aligned}$$

2.4 Indépendance de plusieurs évènements

2.4.1 Mutuellement indépendants

Soient A_i $i = 1, 2, ..., n$ n évènements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dira que les évènements A_i sont mutuellement indépendants si :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

$I \subset \{1, 2, ..., n\}$ avec $Card(I) \geq 2$.

Ainsi, trois évènements A_1, A_2 et A_3 sont dits mutuellement indépendants si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2).\mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2).\mathbb{P}(A_3)
\end{aligned}$$

Exercice. Soient A et B deux évènements queèlconques d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tels que, $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Les quatres propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A et B sont indépendants,

(ii) $\overline{A}$ et B sont indépendants,

(iii) A et $\overline{B}$ sont indépendants,

(iv) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Solution. Montrons (i) implique (ii). On suppose que A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cap B) &= \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\\ &= \mathbb{P}(B).(1-\mathbb{P}(A))\\ &= \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

De même on montre que (ii) implique (iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap \overline{B}) &= 1-\mathbb{P}(\overline{A\cap \overline{B}})\\ &= 1-\mathbb{P}(\overline{A}\sqcup B)\\ &= 1-\mathbb{P}(\overline{A})-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}),\end{aligned}$$

et pour montrer $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, on se basant sur (iii),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{B}\cap A)\\ &= \mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A)\\ &= \mathbb{P}(\overline{B})(1-\mathbb{P}(A))\\ &= \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A}).\end{aligned}$$

On montre maintenant le sens inverse de l'implication i.e. (iv) implique (i)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{A}\sqcup \overline{B}})=1-\mathbb{P}(\overline{A}\sqcup \overline{B})\\ &= 1-\mathbb{P}(\overline{A})-\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B})\\ &= (1-\mathbb{P}(\overline{B}))-\mathbb{P}(\overline{A})(1-\mathbb{P}(\overline{B}))\\ &= (1-\mathbb{P}(\overline{B}))(1-\mathbb{P}(\overline{A}))\\ &= \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B),\end{aligned}$$

d'où l'indépendance de A et B.

2.5 Exercices proposés

Exercice1 : Soit A et B deux événements définis sur le même espace avec $\mathbb{P}(A)=\frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$.

1. L'événements A et B^c peuvent-ils être incompatibles ?
2. L'un des deux événements peut-impliquer l'autre ? Si oui, lequel ?

Exercice2 : On extrait au hasard une boule d'une urne qui contient 20 boules numérotées de 1 à 20. Trouver la probabilité que le nombre inscrit sur la boule soit :

— un nombre premier.
— un nombre pair.
— un nombre divisible par 3.

Exercice3 : Soit A et B deux événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A)=1/2$ et $\mathbb{P}(B)=1/4$.

— Donner un encadrement de $\mathbb{P}(A\cup B)$ et $\mathbb{P}(A\cap B)$.

— Déterminer $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/5$.

Exercice4 : On jette trois fois un dé non pipé. Calculer la probabilité d'obtenir

- au moins un six,
- un six exactement,
- au moins deux faces identiques,

Exercice5 : Une urne contient huit boules rouges, trois banches et neuf noires. On tire successivement et sans les replacer trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir

(a) trois boules rouges ?

(b) trois blanches ?

(c) dans l'ordre, une rouge, une blanche et une noire ?

(d) une rouge, une blanche et une noire, dans le désordre ?

(e) deux rouges et une blanche dans le désordre ?

Exercice6 : Un électronicien se propose de tester l'éfficacité d'un système d'alarme : une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre après avoir frappé dans l'ordre, un code de 3 chiffres et 2 lettres. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

(A) Quelle est la probabilité que l'électronicien ouvre la porte au premier essai dans chacun des cas suivants :

1. il ignore le code,
2. il sait que les 3 chiffres sont pairs.

(B) Dans les deux cas de figure, quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au troisième essai ?

Exercice7* : Soit k urnes contenant chacune n boules identiques numérotées de 1 à n. On extrait une boule au hasard de chaque urne. Pour m strictement compris entre 1 et n, quelle est la probabilité que le plus grand nombre obtenu sur les boules extraites soit m ?

Exercice8 : Trois tireurs tirent simultanément sur la même cible. Les probabilités respectives que chaque tireur touche la cible sont $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,7$. Trouver la probabilité que la cible soit touchée exactement une fois.

Exercice9 : Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de côté, par la suite on extrait une deuxième boule.
Sachant que la première boule pigée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule pigée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule pigée soit noire.

Exercice10 : Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus. Cherchons la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

Exercice11 : Un virus se propage dans une population. On sait que :
— 20% de la population est vaccinée,
— 95% des personnes vaccinées ne sont pas malades,
— 6% de la population est malade.
Déterminer la probabilité pour un individu non vacciné d'être malade. Commenter ce résultat.

Exercice12 : Dans une population, 7% des individus sont contaminés par le virus Covid-19. On dispose d'un test de dépistage qui présente les propriétés suivantes : parmi les individus contaminés, le test est positif à 99% ; parmi les individus non contaminés, le test est tout de même positif à 3% (Il y a donc des risques de mauvais diagnostic).

1. Quelle est la probabilité que le test appliqué à un individu pris au hasard soit positif ?
2. Sachant, pour un individu donné, le test est positif, quelle est la probabilité que cet individu soit contaminé ?
3. Calculer les probabilités intéressantes pour ce problème.

Exercice13 : Un lot de 100 pièces de machines est soumis à un contrôle de qualité. En testant 5 pièces du lot, on rejette le lot si l'on trouve au moins une pièce défectueuse. Trouver la probabilité que le lot soit rejeté, s'il contient effectivement 5% de pièces défectueuses.

2.6 Solutions des exercices proposés

Solution de l'exercice1 :

1. Les événements A et B ne sont pas incompatibles.
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
   et comme $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} > 1$ i.e. $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$.

2. Comme $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$, il est possible que B soit inclus dans A, donc B peut impliquer A, mais il est impossible que A implique B.

Note : $A \subseteq B$: A implique B : si A est réalisé, B l'est aussi.

Solution de l'exercice2 :

L'espace fondamental est défini par $\Omega = \{1, 2, ...20\}$, le nombre de cas possibles $Card(\Omega) = 20$.

— $A = \{$ un nombre premier $\}$. On appelle nombre premier tout entier naturel différent de 1 n'admettant pour diviseurs que 1 et lui-même. Donc, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $Card(A) = 8$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

— $B = \{$ un nombre pair $\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

— $C = \{$ un nombre divisible par 3 $\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,

$$\mathbb{P}(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Solution de l'exercice3 :

On a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.

On utilise la formule de Poincaré : si $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

ce qui implique $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

D'autre part, $A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$.

Par conséquence,

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}.$$

On a aussi

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}.$$

A et B sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}.$$

Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} = 0.55.$$

Solution de l'exercice4 :

Un dé est dit $\prec$ pipé$\succ$ si la loi n'est plus uniforme $(\frac{1}{Card(\Omega)})$. Donc, $P_i = \frac{1}{6} \forall i$.
$Card(\Omega) = 6^3 = 216$ (Arrangement avec répétition).

(a) $A = \{$ Obtenir au moins un six $\}$, le complémentaire
$A^c = \{$ Obtenir un numéro différent de six $\}$, $Card(A^c) = 5 \times 5 \times 5 = 125$,
$\mathbb{P}(A^c) = \frac{125}{216}$, alors $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \frac{91}{216} \simeq 0.421$

(b) $B = \{$ Obtenir un six exactement $\}$, $Card(B) = 1 \times 5 \times 5 + 5 \times 1 \times 5 + 5 \times 5 \times 1 = 3 \times 5^2$,
$\mathbb{P}(B) = \frac{3 \times 5^2}{216} \simeq 0.347$

(c) $C = \{$ Obtenir au moins deux faces identique $\}$, le complémentaire
$C^c = \{$ Obtenir des faces ne sont pas identique $\}$, $Card(C^c) = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Alors,
$\mathbb{P}(C^c) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$ et par suite, $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = \frac{4}{9} \simeq 0.444$.

Solution de l'exercice5 :

Soient les événements tirés successivement (selon un ordre) et sans remise. Pour $i = 1, 2, 3$

R_i : la boule tirée au ième tirage est rouge,
B_i : la boule tirée au ième tirage est blanche,
N_i : la boule tirée au ième tirage est noire,

1. $A = \{R_1, R_2, R_3\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{A_8^3}{A_{20}^3} = \frac{336}{6840} \simeq 0.0491$
2. $B = \{B_1, B_2, B_3\}$, $Card(B) = A_3^3 = 1$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6840}$,
3. $C = \{$ Obtenir $R_1, B_2, N_3\}$, $Card(C) = A_8^1 \times A_3^1 \times A_9^1 = 216$, $\mathbb{P}(C) = \frac{216}{6840} = \frac{3}{95} \simeq 0.031$,
4. $D = \{R, B, N\}$ quelconque, $Card(D) = (3 \times A_8^1) \times (2 \times A_3^1) \times (1 \times A_3^1) = 3!(A_8^1 \times A_3^1 \times A_3^1)$, donc $\mathbb{P}(D) = \frac{3!(A_8^1 \times A_3^1 \times A_3^1)}{A_{20}^3} = \frac{18}{95} \simeq 0.1895$,
5. $E = \{2R, B\}$ quelconque, $Card(D) = A_8^2 \times A_3^1$, $\mathbb{P}(RRB) = \frac{A_8^2 \times A_3^1}{A_{20}^3}$. Donc, en multipliant $\mathbb{P}(RRB)$ par le nombre de permutations de 3 boules dont 2 rouges : $\mathbb{P}(E) = \frac{3!}{2!}\mathbb{P}(RRB)$.

Solution de l'exercice6 :

Pour ouvrir la porte, il faut taper un code de 3 chiffres nécessairement distincts et 2 lettres.

(a) Pour l'ingénieur : il y a un seul cas favorable, donc

1. $\frac{1}{A_9^3 4^2} \simeq 1.2401 \times 10^{-4}$,
2. $\frac{1}{A_4^3 4^2} \simeq 2.6042 \times 10^{-3}$,

(b) Les deux premiers essais sont des échecs et le troisième est un succès, donc

1. $\left(1 - \frac{1}{A_9^3 4^2}\right)^2 \times \frac{1}{A_9^3 4^2} \simeq 1.2397 \times 10^{-4}$,
2. $\left(1 - \frac{1}{A_4^3 4^2}\right)^2 \times \frac{1}{A_4^3 4^2} \simeq 2.5906 \times 10^{-4}$.

Solution de l'exercice8 :

Soit A l'événement $\prec$ la cible est touchée exactement une fois $\succ$. A_1, A_2 et A_3 les événements $\prec$ la cible est touchée par le premier, le deuxième et le troisième tireur $\succ$ respectivement. Alors

$$A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3).$$

Donc A est la réunion de 3 événements incompatibles et par suite,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c\right) + \mathbb{P}\left(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c\right) + \mathbb{P}\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\right),$$

parce que les événements A_i, A_j^c et A_k^c sont indépendants, $i \neq j \neq k$ et $i, j, k = 1, 2, 3$ il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3^c) + \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^c) + \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3),$$

et comme $\mathbb{P}(A_1) = p_1 = 0.4$, $\mathbb{P}(A_2) = p_2 = 0.5$ et $\mathbb{P}(A_3) = p_3 = 0.7$

$$\mathbb{P}(A) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 = 0.36.$$

Solution de l'exercice9 :

Soit les évènements :
B_i : {la ième boule pigée est Blanche} ; $i = 1, 2$
N_i : {la ième boule pigée est Noire} ; $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) &= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{\frac{6}{14} \times \frac{5}{13}}{\frac{6}{14}} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

On cherche la probabilité $\mathbb{P}(N_2 \mid B_1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 \mid B_1) &= \tfrac{\mathbb{P}(B_1 \cap N_2)}{\mathbb{P}(B_1)} = \tfrac{\frac{6}{14} \times \frac{8}{13}}{\frac{6}{14}} \\ &= \tfrac{8}{13}, \end{aligned}$$

on peut obtenir directement $\mathbb{P}(N_2 \mid B_1)$ car :
$\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbb{P}(N_2 \mid B_1) = 1$

Solution de l'exercice10 :

Notons : V : $\prec$ la personne testée a le virus $\succ$ et T : $\prec$ la personne testée a un test positif $\succ$.

On demande de calculer $\mathbb{P}(V \mid T)$. En traduisant l'énoncé :

$\mathbb{P}(V) = 0.005$; $\mathbb{P}(V^c) = 0.995$; $\mathbb{P}(T \mid V) = 0.95$; $\mathbb{P}(T^c \mid V) = 0.05$; $\mathbb{P}(T \mid V^c) = 0.01$; $\mathbb{P}(T^c \mid V^c) = 0.99$.

On commencera par calculer $\mathbb{P}(T)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}\left((T \cap V) \cup (T \cap V^c)\right) = \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(T \cap V) + \mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(T \cap V^c) \\ &= \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(T \mid V) + \mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(T \mid V^c) \\ &= (0.005 \times 0.95) + (0.995 \times 0.01) = 0.00475 + 0.00995 = 0.0147 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(V \mid T) = \frac{\mathbb{P}(V \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(V)\mathbb{P}(T \mid V)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.0147} = \frac{0.00475}{0.0147} = 0.3231.$$

Remarque. On pourra de manière analogue calculer $\mathbb{P}(T^c)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T^c) &= \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(T^c \mid V) + \mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(T^c \mid V^c) \\ &= (0.005 \times 0.05) + (0.995 \times 0.99) = 0.00025 + 0.98505 = 0.9853 \end{aligned}$$

et vérifier que : $\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(T^c) = 0.0147 + 0.9853 = 1$.

On peut aussi calculer $\mathbb{P}(V \mid T^c)$, $\mathbb{P}(V^c \mid T)$ et $\mathbb{P}(V^c \mid T^c)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \mid T^c) &= \tfrac{\mathbb{P}(V \cap T^c)}{\mathbb{P}(T^c)} &= \tfrac{\mathbb{P}(V)\mathbb{P}(T^c \mid V)}{\mathbb{P}(T^c)} = \tfrac{0.005 \times 0.05}{0.9853} = \tfrac{0.00025}{0.9853} = 2.537 \times 10^{-4} \\ \mathbb{P}(V^c \mid T) &= \tfrac{\mathbb{P}(V^c \cap T)}{\mathbb{P}(T)} &= \tfrac{\mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(T \mid V^c)}{\mathbb{P}(T)} = \tfrac{0.995 \times 0.01}{0.0147} = \tfrac{0.00995}{0.0147} = 0.67687 \\ \mathbb{P}(V^c \mid T^c) &= \tfrac{\mathbb{P}(V^c \cap T^c)}{\mathbb{P}(T^c)} &= \tfrac{\mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(T^c \mid V^c)}{\mathbb{P}(T^c)} = \tfrac{0.995 \times 0.99}{0.9853} = \tfrac{0.98505}{0.9853} = 0.9997, \end{aligned}$$

et on vérifie qu'on a là aussi : $\mathbb{P}(V \mid T) + \mathbb{P}(V^c \mid T) = \frac{0.00475 + 0.00995}{0.0147} = \frac{0.0147}{0.0147} = 1$,

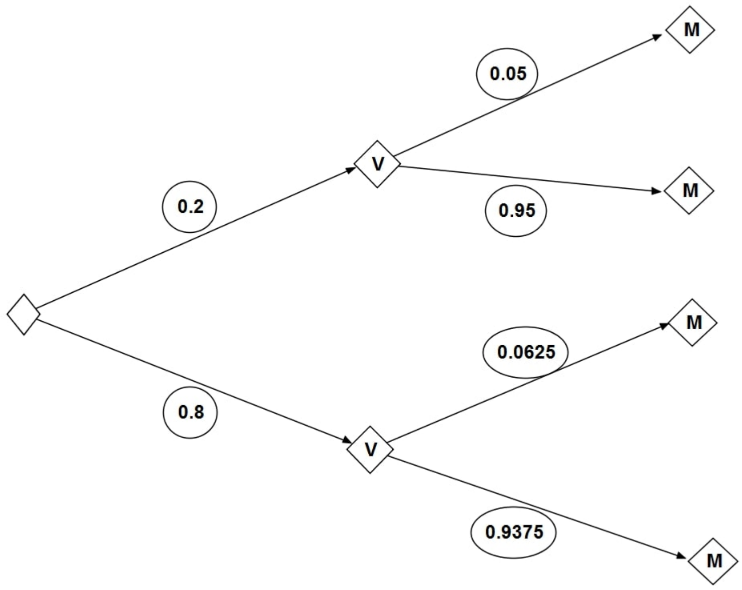
et $\mathbb{P}(V \mid T^c) + \mathbb{P}(V^c \mid T^c) = \frac{0.00025 + 0.98505}{0.9853} = \frac{0.9853}{0.9853} = 1$.

Solution de l'exercice11 :

Soit V : l'événement : l'individu est vacciné. M : l'événement : l'individu est malade.

$\mathbb{P}(V) = 0.20$, $\mathbb{P}(M^c \mid V) = 0.95$, $\mathbb{P}(M) = 0.06$, $\mathbb{P}(M \mid V) = 0.05$.

On cherche $\mathbb{P}(M \mid V^c) = \mathbb{P}_{V^c}(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap V^c)}{\mathbb{P}(V^c)}$,



d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(M \mid V) + \mathbb{P}(V^c)\mathbb{P}(M \mid V^c) \\ &= (0.2 \times 0.05) + (0.8 \times x) = 0.06\end{aligned}$$

$x = \mathbb{P}(M \mid V^c) = 0.0625$

$\mathbb{P}(M \mid V)$ et $\mathbb{P}(M \mid V^c)$ sont proches donc le vaccin est peu efficace.

Solution de l'exercice12 :

Définissons les événements dans notre population Ω :
T : le test est positif ; C : l'individu est contaminé.
Les données de l'énoncé s'interprétent en disant que :

$\mathbb{P}(C) = 7\%$, $\mathbb{P}(T \mid C) = 99\%$, $\mathbb{P}(T \mid C^c) = 3\%$.

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(T \mid C) + \mathbb{P}(C^c) \times \mathbb{P}(T \mid C^c) = 9.7\%.$$

Le fait qu'il y ait beaucoup de gens bien portant fragilise la fiabilité du test.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \mid T) &= \tfrac{\mathbb{P}(C\cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \tfrac{\mathbb{P}(T|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T)} \\ &= \tfrac{0.99\times 0.07}{0.097} = 72\%.\end{aligned}$$

Un tiers (28%) des personnes qui ont fait viver le test ne sont pas contaminés. Il est difficile de faire un test fiable quand la maladie est rare.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C^c \mid T^c) &= \tfrac{\mathbb{P}(C^c\cap T^c)}{\mathbb{P}(T^c)} = \tfrac{\mathbb{P}(T^c|C^c)\mathbb{P}(C^c)}{\mathbb{P}(T^c)} \\ &= 99.92\%.\end{aligned}$$

Il est aussi intéressant de se poser la question des malades non dépistés par le test.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \mid T^c) &= \tfrac{\mathbb{P}(C \cap T^c)}{\mathbb{P}(T^c)} = \tfrac{\mathbb{P}(T^c|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T^c)} \\ &= 0.07\%.\end{aligned}$$

Commentaire. Peu de personnes contaminées ne seront pas dépistées par le test. Faire les tests dans les populations exposées aux virus est une bonne stratégie de politique de santé publique.

Solution de l'exercice13 :

Il est plus facile de trouver la probabilité de l'évènement contraire, c'est-à-dire la probabilité que le lot soit accepté après avoir passé par le contrôle de qualité.
Notons A_i l'évènement "la i-ième pièce contrôlée est acceptable", $i = 1, ..., 5$. les évènements A_i, $i = 1, ..., 5$ ne sont pas indépendants, on doit utiliser la formule composée suivante :

$$q = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{5} A_i)\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1)\mathbb{P}(A_3 \setminus A_1 \bigcap A_2)\mathbb{P}(A_4 \setminus A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3)\mathbb{P}(A_5 \setminus A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4)$$

On a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{95}{100}$, $\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = \frac{94}{99}$; car si A_1 se réalise, alors dans le lot il reste 99 pièces parmi les quelles 94 sont acceptables. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_3 \setminus A_1 \bigcap A_2) = \frac{93}{98},\ \mathbb{P}(A_4 \setminus A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = \frac{92}{97} \text{ et } \mathbb{P}(A_5 \setminus A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4) = \frac{91}{96}.$$

Donc, $q = 0,77$ et par la suite $p = 1 - q = 0,23$.

Chapitre 3

Variables Aléatoires et Lois usuelles

3.1 Exemple Introductif

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une *pièce de monnaie* trois fois de suite, et qui prend deux valeurs possibles pile (p) ou face (f).

L'univers Ω est défini comme suit :

$$\Omega = \{(p,p,p), (p,p,f), (p,f,f), (f,f,f), (f,f,p), (f,p,p), (f,p,f), (p,f,p)\}$$

Supponsons que l'on s'interesse au nombre de piles obtenus (noté : X), donc les valeurs possibles de X sont $\{0,1,2,3\}$. X est une application de Ω dans $\{0,1,2,3\}$.

D'une manière générale, X est une application :

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

et qui s'appelle variable aléatoire (v.a.), on s'interessera aux valeurs prises par cette v.a., et plus particulièrement à la probabilité d'obtenir ces valeurs $\mathbb{P}(X = x)$.

3.2 Définitions et exemples

Définition 3.1 *Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω, stable par union, intersection et complémentarité s'appelle une tribu sur Ω. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un espace probabilisable (ou mesurable) et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des évènements.*

Exemple1. La tribu engendrée par la classe des ouverts de $\mathbb{R}$ est appellée *tribu Borélienne* (notée : $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$).

Définition 3.2 *Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces probabilisables et X une application de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. L'application X est une variable aléatoire si*

$$\forall A \in \mathcal{A}_2, \; X^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2$$

où $X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\}$ Avec

$$\begin{aligned} X: \quad (\Omega_1, \mathcal{A}_1) &\longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

Définition 3.3 *Variables aléatoire réelle.*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$$\begin{aligned} X: \quad (\Omega, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \\ \omega &\longmapsto X(\omega), \end{aligned}$$

Soit $I =]-\infty, x]$ un intervalle appartenant à la tribu boréliènne $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, et A_x est l'image réciproque de l'intervalle I. X une v.a. si $A_x \in \mathcal{A}$ où $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$.

Définition 3.4 *Fonction Indicatrice.*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $A \in \mathcal{A}$, on définit la fonction indicatrice de A par :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \; Si \; \omega \in A \\ 0 \; Si \; \omega \notin A \end{cases}$$

Exemple2. Soit

$$\begin{aligned} X: \quad (\Omega, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = a, \end{aligned}$$

est bien une v.a. certaine.
Si $x < a$, $A_x = \{\omega \in \Omega : a \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$
Si $x \geq a$, $A_x = \{\omega \in \Omega : a \leq x\} = \Omega \in \mathcal{A}$

Exemple3. Soit

$$X: \quad (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}),$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ Si } \omega \in A \\ 0 \text{ Si } \omega \notin A \text{ où } A \in \mathcal{A} \end{cases}$$

— Si $x < 0$, $A_x = \emptyset \in \mathcal{A}$,

— Si $0 \leq x < 1$, $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\Omega) = 0\} = \overline{A} \in \mathcal{A}$,

— Si $1 \leq x < \infty$, $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\Omega) = 0\} \cup \{\omega \in \Omega : X(\Omega) = 1\} = \overline{A} \cup A \in \mathcal{A}$.

Donc, l'application X est bien une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Elle est appelée variable aléatoire indicatrice ou de Bernoulli.

Exemple4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Soit

$$X: \quad (\Omega, \mathcal{A}) \quad \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$$

définie par : $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0$, $X(\omega_3) = 1$ et $X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = -1$

- Si $x < -1$, $\nexists\ \omega \in \Omega$ Tq $X(\omega) \leq x$, donc $A_x = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$,
- Si $-1 \leq x < 0$, $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$,
- Si $0 \leq x < 1$, $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1 \text{ ou } X(\omega) = 0\} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{P}(\Omega)$,
- Si $1 \leq x < \infty$, $A_x = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Conclusion : X est bien une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A_x \in \mathcal{P}(\Omega)$.

3.3 Probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. définie par une application de Ω dans $\mathbb{R}$, pouvant prendre des valeurs dans $D_X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, la $\mathbb{P}(X = x_i)$ est régie par les 3 axiomes de Kolmogorov :

1. $\mathbb{P}(X = x_i) \geq 0$,
2. $\mathbb{P}(X = D_X) = 1$,
3. Si les x_i sont incompatibles entre eux,

$$\mathbb{P}\left((X = x_i) \cup (X = x_j)\right) = \mathbb{P}(X = x_i) + \mathbb{P}(X = x_j),$$

où x_i la valeur possible de la V. a. X, et D_X le domaine de définition de X.

3.3.1 Les différents types de V.a.

Variables aléatoire discrète (v.a.d.).

Une variable aléatoire est dite discrète si les valeurs x_i formés de nombres entiers.

Exemples.
- Nombre de clients entrant dans un magasin,
- Nombre de véhicules, d'étudiants, ...
- ...

Variables aléatoire continue (v.a.c.).

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Exemples.
— Intervalle de temps entre 2 passages de train,
— La durée de vie d'une pièce mécanique, ...
— ...

3.3.2 Fonction de répartition dans le cas discret

La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x est la fonction de répartition notée $F_X(x)$.

La fonction de répartition d'une v.a. X discrète est une fonction en escalier présentant des sauts aux points d'abcisses x_i. Le saut de cette fonction en ce point est égal à la probabilité attachée à la valeur x_i.

Exemple.

1. On lance une pièce de monnaie une fois, les résultats possibles sont pile : P et face : F. L'univers $\Omega = \{P, F\}$
   Soit X le nombre d'apparition de pile. $X(\Omega) := D_X = \{0, 1\}$. La loi de X : c'est la probabilité dans chaque point. i.e. $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(P) = \frac{1}{2}$

2. On lance la pièce 2 fois, $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$ et X est le nombre d'apparition de pile. $D_X = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(PF \text{ ou } FP) \\
&= \mathbb{P}(PF) + \mathbb{P}(FP) \quad \text{évènements incompatibles} \\
&= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(P) \quad \text{évènements indépendants} \\
&= (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.

Fonction de masse. C'est la probabilité que la v.a.d. X prenne une valeur en un point $x = x_i$, $i = 1, 2, \cdots$. Notée par $p(x_i) := \mathbb{P}(X = x_i)$.

$$F_X(x) := \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{3.1}$$

Si on a un nombre fini de valeurs $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x < x_1 \\ p(x_1) & \text{Si} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p(x_1) + p(x_2) & \text{Si} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) & \text{Si} \quad x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} p(x_i) & \text{Si} \quad x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 & \text{Si} \quad x \geq x_n \end{cases}$$

Exemple. Reprenant l'exemple précedent : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$

Soit

$$\begin{array}{rccl} X: & (\Omega, \mathcal{A}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \\ & \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

où

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{Si} \quad \omega = \omega_4, \omega_5, \omega_6 \\ 0 & \text{Si} \quad \omega = \omega_1, \omega_2 \\ 1 & \text{Si} \quad \omega = \omega_3 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{\nexists \omega_i\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{Si} \quad x < -1 \\ \mathbb{P}(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = \frac{3}{6} & \text{Si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \mathbb{P}(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}) + \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} & \text{Si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = 1 & \text{Si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3.3.3 Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition vérifie les propriétés suivantes :
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$,
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$,
- F_X est croissante,
- F_X est continue à droite ; $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

Remarque. Si l'intervalle est $]-\infty, x[$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$ et vérifie les 3 premières propriétés mais elle est continue à gauche.

3.3.4 Fonction de répartition dans le cas continu

Soit f_X la densité de probabilité d'une v.a. absolument continue et c'est la dérivée de la fonction de répartition.

$$\begin{aligned} f_d(x) : &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon}, \quad \text{fonction densité à droite} \\ f_g(x) : &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{F(x)-F(x-\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \text{fonction densité à gauche} \end{aligned}$$

Si $f_d(x) = f_g(x)$, on a $f(x) = F'(x)$ et $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Remarque. Une v.a. absolument continue si F est continue à droite et à gauche, et admet une dérivée gauche égale à la dérivée droite.

La fonction densité satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Exemple. Soit X v.a. absolument continue de fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{Si} \quad a < x < b \\ 1 & \text{Si} \quad x \geq b \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

$$F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & \text{Si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{Si} \quad x \geq b \end{cases}$$

La fonction densité est discontinue en a et b.

Remarques.

1. La fonction densité peut être discontinue en certains points.
2. Il n'y a pas d'unicité de la fonction densité pour une fonction de répartition donnée F :

$$f \neq g \quad \text{mais} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = F(x).$$

Exemple. Soit X v.a. absolument continue de fonction densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ ke^{-x} & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases}$$

La valeur k se détermine par les deux conditions exigées de la fonction densité : $k \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} ke^{-x}dx = k[-e^{x}]_{-\infty}^{+\infty} = 1$. Soit $k = 1$.

La fonction de répartition correspondante est alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ k\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t}dt & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ k\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-t}dt & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases}$$

$F_X(x) = 1 - e^{-x}$

Donc,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases}$$

Probabilité d'un intervalle

Soit $I =]a, b[$. Graphiquement, la probabilité de I est la surface entre a et b.

Analytiquement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X < b) &= \int_a^b f(t)dt \\ &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f(t)dt + \int_{-\infty}^{a} f(t)dt \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

3.4 Caractéristiques d'une v.a.

3.4.1 Caractéristiques de tendance centrale

Les quantiles

On appelle quantile d'ordre α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ d'une v.a. X de fonction de répartition $F(x)$, la (ou les) valeur (s) x_α telle que :

$$F(x_\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha \tag{3.2}$$

— Le cas où X v.a. discrète, on résoudre l'équation 3.2 qui admet, soit une infinité de solutions (intervalle), soit aucune solution.
Exemple1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.
La variable X définie par : $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0$, $X(\omega_3) = 1$ et $X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = -1$, la fonction de répartition F de X est représentée comme suit :
L'équation $F(x) = \frac{4}{6}$ n'a aucune solution, le quantile d'ordre $\frac{4}{6}$ n'existe pas.
L'équation $F(x) = \frac{5}{6}$ a une infinité de solution : tout l'intervalle $[0, 1[$ et on dira qu'il y a une infinité

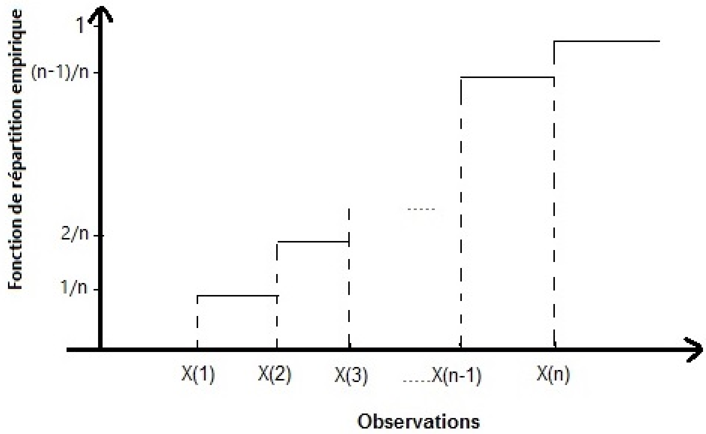


FIGURE 3.1 – La Fonction de Répartition Empirique : Cas Général

de quantiles d'ordre $\frac{5}{6}$.

— Dans le cas d'une v.a. absolument continue :

$$F(x_\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow x_\alpha = F^{-1}(\alpha) \tag{3.3}$$

Exemple2. X v.a. absolument continue de fonction de répartition F.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases}$$

L'équation $F(x_\alpha) = 0.7$ a une solution unique donnée par $x_\alpha = F^{-1}(0.7)$ soit :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x_\alpha} = 0.7 &\implies e^{-x_\alpha} = 0.30 \\ &\implies x_\alpha = -\log(0.30) \end{aligned}$$

Remarque. On peut trouver les valeurs particulières de α comme suit :

— Le premier quartile correspond au $\alpha = \frac{1}{4}$,

— Le second quartile ou la médiane correspond au $\alpha = \frac{1}{2}$,

— Le troisième quartile correspond au $\alpha = \frac{3}{4}$,

— Le k-ième décile ($k = 1, 2, \cdots, 10$) correspond au $\alpha = \frac{k}{10}$.

Espérance Mathématique

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X, qu'on notera par $\mathbb{E}(X)$, l'intégrale (de Stieltjes) suivant, lorsquel existe :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \quad \text{le cas absolument continu} \\ \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in \mathbb{N}} x p(x) = \sum_{x \in \mathbb{N}} x \mathbb{P}(X = x), \quad \text{le cas discret} \end{aligned}$$

Exemple1. On considère le jeu qui consiste à jeter un dé bien équilibré. On gagne 10DA si le dé amène les faces 1, 3 ou 5 ; on perd 15DA si le dé amène la face 4 ou 2 et le jeu est nul si la face 6 apparait.
En notant par X la v.a. qui désigne le gain au cours d'un jet quelconque ; on a : $X(\Omega) = \{-15, 0, 10\}$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{6} & \text{Si} \quad x = -15 \\ \frac{1}{6} & \text{Si} \quad x = 0 \\ \frac{3}{6} & \text{Si} \quad x = 10 \\ 0 & \text{Si} \quad \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(X) = (-15)\frac{2}{6} + (0)\frac{1}{6} + (10)\frac{3}{6} = 0.$

Exemple2. X v.a. absolument continue de densité f.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{Si} \quad 0 < x \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x e^{-2x} dx = -\frac{2}{2} x e^{-2x}(0 + \infty) + \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}(0 + \infty) = \frac{1}{2}.$$

Propriétés :

1. $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(X_i),$
2. $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$
3. Si on a $h(X)$ fonction d'une v.a. :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X)) &= \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx, \quad \text{le cas absolument continu} \\ \mathbb{E}(h(X)) &= \sum_{x \in \mathbb{N}} h(x) p(x) = \sum_{x \in \mathbb{N}} h(x) \mathbb{P}(X = x), \quad \text{le cas discret} \end{aligned}$$

3.4.2 Caractéristiques de dispersion

Ecart Absolu Moyen

défini par

$$EAM(X) = \mathbb{E}(|X - C|) \quad \text{lorsquel existe}$$

Variance/ Écart-type

définie par
$$\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)^2)) \quad \text{et } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}.$$

Propriétés de la variance :

1. $\mathbb{V}ar(C) = 0$, $C \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$,
3. $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}ar(aX + b) = a^2\mathbb{V}ar(X)$.

Les Moments

1. Moments Centrés d'ordre k : $M_k = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)^k))$, $\quad k \in \mathbb{N}$,
2. Moments Non Centrés d'ordre k : $M'_k = \mathbb{E}(X^k)$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 1$, $M_1 = 0$ et $M'_1 = \mathbb{E}(X)$,

Si $k = 2$, $M_2 = \mathbb{V}ar(X)$ et $M'_2 = \mathbb{E}(X^2)$.

3.5 Lois de probabilités usuelles

3.5.1 Lois usuelles discrètes

Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire à 2 résultats possibles (par exemple : résultat qu'on appellera succès (S) et l'autre échéc (E)) s'appelle expérience de Bernoulli.

$$\begin{array}{lll} X: & \Omega = \{S, E\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & S & \longrightarrow X(S) = 1 \\ & E & \longrightarrow X(E) = 0 \end{array}$$

$\mathbb{P}(X = k) := p(k)$, $k = 0, 1$, $\quad p(1) = p$ et $p(0) = 1 - p$.

On dira que X suit une la loi de Bernoulli, et on notera $X \curvearrowright B(p)$, si la probabilité s'écrit de la forme suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p^k(1-p)^{1-k} & \text{Si} \quad k = 0, 1 \\ 0 & \text{Si} \quad \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$X \curvearrowright B(p)$, $\quad \mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}ar(X) = p(1 - p) = pq$.

Loi de Binomiale

On répète n fois de manière indépendante l'expérience de Bernoulli.

X : le nombre de succés obtenus sur les népreuves.

$$\mathbb{P}(X=k)=\begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{Si} \quad k=0,1,\cdots,n \\ 0 & \text{Si} \quad ailleurs \end{cases}$$

On note $X \curvearrowright Bin(n,p)$, $\quad \mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}ar(X)=npq$.

Exemple. Un tireur atteint une cible 3 fois sur 10. Quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible 5 fois en 20 tirs.

Soit X le nombre de fois où le tireur atteint la cible sur les 20 tirs. $X \curvearrowright Bin(20,p)$, $p=\frac{3}{10}$.

$$p(k)=\begin{cases} C_{20}^k(\frac{3}{10})^k(\frac{7}{10})^{20-k} & \text{Si} \quad k=0,1,\cdots,20 \\ 0 & \text{Si} \quad ailleurs \end{cases}$$

Donc, la probabilité que le tireur atteigne la cible 5 fois sur 20 est donnée par 3.5.1 pour $k=5$, soit $C_{20}^5(\frac{3}{10})^5(\frac{7}{10})^{15}$.

Loi de Hypergéométrique

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On procède à k tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. La probabilité que l'on ait tiré x boules blanches au cours de ces k tirages est :

$$\mathbb{P}(X=x)=\frac{C_b^x C_n^{b-x}}{C_{b+n}^k}$$

$X \curvearrowright \mathcal{H}yper(n,k,b)$, $\mathbb{E}(X)=\frac{kb}{b+n}$ et $\mathbb{V}ar(X)=\frac{kbn(b+n-k)}{(b+n)^2(b+n-1)}$.

Loi Géométrique

Soit une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p. La probabilité pour que le premier succés apparaisse à la k-ième épreuve est :

$$\mathbb{P}(X=k)=pq^{k-1} \quad \text{où} \quad p+q=1$$

$X \curvearrowright \mathcal{G}eo(p)$, $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}ar(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

Loi de Poisson

On dit qu'une v.a. X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda>0$, et on note $X \curvearrowright \mathcal{P}(\lambda)$, si le support est donné par $D=\{0,1,2,\cdots\}$ et sa fonction de masse par :

$$\mathbb{P}(X=x)=p(x)=\begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{Si} \quad x\in D \\ 0 & \text{Si} \quad ailleurs \end{cases}$$

Exemples.

— Nombre d'appels téléphoniques,
— Nombre d'arrivées à un guichet.

Le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standart entre 08h05 et 08h10 est 1.8. Quelle est la probabilité qu'entre 10h50 et 10h55, on reçoive :
— un appel,
— deux appels.

X est le nombre de communication reçues par minutes, $\mathbb{E}(X) = \lambda = 1.8$.

En effet,

$$\sum_{k\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda$$

$$p(x) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \cdots$$

$X \curvearrowright \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}ar(X) = \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

3.5.2 Lois usuelles absolument continues

Loi Uniforme

Une v.a. absolument continue X est dite de distribution uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fonction densité est constante sur cet intervalle. On notera par $X \curvearrowright \mathcal{U}([a, b])$.

$$f_X(x) = C \quad \text{si } x \in [a, b]$$

f étant une densité : la constante C doit être positive. La valeur C est déterminer par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b-a) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{b-a}$$

La densité est donc donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{Si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{Si} \quad ailleurs \end{cases}$$

Fonction de répartition dans le cas Uniforme.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)dt = 0 & \text{Si} \quad x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{Si} \quad a \leq x < b \\ \displaystyle\int_{-\infty}^b \frac{1}{b-a}dt = 1 & \text{Si} \quad x \geq b \end{cases}$$

Si $X \curvearrowright \mathcal{U}([a, b])$, $\quad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad$ et $\quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi Exponentielle

On dit que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre λ, et on écrtit $X \curvearrowright \mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est de la forme suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{Si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Si $X \curvearrowright \mathcal{E}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Loi de gamma

Fonction gamma d'Euler. On appelle fonction gamma, l'intégrale récurrente :

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad x \in \mathbb{R} \quad , r > 0.$$

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$,

(ii) $\Gamma(1) = 1$,

(iii) $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

La variable aléatoire X suit une loi de gamma de paramètres λ et r, et on écrit $X \curvearrowright \Gamma(\lambda, r)$, si sa densité de probabilité est donnée par la fonction suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} x^{r-1} & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Si $X \curvearrowright \Gamma(\lambda, r)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\lambda}$ et $\mathbb{V}ar(X) = \frac{r^2}{\lambda^2}$

Cas particulier. Si $r = 1$, on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Loi de Béta

Une variable aléatoire absolument continue suit une loi de Béta si sa densité de probabilité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1}}{\beta(\alpha,\lambda)} & \text{Si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Où α et λ sont des constantes positives et $\beta(\alpha, \lambda) = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1} dx$ est la fonction béta. On exprime généralement $f_X(x)$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\lambda-1} & \text{Si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Si $X \curvearrowright \beta(\alpha, \lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$ et $\mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha\lambda}{(\alpha+\lambda)^2(\alpha+\lambda+1)}$

Loi de Cauchy

Une variable aléatoire X absolument continue suit une loi de Cauchy si la densité de probabilité est :

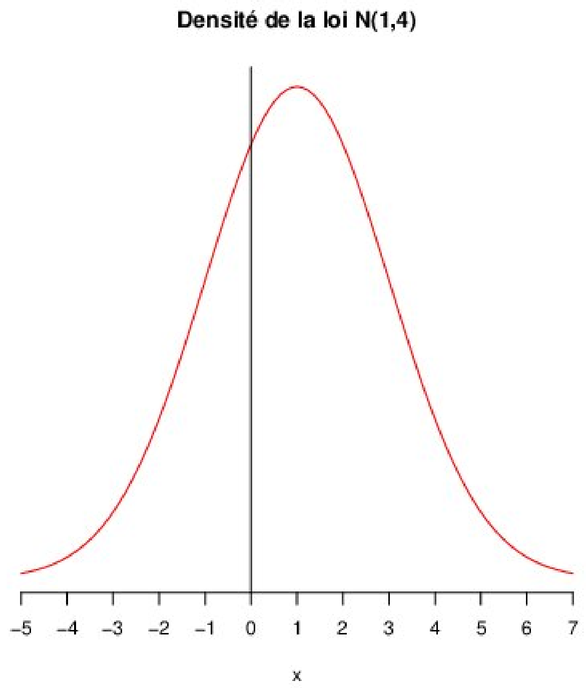
$$f_X(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)} \quad \text{Si} \quad \lambda > 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}.$$

Les moments de la distribution de Cauchy n'existent pas.

Loi Normale ou de Laplace-Gauss

— **Loi normale de paramètre μ et σ^2 :** $X \curvearrowright \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la loi de X a pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma > 0.$$



Le Code : curve(dnorm(x,mean=1,sd=2),from = -5,to = 7,col="red",main="Densité de la loi N(1,4)",axes=F,ylab="") axis(1,xaxp = c(-5,7,12)) axis(2,pos=0,c(-1,1))

— **Loi normale centrée réduite :** Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi normale centrée réduite i.e $X \curvearrowright \mathcal{N}(0,1)$ Dans ce cas on vérifie que f est bien une densité de probabilité. En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\exp(-\frac{x^2}{2})]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \\ \mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1 \end{aligned}$$

Dans le cas général on procède au changement de variable $X = \sigma U + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. La densité de X s'écrit en fonction de U de la manière suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f_U\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right) \quad \sigma > 0,$$

la v.a. X suit une loi normale de paramètre μ et σ^2, et on vérifie de la même façon que $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \sigma$.

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

La primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2})$ n'est pas calculable par les méthodes classiques d'intégration. Les valeurs de $F(x)$ sont obtenues par approximation. Une table nous donne les valeurs de F en fonction des valeurs de x.

Loi de Khi-deux

Une v.a. X est dite suit la loi de Khi-deux à n degrès de liberté (d.d.l.) et on note $X \curvearrowright \chi^2(n)$ si sa densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

où $\Gamma(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt$ est la fonction gamma d'Euler.

Propriétés.

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de fonction de répartition pour différentes valeurs du paramètre n,
2. Si $X \curvearrowright \chi^2(n)$, nous avons : $\mathbb{E}(X) = n$ et $\mathbb{V}ar(X) = 2n$,
3. Soit une v.a. qui suit une loi du Khi-deux $\chi^2(n_1)$ et Y une v.a. qui suit indépendamment de X une loi du Khi-deux $\chi^2(n_2)$. Alors la v.a. $X + Y$ suit une loi du Khi-deux $\chi^2(n_1 + n_2)$.

Théorème 3.1 *Soit $\{X_1, \cdots, X_n\}$ une famille de v.a. i.i.d. suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors la variable Z définie par*

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \curvearrowright \chi^2(n).$$

Cas particulier. Si $\frac{n}{2} = r$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, on retrouve la loi de gamma de paramètre $\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{2}$, i.e. $\Gamma(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{n}{2})$.

Loi de Student

Une v.a. X est dite suit la loi de Student, et on écrit $X \curvearrowright \mathcal{S}(n)$ à n d.d.l., si sa densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}\beta(\frac{n}{2},\frac{1}{2})\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

où $\beta(n,m) = \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$ est la fonction béta.

Propriétés.

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de fonction de répartition pour différentes valeurs du paramètre n,
2. Si $X \curvearrowright \mathcal{S}(n)$, nous avons :
$$\text{Si } n \geq 2,\ \mathbb{E}(X) = 0 \ \text{ et si } \ n \geq 3,\ \ \mathbb{V}ar(X) = \frac{n}{n-2},$$
3. Si $n = 1$, la loi est de Cauchy. La loi de Cauchy est en fait la loi du rapport de deux variables qui suivent chacune indépendamment la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème 3.2 *Soit une v.a. X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une v.a. qui suit indépendamment de X une loi de Khi-deux $\chi^2(n)$. Alors la variable $S = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi de Student de paramètre n.*

Loi de Fisher-Snedecor

Soit m et n deux entiers positifs. Une v.a. X est dite suit la loi de Fisher-Snedecor, et on écrit $X \curvearrowright \mathcal{F}(m,n)$ à m et n d.d.l., si sa densité de probabilité est donée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})} \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}\cdot x\right)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{Si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

où $\beta(\cdot,\cdot)$ est la fonction beta.

Propriétés.

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de fonction de répartition pour différentes valeurs des paramètre m et n,
2. Si $X \curvearrowright \mathcal{F}(m,n)$, nous avons :
$$\text{Si } n \geq 3,\ \mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \ \text{ et si } \ n \geq 5,\ \ \mathbb{V}ar(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},$$
3. Si $X \curvearrowright \mathcal{F}(m,n)$ alors $\frac{1}{X} \curvearrowright \mathcal{F}(n,m)$.

Théorème 3.3 *Soit X et Y étant deux v.a. suivant indépendamment des lois du Khi-deux χ^2 à m et n d.d.l. respectivement. Alors la v.a. $F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à m d.d.l au numérateur et n d.d.l au dénominateur $(\mathcal{F}(m,n))$.*

3.6 Fonction caractéristique, génératrice et transformée de Laplace

On définit trois transformées liées à une v.a. à valeurs réelles. Pour une v.a. Z à valeurs complexes, l'espérance mathématique de Z est défini, si les parties réelle ($R(Z)$) et imaginaire ($I(Z)$) de Z sont intégrable, par $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(R(Z)) + i\mathbb{E}(I(Z))$

Définition 3.5 *Soit X à valeurs dans $\mathbb{R}$, sa fonction caractéristique est la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie de la manière suivante :*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Définition 3.6 *Soit X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, sa transformée de Laplace est la fonction $\mathcal{L}_X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie de la manière suivante :*

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Définition 3.7 *Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice est la fonction φ_X définie de $[-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ par :*

$$\varphi_X(z) = \mathbb{E}\left(z^X\right), \quad z \in [-1,1]$$

Remarque. Chacune de ces fonctions caractérise la loi de la v.a. X. Par exemple, si X et Y sont à valeurs réelles et que $\phi_X = \phi_Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

3.7 Espérance conditionnelle

3.7.1 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire discrète

3.7.2 Définition d'une version régulière

Pour F fixé :

$$\begin{array}{rccl} h_F : & \Omega & \rightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(F \mid X = x) \end{array}$$

est une version régulière de la probabilité.
La famille $(\mathbb{P}(. \mid X = x))_{x\in\Omega}$ est appelée une version régulière de la probabilité conditionnelle de X.

Définition

Soient $X: (\Omega, \mathbb{F}) \rightarrow (\mathbb{E}, \mathcal{E})$ une variable aléatoire discrète et $Y: (\Omega, \mathbb{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ $\mathbb{P}$-intégrable. Donc l'espérance conditionnelle est définie par :

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x)} \int_{(X=x)} Y(w) d\mathbb{P}(w) \tag{3.4}$$

avec $x \in \mathbb{E}$ et $\mathbb{P}_X(x) \neq 0$

Remarques

1. Soit l'application
   $$\begin{array}{rccl} h: & \Omega \times \mathbb{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & (x, F) & \mapsto & h(x,F) = \mathbb{P}(F \mid X = x) \end{array}$$
   Si x fixé :
   $$\begin{array}{rccl} h_x: & \mathbb{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & F & \mapsto & h_x(F) = \mathbb{P}(F \mid X = x) \end{array}$$ est une probabilité.
2. Si $Y = \mathbb{1}_F$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mid X = x) = \mathbb{P}(F \mid X = x)$
3. Il existe toute une classe d'équivalence (voir Cottrell *et al.* (1980); Tortrat (1971)) $\dot{f}$ de fonctions f sur $\mathbb{E}$ tels que
   $$\forall x \in \mathbb{E},\ \mathbb{P}_X(x) \neq 0 \text{ on ait } f(x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x)$$
   avec $\dot{f} = \{g \mid f\mathcal{R}g\} = \{g \mid f = g \text{ prèsque surement (P.S.)}\}$

Théorème 3.4 *Soient Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et X variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$. $\forall \mathbb{B} \in \mathcal{E}$*

$$\int_{X^{-1}(B)} Y d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(Y \mid X = x) d\mathbb{P}_X \tag{3.5}$$

où $X : (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathbb{X}})$

Démonstration

On a $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = \{\omega \in B \mid x \in B\}$

$$\begin{aligned} \int_{X^{-1}(B)} Y d\mathbb{P} &= \int_{\sum_{x \in B} (X=x)_{\mathbb{P}_X(x) \neq 0}} Y d\mathbb{P} \\ &= \sum_{x \in B} \{X = x\}_{\mathbb{P}_X(x) \neq 0} \int_{\{X=x\}} Y d\mathbb{P} \\ &= \sum_{x \in B} \{X = x\}_{\mathbb{P}_X(x) \neq 0} \mathbb{E}(Y \mid X = x) \mathbb{P}(X = x) \\ &= \int_B \mathbb{E}(Y \mid X = x) d\mathbb{P}_X(x) \end{aligned}$$

3.8 Notion générale de l'espérance conditionnelle

Théorème 3.5 *Soit Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^{\mathbb{1}}(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $X : (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathbb{X}})$. Il existe une classe d'équivalance unique de fonctions $\mathbb{P}_X$ -intégrable définies sur $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ notée $\mathbb{E}(Y \mid X)$ ou $\mathbb{E}^X(Y)$ tel que $\forall f \in \mathbb{E}(Y \mid X)$ on ait :*

$$\int_{X^{-1}(B)} Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B f(x) \mathbb{P}_X(dx) \tag{3.6}$$

où $\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y \mid \sigma(X))$ *et* $\sigma(X) = \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{E}\}$

3.8.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit Y une variable aléatoire réelle, $Y \in \mathbb{L}^{\mathbb{1}}(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathbb{F}$.
Toute variable aléatoire Z vérifie :

1. Z est $\mathcal{B}$-mesurable
2. $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y d\mathbb{P} = \int_B Z d\mathbb{P}$

est appelée l'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$.

Proposition 3.1 *Soit la famille $(\mathbb{P}(. \mid X = x))_{x \in \Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle. Alors pour toute variable aléatoire $Y \in \mathbb{L}^{\mathbb{1}}(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ on a*

$$\int Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega \mid X = x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x),\ \mathbb{P}_X - p.s. \tag{3.7}$$

Démonstration

1. On suppose que Y est positive et on montre l'égalité (3.7) pour la fonction indicatrice

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \mid X = x) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mid X = x) = \mathbb{P}(F \mid X = x) \\ &= \int \mathbb{1}_F(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid X = x) \end{aligned}$$

2. On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}$ alors $\forall x \in E_X$ tel que $E_X = \{x \in \Omega \mid \mathbb{P}_X(x)\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \mid X = x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_i} \mid X = x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \mathbb{1}_{F_i}(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid X = x) \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid X = x) \\ &= \int Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega \mid X = x) \end{aligned}$$

Comme Y est positive alors il existe une suite de fonctions étagées $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes telles que

$$Y = \lim_{n\longrightarrow\infty} Y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

alors par la propriété de Beppo-Levi (voir **?**) on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y \mid X = x) & = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y \mid X = x) \\ & = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \int Y_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega \mid X = x) \\ & = & \int \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega \mid X = x) \\ & = & \int Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega \mid X = x) \end{array}$$

Remarque 3.1 *Si Y est une variable aléatoire réelle $\mathbb{P}$-intégrable alors l'égalité (3.7) est vérifiée comme étant une différence entre deux fonctions positives intégrables*
$Y = Y^+ - Y^-$.

Proposition 3.2 *Soit $X : (\Omega, \mathbb{F}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E})$ une variable aléatoire, et Y une v.a.r. $\mathbb{P}$-intégrable. Alors l'application $\mathbb{E}(Y \mid X)$ est une v.a. à valeurs réelles et on a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(Y) \tag{3.8}$$

Preuve 3.1

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \int Y d\mathbb{P} = \int_{x\in E} Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ & = & \int_E \mathbb{E}(Y \mid X = x) d\mathbb{P}_X(x) \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) \end{array}$$

Proposition 3.3 *(Positivité de l'espérance conditionnelle) Si $Y : (\Omega, \mathbb{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ une variable aléatoire positive, alors*

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) \geq 0,\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Preuve 3.2 *Comme $\int_{\{x\in B\}} Y d\mathbb{P} \geq 0$, $\forall B \in \mathbb{B}$*
alors d'aprés le théorème 3.4 on a

$$\int_B \mathbb{E}(Y \mid X = x)\mathbb{P}(dx) \geq 0,\ \forall B \in \mathbb{B}$$

et par conséquent, $\mathbb{E}(Y \mid X = x) \geq 0,\ \mathbb{P}_X - p.s.$

Théorème 3.6 *(La convergence monotone de l'espérance conditionnelle)*
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ convergeant prèsque sûrement vers une variable aléatoire Y $\mathbb{P}$-intégrable. Alors la suite $((\mathbb{E}(Y_n \mid X = x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ prèsque sûrement par rapport à $\mathbb{P}_X$ (i.e. $\mathbb{P}_X$-p.s.)

Démonstration

D'aprés la proposition 3.3 on a Si $Y \geq 0$ alors $\mathbb{E}(Y \mid X = x) \geq 0$, $\mathbb{P}_X - p.s.$
par monotonie de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid X = x) \geq \mathbb{E}(Y_n \mid X = x)\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

par suite

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \int_{\{x\in B\}} Y_n d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(Y_n \mid X = x) d\mathbb{P}_X(x)$$

et

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \int_{\{x\in B\}} Y d\mathbb{P} \geq \int_{x\in B} Y_n d\mathbb{P}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) \geq \mathbb{E}(Y_n \mid X = x)\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Comme la suite $((\mathbb{E}(Y_n \mid X = x)))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, bornée et converge $\mathbb{P}_X$-p.s. Alors par le théorème de la convergence dominée on obtient

$$\begin{array}{rcl}\int_{x\in B} Y d\mathbb{P} & = & \lim_n \int_B Y_n d\mathbb{P} \\ & = & \lim_n \int_B \mathbb{E}(Y_n \mid X = x) d\mathbb{P}_X(x) \\ & = & \int_B \lim_n \mathbb{E}(Y_n \mid X = x) d\mathbb{P}_X(x)\end{array}$$

avec $\{\lim_n \mathbb{E}(Y_n \mid X = x); x \in B\}$ est $\mathbb{B}$-mesurable.
Alors

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \lim_n \mathbb{E}(Y_n \mid X = x)\ \mathbb{P}_X - p.s.$$

Proposition 3.4 *Soit $\mathbb{B}$ sous tribu de $\mathbb{F}$. Si Y une variable aléatoire réelle $\mathbb{B}$-mesurable, T et Y deux variables aléatoires définies dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors*

$$\mathbb{E}(T.Y) = \mathbb{E}(T.\mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \tag{3.9}$$

Démonstration

Pour montrer 3.9 c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathbb{B} \subset \mathbb{F}\ \mathbb{E}(T.Y) = \mathbb{E}(T.\mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)$$

on passe par quatre étapes.

1. Dans la première étape on suppose que $T = \mathbb{1}_A$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(TY) & = & \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y) = \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y) d\mathbb{P}_{\mathbb{B}} \\ & = & \int \mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y) d\mathbb{P}_{\mathbb{B}} \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y))\end{array}$$

2. En suite $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(TY) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \mathbb{1}_{A_i} Y d\mathbb{P} \\ &=^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y))) \end{aligned}$$

3. Si T est positive, il existe une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (fonctions étagées) qui converge vers T.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(TY) &= \lim_n \int T_n Y d\mathbb{P} =^{(2)} \lim_n \mathbb{E}(T_n \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(\lim_n T_n \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(T \mathbb{E}^{\mathbb{B}}(Y)) \end{aligned}$$

4. Si T est quelconque, on utilise la décomposition suivante : $T = T^+ - T^-$ tels que T^+ et T^- sont deux fonctions positives.

Proposition 3.5 *Soit $\mathbb{B}$ sous tribu de $\mathbb{F}$. Si Y une variable aléatoire définie dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, indépendante de $\mathbb{B}$ alors*

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathbb{B}) = \mathbb{E}(Y) \ \mathbb{P} - p.s. \tag{3.10}$$

Preuve 3.3 *Soit $B \in \mathbb{B}$, par indépendance on a*

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{E}(Y \mid B) d\mathbb{P}_B &= \int_B Y d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_B Y d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Y) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\mathbb{E}(Y) \\ &= \int_B \mathbb{E}(Y) d\mathbb{P} \end{aligned}$$

alors

$$\forall B \in \mathbb{B}, \ \mathbb{E}(Y \mid B) = \mathbb{E}(Y) \ \mathbb{P} - p.s.$$

3.9 Exercices proposés

Exercice1 : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages sans remise. Soit X, Y et Z les variables aléatoires représentant le plus grand, le plus petit et la somme des deux numéros obtenus.

(a) Déterminer les lois de probabilités de X, Y et Z.

(b) Calculer leurs modes, leurs espérances et leurs variances.

Exercice2 : Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

(a) Calculer l'espérance et la variance de X.

(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < 4.5)$, $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}(3 < X \leq 4.5)$.

Exercice3 : Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\{1, 2, ..., 8\}$ telle que, pour tout entier k dans cet ensemble

$$\mathbb{P}(X = k) = ak(8 - k).$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer le mode, l'espérance et la variance de X.

Exercice4 : Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ 0 & \quad \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f.
2. Calculer le mode, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X \leq \frac{-1}{2})$, $\mathbb{P}(X > \frac{1}{5})$, $\mathbb{P}(\frac{-3}{4} < X \leq \frac{2}{3})$

Exercice5 : La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité. De quelle loi s'agit-il ? (La loi de X).
2. Trouver la probabilité que la durée de fonctionnement soit comprise entre 50 et 150 heures.
3. Trouver la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures.

Exercice6 : La durée de vie, en heures, d'une ampoule est une variable aléatoire continue $X \curvearrowright \mathcal{E}(1/10)$. Trouver le nombre t d'heures tel que avec une probabilité $0,9$ l'ampoule va bruler avant t heures.

Exercice7 : Si $X \curvearrowright \mathcal{E}(\lambda)$, montrer que $P(X > n + k \setminus X > n) = P(X > k)$. Cette propriété est généralement appelée propriété de perte de memoire, ou encore propriété d'absence de mémoire.

Exercice8 : On observe l'arrivée de personnes à un guichet, 2 personnes ne pouvant arriver en même temps. Le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps de longueur t est une variable aléatoire $N(t)$ distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λt. Les arrivées se produisent indépendamment les unes des autres. On choisit un temps $t_0 = 0$. Soit T_k la variable aléatoire qui représente l'arrivée du k^e client à partir de t_0.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Indication : la probabilité que T_1 soit supérieur à t est égale à la probabilité que personne n'arrive dans l'intervalle $[0, t]$.

2. Calculer la fonction de répartition de T_k.
3. Calculer la densité de T_k. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice9 : On considère une série d'épreuves indépendantes. A chaque épreuve, on observe un "succès" avec probabilité p et un "échec" avec probabilité $1-p$. Soit X la variable aléatoire discrète suivante : X = nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le 1er "succès".

1. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire $P(X=k)$, $k \in \mathbb{N}$. Cette loi est dite loi géométrique.
2. Vérifier que $E(X) = 1/p$.
3. Vérifier la propriété "sans mémoire" suivante de la loi géométrique

$$P(X > k \setminus X > j) = P(X > k - j),\ k > j.$$

Exercice10∗ :

I/ Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la v.a. X et calculer dans chaque cas $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

1. X est discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$, donnée par $\mathbb{P}(X=k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. $X = a$ p.s. ($a \in \mathbb{R}$)
3. X est une v.a. de Bernoulli de paramètre p.
4. $X \sim B(n,p)$ Binomiale de paramètre n, p.
5. $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ variable de poisson de paramètre λ.

II/ Démontrer que si $np \longrightarrow \lambda$ quand $n \longrightarrow \infty$ et $p \longrightarrow 0$, et si $X \sim B(n,p)$, alors X converge en loi vers une v.a. $Y \sim \mathrm{P}$.

- On utilisera ϕ_X pour calculer dans chaque cas $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}ar(X)$.

Exercice11∗ : Calculer la fonction caractéristique ϕ_X dans les cas suivants :

1. X suit une loi uniforme sur $[-a, a]$.
2. X suit une loi de Gamma de paramètre a, λ.
3. X suit une loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$ de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$

4. X suit une loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$g(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}$$

3.10 Solutions des exercices proposés

Solution de l'exercice3 :

— Pour que $\mathbb{P}(.)$ soit une probabilité il faut vérifier les deux points suivants :
  — $\mathbb{P}(X=k) \geq 0$,
  — $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

La première est vérifiée par défaut, et pour la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\mathbb{P}(X=k)=1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} ak(8-k)=1\\ &\Rightarrow \quad a\left(8\sum_{k=1}^{8}k-\sum_{k=1}^{8}k^2\right)=1\\ &\Rightarrow \quad a\left(8\times\tfrac{8\times 9}{2}-\tfrac{8\times 9\times 17}{6}\right)=1\\ &\Rightarrow \quad a=\tfrac{1}{84}.\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(X=k)=\frac{k(8-k)}{84}$; $\forall k\in\{1,2,3,\cdots,8\}$.

— Calcul du mode, l'espérance et de la variance de X :
Le Mode : Mo :
$\mathbb{P}(X=k)=\frac{k(8-k)}{84}=f(k)$
$f'(k)=\frac{1}{84}(8-2k)=0 \Rightarrow k=4=Mo$

— L'espérance mathématiques : $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k\mathbb{P}(X=k)=336$

La variance $\mathbb{V}ar(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\ &= \sum_{k=1}^{8}k^2\mathbb{P}(X=k)-\left(\sum_{k=1}^{8}k\mathbb{P}(X=k)\right)^2\\ &= \tfrac{1596}{84}-\left(\tfrac{336}{84}\right)^2=19-16=3.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice5 :

— Pour que $f(.)$ soit une densité de probabilité il faut vérifier les deux points suivants :
  — $f(.)\geq 0$,
  — $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$.

La fonction exponentielle est positive, et comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{100}}dx$, donc $\lambda=\frac{1}{100}$ et $X \curvearrowright \mathcal{E}(\frac{1}{100})$ (Loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$).

— La probabilité que la durée de fonctionnement de l'ordinateur soit comprise entre 50 et 150 heures est donnée par : $\mathbb{P}(50<X<150)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(50<X<150) &= \frac{1}{100}\int_{50}^{150}e^{-\frac{x}{100}}dx=\left(e^{-\frac{x}{100}}\right)_{50}^{150}\\ &= e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{3}{2}}\simeq 0.38,\end{aligned}$$

de même

$$\mathbb{P}(X<100)=\frac{1}{100}\int_0^{100}e^{-\frac{x}{100}}dx=1-e^{-1}\simeq 0.63,$$

i.e. l'ordinateur tombera en panne avant sa 100-ième heure de service approximativement 63 fois sur 100 en moyenne.

Solution de l'exercice6 :

On cherche $t=?$ Tq : $\mathbb{P}(X<t)=0.9$.

De $\frac{1}{10}\int_0^t e^{-\frac{x}{10}}dx = 0.9$, on trouve $1-e^{-\frac{t}{10}}=0.9$,

donc, $e^{-\frac{t}{10}}=0.1$ et par conséquent $t=-10\ln(0.1)\simeq 23$ heures.

Solution de l'exercice7 :

Rappelons que la densité de la v.a. X est donnée par :

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{sinon} \quad \text{ailleurs}\end{cases}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X>n)=\int_n^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=(-e^{-\lambda x})_n^{+\infty}=e^{-\lambda n}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>n+k \mid X>n) &= \tfrac{\mathbb{P}(\{X>n+k\}\cap\{X>n\})}{\mathbb{P}(X>n)}\\ &= \tfrac{\mathbb{P}(\{X>n+k\})}{\mathbb{P}(X>n)}=\tfrac{e^{-\lambda(n+k)}}{e^{-\lambda n}}\\ &= e^{-\lambda k}=\mathbb{P}(X>k).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice8 :

Soit $N(t)$: la variable aléatoire { nombre d'arrivées dans un intervalle de temps de longueur t }. $N(t)$ suit une loi de poisson de paramètre λt.
T_k : la v.a. {temps avant l'arrivée de la k-ième personne}.

1. On cherche la loi de T_1 :
$$\mathbb{P}(T_1>t)=\mathbb{P}(N(t)=0),$$
i.e. si aucune personne ne se présente au guichet avant l'instant t, cela signifie que $T_1>t$, et
$$\begin{aligned}F_{T_1}(t) &= \mathbb{P}(T_1<t)=1-\mathbb{P}(T_1>t)\\ &= 1-\mathbb{P}(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t},\end{aligned}$$
On en déduit que T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. La fonction de répartition de T_k :
Si $T_k<t$, cela signifie que la k-ième personne est arrivée avant l'instant t ; c'est-à-dire $N(t)\geq k$. Donc,
$$\begin{aligned}F_{T_k}(t) &= \mathbb{P}(T_k<t)=\mathbb{P}(N(t)\geq k)=\sum_{j=k}^{\infty}\mathbb{P}(N(t)=j)\\ &= \sum_{j=k}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\end{aligned}$$

3. La densité de T_k :

$$\begin{aligned} f_{T_k}(t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}F_{T_k}(t) = \sum_{j=k}^{\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + j\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}\right) \\ &= \sum_{j=k}^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t}\tfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \tfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

s'appelle loi de Gamma.

Solution de l'exercice9 :

Soit X la variable aléatoire : {Nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès},

1.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(k-1 \text{ échecs et un succès }) \\ &= (1-p)^{k-1}\times p,\ k=1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

2. En utilisant $0<q=1-p<1$, et le fait que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k := \frac{1}{1-q}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\times\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\times(1-p)^{k-1}\times p \\ &= p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1} = p\sum_{k\geq 1}\left(\frac{d}{dq}q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k\geq 1}q^k\right) \\ &= p\tfrac{d}{dq}\left(\tfrac{q}{1-q}\right) = p\times\tfrac{1}{(1-q)^2} = \tfrac{1}{p}. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X>k \mid X>j) &= \tfrac{\mathbb{P}(X>k\cap X>j)}{\mathbb{P}(X>j)} \\ &= \tfrac{\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X>j)}. \end{aligned}$$

On a $\mathbb{P}(X>k) = 1-\mathbb{P}(X\leq k)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X\leq k) &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{k}\{X=i\}) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1}\times p = p\sum_{i=1}^{k}q^{i-1} \\ &= p\sum_{\alpha=0}^{k-1}q^{\alpha} = p\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right) = 1-q^k, \end{aligned}$$

donc, $\mathbb{P}(X>k) = q^k = (1-p)^k$, et de même $\mathbb{P}(X>j) = (1-p)^j$.
Alors,

$$\mathbb{P}(X>k \mid X>j) = (1-p)^{k-j} := \mathbb{P}(X>k-j).$$

Chapitre 4

Convergences de variables aléatoires

4.1 Les inégalité stochastiques

Inégalité de Markov. Si X est une v.a. positive alors

$$\forall a > 0 \;\; \mathbb{P}\left(X \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \tag{4.1}$$

Preuve. Nous donnons la preuve dans le cas d'une v.a. absolument continue de densité $f_X(\cdot)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^{a} x f_X(x)dx + \int_a^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &\geq \int_a^{+\infty} x f_X(x)dx \geq \int_a^{+\infty} a f_X(x)dx \\ &= a\mathbb{P}(X \geq a) \end{aligned}$$

Inégalité de Bienaymé-Chebychef. Si X est une v.a. de moyenne finie μ et de variance σ^2 alors

$$\forall \lambda > 0 \;\; \mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq \lambda\right) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \tag{4.2}$$

Preuve. Comme $(X-\mu)^2$ est une v.a. positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov avec $a = \lambda^2$ on a

$$\mathbb{P}\left((X-\mu)^2 \geq \lambda^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X-\mu)^2}{\lambda^2},$$

en remarquant que $\{|X-\mu| \geq \lambda\} = \{(X-\mu)^2 \geq \lambda^2\}$, et l'équation précédente est équivalente à

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X-\mu)^2}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$

Exemple1. Soit X le nombre de pièces fabriquées par une usine pendant une semaine. On suppose que la moyenne de X est égale à 50.

1. Que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine ne dépasse pas 75 ?
2. Si la variance de la production est connue et est égale à 25, que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine soit compris entre 40 et 60 ?

Solution. Soit X le nombre de pièces pouvant être produits en une semaine, par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(X > 75\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3},$$

par la suite

$$\mathbb{P}\left(X \leq 75\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

L'évènement $\{|X - 50| < 10\} = \{10 < X < 60\}$, et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|X - 50| \geq 10\right) \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4},$$

donc

$$\mathbb{P}\left(|X - 50| < 10\right) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque. Si $X \in \mathcal{L}^2$ (v.a. carrée intégrable) de variance σ^2 et $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de donner une borne inférieure ou supérieure d'une probabilité sans trop exiger la loi de la v.a. X.

Exemple2. Trouver un nombre de jets n d'une pièce de monnaie à partir du quel la probabilité que la moyenne du nombre de piles diffère de $\frac{1}{2}$ d'au plus $\frac{1}{100}$ soit supérieure à 0.95.

Solution. Soit X_i la v.a. le nombre de piles défini par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si le jet donne pile,} \\ 0 & \text{Si le jet donne façe,} \end{cases}$$

la moyenne de piles est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. On cherche n tel que :

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{100}\right) > 0.95,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}| > \frac{1}{100}\right) \leq 0.05,$$

d'après l'inégalité de Tchebyshev

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{2}|>\frac{1}{100}\right)\leq\frac{\mathbb{V}ar(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}{(\frac{1}{100})^2}=\frac{0.5\cdot 0.5}{n(\frac{1}{100})^2},$$

donc le nombre n est la solution de l'égalité suivante :

$$\frac{0.5\cdot 0.5}{n(\frac{1}{100})^2}\leq 0.05,$$

ce qui donne $n=5\times 10^4$.

4.2 Divers modes de convergence

On désigne par X une v.a. réelle et par (X_n) une suite de v.a.r. On déffinit divers modes de convergence de (X_n) vers X de la manière suivante :

Convergence presque sûre (P.S.).

$$\begin{aligned} X_n \longrightarrow^{P.S.} X &\iff \mathbb{P}\{\omega : |X_n \longrightarrow^{n\to\infty} X|\}=1\\ &\iff \forall\epsilon>0\mathbb{P}\{\overline{\lim_n}|X_n-X|>\epsilon\}=0.\end{aligned}$$

Convergence en probabilité (ou stochastique) ($\mathbb{P}$).

$$X_n\longrightarrow^{\mathbb{P}} X \iff \forall\epsilon>0\lim_n\mathbb{P}\{|X_n-X|>\epsilon\}=0,$$

Convergence en Loi.

$$X_n\longrightarrow^{\mathcal{L}} X \iff \lim_n\mathbb{P}(X_n<x)=\mathbb{P}(X<x),$$

Convergence dans L^p ($p\geq 1$).

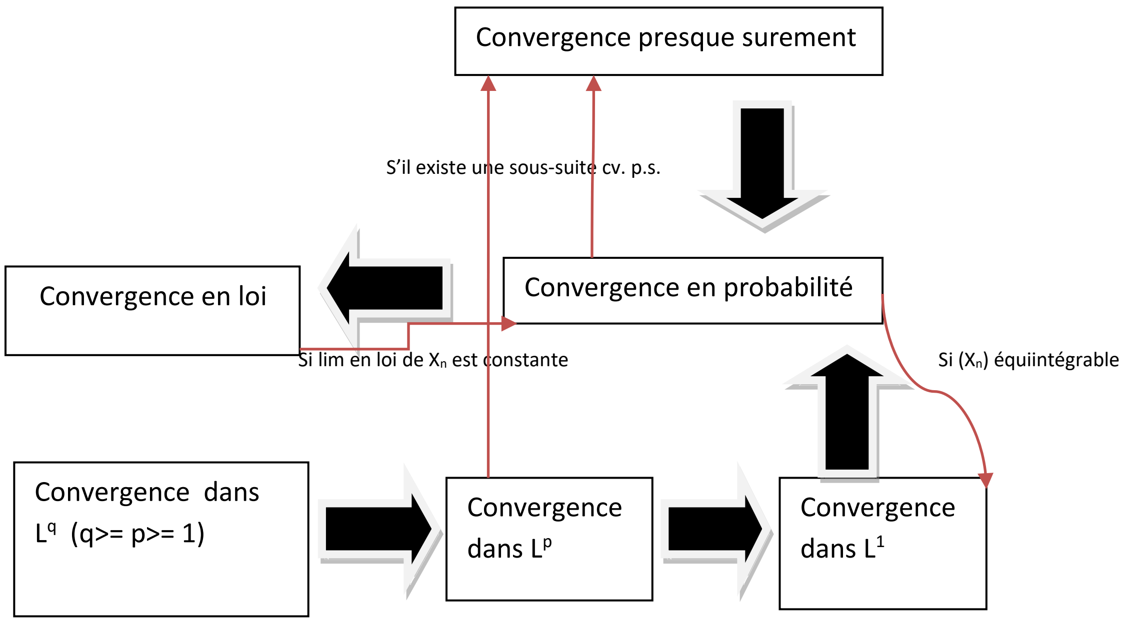
$$X_n\longrightarrow^{L^p} X \iff \lim_n\mathbb{E}|X_n-X|^p=0,$$

équiintégrabilité. La suite (X_n) est dite équiintégrable si

$$\lim_{c\to\infty}\left[\sup_n\int_{(|X_n|>c)}|X_n|d\mathbb{P}\right]=0.$$

Si $X_n\longrightarrow^{L^1} X$, la suite (X_n) est équiintégrable.

Les liens entre ces différentes convergences sont schématisés ci-dessous :



<u>FIG. Relations entre les divers modes de convergence</u>

Théorème 4.1 *La suite de fonction de répartition (f.d.r) F_n tend vers une f.d.r. F en tout point de continuité de F si et seulement si les fonctions caractéristiques ϕ_n correspondantes aux F_n tendent vers une fonction continue ϕ en 0, quand $n \longrightarrow \infty$. Dans ce cas ϕ est la fonction caractéristique de la f.d.r. F et ϕ_n converge vers ϕ dans tout intervalle fini.*

4.3 Lois des grands nombres

Soient $X_1, X_2, \cdots$ des v.a.r. indépendantes et équidistribuées t.q. $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$.

Loi faible des grands nombres.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow^{\mathcal{L},\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

Loi forte des grands nombres.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow^{P.S.} \mathbb{E}(X_1)$$

Théorème central limite. Soit X_n une suite de v.a. indépendantes, de même loi et dont la variance existe. Posons :

$S_n = \sum_{i=1}^{k} X_i$ et $Y_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{V}ar(S_n)}$

alors :

$$Y_n \longrightarrow^{\mathcal{L}} N(0,1)$$

4.4 Exercices proposés

Exercice1 : Soit une suite de v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendantes. On pose : $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Démontrer que si on centre et réduit Y_n, la v.a. obtenue tend en loi vers une v.a. Normale $N(0,1)$.

Exercice2 : Soit une suite X_n de v.a., telles que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu \text{ et } \mathbb{V}ar(X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebychef que :

$$X_n \longrightarrow^{P} \mu \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

2. Montrer que

$$X_n \longrightarrow^{m.q.} \mu \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

Exercice3 : Soit X une v.a. $B(n,p)$, on pose $\lambda = np$ et on suppose que λ est fixe.

A l'aide de la fonction caractéristique montrer que

$$X \longrightarrow^L \mathcal{P}(\lambda).$$

Exercice4 : Soit la suite X_n où X_n a la loi de probabilité :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n & = & 1 - \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}(X_n = \beta_n) & = & \frac{1}{n} \end{array}$$

1. Montrer que $X_n \longrightarrow^P 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, quelque soit β_n,
2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et sa limite quand $n \longrightarrow \infty$, si l'on pose : $\beta_n = \sqrt{n}, n, (-1)^n, n^2$,
3. Quelle remarque peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice5 : Soit X_n une v.a. $N(0, \frac{1}{n})$. Montrer que : $X_n \longrightarrow^L 0$ et trouver un point où $F_n(x) \nrightarrow F(x)$, F_n étant la fonction de répartition (f.d.r) de X_n et F celle d'une v.a. constante égale à 0.

4.5 Solutions des exercices proposés

Solution de l'exercice1 :

La fonction caractéristique des X_i : $\phi_{X_i}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, et puisque les X_i sont indépendantes, $\phi_{Y_n}(t) = e^{n\lambda(e^{it}-1)}$
On voit que Y_n est une v.a. de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{V}ar(Y_n) = n\lambda$.

Posons : $Z = \frac{Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ et calculons sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{itZ}) = \phi_{Y_n}(\tfrac{t}{\sqrt{n\lambda}})e^{-it\sqrt{n\lambda}} \\ &= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda(1 + \tfrac{it}{\sqrt{n\lambda}} - \tfrac{t^2}{2n\lambda} + \cdots) \right) e^{-it}\sqrt{n\lambda} \\ &= \exp\left(n\lambda(-\tfrac{t^2}{2n\lambda} + \tfrac{i^3t^3}{3!(n\lambda)^{\frac{3}{2}}} - \cdots) \right) e^{-it}\sqrt{n\lambda}, \end{aligned}$$

d'où

$$\phi_Z(t) = \exp\left(n\lambda(-\frac{t^2}{2} \right) \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

on reconnaît la fonction caractéristique de la loi $N(0,1)$.

La convergence des fonctions caractéristiques entraîne la convergence en loi : $Z \longrightarrow^L N(0,1)$.

Solution de l'exercice2 :

On a

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right| > \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha^2}$$

$\forall \epsilon > 0$ choisissons α tel que $\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}} = \epsilon$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$,

alors

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \mu| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

et $X_n \longrightarrow^P \mu$ quand $n \longrightarrow \infty$.

$\|X_n - \mu\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X_n - \mu)^2} = \sqrt{\mathbb{V}ar(X_n)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

d'où $\|X_n - \mu\|_2 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Remarquons que le second résultat entraîne celui du premier.

Solution de l'exercice3 :

La fonction caractéristique de X est : $\phi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.

Posons $np = \lambda$

$\phi_X(t) = (1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it})^n$

On sait que $(1 + \frac{a}{n})^n \longrightarrow e^a$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

D'où $\phi_X(t) \longrightarrow \exp(\lambda(e^{it} - 1))$ et on reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ.

Solution de l'exercice4 :

$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = \beta_n) = \frac{1}{n}$,

donc, $\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

c'est-à-dire : $X_n \longrightarrow^P 0$

$\mathbb{E}(X_n) = 0p_n + \frac{\beta_n}{n} = \frac{\beta_n}{n}$

— Si $\beta_n = \sqrt{n}$, $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow 0$,
— Si $\beta_n = n$, $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow 1$,
— Si $\beta_n = (-1)^n$, $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow 0$,
— Si $\beta_n = n^2$, $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \infty$,

La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence des espérances mathématiques.

Solution de l'exercice5 :

$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$ et

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

On a bien $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ $\forall x \neq 0$

mais $\forall n \in \mathbb{N} : F_n(0) = \frac{1}{2} \neq F(0) = 0$

Rappelons la définition de la convergence en loi :

$X_n \longrightarrow^L X$ si en tout point de continuité de F on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$

Ici F est discontinue en 0.

Chapitre 5

Variables aléatoires multivariées

5.1 Introduction

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$Une v.a. à n dimensions $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu borélienne.

5.2 Couples de v.a.

Un couple de v.a. peut être vu comme un ensemble Ω de valeurs de $\mathbb{R}^2$ auquel on associe une mesure de probabilité. La mesure de probabilité est une fonction portant sur l'ensemble des événements (parties de $\mathbb{R}^2$).

5.2.1 Fonction de répartition et densité conjointe

Définition 5.1 *Soit (X, Y) un couple de v.a., on appelle fonction de répartition conjointe de (X, Y), que l'on note $F_{X,Y}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}\left((X \leq x) \cap (Y \leq y)\right)$$

La loi de la v.a. à deux dimensions est donnée par :

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Dans le cas absolument continu, la densité (non négative) de probabilité conjointe du couple est :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

où

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, v) du dv$$

5.2.2 Lois marginales

Si l'on s'intéresse à un événement sur X quelle que soit la valeur prise par Y, on retombe sur la loi marginale de X :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \lim_{y \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= F_{X,Y}(x, +\infty) \end{aligned}$$

De même $F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

La fonction de probabilité conjointe sur toutes les valeurs possibles de Y, i.e.

$$\begin{aligned} P_X(x_i) &= \sum_{j \in J} P_{X,Y}(x_i, y_j) \\ P_Y(y_j) &= \sum_{i \in I} P_{X,Y}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Pour le cas continu on admettra la relation du même type portant sur les densités :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \end{aligned}$$

5.2.3 Lien entre les v.a.

— Covariance entre X et Y, qui généralise la notion de variance, est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X, Y) &= \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\right) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

— Le coefficient de corrélation de X et de Y est :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}} \text{ où } \rho \in [-1, 1].$$

5.2.4 Lois conditionnelles

On définira la fonction de probabilité conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$ en appliquant la règle des probabilités conditionnelles.

$$P_{X|Y=y_j}(x_i) = \frac{P_{X,Y}(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)}, \; i = 1, 2, \cdots$$

On peut évidemment définir de façon similaire $P_{Y|X=x_i}(y_j)$.

La fonction de répartition conditionnelle de X sachant $Y = y$ égale à

$$F_{X|Y=y}(x) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, y) du}{f_Y(y)}.$$

Par dérivation par rapport à x, on obtient la densité conditionnelle :

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

5.2.5 Indépendance

(i) Deux tribus sont indépendantes si on a l'égalité : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$ où A_1 et A_2 sont des événements quelconques de chacune des tribus.

(ii) Deux v.a. sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent le sont.

(iii) Pour que deux v.a. soient indépendantes il faut et il suffit que :

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_X(x_i) \times P_Y(y_j) \text{ ou } f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

(iv) Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{E}(XY) & = & \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{V}ar(X+Y) & = & \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) \end{array}$$

car $\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$, la réciproque est vraie pour les v.a. normales. Mais fausse en général.

Proposition 5.1 *Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions G et K, les v.a. $G(X)$ et $K(X)$ sont également indépendantes.*

5.2.6 Transformation des v.a.

Proposition 5.2 *Soient X et Y deux v.a. continues, et soient $V = g_1(X,Y)$ et $W = g_2(X,Y)$. Supposons que*

1. *Le système* $\left\{ \begin{array}{lcl} v & = & g_1(x,y) \\ w & = & g_2(x,y) \end{array} \right.$ *possède la solution unique $x = h_1(v,w)$, $y = h_2(v,w)$,*
2. *les fonctions g_1 et g_2 possèdent des dérivées partielles continues $\forall(x,y)$, et le jacobien de la transformation :*

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \partial g_1/\partial x & \partial g_1/\partial y \\ \partial g_2/\partial x & \partial g_2/\partial y \end{vmatrix}$$

est différent de zéro $\forall(x,y)$.

Alors on peut écrire que la densité du couple (V,W) s'écrit de la forme suivante :

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x,y)|J(x,y)|^{-1}$$

Remarque 5.1 *Le jacobien de la transformation inverse est donné par*

$$J^*(v,w) = \begin{vmatrix} \partial h_1/\partial v & \partial h_1/\partial w \\ \partial h_2/\partial v & \partial h_2/\partial w \end{vmatrix}$$

et $|J^*(v,w)| = |J(h_1(v,w), h_2(v,w))|^{-1}$. *Alors, si* $J^*(v,w) \neq 0$, *on peut aussi écrire la densité du couple* (V,W) *de la manière suivante :*

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(h_1(v,w), h_2(v,w))|J^*(v,w)|.$$

Exemple. Soit le vecteur aléatoire (X,Y) de densité $f_{X,Y}(x,y)$. Quelle est la densité de la v.a. $Z = XY$?

Faisons le changement de variables : $X = X$ et $Z = XY$. La transformation inverse est bijective ; $h_1(x,z) = x$ et $h_2(x,z) = \frac{z}{x}$

Cherchons maintenant la densité du couple (X,Z), puis nous en déduirons la densité de Z.

On a

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(h_1(x,z), h_2(x,z))|J^*(x,z)|$$

où

$$J^*(x,z) = \begin{vmatrix} \partial h_1/\partial x & \partial h_1/\partial z \\ \partial h_2/\partial x & \partial h_2/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -z/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 1/x$$

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, \frac{z}{x})|\frac{1}{x}| \text{ si } x \neq 0,$$

la densité de Z est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x})dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x})dx.$$

5.3 Exercices proposés

Exercice1 : Soient n parts budgétaires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[0,1]$. Calculer la fonction de répartition et la densité de $Y = \min(X_1, \cdots, X_n)$.

Exercice2 : Un analyste financier dispose de données historiques $\mathbf{X_1}, \cdots, \mathbf{X_n}$ de rendement d'une certaine action. On suppose par simplicité que ces observations sont indépendantes avec fonction de répartition $\mathbf{F_X(x)}$ et densité $\mathbf{f_X(x)}$.
Soit $\mathbf{T} = \max(\mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_n})$ la variable aléatoire qui représente le rendement maximal.

1. Montrer que $\mathbf{F_T(t)} = (\mathbf{F_X(t)})^{\mathbf{n}}$, où $\mathbf{F_T(t)}$ est la fonction de répartition de $\mathbf{T}$.
2. Soit
$$\mathbf{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}x & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$
Dans ce cas, calculer $\mathbf{E(T)}$.
3. Sous les conditions du point **2.**, calculer la probabilité que le rendement maximal soit supérieur à un certain seuil **a**.

Exercice3 : Soit la v.a. Y définie par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) impaire \\ \frac{X(\omega)}{2} & X(\omega) paire \end{cases}$$

On a $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p + q = 1$.

Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice4 : Soit $X \curvearrowright U(0,1)$ Uniforme sur $[0,1]$. Calculer la fonction de répartition de $Y = \frac{-1}{\lambda}\ln(X)$ et sa densité. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice5 : Soit $X \curvearrowright N(0,1)$ Normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Définissons la v.a. $Y = X^2$. Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité de probabilité par deux méthodes différentes. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice6 : Soit X v.a. distribuée suivant la loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. La densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

Soit $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta}$. Calculer la fonction de densité de Y. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice7∗ : Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xy + \frac{3}{2}y^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{X,Y}(x,y)$ est une densité,
2. Trouver les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$,
3. Trouver les densités conditionnelles $f_{X|Y=y}(x)$ et $f_{Y|X=x}(y)$,
4. Calculer $\mathbb{P}((X,Y) \in [0,1\setminus 2] \times [0,1\setminus 2])$,
5. Trouver $\mathbb{P}(X < Y)$,
6. Trouver $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$,
7. Soit la variable aléatoire $Z = \mathbb{E}(Y \mid X)$.
   (i) Quelle est la distribution de Z ?
   (ii) Trouver $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice8∗ : Pour $a > 0$, on pose $\mu(a) = \int_0^{\infty} \exp(-x)x^{a-1}dx$. On appelle loi de gamma de paramètre a et λ ($a > 0$, $\lambda > 0$), notée $\gamma(a,\lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\mu(a)}\exp(-\lambda x)x^{a-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Vérifier que $\mu(a)$ est défini pour $a > 0$, montrer que $\mu(a+1) = a\mu(a)$ et calculer $\mu(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une v.a. de loi $\gamma(a,\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $\gamma(a,\lambda)$, $\gamma(b,\lambda)$.
   3.a Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leurs lois de probabilité. En déduire que
   $$\beta(a,b) = \int_a^b x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\mu(a)\mu(b)}{\mu(a+b)}.$$
   3.b Donner la loi de probabilité de $\frac{X}{Y}$.

3.c Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n v.a. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, donner la loi de probabilité de $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

4. Soit Y une v.a. gaussienne centrée réduite, notée $N(0,1)$.
   4.a Montrer que Y^2 a la loi Gamma $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\mu(\frac{1}{2})$.
   4.b Si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont n v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$, donner la loi de probabilité de $Z = Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2$ et calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

5.4 Solutions des exercices proposés

Solution de l'exercice1 : Commençons par la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\min(X_i) < y) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_i) > y).$$

Si $\min(X_i)$ est supérieur à y, cela signifie que le plus petit des X_i est supérieur à y, ou encore que tous les X_i sont plus grands que y. Par conséquent,

$$F_Y(y) = 1 - (\mathbb{P}(X_1 > y))^n = 1 - (1 - F_Y(y))^n = 1 - (1-y)^n.$$

En dérivant $F_Y(y)$ par rapport à y, on a la fonction de densité de y, à savoir

$$f_Y(y) = n(1-y)^{n-1},\ 0 < y < 1.$$

Solution de l'exercice2 :

1. Étant donné l'indépendance de $X_1, \cdots, X_n$, on a

$$\begin{aligned} F_T(t) = \mathbb{P}(T < t) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \cdots, X_n) < t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 < t, X_2 < t, \cdots, X_n < t) \\ &= (\mathbb{P}(X_1 < t))^n = (F_X(t))^n. \end{aligned}$$

2. La densité de T est donnée par $f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t)$

$$f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} \times f_X(t).$$

En utilisant la définition de $f_X(x)$ et la fonction de répartition $F_X(.)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{\theta^2} & \text{si} & 0 < x \leq \theta \\ 1 & \text{sinon} & x > \theta \end{cases}$$

On obtient

$$f_T(t) = \begin{cases} n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{2(n-1)} \frac{2t}{\theta^2} & \text{si} & 0 < t < \theta \\ 0 & \text{sinon,} & \end{cases}$$

et par conséquence

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f_T(t)dt = \int_0^\theta t \times f_T(t)dt \\ &= \int_0^\theta t \times n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{2(n-1)} \frac{2t}{\theta^2}dt \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta t^{2n}dt \\ &= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)_{t=0}^{t=\theta} = \frac{2n}{2n+1}\theta. \end{aligned}$$

3. On calcul la probabilité $\mathbb{P}(T > a)$:

$$\mathbb{P}(T > a) = 1 - F_T(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq 0 \\ 1 - (\frac{a}{\theta})^{2n} & \text{si} \quad 0 < a < \theta \\ 0 & \text{si} \quad a \geq \theta. \end{cases}$$

Solution de l'exercice3 :

1. Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}\left((X = 0) \cup (X \text{ impaire })\right) \\ &= \mathbb{P}(X \text{ impaire }) \\ &= \mathbb{P}\left(\cup_{i \geq 0}(X = 2i + 1)\right) \\ &= \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}\left(X = 2i + 1\right) \\ &= \sum_{i \geq 0} pq^{2i} = p \sum_{i \geq 0} (q^2)^i = \frac{p}{1 - q^2} \end{aligned}$$

   $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{1+q}$,
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = pq^{2k-1}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}\left(X = k\right) = \sum_{k \geq 0} kpq^{2k-1} \\ &= pq \left(\sum_{k \geq 0} (q^2)^k \right)' = pq \left(\frac{1}{1-q^2} \right)' \\ &= \frac{pq}{(1-q^2)^2} = \frac{q}{p(1+q)^2}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice4 :

La v. a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$ et on cherche la fonction de répartition de $Y = \frac{-1}{\lambda} \ln(X)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{-1}{\lambda} \ln(X) < y\right) = \mathbb{P}\left(X > e^{-\lambda y}\right) \\ &= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) \\ &= 1 - e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

La v.a. Y suit une loi exponentielle de paramètre λ et sa densité est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si} \qquad y > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Solution de l'exercice5 :

Soit $X \curvearrowright N(0, 1)$, sa densité est donnée par $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = X^2$:

Méthode 1. La fonction de répartition de Y est

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) &= \mathbb{P}(X^2 < y) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à y pour obtenir la densité :

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}).$$

On utilise la parité de la fonction de densité de la loi normale : $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$.

Finalement, on trouve

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

Méthode 2. Pour toute fonction borélienne positive

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(Y)) &= \int_\Omega g(Y) d\mathbb{P}_Y = \int_\Omega g(X^2) d\mathbb{P}_X \\
&= \int_\mathbb{R} g(x^2) d\mathbb{P}_X = 2\int_0^{+\infty} g(x^2) f_X(x) dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} g(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^{+\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{-\frac{1}{2}} dy \\
&:= \int_0^{+\infty} g(y) f_Y(y) dy,
\end{aligned}$$

par comparaison, on trouve avec $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$

$$f_y(y) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, \ y > 0.$$

Conclusion. $Y \curvearrowright \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi_1^2$: C'est la densité d'une v.a. Khi-deux χ_1^2 à un degré de liberté (avec $n = 1$), ou loi de Gamma de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Solution de l'exercice6 :

Soit $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta$, où X suit une loi de Weibull. La fonction de répartition de Y est

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta < y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X < \alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right) \\
&= F_X(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}),
\end{aligned}$$

et sa densité de probabilité est donnée par

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dy} F_Y = f_Y(y) &= f_X(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}) \tfrac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1}{\beta - 1}} \\
&= \tfrac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1-\beta}{\beta}} \tfrac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha}\right)^\beta\right) \\
&= \exp(-y).
\end{aligned}$$

La v.a. Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Bibliographie

L-P. Arguin (2022). A first Course in Stochastic Calculs. *AMS. — AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, USA*, 2022.

E. Cantoni, P. Huber, E. Ronchetti (2006). Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique. *Springer-Verlag, France, Paris*, 2006.

H. Carrieu (2008). Probabilité. Exercices Corrigés. *EDP Sciences*, 2008.

M. Cottrell, Ch. Duhamel et V. Genon-Catalot (1980). Exercices de Probabilités avec rappels de cours. *Librairie classique Eugène Belin*, 1980.

Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre (1999). Exercices de probabilités Licence - maitrise - école d'ingénieurs. *CASSINI, PARIS*, 1999.

D. Foata, A. Fuchs(1998). Calcul des probabilités. *Dunod*, 1998.

M. Lejeune (2010). Statistique. La Théorie et ses applications. *Deuxième édition. — Springer*, 2010.

M. Loève (1978). Probability Theory II. *4th Edition. — Springer-Verlag, New York*, 1978.

J. Neveu (1994). Introduction aux probabilités. *École Polytechnique, Paris*, 1994.

C. Reidcher, R. Leblanc, B. Rémillard, D. Larocque (2002). Théorie des probabilities - Problèmes et Solutions. *Presses de l'Université du Québec*, 2002.

A. Tortrat (1971). Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. *MASSON*, 1971.