REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Abdelhamid ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de 1ère année LDM ST

Cours et Exercices Corrigés Physique I- Mécanique du point matériel

Présenté par :

Dr. MEHTOUGUI.NABILA

Expertisées par : Pr.Senouci Khaled
Dr.Bestaali Wafaa

Ce cours est rédigé à l'intention des étudiants de 1ère Année Licence LMD domaine ST et SM.

Année universitaire 2020-2021

Avant-propos

Ce polycopie est destinée aux étudiants de la première année Licence LMD domaine ST et SM Afin de leurs fournir un cours simple et riches aux notions de base dans la dynamique du point matériel, illustré par des exercices corrigés pour faciliter la compréhension et la maîtrise du savoir-faire. Pour cela notre polycopie contient quatre chapitres importants qui dépendent l'un de l'autre, et à la fin de chaque chapitre nous proposons une série d'exercices corrigées.

Chapitre I Rappel Mathématique : Ce chapitre est indispensable pour l'étudiant puisqu'il est structuré sur des notions et des relations mathématiques de base afin de traiter les phénomènes physiques en language mathématique.

Chapitre II La Cinématique : La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps sans savoir les causes qui provoquent ce mouvement. Dans ce chapitre on va traiter les vecteurs position, vitesse et accélération qui sont importants pour déterminer la nature du mouvement dans les différents systèmes de coordonnées tels que les coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques. L'étude du mouvement relatif est introduite à la fin de ce chapitre.

Chapitre III la dynamique du point : Ce chapitre est consacré à la dynamique du point matériel qui fait l'étude des corps en mouvement en tenant compte des conditions et des causes qui provoque ce dernier. Pour cela nous avons besoin de notions de base telle que les forces qui agissent sur le point matériel afin de mieux comprendre ces phénomènes physiques, tel que le principe d'inertie. Nous décrivant ensuite les trois lois de Newton et la notions du moment cinétique est présente à la fin du chapitre.

Chapitre VI Travail et Energie : Ce chapitre permet aux étudiants de comprendre les différentes notions tel que l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique d'un système mécanique, nous avons aussi introduit les notions du travail de force et la puissance.

Espérant qu'à travers ce polycopie nous avons fourni une documentation aussi complète que possible.

Table des matières

Chapitre I : Rappels Mathématiques

I.1. Les grandeurs physiques :

La physique est une science basée sur l'observation. On appelle **grandeur physique** toute propriété repérables tel que la dureté, la viscosité, …etc, ou mesurables à laquelle on peut associer une valeur numérique. Il existe deux types de grandeurs mesurables scalaires et vectorielles.

I.1.1. Grandeur Scalaire :

Une grandeur scalaire est toute grandeur mesurée exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité.

Exemple : longueur, masse, temps, ………

I.1.2. Grandeur vectorielle :

Une grandeur vectorielle est une grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application et un module afin d'associer une valeur numérique.

Exemple : Force, vitesse, accélération, …

I.1.2. Mesure et unité :

La mesure est une technique au moyen de laquelle nous attribuons un nombre à une quantité physique après l'avoir comparé à une quantité de référence de même nature choisie comme référence.

I.1.3. Grandeurs fondamentales :

Ces grandeurs sont nécessaires pour construire un système d'unité Universelle. En physique il existe sept grandeurs fondamentales :

Grandeur	**Masse**	**Longueur**	**Temps**	**Intensité**	**Température**	**Quantité de matière**	**Intensité lumineuse**
Dimension	M	L	T	I	θ	N	J
Unité	Kilogramme	mètre	seconde	Ampère	Kelvin	mole	Candela
Symbole de l'unité	Kg	m	s	A	K	mol	Cd

Tableau 1 : Unités et symboles des grandeurs physiques.

Toutes les autres grandeurs sont déduites à partir des grandeurs fondamentales.

Exemple :

La vitesse : $v = \frac{x}{t}$

La force :$F = ma$

L'accélération : $a = \frac{v}{t}$ d'où on peut écrie $a = \frac{x}{t^2}$ $\Longrightarrow F = m\frac{x}{t^2}$

Ces grandeurs sont appelées grandeurs dérivées

En mécanique un système MKSA est dit système international

Longueur → mètre → M

Masse → Kilogramme →Kg

Temps →Seconde → s

Intensité → Ampère →A

Il existe un autre système : CGS

C → Centimètre

G → Gramme

S → Seconde

I.1.4. Multiples est sous Multiples :

Toute mesure est exprimée avec une unité correspondante pour cela on obtient des multiples et des sous multiples qui précèdent l'unité par un préfixe mentionné dans le tableau suivant :

Les Multiples								
Préfixe	**Déca**	**Hecto**	**Kilo**	**Méga**	**Giga**	**Téra**	**Péta**	**Exa**
Facteur	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
Symbole	Da	H	K	M	G	T	P	E

Les Sous Multiples										
Préfixe	**Déci**	**Centi**	**Multi**	**Micro**	**Nano**	**Pico**	**Fenito**	**Atto**	**Zepto**	**Yocto**
Facteur	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
Symbole	D	C	m	μ	N	P	F	A	Z	Y

Tableau 2 : Les multiples et les sous multiples des unités.

I.1.5. Equation aux dimensions :

La dimension d'une grandeur est notée : [ ]

Une grandeur physique G de dimension [G] exprimée par l'équation :

$[G] = M^a L^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$

M : Masse, L : Longueur, T : Temps, I : Intensité

Où : *a, b, c, d, e, f, g* ϵ *IR*

I.1.6. Intérêts des équations aux dimensions :

a-Exprimer l'unité de grandeurs :

$[F] = M\ L\ T^{-2}$, d'où l'unité s'écrit : $Kg\ m\ s^{-2}$ (Newton).

$[P] = M\ L^{-1}\ T^{-2}$ d'où l'unité s'écrit : $Kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ (Pascal).

b- Vérifier l'homogénéité des relations :

Soit A et B deux équations égales, alors ont dit que l'équation est homogène si [A] = [B]

Exemple :

Vérifier l'homogénéité de l'équation suivante : $F = \frac{P}{S}$

$[F] = M\ L\ T^{-2}$

$\frac{[P]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = M\ LT^{-2} = [F]$ *, alors on dit que* $F = \frac{P}{S}$ est homogène

Remarque :

Soit $K = Cte$ *alors* $[K] = 1$, *et* $[\ln x] = 1$

I.2.Calcul des incertitudes :

Lorsqu'on effectue une mesure sur une grandeur quelconque G, on n'obtient jamais une valeur exacte, mais une valeur plus ou moins approximative. On appelle erreur, la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte. Donc on ne peut pas connaitre l'erreur commise. Le résultat est donc toujours incertain. D'où l'appellation des incertitudes de mesure.

I.2.1. Origine des erreurs : Toute science qui repose sur l'expérience et l'observation est apparentée à des erreurs.

a-Erreurs systématiques: Les erreurs proviennent de l'instrument de mesure.

- ***Exemple*** **:** sensibilité, qualité, charge.

b -Erreurs aléatoires : Ces erreurs proviennent de l'expérience de celui qui utilise les instruments.

- ***Exemple*** : la bonne lecture, observation des chiffres, visibilité.

I.2.2. Erreur absolue-Incertitude absolue :

a-Erreurs absolue :

L'erreur absolue d'une grandeur « G » est la différence entre la valeur exacte Ge et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** qu'ont désignée par dG :

$dG = G_a - G_e$

b-Incertitude absolue : notée par ΔG incertitude absolue

$\Delta G = | \sup dG |$

Nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue commise sous le nom de l'incertitude absolue.

$| dG | \leq | \Delta G |$

L'incertitude absolue ΔG a la même unité que G le résultat est donné sous la forme :
G= (Ga ± ΔG) unité
D'où G_a est la valeur approchée

Exemple : mesure d'une longueur

l= (1,25 ±0,30) m (on garde le même nombre de chiffre après la virgule)

Remarque :
L'incertitude absolue des constantes est nulle $K = Cte;\ \Delta K = 0$

I.2.3. Erreur relative et incertitude relative :

a-Erreur relative :

Sur une grandeur G est notée :

$$\frac{dG}{G_e} \cong \frac{dG}{G_a}$$

Valeur exacte Valeur approchée

Tel que : $dG \ll G_e, G_a$

b-Incertitude relative : $\frac{\Delta G}{G} \cong \left| \frac{dG}{G} \right|$

$\frac{\Delta G}{G}$ n'a pas d'unité et peut-être exprimée en %

Exemple : la longueur est mesurée à 2% alors on écrit :

$$\frac{dl}{l} = 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

La longueur est mesurée à 2 mm, $\Delta l = 2$ mm $= 2.10^{-3}$m

I.2.4. Calcul des incertitudes :

a-Somme et différence :

Soit : la gradeur G

$G = a\,x + by - cz + k$ *Tel que* : $a, b, k, c \in$ IR

$\Delta G = |a|\,\Delta x + |b|\,\Delta y + |c|\,\Delta z$

Exemple :

Calculer l'incertitude absolue de D = *L* - *l*

L= (1,24 ± 0,02) *m*

l = (80,00 ± 0,01) *cm*

D = *L* – *l* =1,24-0,80 = 0,44m

Δ D = Δ *l* +Δ L= 0,02 + 0,01.10^{-2} = 2 ,01 cm = 0,0201 m

Alors : D = (0.44 ± 0.02) m

b- Cas d'un produit :

Soit : $G = k\ x^a, y^b$ *avec : a, b, et k* $\in$ *IR*

$\ln G = \ln k + a \ln x + b \ln y$

$$\frac{dG}{G} = \cancel{\frac{d\,k}{k}+} a\frac{d\,x}{x} + b\frac{d\,y}{y}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = |a|\frac{\Delta\,x}{x} + |b|\frac{\Delta\,y}{y}$$

$$\Delta G = G\left(|a|\frac{\Delta x}{x} + |b|\frac{\Delta y}{y}\right)$$

c- Cas mixte :

Soit : $G = k\,(x-y)^a, z^b$ *tel que : a,b* nombre *réel*, $k = Cte$

$\ln G = \ln k + a \ln(x-y) + b \ln z$

$$\frac{dG}{G} = \cancel{\frac{d\,k}{k}} + a\,\frac{d(x-y)}{(x-y)} + b\frac{d\,z}{z}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{a}{x-y}\right|\Delta X + \left|\frac{a}{(x-y)}\right|\Delta Y + |b|\frac{\Delta z}{z}$$

Exercices corrigés

Exercice 1 :

X est une grandeur caractéristique du pendule simple sachant que :

$X = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

1-Calculer la dimension de X, que représente X ?

2-Déterminer l'incertitude absolue Δ X connaissant Δl et Δg.

On donne : $l = (100 \pm 0.1)cm,\quad g = (9.81 \pm 0.01)m/s^2$ et $\pi = 3.14$.

Solution :

1-

$$[X] = \left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \frac{\left[l^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[g^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{(LT^{-2})^{\frac{1}{2}}} = T = [t], \text{donc X représente un temps}$$

2-

On a : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$lnT = ln2\pi + ln\sqrt{l} + ln\frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$=ln2\pi + \frac{1}{2}lnl - \frac{1}{2}lng$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} \quad \Longrightarrow \quad \Delta X = \frac{X}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g}\right)$$

$T = (2.000 \pm 0.002)s$. Donc : T=2s et ΔT = 0.002s.

Exercice 2 :

Supposons qu'un projectile soit lancé d'une hauteur y_0 au-dessus du sol. Sa portée est notée d, v_0 est la vitesse initiale et θ_0 est l'angle de projection ; montrer que l'expression suivante est homogène ;

$$d = \frac{v_0^2}{2g}\left(sin2\theta_0 + \sqrt{sin^2 2\theta_0 + \frac{8gy_0}{v_0^2}\ cos^2\theta_0}\right)$$

Solution :

$$d = \frac{v_0^2}{2g}\left(sin2\theta_0 + \sqrt{sin^2 2\theta_0 + \frac{8gy_0}{v_0^2}\ cos^2\theta_0}\right) \qquad (*)$$

On a : $[d] = L$

$[sin] = 1$

$[v_0] = LT^{-1}$

$[g] = [a] = LT^{-2}$

$$\left[\frac{v_0^2}{2g} sin2\theta_0\right] = \left[\frac{v_0^2}{2g}\sqrt{sin^2 2\theta_0 + \frac{8gy_0}{v_0^2}\ cos^2\theta_0}\right]$$

$$\frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} = \frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}}, alors\ on\ obtient\ L = L$$

Donc on dit que l'équation (*) est homogène.

Exercice3 :

Soit à Déterminer la masse volumique ρ de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse $m = (200.0 \pm 0.1)g$ et de son arête $a = (4.0 \pm 0.1)cm^3$.

Ecrire le résultat de la mesure.

Solution :

Calculons d'abord la masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$$
$$= \frac{200}{64} = 3.12g/cm^3$$
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \quad \Rightarrow \ \Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}\right)$$

AN ; $\Delta\rho = \ 3.12\left(\frac{0.1}{200} + 3\frac{0.1}{4.0}\right) = 0.24g/cm^3$

L'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0.24}{3.12} = 0.07 \sim 7\%$

D'où : $\rho = (3.12 \pm 0.07)g/cm^3$

Exercice 4 :

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieurs D_1 et extérieur D_2 et on trouve :

$D_1 = (19.05 \pm 0.1)mm,\ \ D_2 = (26.7 \pm 0.1)mm$

Donner le résultat de la mesure et sa précision.

Solution :

L'épaisseur du cylindre : $e = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{26.7 - 19.05}{2}$ =3.6mm

L'incertitude absolue : $\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2} = \pm 0.1mm$

Le résultat s'écrit : $e = (3.6 \pm 0.1)mm$

On déduire l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{0.1}{3.6} = 0.03 \sim 3\%$$

I.3.Analyse Vectorielle :

I.3.1. Grandeur scolaire et Grandeur vectorielle :

Il existe deux types de grandeurs : scolaire et vectorielle

a-Grandeurs Scalaire : ne nécessite que sa valeur algébrique pour la définir

Exemple : Vol = 1L ; m=2Kg, T= 200°k……

b-Grandeurs Vectorielle : est définie par quatre caractéristiques :

Direction, sens, point d'application et norme ou module,

$\|\vec{V}\|$: module

Exemple : le poids d'un corps

$|\vec{P}|$=10 N

- Origine : le centre de gravite
- Direction : verticale
- Sens : vers le bas
- Module : le poids étant 9,810 N

c-Le vecteur unitaire : $|\vec{\boldsymbol{u}}|$

Le vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1. On écrit :$|\vec{\boldsymbol{u}}|$=1

On peut exprimer un vecteur $|\vec{\boldsymbol{V}}|$ par apport au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = |\vec{V}|.\vec{u} \Longrightarrow \vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

I.3.2. Composante d'un vecteur :

a) – A une dimension :

$$|\vec{\imath}| = 1,\ \vec{V} = |\overrightarrow{OM}|\vec{\imath}$$

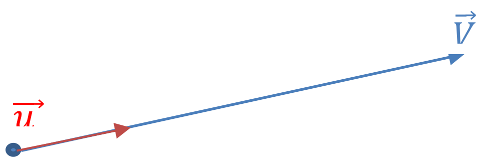


Figure1 : représentation du vecteur unitaire

b) - A deux dimensions :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$

$$\begin{cases} \vec{V_x} = V_x\vec{i} \\ \vec{V_y} = V_y\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

$$V_x = V\cos\alpha \, ; \quad V_y = V\sin\alpha$$

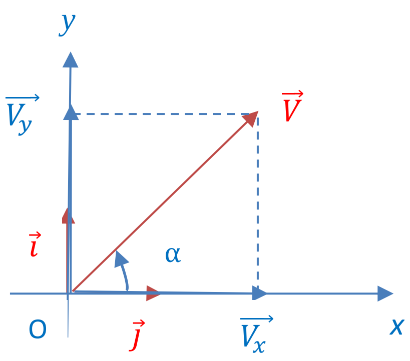


Figure2 : représentation du vecteur à deux dimensions.

c) -A trois dimensions :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

$$\begin{cases} \vec{V_x} = V_x\vec{i} \\ \vec{V_y} = V_y\vec{j} \\ \vec{V_z} = V_z\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

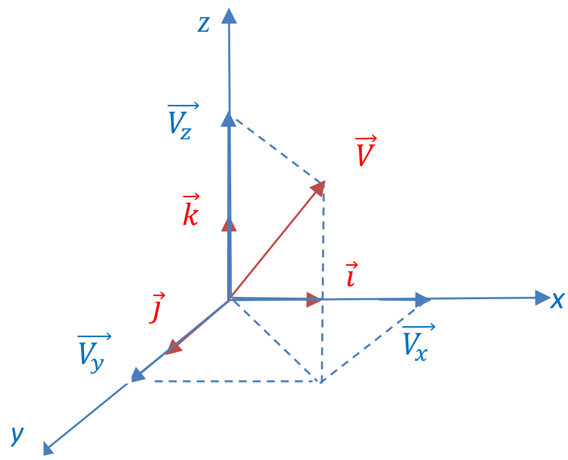


Figure3 : Composantes d'un vecteur.

I.3.3. Opération sur les vecteurs :

I.3.3.1. Addition de vecteurs :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$,

$$\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

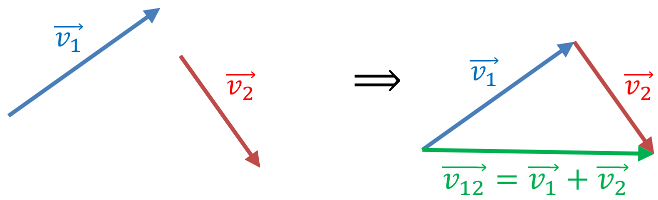


Figure4 : Addition de vecteurs.

Exemple : **soient les vecteurs suivants :** $\vec{V_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 0+3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I.3.3.2. Soustraction de vecteurs :

$\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

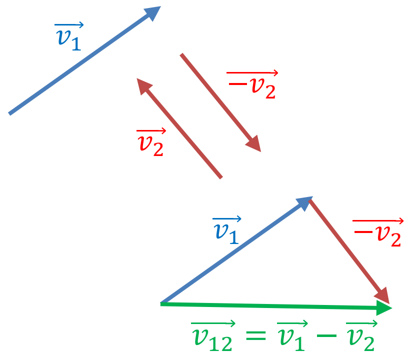


Figure5 : Soustraction de vecteurs.

$$\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

Exemple : **soient les vecteurs suivants :**

$\vec{V_1}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{D} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 0-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

I.3.3.3. Multiplication :

Soit un vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, λ ϵ IR

$$\lambda\vec{V} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

I.3.4. Produit scalaire :

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1} et \vec{V_2}$ le nombre réel $\vec{V_1}.\vec{V_2}$

$\vec{V_1}.\vec{V_2}$: est dit $\vec{V_1}$ scalaire$\vec{V_2}$,

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = |\vec{V_1}|.\,|\vec{V_2}|\cos\left(\widehat{\vec{V_1}.\vec{V_2}}\right)$.

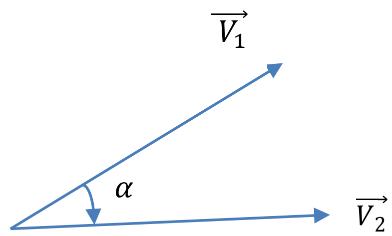


Figure 6 : Produit scalaire.

On pose : α = $\left(\widehat{\vec{V_1}.\vec{V_2}}\right)$

*Si α = 0, cos α =1 on aura $\vec{V_1}.\vec{V_2} = |\vec{V_1}|.\,|\vec{V_2}|$ .1= $V_1.V_2$ alors le vecteur $\vec{V_1}$ est parallèle à $\vec{V_2}$

*Si α = $\frac{\pi}{2}$, cos α = 0 on aura $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ = 0 alors le vecteur $\vec{V_1}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{V_2}$

Soient deux vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Exemple : soient les vecteurs suivants : $\vec{V_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{V_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{V_1}.\vec{V_2}$ = (2.3) + ((-1).2) + (0. (-4)) = 6 – 2 = 4

-Module d'un vecteur :

$$\vec{V}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \Longrightarrow |\vec{V}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tel que : $\vec{A}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

Le vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Propriétés du produit scalaire :

-Commutatif : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1}$

-Non associatif : $\vec{V_1}.(\vec{V_2}.\vec{V_3})$ pas de résultat puisque ce dernier présente un vecteur.

-Distributif par rapport à la somme vectorielle : $\vec{V_1}.(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3}$

I.3.5. Produit vectoriel :

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs ($\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$).

La quantité : $\vec{P} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ → On dit : $\vec{V_1}$ vectoriel $\vec{V_2}$

$\vec{P}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par les vecteurs ($\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$).

Sens : est donné par la règle des trois doigts de la main droite (voir figure 6).

Module : $|\vec{P}| = |\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}| = |\vec{V_1}|.|\vec{V_2}|\sin\left(\widehat{\vec{V_1}.\vec{V_2}}\right)$.

Remarques : $|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}|$ est l'aire d'un parallélogramme de côtés $\vec{V_1} et \vec{V_2}$

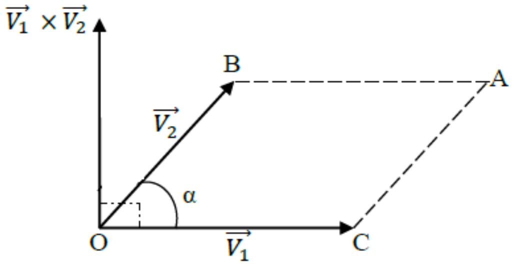


Figure 7: Produit vectoriel.

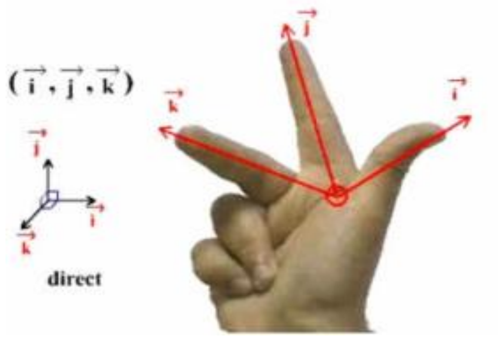


Figure 8: Règles des trois doigts" de la main droite**.**

I.3.6. Produit mixte :

Le produit mixte de trois vecteurs$\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} et \overrightarrow{V_3}$,est noté : [$\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$]

tel que : [$\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$] = $\overrightarrow{V_1}$. ($\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$). C'est un scalaire qui représente le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs, et de cotés $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ *et* $\overrightarrow{V_3}$.

I.3.7. Expression analytique :

On définit dans un repère orthogonal direct de base cartésienne (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$

Comme suit : $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; leur produit vectoriel est donné par la relation :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}(y_1.z_2 - y_2.z_1) - \vec{\jmath}(x_1.z_2 - x_2.z_1) + \vec{k}(x_1.y_2 - x_2.y_1)$$

$$= \begin{pmatrix} y_1.z_2 - y_2.z_1 \\ x_1.z_2 - x_2.z_1 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{pmatrix}$$

Exemple : calculer le produit vectoriel des deux vecteurs suivants : $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi que l'angle α entre ces vecteurs.

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}((-2).(-1) - (4.0)) - \vec{\jmath}(1.(-1) - (3.0)) + \vec{k}((1.4) - (3.(-2))$$

$$= 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 10\,\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\left|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right| = \left|\overrightarrow{V_1}\right|.\left|\overrightarrow{V_2}\right| \mathrm{Sin}\left(\widehat{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}}\right)$$

$$Sin\left(\widehat{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right|}{\left|\overrightarrow{V_1}\right|.\left|\overrightarrow{V_2}\right|}$$

On reprend l'exemple précédent

$$\left|\overrightarrow{V_1}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{5} \quad , \quad \left|\overrightarrow{V_2}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (10)^2} = \sqrt{105}$

Sin α = $\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{5}.\sqrt{26}} = 0.89 \Rightarrow \alpha \sim 62^{\circ}.85$

I.3.8. Dérivation d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ son dérivé s'écrit :

$$\vec{V}'(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Exemple : soit un vecteur $\vec{V}$ en fonction du temps qui s'écrit comme suit :

$\vec{V}(t) = 2t\vec{\imath} + (t^2 - 1)\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}$ son dérivé est :

$=2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 6t\,\overrightarrow{k}$

I.3.9. Règles de dérivation :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) = \frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}) = \frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt}.\overrightarrow{V_2} + \frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}\overrightarrow{V_1}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = \frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \wedge \frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}$$

I.3.10. Les Opérateurs :

On dit que la fonction *f (x, y, z)* est un champ scalaire si elle prend une valeur scalaire en tout point de l'espace *M (x, y, z)*.

Exemple : $f(x, y, z) = 3x^2y - z^2x + 3y$

-on dit que la fonction $\vec{V}$ *(x, y, z)* est un champ vectoriel si elle prend une valeur vectorielle en tout point de l'espace *M (x, y, z)*.

Exemple : $\vec{V}$ *(x, y, z)* = $\vec{\imath}(2x - y^2) + (3x^2 - 2.z)\vec{\jmath} + (2xyz^2)\vec{k}$

On définit l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ par :

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, *tel que :* $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sont les dérivées partielles par rapport à (x, *y*, *z*)

Nous allons définir le gradiant, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

a -le gradiant : $\overrightarrow{grad}$

On appelle gradiant d'une fonction scalaire *f (x, y, z)* un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Exemple : calculer le gradiant de la fonction suivante : $f(x, y, z) = 3x^2 y^3 z$

$$\overrightarrow{grad}\, f = 6xy^3z\,\vec{\imath} + 3y^2 3x^2 z\vec{\jmath} + 3x^2y^3\vec{k}$$

$$= 6xy^3z\,\vec{\imath} + 9y^2x^2z\vec{\jmath} + 3x^2y^3\vec{k}$$

b- la Divergence : $\overrightarrow{d\imath v}$

On appelle divergence de la fonction vectorielle $\vec{V}$ (V_x, V_y, V_z) un scalaire défini comme étant :

$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial Vx}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial Vy}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\vec{k}$

Exemples : calculer la divergence de la fonction vectorielle :

$V(x, y, z) = 3x^2 y\,\vec{\imath} - 3yz^2\,\vec{\jmath} + 4xy^2\vec{k}$

$\overrightarrow{d\imath v}\, V = \vec{\nabla}\vec{V} = 6xy - 3z^2 + 0$

c- le Rotationnel : $\overrightarrow{rot}$

Soit un champ vectoriel $\vec{V}$ (V_x, V_y, V_z), on définit le rotationnel de $\vec{V}$ comme suit :

$\overrightarrow{rot} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} =$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Vx & Vy & Vz \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial z}\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial Vz}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right)$$

Exemple : calculer le rotationnel du vecteur :

$\vec{V}$ $(V_x, V_y, V_z) = 3x^2 y\,\vec{\imath} - 3yz^2\,\vec{\jmath} + 4xy^2\vec{k}$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = (8xy - 6yz)\vec{\imath} - (4y^2 - 0)\vec{\jmath} + (0 - 3x^2)\vec{k}$$

$$= (8xy - 6yz)\vec{\imath} - 4y^2 - 3x^2\,\vec{k}$$

d- Le Laplacien :

Définition : Le Laplacien d'une fonction scalaire f (x, y, z) est égale à la divergence de son gradiant donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\vec{\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\vec{\jmath} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\vec{k}$$

Exercices corrigés :

Exercice 1 :

1.Soit un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$).pour les représentations graphiques, l'unité de longueur est 1 cm.

$\vec{\boldsymbol{U}} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{\boldsymbol{V}} = 3\vec{\jmath}$; $\vec{\boldsymbol{W}} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{\boldsymbol{X}} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\vec{\boldsymbol{Y}}= \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

Exprimer en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ les vecteurs suivants et représenter les ;

$\vec{\boldsymbol{U}} + \vec{\boldsymbol{V}}$, $\vec{\boldsymbol{W}} - \vec{\boldsymbol{X}}$, $-3\vec{\boldsymbol{Y}}$, $\vec{\boldsymbol{U}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{V}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{W}}$

2.quelles sont les composantes du vecteur $\vec{N} = \vec{U} + \vec{V}$ dans la base orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) ?

3. calculer le module de $\vec{N}$.

Solution :

1.

$\vec{\boldsymbol{U}} + \vec{\boldsymbol{V}} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

$\vec{\boldsymbol{W}} - \vec{\boldsymbol{X}} = -5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$-\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{Y}} = -3\vec{\imath} + 9\vec{\jmath}$

$\vec{\boldsymbol{U}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{V}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{W}} = -4\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$

2. Les composantes du vecteur $\vec{N}$

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

3.Module :$\|\vec{N}\|=\sqrt{(2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$

Exercice 2 :

Dans le repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) de l'éspace, on considère les trois vecteurs :

$\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k},$ $\vec{V} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k},$ $\vec{W} = -2\vec{k}$

1.Dessiner les trois vecteurs $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$

2.Calculer la norme de $\|\vec{U}\|$, $\|\vec{V}\|$ et $\vec{W}$

3.Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{U}$.

4.Donner graphiquement le vecteur $(\vec{U} - \vec{V})$ et calculer son module.

5.calculer :

a)- le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$

b)- le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$

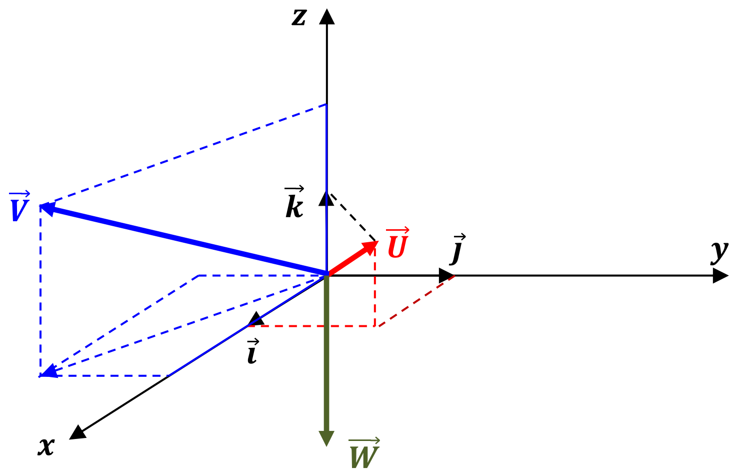
c)-le double produit vectoriel $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$

d)-le produit mixte$(\vec{V} \wedge \vec{W}).\vec{U}$

6.Déterminer l'angle entre $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$

Solution :

1)

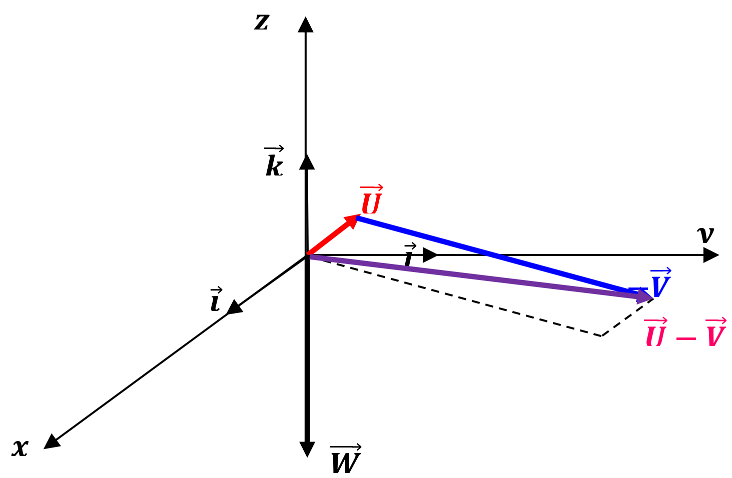


2. $$\|\vec{U}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3} = 1,73 \qquad \|\vec{V}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

3. $$\vec{U} = \|\vec{U}\|.\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

4.



$\vec{U} - \vec{V} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\|\vec{U} - \vec{V}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

5.

a. $\vec{U}.\vec{V} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 2\vec{i}^2 - \vec{j}^2 + 2.\vec{k}^2 = 2 - 1 + 2 = 3$

b. $\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \vec{i}(1.2 - (-1).1) - \vec{j}(1.2 - 1.2) + \vec{k}(1.(-1) - 1.2) = 3\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$

c.

$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} = (3\vec{i} - 3\vec{k}) \wedge (-2\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k} = 6\vec{j}$

d. $(\vec{V} \wedge \vec{W}).\vec{U}$

$(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$

$(\vec{V} \wedge \vec{W}).\vec{U} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}).(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i}^2 + 4\vec{j}^2 + 0.\vec{k}^2 = 6$

6. $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| Cos\,\widehat{U.V} \Rightarrow Cos\,\widehat{U.V} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{3}{1,73.3} = 0,578 \Rightarrow \widehat{U.V} = 54°68'$

<u>*Exercice3 :*</u>

Soient le champ scalaire $f = (x, y, z) = 3x^2y + y^2z^2$ et le champ vectoriel donnés par :

$\vec{V}(x, y, z) = xz^2\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} + yz^2\vec{k}$

Calculer : $\overrightarrow{grad} f, div\,\vec{V}, rot\,\vec{V}\ et\ \Delta f$

Solution :

$f = (x,y,z) = 3x^2y + y^2z^2$

$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{f} = \vec{\nabla}f, tel\ que\colon \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\ \vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}$

$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

$= (6xy)\vec{\imath} + (3x^2 + 2yz^2)\vec{\jmath} + (2zy^2)\vec{k}$

$\boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\nabla}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

$= z^2 - 1 + 2zy$

$\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{V}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ \boldsymbol{xz^2} & \boldsymbol{2\ x^2 - y} & \boldsymbol{yz^2} \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 - y)\right)\vec{\imath} - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz^2)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - y) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^2)\right)$

$\boldsymbol{= z^2\vec{\imath} - 2zx\vec{\jmath} + 4x\vec{k}}$

$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f, \quad tel\ que\colon \quad \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$= 6y\vec{\imath} + 6x\vec{\jmath} + 0\vec{k} + 6x\vec{\imath} + 2z^2\vec{\jmath} + 4yz\vec{k} + 0\vec{\imath} + 4zy\vec{\jmath} + 2y^2\vec{k}$

$= 6(y + x)\vec{\imath} + (6x + 2z^2 + 4zy)\vec{\jmath} + (4zy + 2y^2)\vec{k}$

Chapitre II : cinématique du point matériel

II.1. Généralité :

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps Sans tenir compte des causes qui provoquent ce mouvement.

II.1.1. Position du mobile :

II.1.2. Vecteur position :

On définit la position d'un point matériel à un instant t par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ donné par l'équation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Exemple : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, l'objet est fixe (immobile)

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}$ l'objet est mobile (change de place)

II.1.3. Équation horaire du mouvement :

On appelle équation horaire du mouvement toute équation donnant la position du mobile sur sa trajectoire en fonction du temps.

$$f(t) = x$$

II.1.4. Trajectoire du mouvement :

Définition : une trajectoire est l'ensemble des points occupés par le mobile aux temps diffèrent et successifs (voir figure I.1). L'équation de la trajectoire est de la forme : $y = f(x)$

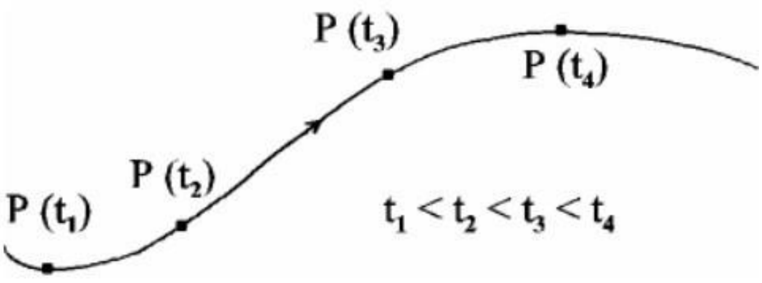


Figure 9 : trajectoire d'un mobile aux différentes positions.

Application :

La position d'un mobile à l'instant est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

1- Quelle est la trajectoire du mobile ?
2- Donner le vecteur position à l'instant *t=2s*.

1-

$x = 2t \implies t = \dfrac{x}{2}$

$z = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-5}{4}x^2 + 2x$, la forme de l'équation est une parabole

2-Le vecteur position :

$\vec{r} = 2t\,\vec{\imath} + (-5t^2 + 4t)\vec{k}$

à l'instant *t=2s* , $\vec{r}(2) = 2(2)\vec{\imath} + \left(-5(2)^2 + 4(2)\right)\vec{k} = 4\vec{\imath} - 12\vec{k}$

II.2. Vecteur vitesse :

II.2.1. Vitesse moyenne :

La vitesse d'un mobile est définie comme étant la variation de sa position par rapport au temps. Soit M la position du mobile à l'instant t_1 qui correspond au point $M\,(t_1) = M_1$ et à l'instant t_2 au point $M\,(t_2) = M_2$ avec ($t_1 < t_2$). La vitesse moyenne du mobile entre les deux instants est donnée par :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

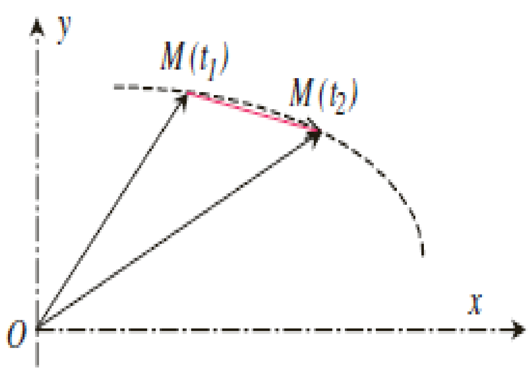


Figure 10 : Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

II.2.2. Vitesse instantanée :

La vitesse instantanée est définie à chaque instant pour les différentes positions du mobile au cours de son mouvement donnée par la relation suivante :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

Dans un repère cartésien on a :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

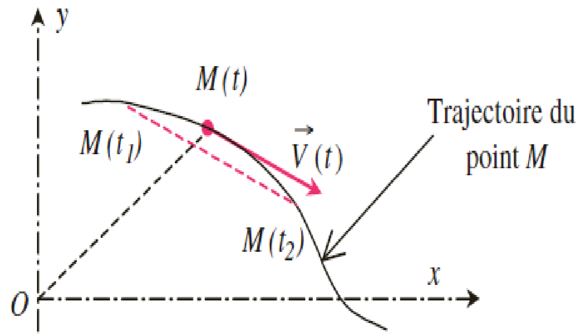


Figure 11 : Vitesse instantanée

II.3. Accélération :

II.3.1. Accélération moyenne :

L'accélération moyenne est définie par le rapport de la variation de la vitesse par rapport au temps, Soient $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ les vitesses du mobile aux instant $t_1 et\ t_2$ respectivement entre deux positions différentes. L'accélération moyenne est donnée par : :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$$

III.3.2. Accélération instantanée :

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné définie par :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Notation : $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Soit le vecteur vitesse qui s'écrit : $\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$, $\vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}$

Si $\begin{cases} \vec{a}\,.\vec{v} > 0, \ \textit{le mouvement est accéléré.} \\ \vec{a}\,.\vec{v} < 0, \textit{le mouvement est retardé.} \\ \vec{a}\,.\vec{v} = 0, \textit{le mouvement est uniforme.} \end{cases}$

Soit : $\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$

Alors : $\vec{a}.\,\vec{v} = a_x.\ v_x + a_y.v_y + a_z.v_z$

Application :

Soit un point matériel dont le mouvement est repéré par l'équation :

$\overrightarrow{OM} = t\vec{i} - \frac{t^2}{2}\vec{j}$

1-Donner la trajectoire du mouvement.

2-Calculer la vitesse du mobile.

3-Calculer son accélération.

Solution :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ La trajectoire du mouvement :$y = f(x) \implies y = \frac{x^2}{2}$; est une équation d'une parabole

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 1 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \quad , \quad \vec{v} = \vec{i} - t\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (-t)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + t^2}\ m/s.$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -1 \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases} \ , \ \vec{a} = -\vec{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1\ m/s^2.$$

II.4. Mouvement rectiligne :

II.4.1. Mouvement rectiligne uniforme :

*Le mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite.
* Le mouvement est rectiligne uniforme (MRU) si le mobile garde la même vitesse durant tous son parcours. $v = cts \Longrightarrow a = 0$

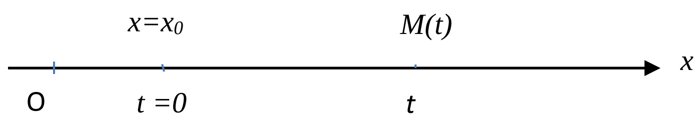


Figure 12 : Le mouvement rectiligne

L'équation horaire du mouvement $x = f(t)$

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = v.dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$[x]_{x_0}^{x} = v[t]_0^t$$

$$x - x_0 = v(t - 0)$$

$$x - x_0 = vt \Longrightarrow x = vt + x_0$$

Condition initiale : pour $\Longrightarrow x = x_0$

Le Diagramme du mouvement est donné par les équation suivantes : $\begin{cases} x = f(t) \\ v = g(t) \\ a = h(t) \end{cases}$

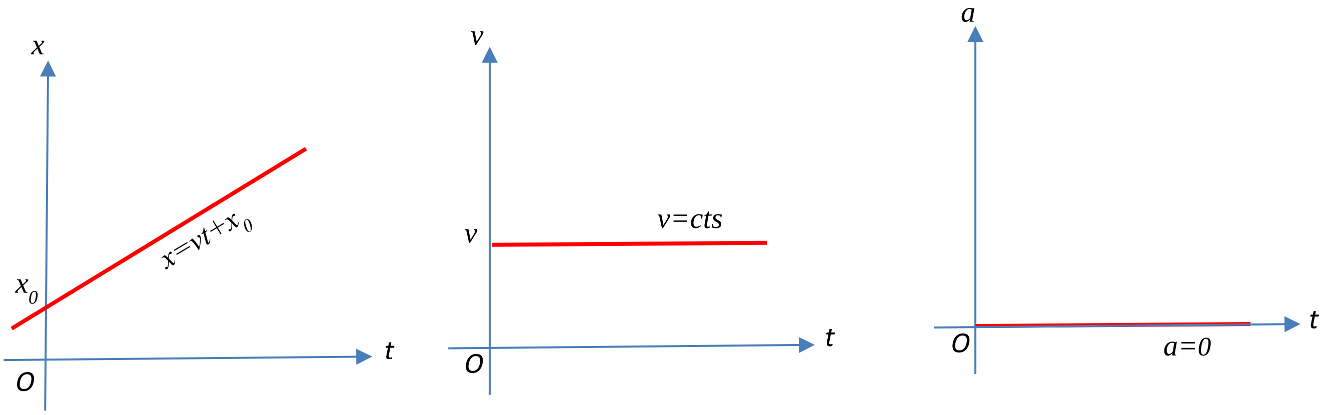


Figure 13 : Diagramme du mouvement

II.4.2. Mouvement rectiligne uniformément varié :

On dit qu'un mouvement est uniformément varié si $a = f(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow dv = a\ dt$$

Alors si : à $t = 0;\quad v = v_0\ \ e\,t\ \ x = x_0$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt = a\int_0^t dt$$

$$[v]_{v_0}^{v} = a[t]_0^t$$

$$v - v_0 = at \Longrightarrow v = at + v_0$$

L'équation horaire du mouvement s'écrit :$x = f(t)$

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = v.dt$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v.dt$$

$$= \int_0^t (at + v_0)dt$$

$$= \int_0^t at.dt + \int_0^t v_0.dt = a\int_0^t t.dt + v_0\int_0^t dt$$

$$[x]_{x_0}^{x} = \left[a\frac{1}{2}t^2\right]_0^t + [v_0 t]_0^t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

On a :

$$v = at + v_0 \Longrightarrow v - v_0 = at$$

$$v^2 = (at + v_0)^2 = (at)^2 + (v_0)^2 + 2atv_0$$

$$\Longrightarrow v^2 - v_0^2 = a^2t^2 + 2atv_0$$

$$= 2a\left(\frac{a}{2}t^2 + tv_0\right) \Longrightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

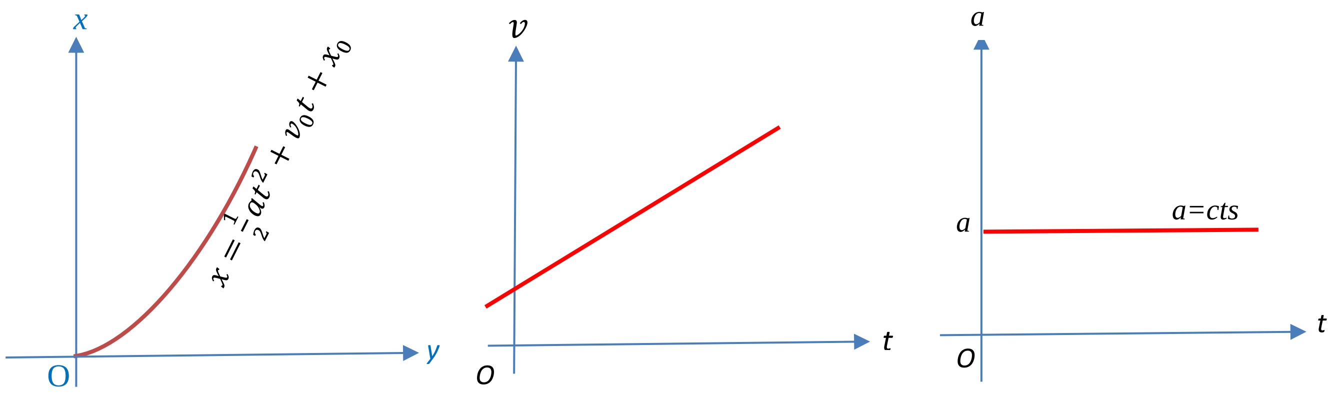


Figure 14 : Diagramme du mouvement

Application :

Soit un mobile en mouvement repéré par les coordonnées : $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$

1-Touver la trajectoire du mouvement

2-Calculer la vitesse et l'accélération

3-Soit M la position du mobile à $t = 0$, donner son équation horaire en prenant le point M comme origine.

Solution :

$$x = \frac{t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$= \frac{t^2}{2}\,\vec{i} + (t^2 - 1)\,\vec{j}$$

1-La trajectoire :

On a : $t^2 = 2x$; $y = 2x - 1$ alors : la trajectoire est une droite donc le mouvement est rectiligne.

2-Calcule de la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2t \end{cases} \quad ; \quad \vec{v} = t\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5}t \text{ m/s}$$

$\|\vec{v}\| \neq cts$, *donc le mouvement n'est pas uniforme.*

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt} = 1 \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt} = 2 \end{cases} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}\, m/s^2$$

$a = cte$, *donc le mouvement est uniformement accéléré.*

3-Equation horaire du mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 + x_0$$

On a : $a = \sqrt{5}$, $v_0 = v = 0$ $(pour\ t = 0)$ et x_0=0

Donc :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \implies x = \frac{\sqrt{5}}{2}t^2$$

II.5. Mouvement rectiligne sinusoïdal :

Le mouvement est sinusoïdal si l'équation horaire est de la forme : $x = x_m \sin(wt + \varphi)$.

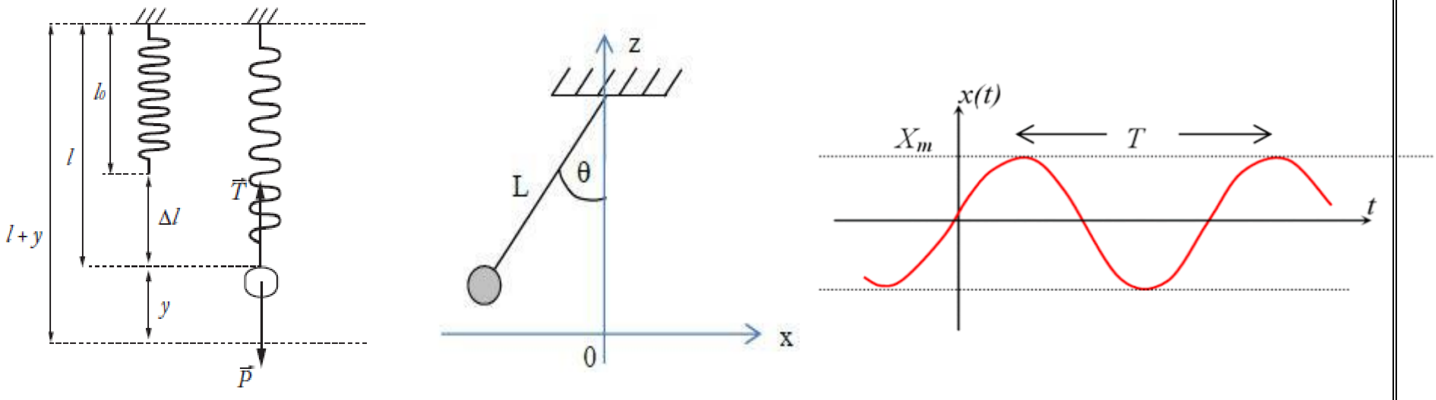


Figure 15 : Mouvement rectiligne sinusoïdal.

-*Exemple :* ***pendule simple*** : Une masse m est accrochée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable de longueur *L*. On écarte cette masse de sa position d'équilibre avec un angle petit θ puis on l'abandonne.

-*Exemple ressort masse* : On fixe une masse m à l'extrémité libre d'un ressort de longueur l_0 au repos l_0, sous l'action de la masse le ressort s'allonge de $\Delta l = l - l_0$ où l est la longueur du ressort avec la masse.

x : l'élongation

Xm : élongation maximale.

-1$\leq \sin(wt + \varphi) \leq 1$ et $-x_m \leq x \leq +x_m$

w: *la pulsation*; $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$; unité: rad/s

f: *fréquence*; $f = \frac{1}{T}$; unité: s^{-1}(Hertz)

T: *période* ; unité : seconde

φ: *la phase initial* $(t = 0)$; unité : rad.

La vitesse : $v = \frac{dx}{dt} = x_m w \cos(wt + \varphi)$

L'accélération : $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m w^2 \sin(wt + \varphi) = -w^2 x$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0$; équation différentielle du deuxième degré sous la forme :

$\ddot{x} + w^2\dot{x} = 0$, Qui admet comme solution $x = x_m sin(wt + \varphi)$.

x_m *et* φ *sont à déterminerà partir des conditions initiales.*

Application :

Le mouvement d'un corps est donné par l'équation suivante :

$x \ = 4\sin(0.1t + 0.5)$

1-donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase du mouvement.

2-calculer la vitesse et l'accélération

3-donner la vitesse a *t* = 5s.

Solution :

1-Le mouvement est donné par : $x = x_m sin(wt + \varphi)$.

-L'amplitude : $x_m = 4m$

-La période :$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{0.1} = 62.8s$

-La fréquence :$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{62.8} = 1.59.10^{-2}Hz$.

-La phase initiale : a *t* =0 : $\varphi = 0.5rad$.

2-

$$v = \frac{dx}{dt} = 4.(0.1)\ cos(0.1t + 0.5) = 0.4\cos\ (0.1t + 0.5)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0.4.(0.1)\ \sin(0.1t + 0.5) = -0.04\sin\ (0.1t + 0.5)$$

Condition initiale : à (t = 0)

$x = x_0 = 4\sin(0.5) = 1.92m$

$v_0 = 0.4\cos(0.5) = 0.35m/s$

$a = -0.04\sin(0.5) = -0.019m/s$

3-

La vitesse à t=5s ;$v = 4.(0.1)\cos\big((0.1).5 + 0.5\big) = 0.4m/s$

L'accélération : $v = -0.04\cos\big((0.1).5 + 0.5\big) = -0.33m/s^2$

II.6. Mouvement dans un plan :

II.6.1. Mouvement Curviligne :

Soit un mobile M en mouvement curviligne

En coordonnées polaires :$(O,\vec{i},\vec{j}) \rightarrow (M,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$

on a: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,\overrightarrow{u_r}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\overrightarrow{u_r}) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{u_r} = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j}$$

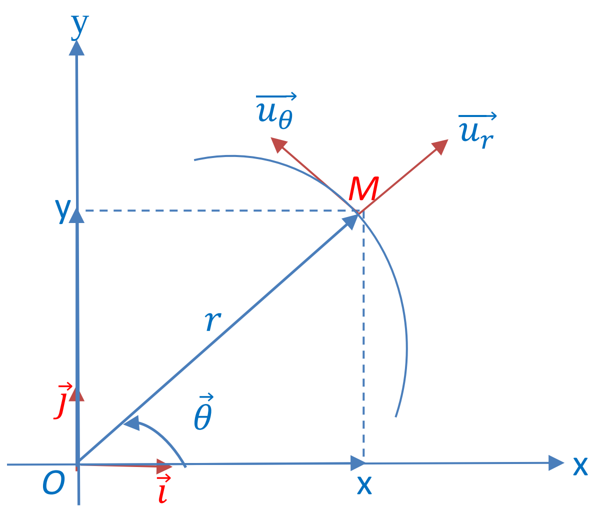


Figure 16 : représentation du vecteur position en coordonnées polaires.

Leurs dérivés consécutifs sont :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = \overrightarrow{u_\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \overrightarrow{u_\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}cos\vec{i} - \frac{d\theta}{dt}sin\vec{j} = -\overrightarrow{u_r}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\overrightarrow{u_r}\frac{d\theta}{dt}$$

II.6.1.2. Vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \overrightarrow{u_r}\frac{dr}{dt}$$

$$\vec{v} = r\left(\overrightarrow{u_\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + \overrightarrow{u_r}\frac{dr}{dt}$$

La vitesse a deux composantes : $\begin{cases} \overrightarrow{v_r} : radiale \\ \overrightarrow{v_\theta} : transversale \end{cases}$

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2}$; avec $\vec{v}\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

Alors : $dans\ le\ plan\ (M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})\quad la\ vitesse\ s'écrit : \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

II.6.2.2. Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\ ;$$

$$\overrightarrow{u_r} = cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -sin\theta\ \frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} + cos\theta\ \frac{d\theta}{dt}\ \vec{\jmath} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -cos\theta\ \frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} - sin\theta\ \frac{d\theta}{dt}\ \vec{\jmath} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}.\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ , composante\ radiale \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\ , composante\ orthogonale \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_r\overrightarrow{u_r} + a_\theta\overrightarrow{u_\theta}\ ;\ |\vec{a}| = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$$

II.6.2. Cas particulier le mouvement circulaire :

Le vecteur vitesse est défini par les composantes : $\vec{v}\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = R\,\frac{d\theta}{dt} = Rw \end{cases}$

w: *vitesse angulaire* ; v: *vitesse linéaire*

Le vecteur accélération est défini par les : *composantes*:

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = -Rw^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} = R\,\dfrac{dw}{dt} \end{cases}$$

Représentation de Frenet :

$\vec{t}$: *axe tangentiel*

$\vec{N}$: *axe normal*

$\vec{a} = a_T\,\overrightarrow{u_t} + a_N\,\overrightarrow{u_N}$ *composante tangentielle.*

$\overrightarrow{a_t}$: *composante tangentielle.*

$\overrightarrow{a_N}$: *composante Normale*

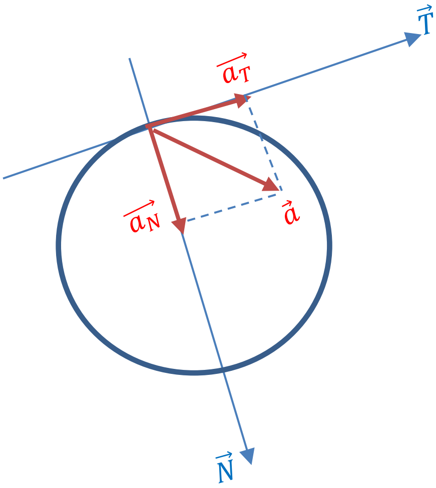


Figure 17 : Représentation de Frenet.

$-a_r = a_N = -Rw^2$

$a_\theta = a_t = R\,\frac{dw}{dt}$; $w = \frac{v}{R}$

$a_N = -Rw^2 = R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$

$$a_t = R\frac{dw}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases} \quad ; \quad \vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_N\overrightarrow{u_N}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_t}^2 + {a_N}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

II.6.3. Coordonnées cylindriques :

Le système en coordonnées cylindriques est défini par deux coordonnées polaires : $\rho, \theta,$ et une coordonnée algébrique Z

*ρ: le rayon polaire, $\rho = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

*θ : l'angle polaire, c'est un angle entre l'axe(OX) et le vecteur$\overrightarrow{OH}$

$\theta = Artan\left(\frac{y}{x}\right)$

*$Z = Z$

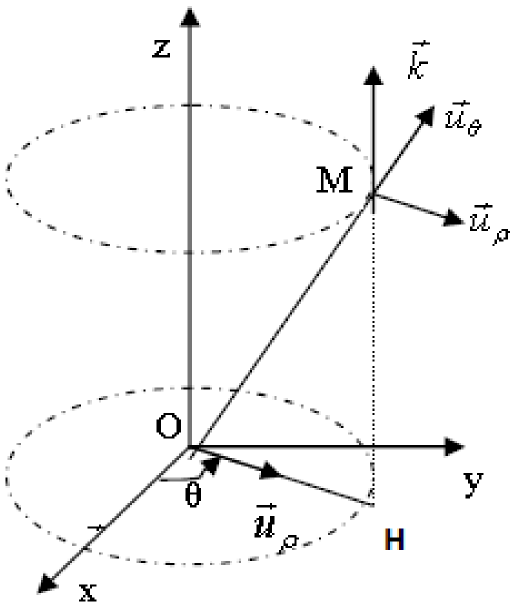


Figure 18 : Coordonnées d'un point M dans un repère cylindrique.

II.6.3.1. Vecteur position en coordonnées cylindriques :

Soit un point M dans le repère orthonormé direct de la base$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

En coordonnée cylindrique : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \rightarrow (M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ + z $\vec{k}$

$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$ + dz $\vec{k}$, *tel que :*

$x = \rho cos\theta \rightarrow dx = -\rho sin\theta d\theta + cos\theta d\rho$

$y = \rho sin\theta \rightarrow dy = \rho cos\theta d\theta + sin\theta d\rho$

$z = z \rightarrow dz = dz$

le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$

Donc : $d\overrightarrow{OM} = (-\rho sin\theta d\theta + cos\theta d\rho)\vec{\imath} + (\rho cos\theta d\theta + sin\theta d\rho) + dz\vec{k}$

$= (cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})d\rho + \rho(sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})d\theta + \vec{k}dz$

Alors : $\begin{cases} \vec{u}_\rho = (cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) \\ \vec{u}_\theta = (-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$

II.6.3.2. Vitesse du mobile :

Afin d'obtenir le vecteur vitesse il suffit juste de dériver le vecteur position par rapport au temps déjà exprimée en coordonnées cylindriques où $\vec{u}_z$.

On a:

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{u}_\rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt}$$

$\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\theta\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$

D'où le module du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\theta)^2 + \dot{z}^2}$$

Le vecteur vitesse a trois composantes :

Radiale :$\overrightarrow{v_r}$

Transversale :$\overrightarrow{v_\theta}$

Azimutale : $\overrightarrow{v_z}$

II.6.3.3. Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

En appliquant la notation de newton ainsi en rappelant les relations suivantes :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \overrightarrow{u_\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\overrightarrow{u_r}\frac{d\theta}{dt}$$

Alors l'expression de l'accélération en coordonnées cylindrique est donnée par :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

L'accélération a trois composantes :

Radiale : $\overrightarrow{a_r}$

Transversale : $\overrightarrow{a_\theta}$

Azimutale : $\overrightarrow{a_z}$

II.6.4. Système en Coordonnées sphériques :

Soit un point M dans le repère orthonormé direct de la base cartésienne

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ qui se déplace selon un système sphérique d'où le repère en coordonnées sphériques est défini par :(r, θ, φ).

$r = \|\overrightarrow{OM}\| = r\,\overrightarrow{u_r}$: la composante radiale

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est définie par : $r(t), \theta(t), \varphi(t)$.

En utilisant les relations entre les vecteurs $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$:

$\overrightarrow{u_r} = sin\theta.cos\varphi\,\vec{\imath} + sin\theta.sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\vec{k}$

$\overrightarrow{u_\varphi} = -sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{u_\theta} = cos\theta.cos\varphi\,\vec{\imath} + cos\theta.sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\vec{k}$

Le déplacement élementaire est défini par :

$ds^2 = dr^2 + (rsin\theta.d\varphi)^2 + (rd\theta)^2$

II.6.4.1. Vecteur Vitesse :

Dérivons le vecteur position en coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\overrightarrow{\dot{u}_r} \qquad \text{II.13}$$

$$\overrightarrow{\dot{u}_r} = \dot{\theta}\underbrace{\left[cos\theta cos\varphi\,\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}\right]}_{\overrightarrow{u_\theta}} + \dot{\varphi}\,sin\theta\underbrace{\left[-sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}\right]}_{\overrightarrow{u_\varphi}}$$

Avec : $\overrightarrow{\dot{u}_r} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi} sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$

En remplaçant dans l'équation de la vitesse $\vec{v}$, on obtient.

$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + (rsin)\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi}$

Alors les trois composantes du vecteur vitesse apparaissent comme suit :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta} + \overrightarrow{v_\varphi} \implies \vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + rsin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ qui dépendent de la position du mobile qui peut être déterminé à partir des équations horaires r (t), θ (t), φ(t), ce qui nous permet d'établir les composantes v_r, v_θ , v_φ en coordonnée sphériques du vecteur vitesse.

II.6.4.2. Accélération :

En dérivant toujours l'expression du vecteur vitesse, on obtient l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\overrightarrow{u_r} + (rsin\varphi)\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix}, \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_\varphi}^2}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)\overrightarrow{u_\theta} +$$
$$\left(r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

À partir des équations horaires r (t), θ (t), φ(t), on peut établir les expressions algébriques des composante a_r, a_θ, a_φ coordonnée sphériques du vecteur accélération.

II.7. Mouvements relatifs :

II.7.1. Système de référence :

Soit un point matériel M en mouvement par rapport à un repère mobile $\mathcal{R}$' repéré par un repère de cordonnées (x', y', z') dit repère absolu. On peut repérer le même point par rapport au repère fixe $\mathcal{R}$ par les coordonnées (x, y, z) appelé repère relatif.

D'où on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

-Le vecteur position dans le repère $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ …………repère absolu.

-Le vecteur position dans le repère $\mathcal{R}$' : $\overrightarrow{OM}' = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$……repère relatif.

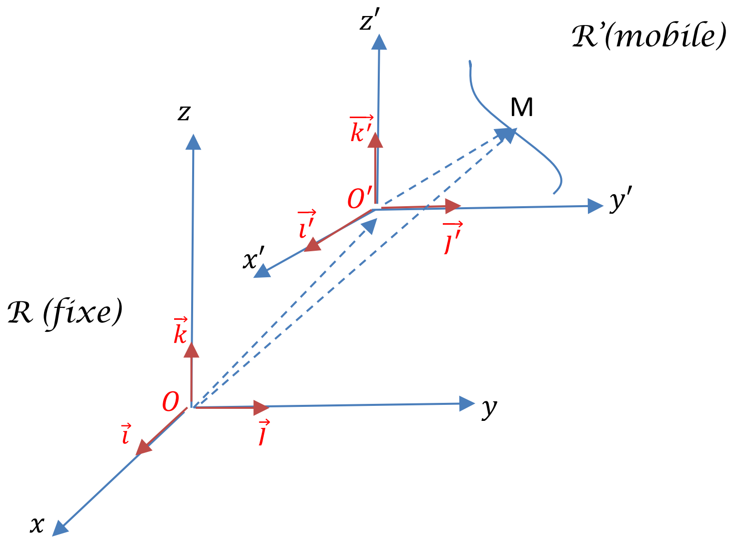


Figure 19 : Représentation d'un mouvement relatif

II.7.2. Vecteur vitesse :

$$\vec{v_a}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k},\qquad Or:\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v_a}=\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\vec{v_e}}+\underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}+\frac{dz'}{dt}\vec{k'}}_{\vec{v_r}}$$

$$\vec{v_a}=\vec{v_e}+\vec{v_r}$$

On écrit :

$$\vec{v_e}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v_r}=\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}+\frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$\vec{v_e}$: La vitesse d'entrainement du repère mobile R' par rapport au repère fixe R

$\vec{v_r}$: La vitesse relative est la vitesse de M par rapport au repère mobile R'.

II.7.3. Accélération :

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right)}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$, *tel que*:

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$, *l'accélération d'Entrainement.*

$\overrightarrow{a_c} = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$, *l'accélération de Coriolis*

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$, *l'accélération Relative*

Exercices corrigés

Exercice1 :

Un point matériel de masse constante m=1Kg se déplace dans le plan *Oxy* selon les équations horaires ci-dessous : $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t(t-1) \end{cases}$

1.Déterminer l'équation de la trajectoire et préciser sa forme.

2.Donner l'expression du vecteur vitesse.

3.En déduire la composante tangentielle a_t de l'accélération

Solution :

1.Equationde la trajectoire : $t = \frac{x}{2} \Longrightarrow y(t) = 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right) = x^2 - 2x$

$\Longrightarrow y(t) = x^2 - 2x$; la trajectoire est une parabole.

2.Expression du vecteur vitesse : $\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 8t - 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} + (8t-4)\vec{\jmath}$

3.Coposante tangentielle $a_t$de l'accélération : $a_t = \frac{dv}{dt}$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{64t^2 - 64t + 20}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{128t - 64}{2\sqrt{64t^2 - 64t + 20}} = \frac{64t - 32}{\sqrt{64t^2 - 64t + 20}}$$

$$\Longrightarrow a_t = \frac{64t - 32}{\sqrt{64t^2 - 64t + 20}}$$

Exercice2 :

Soit un point matériel M qui se déplace selon un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par les coordonnées suivantes : $\begin{cases} x = 5.cos2\pi.t \\ y = -3.sin2\pi.t \end{cases}$

1-Quelle est la trajectoire du mouvement ?

2-Déterminer les vecteurs vitesse et accélération

3-Quelle relation existe-t-il entre le vecteur accélération et le vecteur position ? En déduire que le vecteur accélération passe par un point fixe.

Solution :

1-La trajectorie:

$$\begin{cases} x = 5.cos2\pi.t \\ y = -3.sin2\pi.t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{5} = cos2\pi.t \\ \dfrac{y}{3} = -sin2\pi.t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = cos^2 2\pi.t + sin^2 2\pi.t = 1$$

La trajectoire est une ellipse de centre (0,0) et d'axe $= 5, \;\; b = 3$.

2-Vecteur vitesse et accélération :

$\overrightarrow{OM} = 5.cos2\pi t.\vec{\imath} + (-3.sin2\pi t)\vec{\jmath}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -(10\pi\; sin2\pi t)\vec{\imath} - (6\pi.\cos 2\pi t)\vec{\jmath}$$

$$= -2\pi[(5.sin2\pi t)\vec{\imath} + (3.cos2\pi t)\vec{\jmath}]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\pi[10\pi.cos2\pi t\vec{\imath} - 6\pi.sin2\pi t\vec{\jmath}]$$

$\vec{a} = -4\pi^2[5.cos2\pi t\vec{\imath} - 3.sin2\pi\vec{\jmath}]$

3- Relation entre $\vec{a}$ et $\overrightarrow{OM}$:

On a: $\vec{a} = -4\pi^2\underbrace{[5.cos2\pi t\vec{\imath} - 3.sin2\pi\vec{\jmath}]}_{\overrightarrow{OM}}$

$\vec{a} = -4\pi^2\overrightarrow{OM}$, donc l'accélération est centrale dirigé vers O.

Exercice 3 :

Un point matériel M est défini dans un référentiel fixe $(Oxyz)$ par ses coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{cases} r = 2a\; cos\theta \\ \theta = 2t \end{cases}$$

1.Déterminer en coordonnées polaires :

a. L'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

b. L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$.

2.Calculer le module de la vitesse pour a=2m.

Solution :

1.a) -<u>Expression du vecteur position</u> : $\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r = 2a\; cos\theta\; \vec{U}_r$

1.b) -<u>Expression du vecteur vitesse</u> : $\vec{v} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta = -4a\; sin\theta\; \vec{U}_r + 4a\; cos\theta\; \vec{U}_\theta$

2)-<u>Module de la vitesse</u> pour a=2m :

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4a\ sin\theta)^2 + (4a\ cos\theta)^2} = \sqrt{16a^2(sin^2\theta + cos^2\theta)} = \sqrt{16a^2} = 4a$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}| = 4a = 4.2 = 8m.s^{-1}$$

Exercice 4 :

On considère un point matériel dont les équations horaires dans un système de coordonnées Cartésiennes sont :

$x(t) = t^2, \quad y(t) = 2t^2 + 2$

1- Déterminer les grandeurs cinématiques : (a) vecteur position, (b) vecteur vitesse et son module et (c) vecteur accélération et son module.
2- Trouver les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
3- Déterminer l'équation de la trajectoire, quelle est sa nature ?
4- Exprimer les équations horaires dans le système de coordonnées polaire(ρ, θ).

Solution :

1-

a- Vecteur position :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = t^2\vec{\jmath} + (2t^2 + 2)\vec{\jmath}$$

b-Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} = 2t\vec{\imath} + 4t\vec{\jmath}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = 2\sqrt{5}\ \mathrm{t}$$

c- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{\imath} + \ddot{y}(t)\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} \ \Longrightarrow\ a(t) = |\vec{a}(t)| = 2\sqrt{5}$$

2- Composantes accélération :

$\vec{a} = a_T\overrightarrow{u_T} + a_N\overrightarrow{u_N}, \quad a_t\ et\ a_N$ Sont les composantes tangentielle et normale de L'accélération $\vec{a}$

$\overrightarrow{u_T}\ et \overrightarrow{u_N}$ Vecteurs unitaires tangentiel et normal.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2\sqrt{5t})}{dt} = 2\sqrt{5}\mathrm{m/s}.$$

$$\overrightarrow{a^2} = \left(a_t\overrightarrow{u_t} + a_N\overrightarrow{u_N}\right)^2 \Longrightarrow \ a^2 = a_t^2 + a_N^2 \quad Alors\text{: } a_N^2 = a^2 - a_t^2 = 0.$$

$$a_N^2 = a^2 - a_t^2 = 0$$

3-L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant la variable temporelle (t),

Donc :$y = 2x + 2$. C'est l'équation d'une droite (Mvt rectiligne).

4- Transformation en coordonnées polaires :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5t^4 + 8t^2 + 4}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2t^2 + 2}{t^2} \quad \Longrightarrow \ \theta = arctan\left(\frac{2t^2 + 2}{t^2}\right)$$

Exercice 5 :

Soit un mobile M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = 3 \cos 2t\,\vec{\imath} + \ 3 \sin 2t\,\vec{\jmath} + \ (8t \ - \ 4)\vec{k}$$

1-Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z).

2-Donner en coordonnées cylindriques l'expression de la vitesse. Calculer sa norme.

3-Donner en coordonnées cylindriques l'expression de l'accélération. Calculer sa norme.

4-Trouver la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet ?

En déduire le rayon de courbure r ?

Solution :

$1 - \ Nature\ de\ la\ trajectoire\ de\ M\ dans\ l'espace\ (O, x, y, z).$

-La trajectoire dans le plan *(O, x, y)* :

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9\ cos^2 2t + 9sin^2 2t$$

$$= 9\ (cos^2 2t + 9sin^2 2t) = 9$$

⟹La trajectoire dans le plan *(O, x, y)* est circulaire de rayon R=3m et de centre (0,0).

-La trajectoire suivant l'axe *Oz* :

$$z = 8t - 4$$

C'est l'équation d'une droite donc suivant *Oz* le mouvement est rectiligne.

En conclusion : Le mouvement suivant l'espace est hélicoïdal.

2-Vitesse en coordonnées cylindrique ainsi que son module.

$$\overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_r + z.\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = 3.\vec{u}_r + (8t-4)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R.\vec{u}_r + z.\vec{k}\right)$$

$$= \dot{R}\vec{u}_r + R\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{z}\vec{k} = \dot{R}\vec{u}_r + R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

Avec : $\begin{cases} R = 3 \\ \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) = Arctg\left(\frac{3sin2t}{3cos2t}\right) = Arctg(tan2t) = 2t \\ z = 8t - 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = 2 \\ \dot{z} = 8 \end{cases}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = 6\vec{u}_\theta + 8\vec{k}$$

Le module du vecteur vitesse vaut :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 m/s.$$

3-Accélération en coordonnée cylindrique ainsi que son module.

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\vec{u}_r + R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k})$$

$$= \ddot{R}\vec{u}_r + \dot{R}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= \ddot{R}\vec{u}_r + \dot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= \left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} R = 3 \\ \theta = 2t \\ z = 8t - 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = 2 \\ \dot{z} = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{R} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = -12\vec{u}_r$$

Le module du vecteur accélération vaut :

$$\|\vec{a}\| = 12 m/s^2.$$

4- Vitesse et accélération dans la base de Frenet :

$\vec{v} = v.\vec{u}_T = 10\,\vec{u}_T \qquad et \qquad \vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N \quad avec: \ \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T = \vec{0}$

$a^2 = a_N^2 + a_T^2 \implies a_N^2 = a^2 \implies a_N = \sqrt{a^2} = 12m/s^2.$

<u>5- Rayon de courbure R :</u>

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{10^2}{12} = 8.33m$$

Exercice 6 :

Deux trains A et B roulent sur des voies parallèles à 70 km/h et 90km/h respectivement.

1. Calculer la vitesse de B par rapport à A s'ils :

a. se déplacent dans la même direction

b. se déplacent dans des directions opposées.

Solution :

$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} \implies \vec{V}_{B/sol} = \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{A/sol} \implies \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{B/sol} - \vec{V}_{A/sol}$

<u>a-même direction :</u>

$\vec{V}_{B/sol} = 90\,\vec{\imath} \qquad et \qquad \vec{V}_{A/sol} = 70\,\vec{\imath}$

$\vec{V}_{B/A} = 90\,\vec{\imath} - 70\,\vec{\imath} = 20\,\vec{\imath} \implies \|\vec{V}_{B/A}\|$ =20 m/s

<u>b-Direction oppose</u>:

$\vec{V}_{B/sol} = 90\,\vec{\imath} \qquad et \qquad \vec{V}_{A/sol} = -70\,\vec{\imath}$

$\vec{V}_{B/A} = 90\,\vec{\imath} - (-70\,\vec{\imath}\,) = 160\,\vec{\imath} \implies \|\vec{V}_{B/A}\|$ =160 m/s

$\vec{V}_{A=}V_A\,\vec{\imath}$ et $\vec{V}_B = V_B\,cos60\,\vec{\imath} + V_B\,sin60\,\vec{\jmath}$

$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = 70\vec{\imath} - (90cos60\,\vec{\imath} + 90sin60\,\vec{\jmath}\,) = 70\vec{\imath} - (45\vec{\imath} + 45\sqrt{3}\vec{\jmath}$

$\vec{V}_{B/A} = 25\vec{\imath} - 45\sqrt{3}\vec{\jmath} \implies \|\vec{V}_{B/A}\| = \sqrt{(25)^2 + \left(45\sqrt{3}\right)^2}$ = 81.85 m/s

Chapitre III : Dynamique du point matériel

III.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la dynamique du point matériel qui fait l'étude des corps en mouvement en tenant compte des conditions et des causes qui provoquent ce dernier. Pour cela nous avons besoin de notions de base telles que les forces qui agissent sur le point matériel afin de mieux comprendre ces phénomènes physiques.

III .2. Loi de gravitation universelle :

Soient deux masses m_1 et m_2 distantes de r, l'action exercée par (1) sur (2) $\vec{F}_{12}$ et égales et opposée à celle exercée par (2) sur (1), $\vec{F}_{21}$ (3éme = loi de conservation) $\|\vec{F}_{12}\| = \|\vec{F}_{21}\| = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$

G= $6.672.10^{-11} S.I,$ constante de gravitation universelle

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

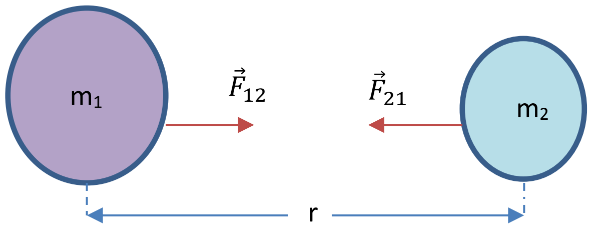


Figure 20 : Interaction gravitationnelle

III.2.1. Champ de pesanteur :

Soit un objet de masse m à la surface de la terre

$$F = G\,\frac{M_T.m}{{R_T}^2} = mg_0$$

g_0: *la force de gravitation à la surface de la terre égale à* $9.81 N/Kg$

M_T: *masse de la terre égale à* $5.98.10^{24} Kg$

R_T: *rayon de la terre égal à* $6.37.10^{6} m$

Si l'objet se trouve a une hauteur h par rapport à la surface de la terre, alors

$$F = G\,\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2} = mg$$

On divise : l'équation (1) sur (2) en obtient :

$$\frac{mg}{mg_0} = \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2} \Longrightarrow g = g_0 \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}$$

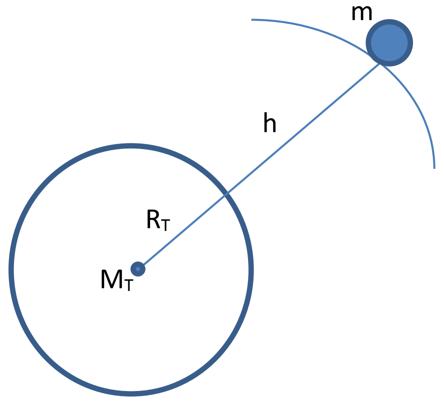


Figure 21 : Champs de pesanteur d'un corps à la surface de la terre.

III.3. Notion de force :

En physique, les corps subissent des interactions avec le milieu extérieur. Ces interactions sont appelées des forces. Ces forces sont caractérisées par un vecteur.

Exemple : Forces de poids

Point d'application : point de centre de gravité.

Direction : le vertical.

Sens : vers le bas.

Module: $|\vec{P}| = m.g$

III .3.1. Forces de contact :

La force de contact est une force qui se trouve une fois le contact est fait entre deux surfaces planes.

III .3.2. Force de d'action et Réaction d'un support

Soit un corps solide déposé sur une surface horizontale, qui subit une force prevenant du support. Cette force s'appelle une force de réaction qui est répartie sur toute la surface du support-objet.

$ou\ \overrightarrow{R} : la\ force\ de\ réaction$

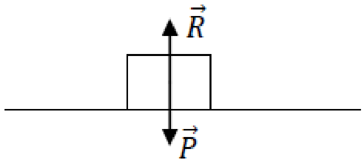


Figure22 : Force de contact

III.3.3. Force de frottement :

III.3.3.1. Force de frottement dans un solide :

Les forces de frottement existent en deux formes l'une apparait lors du mouvement d'un objet et l'autre si le corps est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer.

$\vec{R}: Réaction$

$\overrightarrow{C_x}: Force\ de\ frottement$

$tang\alpha = \dfrac{C_x}{C_y}: coefficient\ de\ fottement$

En absence de frottement $C_x = 0$

$$\mu = \frac{C_x}{C_y}$$

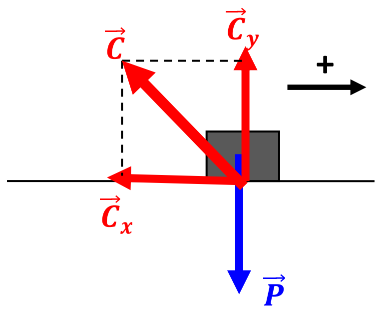


Figure23 : Représentation de la force de frottement

La force de frottement est opposée au sens de la possibilité du mouvement.

III.3.3.2. Frottement visqueux :

un frottement visqueux est une force de frottement qui s'exerce sur un objet qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide (liquide ou gazeux). Elle est donnée par la relation suivante :

$$\overrightarrow{F} = -k.\vec{v}$$

k : coefficient de frottement.

$\vec{v}$: vitesse du fluide.

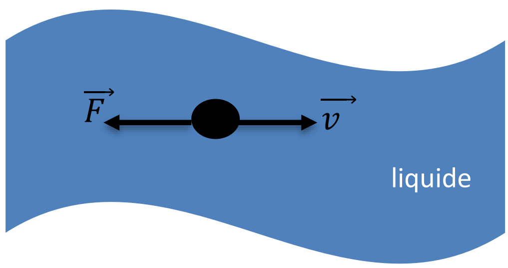


Figure 24 : Force de frottement visqueux

III.4. Les trois lois de Newton :

1ére loi : le Principe d`inertie :

Si on applique une force à un corps au repos ou en mouvement, ce corps conserve son état et son mouvement ne peut être que rectiligne et Uniforme. $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

2éme loi : Principe Fondamentale de la Dynamique P.F.D :

La somme des forces qui agissent sur un corps est égale au produit de sa masse par son accélération : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

3^{éme} loi : principe de l`action et la réaction :

Soit deux corps en interactions. Si le premier corps exerce une force $\vec{F}_{1/2}$ sur le deuxième corps alors ce dernier exerce la même force $\vec{F}_{2/1}$ mais de sens opposé. On écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Figure 25 : Illustration du principe action réaction.

III.5. Théorie de la variation de la quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement d`un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{P} = m\vec{v}, \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Longrightarrow \Delta\vec{P} = \int_{t_0}^{t} F.dt$$

Si un corps n`est soumis à aucune force, la variation de la quantité de mouvement est égale à l`impulsion de la force appliquée.

On dit que la quantité de mouvement est conservée si $\Delta\vec{P} = \vec{0}$.

III.5.1. Conservation de la quantité de mouvement :

Soit un système de deux corps de masse $m_1$et m_2 en interaction. Le système étant isolé. On calcule la quantité de mouvement du système avant, pendant et après le choc. Étant $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ les quantités de mouvement de deux corps avant le choc m_1 et m_2 avec des vitesse $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ respectivement, et $\vec{P_1}'$, $\vec{P_2}'$ les quantités de mouvement après le choc.

Puisque le système est dit isolé, alors la quantité de mouvement conservée d'où la relation suivante :

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{P_1}' + \vec{P_2}' = cte$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}'$$

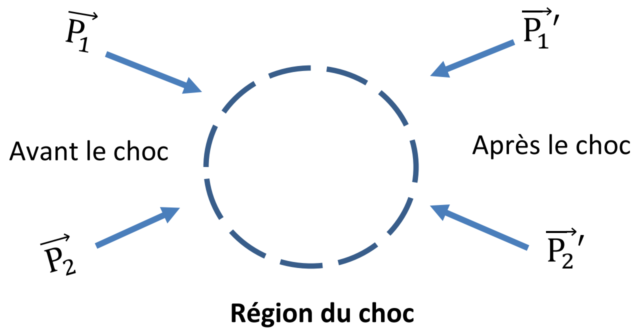
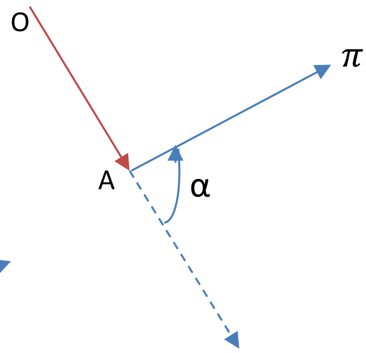


Figure 26 : particules en collisions

III .6. Moment d'une force :

On définit le moment d'une force par rapport à un point O la quantité

$\vec{\mu}_{(\vec{F}/O)}$, $(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F})$, $\vec{\mu}$ perpenduculaire au plan $(\overrightarrow{OA}, \vec{F})$



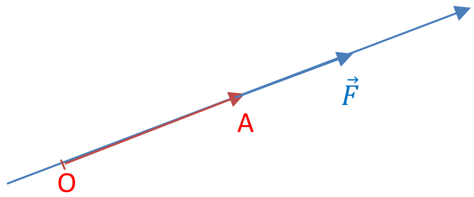
Module: $\left|\vec{\mu}_{(\vec{F}/O)}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\vec{F}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \vec{F})$

Sens : est donné par la méthode du tir bouchon.

Cas particuliers :

$Si\ \alpha = 0\ , ou\ \alpha = \pi\ , \mu(_{\vec{F}/O})$

$\mu(_{\vec{F}/O}) = \left|\vec{\mu}_{(\vec{F}/O)}\right|_{Max}$



III .7. Moment cinétique ($\vec{L}$) :

Soit un corps en mouvement repéré par le vecteur $\vec{r}$ avec une vitesse $\vec{v}$.Son moment cinétique est donné par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P}\ \ ,tel\ que: \vec{P} = m\vec{v}\,est\ la\ quantité\ de\ mouvement$$

III .8. Le théorème du moment cinétique :

En dérivant le moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps on obtient le moment de la force qui lui est appliquée par rapport au point de référence utilisé par le moment.

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \vec{P}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \wedge \frac{d}{dt} m\vec{v}\right)$$

$$= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$= m(\cancelto{0}{\vec{v} \wedge \vec{v}}) + (\vec{r} \wedge m\,\vec{a})$$

$$= (\vec{r} \wedge m\,\vec{a}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \mu\left(\vec{F}_{/O}\right)$$

Exercices Corrigés

Exercice 1 :

I. Un point matériel P de masse m glisse sans frottement le long d'un plan incliné AB de longueur l faisant un angle α avec l'horizontale. Sachant qu'à t=0s, il est immobile au sommet A du plan incliné, la vitesse initiale $v_0 = 0.(voir\ figure)$.

1.Calculer l'accélération, la vitesse $v(t)$ et la distance parcourue $x(t)$ après un temp t.

2.Calculer le temp t mis par le point matériel pour atteindre B.

3.Calculer la vitesse au point B.

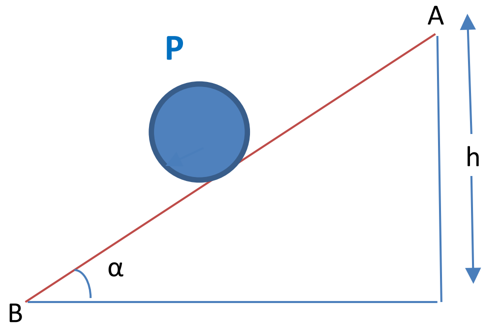
II. Supposons que le plan incliné a un coefficient de frottement µ

1.Calculer la valeur de la force de frottement, que devient l'accélération ?

2. Calculer la vitesse $v(t)$ à l'instant t.

3.Calculer la position $x(t)$ à l'instant t.

AN: $l = 50\ cm, g = 10m/s^2$, $\alpha = 30°,\ m = 4Kg,\ \mu = 0.4$.



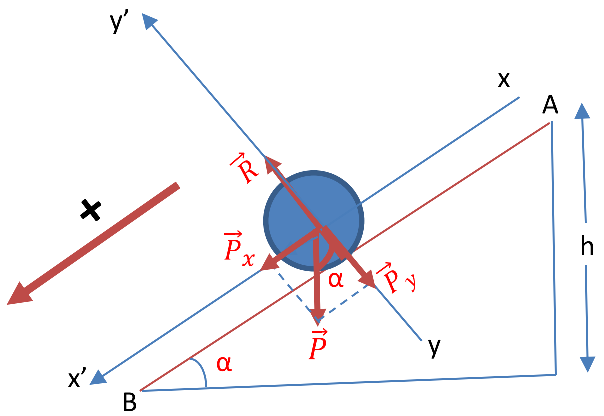
Solution :

I. Mouvement sans frottement :

1-

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$



Projection sur l'axe Ox : $mg.sin\alpha = ma$ ……………………… (1)

Projection sur l'axe Oy :$R - mg.cos\alpha = 0$

-Calcul de l'accélération :de (1) $\Longrightarrow a = g.sin\alpha$

AN : $a = 10.\ sin30° = 5m/s^2$

-Calcul de la vitesse :

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow dv = a\ dt$$

$$v = \int a\ dt = \int g.sin\alpha\ dt$$

$$v = g.sin\ \alpha t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

$v = 10.sin30°t$ = 5t m/s

Calcul de la position :

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x = \int v.dt = \int g.sin\alpha t.dt$$

$$x = \frac{1}{2}\ g.sin\alpha t^2$$

2-Calcul du temps mis pour atteindre B :

Au point B :

$$x = l = \frac{1}{2} g.sin\alpha\ t^2$$

$$\Longrightarrow\ t_B = \sqrt{\frac{2l}{g.sin\alpha}}, \qquad \text{AN: } t_B = 0.45\ s$$

3-la vitesse v_B :

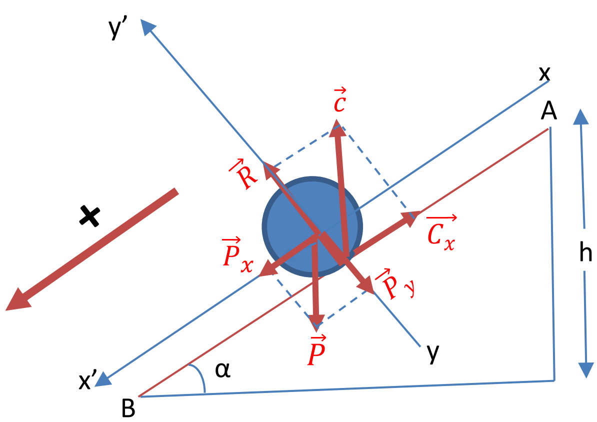
De l'équation (2) $\Longrightarrow\ v_B = (g.l.sin\alpha)t_B$

$$\Longrightarrow\ v_B = \sqrt{2g.l.sin\alpha}\ , \qquad \text{AN: } v_B = 2.24\ m/s$$

II. Mouvement Avec frottement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{C} = m\vec{a}$$



Projection sur l'axe Ox : $mg.sin\alpha - C_x = ma$ ……………………….(1)'

Projection sur l'axe Oy :$C_y - mg.cos\alpha = 0$ …………..……………..(2)'

$\mu = \frac{C_x}{C_y} \Longrightarrow C_x = \mu.C_y$

De l'équation (2)' :$C_x = \mu(mg.cos\alpha)$,

AN : C_x =0.4(4.10. cos30°) =13,7N

De l'équation (1)' :$a = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$

AN: a=10(sin30°- 0.4cos30°) =1,6 m/s^2

2-la vitesse :

$v = \int a\, dt = \int g(sin\alpha - \mu cos\alpha)\, dt$

$v = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)t$

3- la position :

$x = \int v.dt = \int g(sin\alpha - \mu cos\alpha)t\, dt$

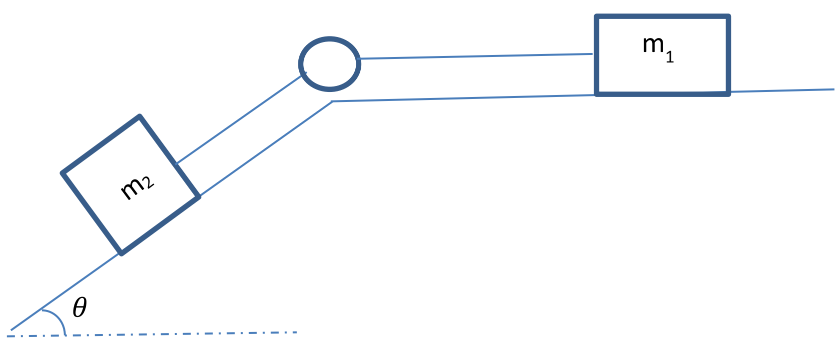
$x = \frac{1}{2}\, g(sin\alpha - \mu cos\alpha)t^2$

Exercice 2 :

On considère le système représenté par la figure ci-dessous où la masse m_1 peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontal. La masse m_2 peut glisser sur le plan horizontal caractérisé par les coefficients de frottement statique $\mu_S = 0.6$ et dynamique $\mu_d = 0.5$. Le fil est inextensible, les masses de la poulie et du fil sont négligeables.

1. Calculer la valeur minimum m_{1min} pour laquelle le système se met en mouvement.
2. Représenter pour ce cas, les forces appliquées à chacune des masses.
3. Pour m_1=4Kg, déterminer l'accélération de chaque masse et la tension du fil. (Voir figure ci-contre).

   On donne : $\theta = 30°$, $m_2 = 2Kg$, $g = 10m/s^2$



Solution :

La masse m_2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

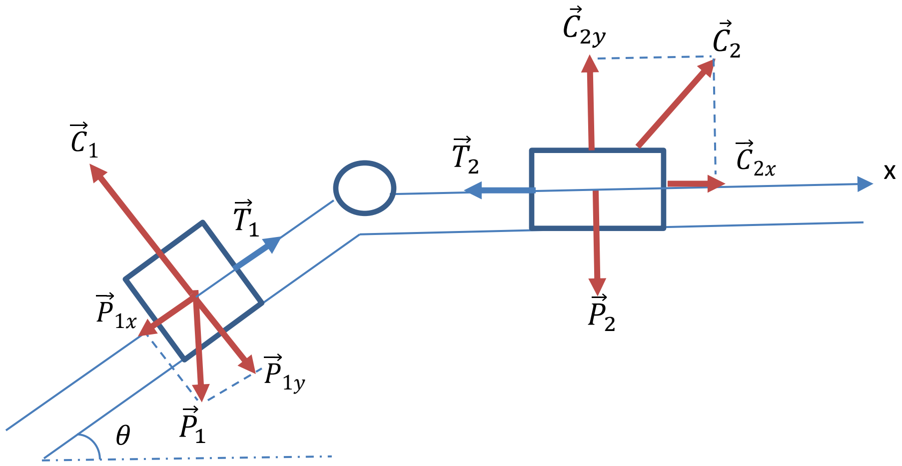
$$\vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Projection sur Ox: $T_2 - C_{2x} = 0 \Longrightarrow T_2 = C_{2x}$ .... (1)

Projection sur Oy: $P_2 - C_{2y} = 0 \Longrightarrow \; P_2 = C_{2y}$

On a $\mu_S = \frac{C_{2x}}{C_{2y}} \Longrightarrow C_{2x} = \mu_S \, . C_{2y} = \mu_S \, . P_2$ .... (2)

En remplaçant l'équation (2) dans (1) : $T_2 = C_{2x} = \mu_S . P_2$



La masse m_1:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

Projection sur Ox: $-T_1 + P_1 sin\theta = 0 \Longrightarrow \; T_1 = P_1 sin\theta$

Pour que le système se met en mouvement il faut que : $T_1 > T_2 \Longrightarrow P_1 sin\theta > \mu_S . P_2$

$$m_1 g . sin\theta > \mu_S . m_2 . g \Longrightarrow m_1 . sin\theta > \mu_S . m_2 \Longrightarrow m_1 > \frac{\mu_S . m_2}{sin\theta}$$

AN : $m_1 > \frac{2.0.6}{0.5} > 2.4 \, Kg$

Pour m_1 on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a}$$

$\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$

Projection sur Ox: $-T_1 + P_1 sin\theta = m_1 a_1$................................ (a)

Projection sur Oy: $C_1 = P_1 cos\theta$..(b)

$\sum \vec{F}_{ext} = m_2\vec{a}_2$

$\vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$

Projection sur Ox: $T_2 - C_{2x} = m_2 a_2$..................................... .(c)

Projection sur Oy: $C_{2y} = P_2$..(d)

La masse de la poulie est négligeable : $T_1 = T_2 = T$

Fil inextensible et de masse négligeable : $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} -T + P_1 sin\theta = m_1 a \ldots\ldots\ldots\ldots(e) \\ T - \mu_S m_2 g = m_2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f) \end{cases}$$

$(e) + (f) \Longrightarrow m_1 . gsin\theta - \mu_S m_2 g = (m_1 + m_2)a$

$$a = \frac{g(m_1 . sin\theta - \mu_S m_2)}{(m_1 + m_2)} = \frac{10(4.0.5 - 0.6 . 2)}{2 + 4} = 1.33\ m/s$$

$T = P_1 sin\theta - m_1 a = m_1 g sin\theta + m_1 a$

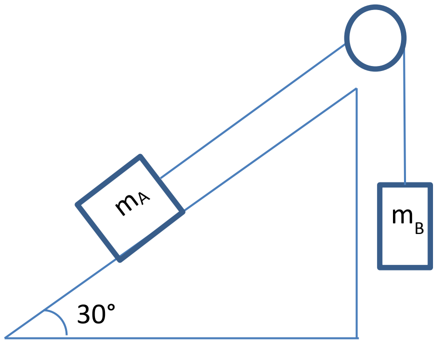
$AN: T = 4.10 .0.5 - 4.1.33 = 14.66\ N$

$T = m_2 a_2 + C_{2x} = m_2 a_2 + \mu_S . P_2 = m_2 a_2 + \mu_S m_2 g$

$AN: T = 2 . 1.33 + 0.6 .2.10 = 14.66N$

Exercice 3:

Deux masses m_A=2kg et m_B=3kg sont reliés par une corde inextensible de masse négligeable glissant sans frottement sur une poulie de masse négligeable (voir figure). Le coefficient de frottement entre la masse A et le plan incliné vaut 0,5. Les deux masses sont initialement au repos.

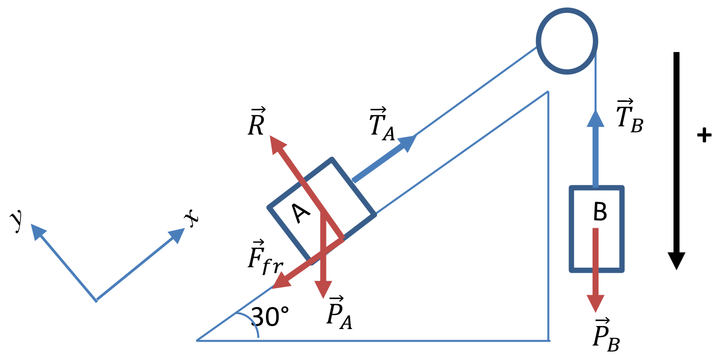


Si on lâche la masse B, quelle distance la masse A aura-t-elle parcourue après 2 secondes ?

Solution :

Sur la masse m_A :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_A\vec{a}$$



$$\Longrightarrow \vec{T}_A + \vec{P}_A + \vec{F}_{fr} + \vec{R} = m_A\vec{a}$$

Projection selon l'axe *ox* : $T_A - p_{Ax}$-$F_{fr} = m_A a_x$, *tel que :* $F_{fr} = \mu.R$

$$T_A - m_A g sin30° - \mu m_A g cos30° = m_A a_x \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

Projection selon l'axe *oy* : $R - P_{Ay} = m_A a_y = 0 \Longrightarrow R = m_a g cos30°$

Sur la masse m_B :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_B\vec{a} \Longrightarrow \vec{T}_B + \vec{P}_B = m_B\vec{a}$$

$P_B - T_B = m_B a_x$……………………….(2)

La corde est inextensible et de masse négligeable alors $T_A = T_B$

De l'équation (1) on a :$T_A = m_A g sin30° + \mu m_A g cos30° + m_A a_x$

De l'équation (2) on a :$T_B = m_B(g - a_x)$

$$T_A = T_B \Longrightarrow a_x = \frac{-m_A g sin30° + \mu m_A g cos30° + m_B g}{m_A + m_B}$$

$$a_x = \frac{-2.10.sin30° - 0.5.2.10.cos30° + 3.10}{2+3} = 2.26 m/s^2$$

Distance parcourue après 2 secondes : a = Cte → M. R.U. A⟹

$$\Longrightarrow x = a_x\frac{t^2}{2} = 2.25.\frac{2^2}{2} = 4.5m.$$

Chapitre IV : Travail, Puissance et Energie

IV.1. Le travail :

Si un corps de masse m est en mouvement sous l'action d'une force $\vec{F}$, on définit le travail élémentaire :

$dW = \vec{F}.d\vec{r}$, tel que d$\vec{r}$ est le déplacement élémentaire.

Soient : $\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$; $d\vec{r}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$dW = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$

IV.1.2 Force constante sur un déplacement rectiligne :

Soit M un point matériel qui se déplace sur une ligne rectiligne AB et soumis à une force $\vec{F}$. On définit le travail de la force par :

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\cos\alpha$$

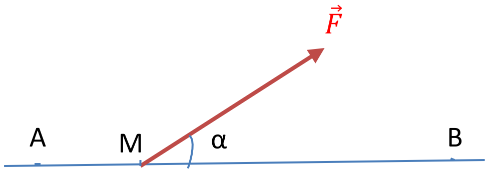


Figure 27 : Travail de force constante sur un déplacement rectiligne

IV.1.3. Expression du travail élémentaire :

La force varie sur un déplacement quelconque AB. En décomposant ce dernier en petit déplacements élémentaires, cette force est considérée comme constante. Le travail élémentaire sur un déplacement élémentaire quelconque $\overrightarrow{AB}$

Peut donc s'écrire :

$$\boldsymbol{\delta W = \vec{F}(M).d\vec{l}}$$

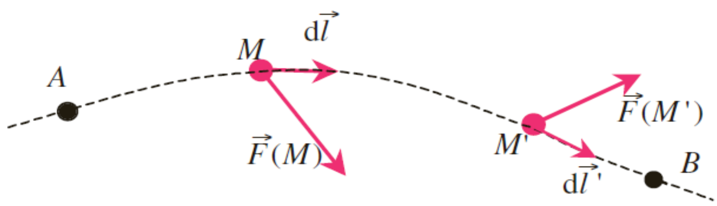


Figure 28 : Le travail élémentaire sur un déplacement quelconque AB.

IV.2.la puissance :

Par définition $P = \frac{dW}{dt}$

On a: $dW = \vec{F}.d\vec{r}$

$$P = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v},\ \ alors: P = \vec{F}.\vec{v}$$

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{MLT^{-2}L}{T}$$

$[P] = ML^2T^{-3}$; *unité* = Kgm^2/s^3*(Watt)*

1cheval=736W

IV.3. L'énergie cinétique :

L'Energie cinétique notée E_C est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à une référence donnée. L'énergie cinétique est égale au travail des forces appliquées.

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = m\vec{a}.d\vec{r}$$

$$= m\frac{d\vec{v}}{dt}\ .d\vec{r}$$

$$= m\ v\ dv$$

$$\int dW = \int m\ v\ dv$$

$W = \int m\ v\ dv$; *si le corps se déplace de* $A \rightarrow B$ On aura :

$$W = \int_A^B m\ v\ dv = m\int_A^B v\ dv = m\ \left[\frac{v^2}{2}\right]_B^A$$

$$= \frac{1}{2}m(v_B - v_A)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_B - \frac{1}{2}mv_A$$

Alors la quantité $\frac{1}{2}mv^2$ est appelée énergie cinétique

Donc : $W = E_{cB} - E_{CA}$ dans le cas général on a :

$\sum W = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci}$. C'est le théorème de l'énergie cinétique.

IV.4- Forces conservatives ou force dérivant d'un potentiel :

On dit qu'une force est conservative si son travail est indépendant du chemin suivi alors : $W_1 = W_2 = W_3$, on dit que $\vec{F}\, est\ conservative$

$W_1 \neq W_2 \neq W_3$, on dit que $\vec{\mathrm{F}}$ est non conservative

Si La force $\vec{F}\, est\ conservative$ on dit que le chemin est fermé on écrit :

$$W = \oint \vec{F}.d\vec{r} = 0$$

IV.5. L'énergie potentielle :

L'Energie potentielle est une fonction de coordonnées $E_P(x, y, z)$, telle que les différences entre sa valeur de départ et sa valeur à l'arrivée sont égales au travail entre ces deux points.

$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\,.d\vec{r} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P$

$\Delta E_P = E_{PA} - E_{PB}$

$\Delta W = -\Delta E_P \Longrightarrow dW = -dE_P$

E_P a toujours une référence prenant l'exemple du sol $E_{P0} = 0$

$E_P = mgh$, si le corps se trouve à une hauteur h du sol.

IV.5.1. Expression du champ de la force conservative à partir de l'énergie potentielle :

On sait que :$dW = -dE_P$ …………………………………...(1)

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = -(F_x dx + F_y.dy + F_z.dz) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$

$E_P(x, y, z) = f(x, y, z)$

$\frac{dE_P}{dr} = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

Donc :

$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P \;\Longrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_P$

$\overrightarrow{rotF} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \left(-\vec{\nabla} E_P\right)$

$$= -\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} E_P\right) = \vec{0},$$

Alors on dit que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel si $\overrightarrow{rotF} = \vec{0}$

IV.6 L'Energie totale ou l'énergie mécanique :

$E_T = E_C + E_P = E_m$

IV.6.1. Principe de conservation de l'énergie totale :

Dans un champ de force conservatrice l'énergie totale se conserve.

$E_{TA} = E_{TB}$

$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} = \Delta E = 0$

Unité : joule.

Nous Avons vu que le travail d'une force conservatrice d'un corps se déplaçant en A et B est :

$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) \\ W_{AB} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B) \end{cases} \quad et$$

$E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B) \implies$

$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$

La quantité $E_C(A) + E_C(B)$ est appelée l'énergie totale ou l'énergie mécanique

$\implies$ L'énergie totale se conserve.

$(E_C + E_P)_A = (E_C + E_P)_B \implies E_T(A) = E_T(B)$

$$\implies \Delta E_T = 0$$

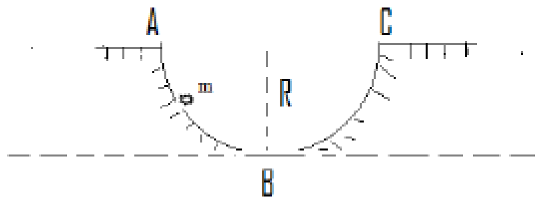
Exercices corrigés

Exercice 1 :

Un point matériel de masse m=2 Kg glisse sans frottement à l'intérieur d'une cuve semi-circulaire ABC de rayon R=80 cm. On le lâche au point A sans vitesse initiale.

1-Calculer sa vitesse au point B.

2-A quelle hauteur remonte-t-il ?



Solution :

E_T = Cte

$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$

$$mgh_A = \frac{1}{2}m{v_B}^2 \Longrightarrow v_B = \sqrt{2gh_A}$$

$$= \sqrt{(2).(10).(0.8)} = 4m/s.$$

$\frac{1}{2}m{v_B}^2 + 0 = \frac{1}{2}m{v_C}^2 + mgh \Longrightarrow \frac{{v_B}^2}{2g} = \frac{16}{20}$ = 0.8m ⟹ il arrive donc au point C (R=0.8m).

Exercice 2:

Une force conservative $\vec{F} = (6x - 12)\vec{\imath}\,N$, ou x est exprimée en mètre, agit sur une particule en mouvement le long de l'axe x. L'énergie potentiel U associée avec cette force correspond a une valeur de 27 joules a $x = 0$.

1. Ecrire l'expression de U en fonction de x.
2. Quelle est la valeur maximale de l'énergie potentielle U ?
3. Quelles sont les valeurs de x pour que l'énergie potentielle U soit nulle ?

Solution :

Une force est dites conservative si elle dérive d'un potentiel $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}$U, donc

$$F_x\vec{\imath} + \cancel{F_y\vec{\jmath}} + \cancel{F_z\vec{k}} = -\left(\frac{dU}{dx}\vec{\imath} + \cancel{\frac{dU}{dy}\vec{\jmath}} + \cancel{\frac{dU}{dz}\vec{k}}\right) \Longrightarrow$$

$$F_x\vec{\imath} = -\frac{dU}{dx}\vec{\imath} \Longrightarrow F_x = -\frac{dU}{dx} \Longrightarrow dU = -F_x dx$$

$$\Longrightarrow U = -\int F_x dx = -(3x^2 - 12x + C) = -3x^2 + 12x - C$$

Détermination de la constante d'intégration C :

$U(0) = 27 \Longrightarrow -3(0)^2 + 12(0) - C = 27 \Longrightarrow C = 27$

$U(x) = -3x^2 + 12x + 27$

2-Détermination de la valeur maximale de U

$$\frac{dU}{dx} = -6x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2m$$

$U_{max} = U(2) = 3(2)^2 + 12(2) + 27 = 39\,Joules$

3-Les valeurs de x pour que U soit nulle

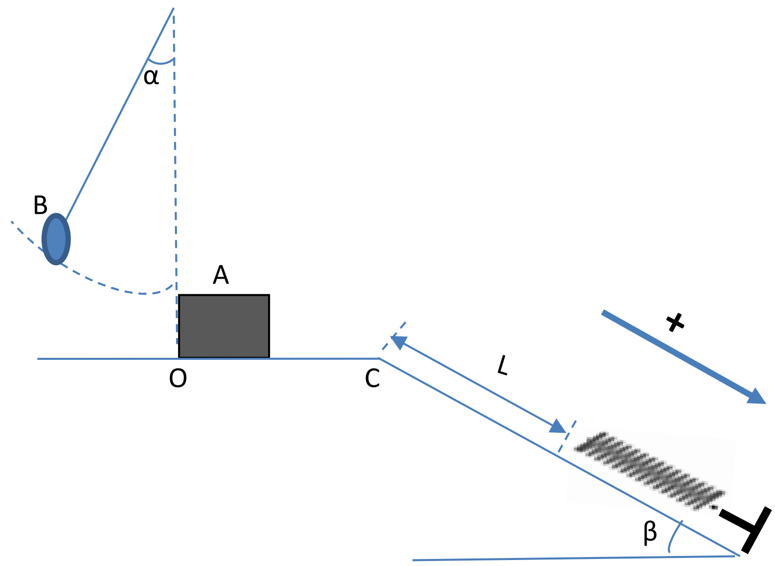
$U(x) = -3x^2 + 12x + 27 = 0$

$x_1 = 2 - \sqrt{13} \approx -1.60m$

$x_2 = 2 + \sqrt{13} \approx 5.60m$

Exercice 3:

Une boule **B** de masse m, accrochée à un fil inextensible de longueur l, est écartée de sa position d'équilibre d'un angle α et est abandonnée sans vitesse initiale **(voir la figure ci-dessous)**. Durant son passage par la position verticale, la boule percute un corps A de même masse et s'arrête. Le corps **A** glisse sur une piste **OCD**. La partie **OC** = d est un plan horizontal rugueux de coefficient de frottement dynamique µd. La portion **CD** = L, parfaitement lisse, est inclinée d'un angle β = 30° par rapport à l'horizontale.

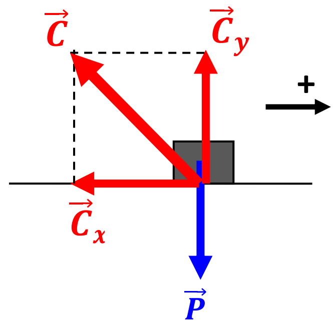


1. Dessiner les forces exercées sur le corps A en une position entre O et C.
2. Calculer l'accélération du corps **A** entre **O** et **C**. Déduire la nature du mouvement.
3. Donner l'expression de la vitesse de la boule B juste avant de toucher le corps **A**

4. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, calculer la vitesse du corps **A** après l'interaction.
5. Exprimer la vitesse du corps A au point C en fonction de g, l, d, α et μ_d.
6. De quel angle α_m doit-on écarter la boule B pour que le corps A arrive en C avec une vitesse nulle.
7. A partir du point **C**, le corps **A** aborde la partie **CD** avec une vitesse nulle. Il arrive sur un ressort parfait de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Représenter les forces exercées sur **A** au cours de la compression du ressort.
8. Quelle est la valeur de la compression maximale du ressort.

On donne : m = 200g, d = 1m, l = 10cm, L = 1m, μd = 0.1, g = 10m/s^2 et k = 140N/m.

Solution :



1- Figure 1 :

2- $\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$

$$projection: \begin{cases} ox: & -C_x = ma \\ oy: & C_y = mg \end{cases} \Rightarrow a = -\mu_d g$$

$$a = (-0.1).10 = -1m.s^{-2}$$

Nature de mouvement : a .v < 0 ⇒ M.R.U.R

3- Pas de frottement :

$$E_{T_i} = E_{T_f} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B{}^2 = mgl(1 - cos\alpha) \Rightarrow V_B = \sqrt{2mgl(1 - cos\alpha)}$$

4- Conservation de la quantité de Mouvement :

$$m\vec{V}_B + 0 = 0 + m\vec{V}_A \Rightarrow V_A = V_A = \sqrt{2mgl(1 - cos\alpha)}$$

5- Vitesse au point C :

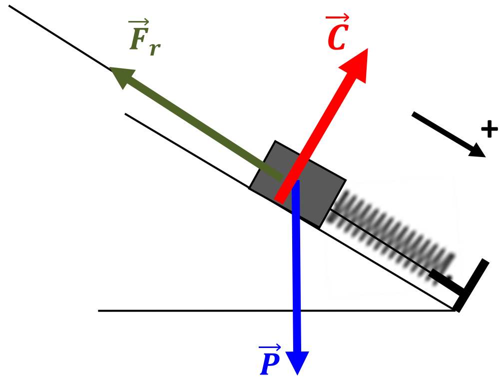
$$\Delta E_T = W(\vec{C}_x) \Rightarrow \frac{1}{2}mV_C{}^2 - \frac{1}{2}mV_A{}^2 = -C_x.OC = -\mu_d.mg.d$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha) - 2\mu_d.g.d}$$

6-

$$V_C = 0 \Rightarrow cos\alpha_m = 1 - \frac{\mu_d.d}{l} \Rightarrow \alpha_m = \frac{\pi}{2}$$

7- a-Forces :



8-<u>compression maximale :</u>

$$E_{T_1} = mgh \ = mg(L+x)sin\beta \ \ et \quad \Rightarrow \ E_{T_2} = \frac{1}{2}Kx^2$$

Pas de frottement donc $E_{T_1} = E_{T_2}$

$$mg(L+x)sin\beta \ = \frac{1}{2}Kx^2 \ \Rightarrow \ 70x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \ x = 12,7m$$

Bibliographie :

[1] Dunod, Paris, 2010,ISBN 978-2-10-055558-1,PHYSIQUETOUT-EN-UN POUR LA LICENCE, Cours, applications et exercices corrigés,*https://coursexamens.org/images/An_2017_1/Etudes_superieures/Physique/Livre/Physique.pdf*

[2] Ahmed Fizazi , Mecanique du point matériel : cours et exercice corrigés , *https://www.fichier-pdf.fr/2016/11/14/cours-physique-1ere-annee/*Ahmed Fizazi

[3] Ziani Nossair ,Boutaous Ahmed , Mécanique du point matériel, Cours et Exercices ,. *https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/cours_de_mecanique_point.pdf*

[4] Alain Gibaud, Michel Henry ,Cours de physique Mécanique du point, 2ème édition ´ , Dunod, 2007. *https://livre.fnac.com/a1982495/Alain-Gibaud-Mecanique-dupoint-2eme-edition*.

[5] Travaux dirige et sujets d'examens de physique I du département 1ère année LDM ST Faculté des Sciences et de la Technologie Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

[6] BOUKLI-HACENE Nassima Cinématique et dynamique du point matériel Cours et exercices corrigés https://www.ens-oran.dz/images/cours-en-ligne/sciences-exactes/Polycopi%C3%A9%20m%C3%A9canique_Boukli.pdf