

Faculty of Sciences and Technology
Department of Mechanical Engineering

كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم المهندسة الميكانيكية

N° d'ordre : M 55/GM/2022

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES PLAQUES
FONCTIONNELLEMENT GRADUEES (FGM) EN UTILISANT
UNE THEORIE D'ORDRE ELEVE

Présenté par :

❖ ZAHRAOUI Younesse Yakoub

❖ MORTET Touati

Soutenu le 12 / 07 / 2022 devant le jury composé de :

Président	Mr. Djamel OUINAS	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Mme. Amina BELHACHEMI	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Mme. Fatima Zohra ZAOUI	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022





DEDICACE

Je dédie ce projet :

A ma chère mère,

A mon cher père,

Qui m'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères,

A mes sœurs,

Pour sec soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études, puisse allah vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite .

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mon cursus.

Mr. Zahraoui Younesse yakoub

DEDICACE

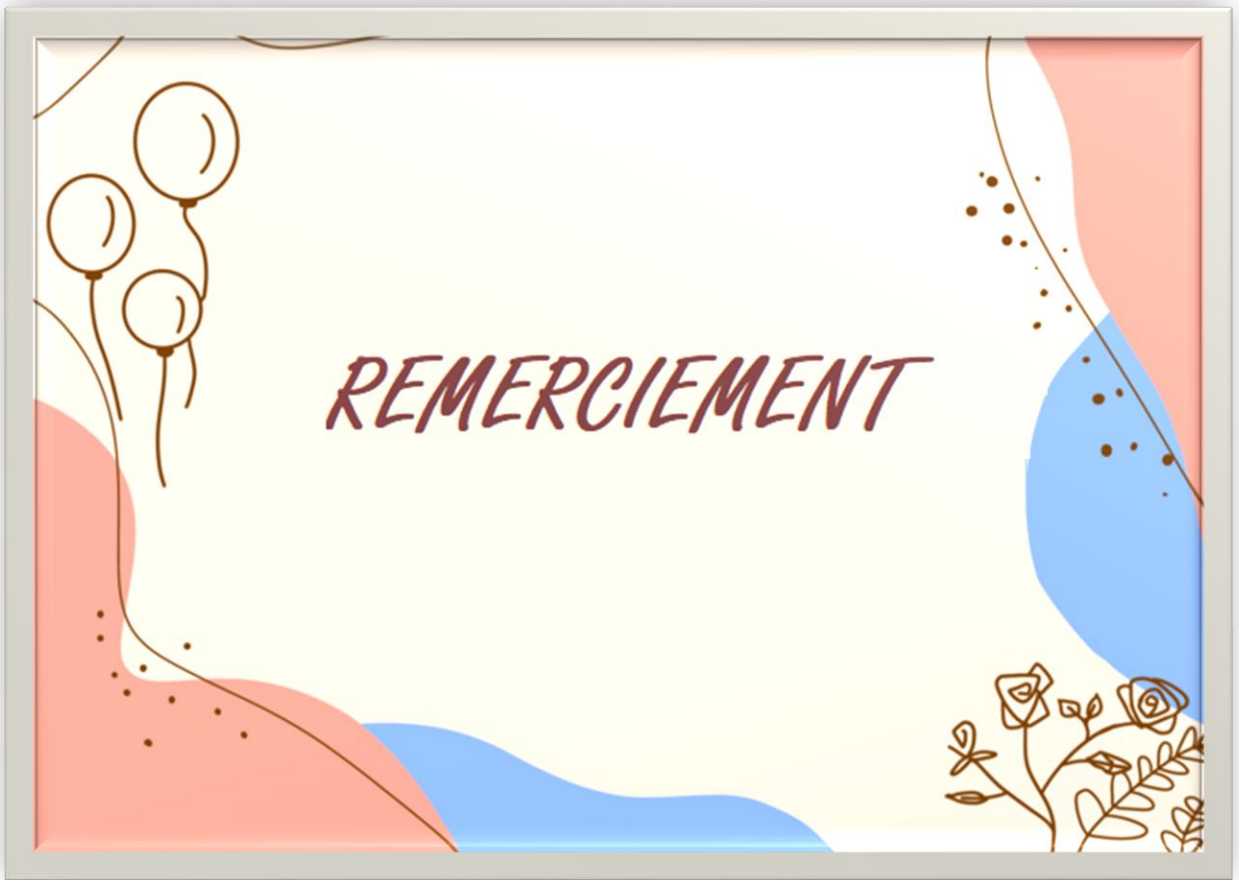
A mes chères parents, mon exemple éternel, mon soutien moral, et ma source de joie, et de bonheur, ceux qui ont sacrifiés pour me voir réussir, que dieu vous garde pour moi.

Puisse dieu le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur mes chères parents.

A mes deux frères Salaheddine et Abdelilleh, et mon vrai ami Zineddine, je prie dieu qu'il me les garde toujours.

A toutes ma grande famille et mes amis pour leur sourient tout au long de mon parcours universitaire.

Mr. Mortet Touati



REMERCIEMENTS

Nous commençons par Alhamdulillah, nous remercions Allah qui nous a donné tous et de la chance d'arrivé ici aujourd'hui et de finir nos études et ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mme. ZAOUJ Fatima Zohra. On la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciement s'adresse également à tous nos professeur pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.



RÉSUMÉ

Résumé

Ce travail présente l'analyse du comportement statique des plaques fonctionnellement graduées à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT). La théorie n'utilise que quatre inconnues, et les équations de mouvement qui réduisent l'analyse dynamique par rapport à la HSDT classique sont déterminées par le principe de Hamilton. La cinématique originale permet d'obtenir des équations de mouvement intéressantes, qui sont résolues analytiquement par la méthode de Navier. Une théorie 2D de la déformation de cisaillement hyperbolique pour les plaques fonctionnellement graduées est également proposée. La théorie prend en compte les effets de la déformation de cisaillement à travers la distribution hyperbolique de tous les déplacements dans la direction de l'épaisseur et considère les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de coefficients de correction de cisaillement. L'exactitude de la solution proposée est vérifiée par comparaison avec d'autres solutions trouvées dans la littérature.

Mots clés : comportement statique, flexion, plaque, matériau FGM, déformation



ABSTRACT

ARSTRACT

This work presents the analysis of the static behavior of functionally graduated plates using a new theory of high order shear deformation (HSDT). The theory uses only four unknowns, and the motion equations that reduce dynamic analysis compared to conventional HSDT are determined by the HAMILTON principle. The original kinematics make it possible to obtain interesting motion equations, which are solved analytically by the NAVIER program. A new 2D theory of hyperbolic shear deformation for functionally graduated plates is also proposed. The theory takes into account the effects of shear deformation through the hyperbolic distribution of all displacements in the direction of thickness, and considers the stress-free boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction coefficients. The accuracy of the proposed solution is verified by comparison with other solutions found in the literature.

Keywords: static behavior, deflection, plate, FGM material, deformation



ملخص

ملخص

يقدم هذا العمل تحليل السلوك الميكانيكي للألواح المتدرجة وظيفيًا باستخدام نظرية جديدة تشوه قص ذات الترتيب العالي. تستخدم النظرية أربعة مجاهيل فقط، ويتم تحديد معادلات الحركة التي تقلل من التحليل الديناميكي مقارنة بالتقليدي وفقًا لمبدأ هاملتون. تجعل الحركة الأصلية من الممكن الحصول على معادلات حركة مثيرة للاهتمام، والتي يتم حلها تحليليًا بواسطة طريقة نافيه. كما تم اقتراح نظرية ثنائية الأبعاد جديدة لتشوه القص الزائدي للألواح المتدرجة وظيفيًا. تأخذ النظرية في الاعتبار آثار تشوه القص من خلال التوزيع الزائدي لجميع الإزاحات في اتجاه السماكة، وتتنظر في الظروف الحدودية الخالية من الإجهاد على الأسطح العلوية والسفلية للصفحة دون استخدام معاملات تصحيح القص. يتم التحقق من دقة الحل المقترح بالمقارنة مع الحلول الأخرى الموجودة في الأدبيات.

الكلمات المفتاحية : السلوك الميكانيكي، انحناء، صفيحة، مادة متدرجة وظيفيا، اجهاد



**TABLES
DES
MATIERES**

TABLES DES MATIERES

Dédicace.....	I
Remerciements	III
Résumé	IV
Abstract	V
ملخص	VI
Tables des Matières	VII
Liste des Figures	IX
Liste des Tableaux.....	XI
Liste des Notations	XII
Introduction Générale	1

CHAPITRE 1: Généralités sur les matériaux composites et FGM

1.1. Définition	4
1.2. Constituants d'un composite	4
1.2.1. Matrice.....	4
1.2.1.1 Résines thermodurcissables	5
1.2.1.2 Résines thermoplastiques.....	5
1.2.1.3. Les élastomères.....	6
1.2.1.4 Les résines thermostables.....	6
1.2.2. Les charges	7
1.2.3. Les additifs	7
1.2.4. Renforts	8
1.2.4.1. Types de renfort	9
1.2.4.2. Architecture des renforts.....	14
1.3. Les matériaux FGM	16
1.3.1. Historique et concept des FGM.....	16
1.3.2. Propriétés des FGM.....	17
1.3.2.1 Les métaux	17
1.3.2.2 Les céramiques.....	17
1.3.3. Les champs d'utilisation des FGM	18
1.3.4. Processus et technique de fabrication des FGM.....	18

1.3.5. Modèle et mécanique des structures en FGM	19
--	----

Chapitre 2: Théorie d'élasticité

2.1 Introduction	20
2.2 Définition d'une plaque.....	20
2.3 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	Erreur ! Signet non défini.
2.4 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	Erreur ! Signet non défini.
2.5 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	29
2.6 Revue bibliographique sur l'analyse des structures FGM.....	31
2.7 Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre 3: Modèle théorique pour l'analyse de la flexion des plaques FGM

3.1. Introduction	32
3.2. Propriétés physiques effectives des plaques FG	32
3.3. Cinématique et déformations	33
3.4. Équations d'équilibre	35
3.5. Solutions analytiques pour des plaques FG simplement appuyées.....	38

Chapitre 4: Résultats Numériques

4.1. Introduction	40
4.2. Analyse de la flexion des plaques FGM.....	41
4.3. Conclusion.....	46

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	47
--	----

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	48
--	----



LISTES DES
FIGURES

LISTES DES FIGURES

CHAPITRE 1

Figure 1.1. Constituants de base d'un matériau composite [1]	4
Figure 1.2. Principaux familles de matrice [1]	5
Figure 1.3. Exemples d'élastomères.....	6
Figure 1.4. Les structures géométriques des renforts de composites à fibres longues, à fibres courtes et à particules [1]	8
Figure 1.5. Types de renfort [2]	8
Figure 1.6.a. fibres de verre	9
Figure 1.6.b. tissu de verre	9
Figure 1.6.c. Description des différentes opérations du procédé mécanique des fibres de verre [5]	10
Figure 1.7.1. Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN [7].....	10
Figure 1.7.2. Plaque et rouleaux en fibres de carbone [8][9]	11
Figure 1.7.3. Utilisation des fibres de carbone da la famille des avions airbus [10].....	11
Figure 1.8. Tissu en fibre d'aramide (Kevlar) [12]	12
Figure 1.9. Processus de fabrication des fibres d'aramide [5]	13
Figure 1.10. Exemple des fibres végétales	14
Figure 1.11. Renforts unidirectionnels	14
Figure 1.12. Renforts Toile ou taffetas.....	15
Figure 1.13. Renforts Serge.....	15
Figure 1.14. Renforts Satin.....	15
Figure 1.15a. Graduation par tranche.....	16
Figure 1.15b. Graduation continue.....	16
Figure 1.16. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriété [16].....	18

CHAPITRE 2

Figure 2.1. Géométrie d'une plaque.....	20
Figure 2.2. Conventions générales[19]	21
Figure 2.3. Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène [20]	22
Figure 2.4. Déformation d'une plaque mince [22]	22
Figure 2.5. Cinématique de Love – Kirchhoff [22].....	23
Figure 2.6. Cinématique de Reissner – Mindlin [22]	26
Figure 2.7. Cinématique d'ordre supérieur [22].....	30

CHAPITRE 3

Figure 3.1. Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée	32
Figure 3.2. Fraction volumique du matériau céramique.....	33

CHAPITRE 4

Figure 4.1. Variation du Déplacement axiale (\bar{u}) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al ₂ O ₃ ($a/h = 10$)	43
Figure 4.2. Distribution de la Contrainte normale ($\bar{\sigma}_{xx}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al ₂ O ₃ ($a/h = 10$)	43
Figure 4.3. Variation de la contrainte de cisaillement axiale ($\bar{\sigma}_{xy}$) d'une plaque carrée type Al/Al ₂ O ₃ ($a/h = 10$)	44
Figure 4.4. Variation de la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al ₂ O ₃ ($a/h = 10$)	44
Figure 4.5. L'effet du rapport géométrique (a/h) et de l'indice de puissance (p) sur la flèche centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque type (Al/Al ₂ O ₃).....	45



LISTES DES
TABLEAUX

LISTES DES TABLEAUX

CHAPITRE 1

Tableau 1.1 Caractéristiques des résines thermodurcissables[2]	5
Tableau 1.2 Caractéristiques des résines thermoplastiques [2]	6
Tableau 1.3. Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules) [11]	12

CHAPITRE 4

Tableau 4.1 Propriétés du métal et de la céramique.....	40
Tableau 4.2 Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques carrées Al/Al ₂ O ₃ ($a/h = 10$)	41
Tableau 4.3 Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées Al/Al ₂ O ₃ avec la distribution du matériau selon la forme exponentielle	42



LISTES DES
NOTATIONS

LISTES DES NOTATIONS

a	Longueur de la plaque
B	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
G	Module de cisaillement dans le plan
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$P(z)$	Propriété matérielle effective
p	Indice matériel
$V(z)$	Fraction volumique
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement axial de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x, y
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
σ_x, σ_y	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation dans la direction x, y
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
U_M	Énergie de déformation due aux effets mécaniques
δU	Variation de l'énergie potentielle
δV	Variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
ε^0	Champ des déformations en membrane
k^0	Champ des déformations en flexion
k^s	Champ des déformations en cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
q_m	Effort appliquées
∂	Dérivée partielle
i et j	Nombres naturels

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice,
m, n	Mode de vibration
$[S]$	Matrice de rigidité
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice



**INTRODUCTION
GÉNÉRALE**

INTRODUCTION GENERALE

La mécanique est la science qui étudie le mouvement, la déformation et les états d'équilibre d'une gamme de produits de haute technologie, elle peut donc être trouvée dans la plupart des domaines de l'industrie et de l'ingénierie. Une évolution qui tend à devenir une révolution, un spectacle auquel participent les contemporains dans tous les domaines de l'industrie, notamment l'industrie mécanique, un domaine déjà très vaste qui ne cesse de croître car il englobe la fabrication des matériaux de base et les différentes étapes de utilisation. Pour cela, les industriels doivent s'intéresser davantage à la recherche dans les laboratoires de recherche, en abandonnant les procédés anciens, et avec l'aide du progrès scientifique, et donc de la synthèse la plus prudente et la plus audacieuse, en abandonnant les anciennes méthodes employées jusqu'à présent les meilleures.

Le développement de cette science a un impact très important sur notre vie, car son objectif principal est de satisfaire les besoins de l'homme tout en l'aidant à satisfaire sa curiosité de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure. Le but de cette science est de produire plusieurs matériaux dont les plus importants sont les matériaux métalliques utilisés pour concevoir les pièces et les machines les plus complexes. Par la suite, ses matériaux ont commencé à montrer leurs limites face aux contraintes, aboutissant à des composites à hautes propriétés mécaniques qui pouvaient être façonnés à volonté par le concepteur et ainsi dotés d'un potentiel illimité.

Un matériau composite est un matériau généralement composé de deux ou plusieurs matériaux de propriétés différentes, dont la combinaison donne des performances globales meilleures que les composants utilisés seuls. Plusieurs propriétés sont améliorées comme le poids qui était réduit, la rigidité et la résistance à la fatigue, à la corrosion aussi à l'usure, qui ont été augmenté.

Les composites sont toujours sollicités et peuvent être endommagés, donc un problème sérieux se trouve dans son dernier problème, qui est la discontinuité des propriétés et des concentrations de contraintes élevées au niveau de l'interface, car ces matériaux sont généralement constitués de couches. Cette discontinuité est à l'origine de la transition abrupte des composants qui créent la stratification.

Pour éviter le phénomène de dépolymérisation interfaciale et d'endommagement de ces matériaux, et pour assurer une meilleure résistance mécanique et thermique, des recherches ont été mises en place pour concevoir de nouveaux matériaux plus performants que les composites fibreux avec des propriétés chimiques et mécaniques plus performantes, et présentant une excellente adhésion intercouche. .

Le résultat de cette étude est la conception d'une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Quelles sont les nouvelles tendances en science des matériaux ? En réalité, ce sont des composites, mais ils sont plus sophistiqués et la fraction volumique de chaque composant change progressivement et continuellement, ce qui modifie les propriétés du matériau et élimine la discontinuité au niveau de l'interface. Le même matériau caractéristique du matériau constitutif. La FGM a attiré l'attention de plusieurs chercheurs en raison de la continuité des propriétés physiques et mécaniques dans une ou plusieurs directions, ainsi que des avantages de la réduction des différences de propriétés des matériaux et de la réduction des contraintes thermiques. Une plaque métal-céramique à gradient fonctionnel (FG) qui équilibre la rigidité et l'usinabilité du métal avec la résistance à la chaleur, la résistance à l'usure et la résistance à l'oxydation de la céramique. Leur utilisation est appréciée dans l'aérospatiale, le génie civil, le génie mécanique, les travaux publics et de nombreux autres domaines où la céramique peut agir comme une barrière thermique en raison de sa composition riche.

Pour résoudre le problème des structures mécaniques qui utilisent des poutres et des plaques comme éléments structuraux dans la région élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie qui explique correctement le comportement statique et dynamique de la structure. Parmi ces théories, la théorie classique des plaques minces "CPT", la théorie des déformations de cisaillement du premier ordre "FSDT" et la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur "HSDT" et leurs approches monocouches équivalentes n'ont pas de rupture soudaine. le plus approprié pour les matériaux FGM. Modifications des propriétés mécaniques 3 Cela contraste avec les composites traditionnels. Pour surmonter les lacunes rencontrées lors de l'utilisation de la théorie ci-dessus, ce travail utilise une nouvelle théorie de déformation de cisaillement HSDT avec seulement quatre variables inconnues à cinq endroits dans le HSDT traditionnel, un FGM rectangulaire épais. L'accent est mis sur l'étude du comportement statique de la plaque. Pour améliorer ce travail, notre mémoire est divisée en quatre chapitres :

Le premier chapitre décrit une généralité sur les matériaux composites et FGM. Le deuxième chapitre présente une variété de théories de déformation des plaques, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, jusqu'aux plus utilisées et enfin la théorie d'ordre élevé. Dans le chapitre 3, Analyse statique des plaques FGM (développement mathématique). Le chapitre 4 présente les résultats et discussions.

Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera les résultats du travail présenté ainsi que des perspectives pour les futurs travaux dans le domaine d'étude des structures mécanique.

Chapitre 1
*Généralités sur les
matériaux composites et
FGM*

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites et FGM

1.1. Définition

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

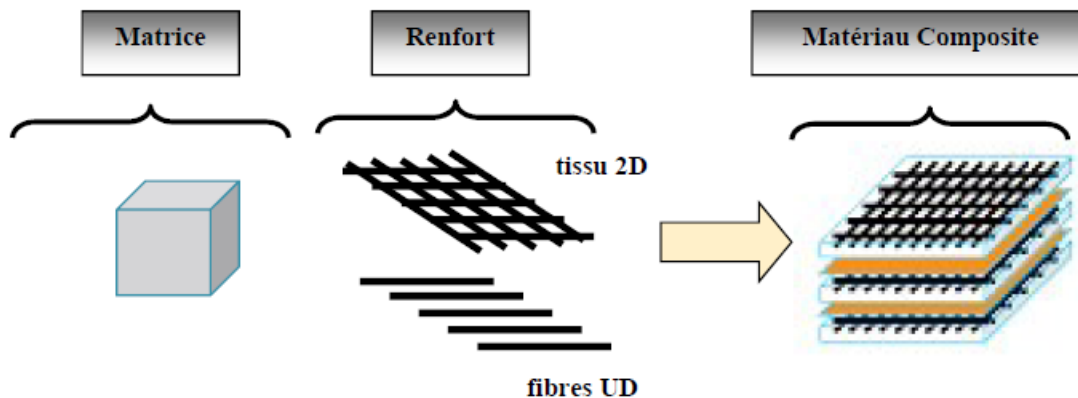


Figure 1.1. Constituants de base d'un matériau composite [1]

1.2. Constituants d'un composite

1.2.1. Matrice

La matrice est l'un des deux principaux constituants de base des matériaux composites. Le rôle principal de la matrice est de maintenir les renforts en place et de leur assurer la cohésion et la protection. Elle permet également la transmission des efforts mécaniques vers les renforts. Elle est généralement homogène et isotrope. On distingue les matrices céramiques, les matrices métalliques, les matrices minérales et les matrices organiques. On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères

thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement. Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters très largement utilisés, les résines époxy (ou époxydes) qui constituent la résine type pour les composites HP et les résines phénoliques. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène (PP), les polyamides (PA) [1]

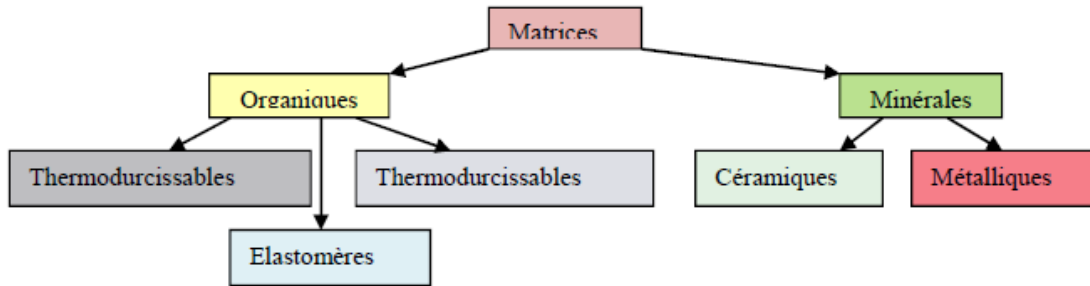


Figure 1.2. Principaux familles de matrice [1]

1.2.1.1 Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY 556. Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau 1.1. [2]

Tableau 1.1 Caractéristiques des résines thermodurcissables [2]

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\epsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

1.2.1.2 Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B. L'avantage de ces résines consiste à pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et

durcies par refroidissement ce qui facilite leur moulage par viscoplasticité. Cette transformation est réversible, permettant donc le recyclage de ce matériau. Renforcées par des fibres longues ou courtes, l'utilisation de ces résines se développe fortement et notamment comme matrice des composites "structuraux". De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau 1.2. [2]

Tableau 1.2. Caractéristiques des résines thermoplastiques [2]

résines	T_f (°C)	ρ (kg/m ³)	ϵ_t^R (%)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

1.2.1.3. Les élastomères

Sont des polymères synthétiques ou naturels dont la structure particulière confère une importante élasticité (Jusqu'à 500 % d'allongement par rapport à la taille initiale). À titre d'exemple, nous citons : les polyuréthanes, les silicones d'élastomères, le latex, le néoprène, etc.



Figure 1.3 Exemples d'élastomères

1.2.1.4 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200° C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, les

résines bismaléimides et polyamides sont les plus utilisées. Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200° C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde. Les résines polyamides sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250° C, à la résistance de l'aluminium.

1.2.2. Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre). Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...)
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...)
- des particules de carbone (noir de carbone) [3]

1.2.3. Les additifs

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage.
- pigments et colorants.
- agents anti-retraits.
- agents anti-ultraviolets.
- accélérateur.
- catalyseur.

1.2.4. Renforts

Le renfort est généralement composé de matériau plus dur que la résine, son rôle principal est d'assurer au matériau une grande résistance surtout à la traction, et qui se présente généralement sous forme de fibres (diamètres de 5 à 20 µm) (figure 1.4) :

-fibres longues unidirectionnelles (carbone, verre)

- fibres longues tissées (tissus 3D et 2D)

- fibres courtes réparties aléatoirement sans directions privilégiées (mat) Les fibres sont de type organique (fibres en polyamide, polyester, polypropylène ...) et inorganiques (fibres de verre, de carbone,) ou encore naturelles (cellulose). En général, elles présentent d'excellentes caractéristiques mécaniques. En fonction de la forme des renforts, on distingue deux types de composites :

-les composites à fibres : constitués de fibres continues ou discontinues (fibres coupées ou courtes). Leur orientation permet de moduler les propriétés mécaniques du matériau et d'obtenir des matériaux isotropes ou anisotropes.

-les composites à particules : les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux

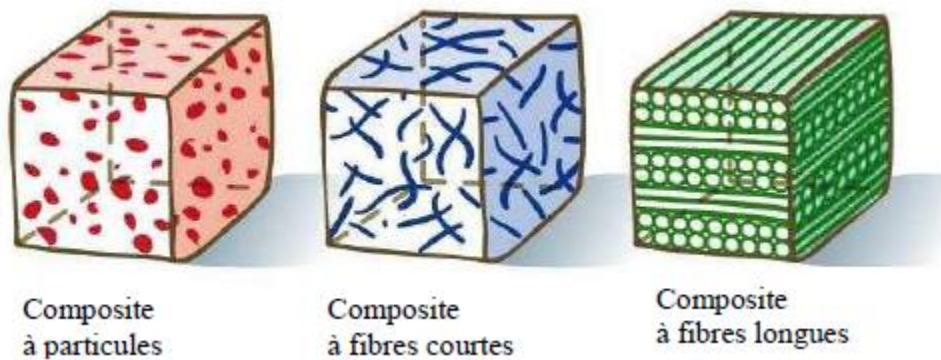


Figure 1.4. Les structures géométriques des renforts de composites à fibres longues, à fibres courtes et à particules [1]

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.5.

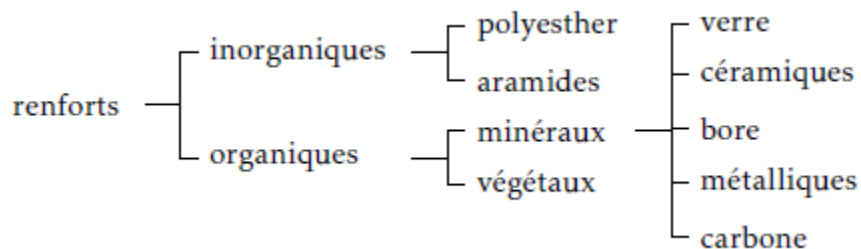


Figure 1.5. Types de renfort [2]

1.2.4.1. Types de renfort

Le type de tissu est choisi en fonction de sa durabilité, c'est-à-dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi, surtout, choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce. Parmi les fibres les plus employées, nous citons :

a. Fibres de verre

Ces fibres sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (Bâtiment, nautisme et autres applications non-structurales aéronautiques) (Figures 1.6.a – 1.6.b). Leur fabrication se fait en général par étirage illustré dans la figure 1.6.c. Les oxydes minéraux constituant la matière première (Silice, alumine etc...) sont mélangés en proportion voulue suivant le type de fibre de verre désiré. Ce mélange est ensuite porté à très haute température ($>1500^{\circ}\text{C}$) afin d'être liquéfié pour être étiré à travers une filière sous forme de filaments de diamètres calibrés. Ces filaments isotropes sont ensimés pour optimiser l'adhésion de la matrice, puis assemblés pour former les fils, eux-mêmes stockés sous forme de bobine. Cette bobine est alors étuvée, pour éliminer l'eau résiduelle et pour stabiliser l'ensimage. Les fibres de verre ainsi obtenues sont amorphes, ce qui leur confère des caractéristiques mécaniques, parfaitement isotropes. Cependant, leur faible module d'élasticité, ainsi que leur densité supérieure aux fibres de carbone limitent leur utilisation pour la fabrication de pièces structurales. [4]



Figure 1.6.a fibres de verre

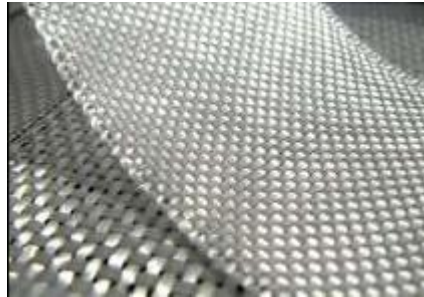


Figure 1.6.b Tissue de fibres de verre

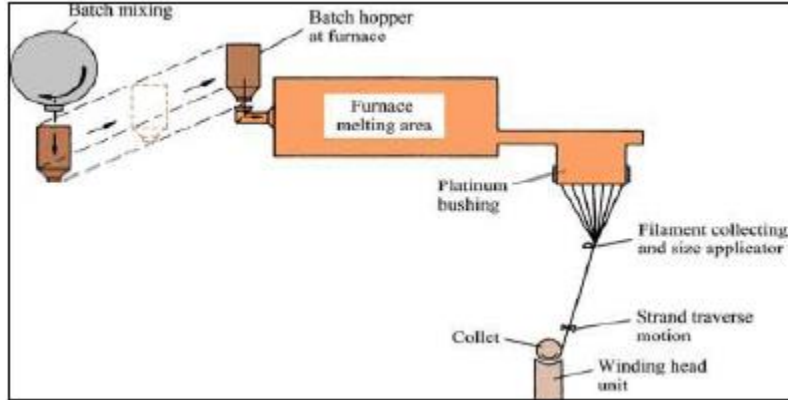


Figure 1.6.c Description des différentes opérations du procédé mécanique des fibres de verre [5]

b. Fibres de carbone

Sont utilisées pour des applications structurales telles que les panneaux monolithiques du Caisson central de l'A380 (Figure 1.7.2). Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée (figure 1.7.1). Le plus utilisé de ces précurseurs est le Poly Acrylonitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300 °C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500 °C. Il ne subsiste alors que la structure lamellaire hexagonale 2D d'atomes de carbone. [6]

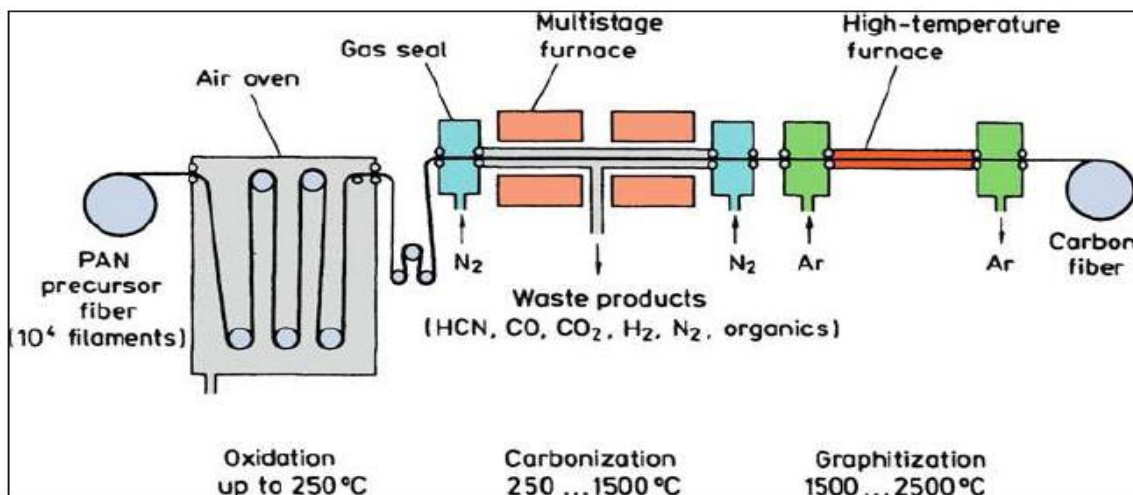


Figure 1.7.1. Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN [7]

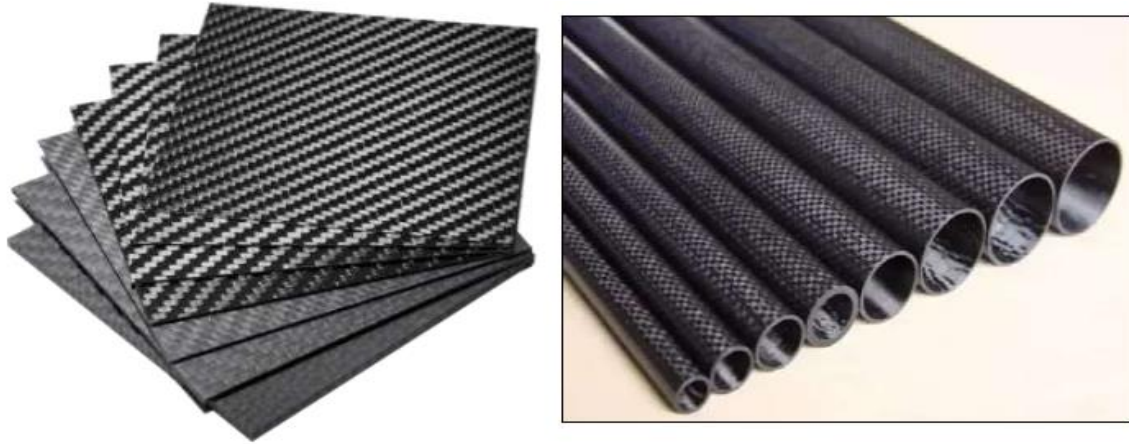


Figure 1.7.2. Plaque et rouleaux en fibres de carbone [8] [9]

Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de $7\mu\text{m}$ de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) ($5,5\mu\text{m}$ de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de $3000\text{ }^\circ\text{C}$, sous argon. Cette graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres, telle que utilisés en aviation, figure 1.7.

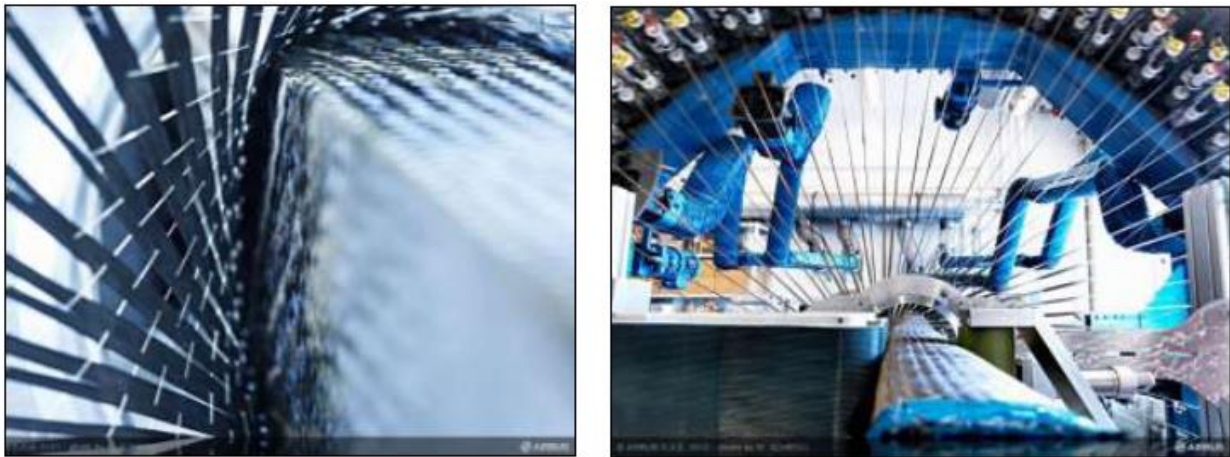


Figure 1.7.3. Utilisation des fibres de carbone dans la famille des avions Airbus [10]

De même que pour les filaments de verre, les filaments de carbone sont soumis à un traitement de surface (Imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer les propriétés d'adhérence fibre/matrice, tableau 3.

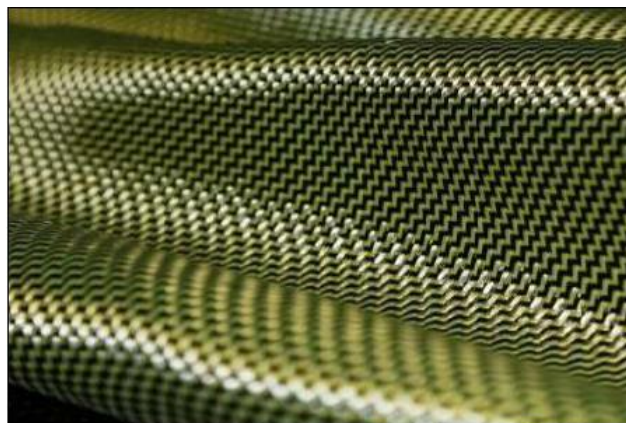
Tableau 1.3. Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules) [11]

Type de fibre	Module élastique E (GPa)	Contrainte à rupture σ_R (Mpa)	Exemple de fibre
Haute Résistance (HR)	$E_I < 265$	3500	P-30X (Cyttec), F1
Module Intermédiaire (IM)	$265 < E_I < 320$	5600	P-55S (Cyttec), F2
Haut Module (HM)	$320 < E_I < 440$	4400	M40J (Torayca)
Très Haut Module (THM)	$E_I > 440$	3900	P-75S (Cyttec), M55J (Torayca)

Ce traitement de surface est suivi par un procédé d'ensimage textilo-plastique qui facilite l'accrochage de la matrice organique, qui protège les fibres contre l'abrasion et qui favorise l'agglomération des filaments lors de la fabrication des mèches. Il est important de noter que les fibres de carbone sont sensibles à l'oxygène dès 400 °C, et qu'elles présentent une mauvaise résistance aux chocs. Enfin, le prix de ces fibres reste relativement élevé, mais il n'a cessé de diminuer avec l'augmentation des volumes de production.

c. Fibres d'aramide

Plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar®, Twaron®, Technora®, Nomex®, etc... (utilisées pour des applications spécifiques telles que la protection balistique (Gilets pare-balles) ou bien pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1.

**Figure 1.8.** Tissue en fibre d'aramide (Kevlar) [12]

Pour les fibres aramides, la méthode « Dry jet wet spinning » est utilisée. Le processus est illustré à la figure 1.9. La polycondensation en solution de diamines et d'halogénures de diacides à basses

températures (Près de 0 °C) donne les polyamides formant un aramide. Les basses températures sont utilisées pour inhiber toute génération de sous-produits et favoriser la formation de polyamide. Le polymère résultant est pulvérisé, lavé et séché ; mélangé avec H₂SO₄ concentré ; et extrudés à travers une filière à environ 100 °C. Les jets des orifices traversent environ 1 cm de couche d'air avant de pénétrer dans un bain d'eau froide (0 - 4 °C). La fibre se solidifie dans une lame d'air et l'acide est éliminé dans le bain de coagulation. Le capillaire de la filière et l'intervalle d'air provoquent la rotation et l'alignement des domaines, ce qui donne des résultats hautement cristallins et orientés tels quels les fibres. La température plus élevée permet d'utiliser une solution de filage plus concentrée et des vitesses de filage plus élevées. Des vitesses de rotation de plusieurs centaines de mètres par minute peuvent être atteintes. [5]

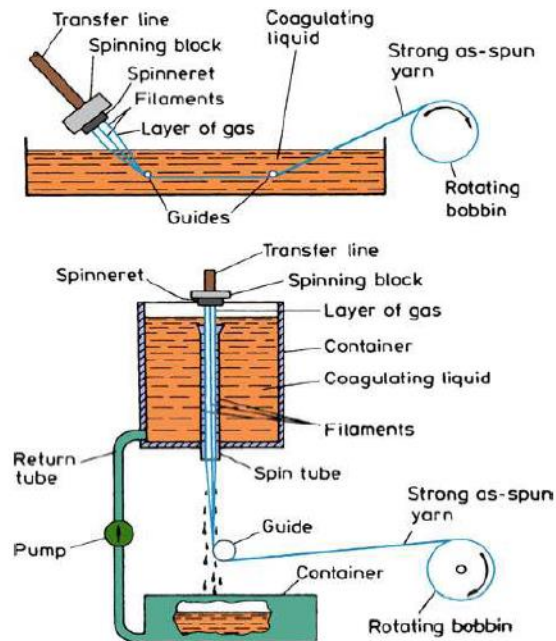


Figure 1.9. Processus de fabrication des fibres d'aramide [5]

d. Fibres végétales

Présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques, car sont mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin, ou le bambou (Figure 9).



Figure 1.10. Exemple des fibres végétales

1.2.4.2. Architecture des renforts

a. Les unidirectionnels (UD)

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Les tissus se composent de fils de chaîne et de trames perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise. [1]

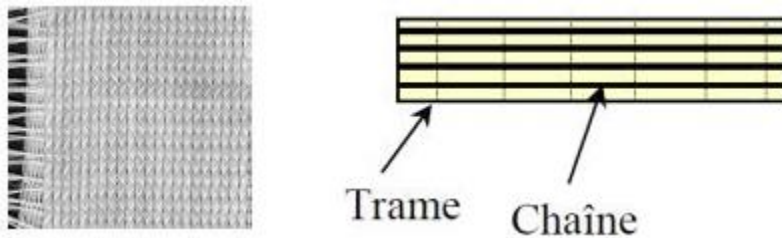


Figure 1.11 Renforts unidirectionnels

b. Les bidirectionnels

La forme surfacique, dite aussi structure bidirectionnelle (2D), est la structure typique pour des pièces en formes de plaques ou de coques. Il s'agit d'un assemblage de fibres sous forme de mèches, orientées suivant deux directions généralement perpendiculaires, soit par couches successives, soit par tissage. [1]

➤ Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

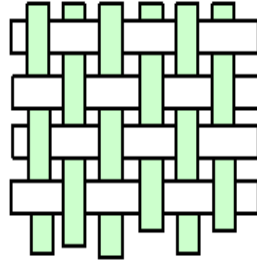


Figure 1.12. Renforts Toile ou taffetas

➤ **Serge**

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé 2/2.

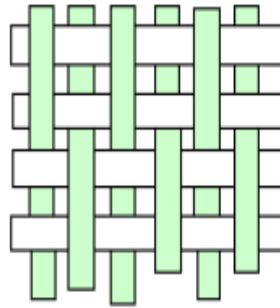


Figure 1.13 Renforts Serge

➤ **Satin**

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs ($n-1$) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.

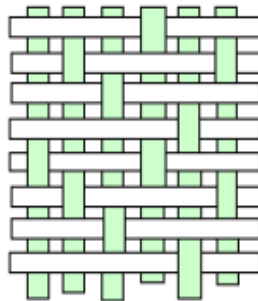


Figure 1.14 Renforts Satin

1.3. Les matériaux FGM

1.3.1. Historique et concept des FGM

La création des FGM est apparue au Japon au début des années 1980, lorsque les chercheurs ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée dans un projet aérospatial [13]. Ils ont d'abord été conçus d'abord comme matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion [14]. Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites, fabriqués d'une manière spéciale, qui garantissait un changement gradué, varier d'un matériau à l'autre soit en continue ou discontinue par étape (Figure 1.15) des constituants à l'intérieur, souvent de la céramique aux métaux dans un seul corps (matériaux microscopiquement inhomogènes) des FGM les plus connus, à travers la direction de l'épaisseur selon des fonctions mathématiques. Et par conséquent, une modification correspondante des propriétés mécaniques effectives et des caractéristiques du matériau apparaît, en font une solution non seulement au problème thermique (supporter des niveaux de température élevés) bien connus en premier lieu dans les industries aérospatiales, mais aussi à certains problèmes des matériaux composites classiques, tels que la discontinuité des matériaux qui génèrent des niveaux de concentration de contraintes élevés, et donc des problèmes d'interface (la rupture de délaminage) ainsi que des déformations. De plus, les FGM supportent également les charges mécaniques appliquées et offrent de bonnes performances dans des conditions d'utilisation dure et exigeante. En conséquence, les FGM ont attirés plusieurs industries à utiliser leurs composants structurels, et donc beaucoup de domaine de l'ingénierie les étudient de manière approfondie afin de prédire leurs comportements et leurs réponses.

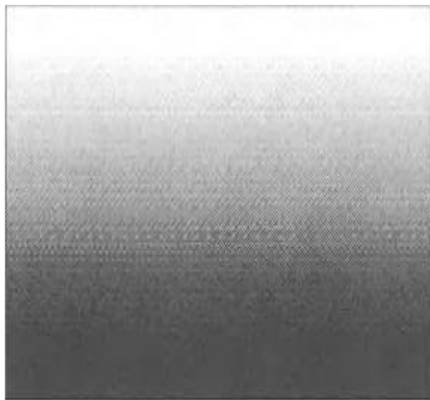


Figure 1.15b Graduation continue

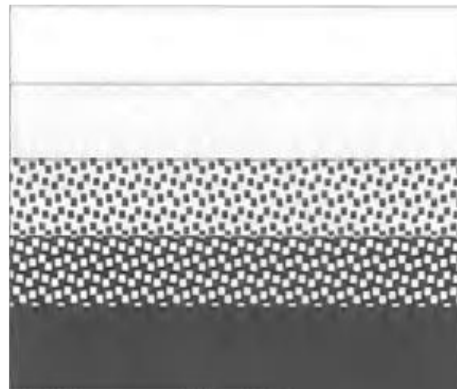


Figure 1.15a Graduation par tranche

1.3.2. Propriétés des FGM

Les FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère [13], souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal, choisie en fonction des propriétés physiques de chaque composant [15].

1.3.2.1 Les métaux

Lorsque la majorité des éléments chimiques dans le tableau de Mendeleïev sont les métaux, ils possèdent plusieurs avantages :

- très bons conducteurs de chaleur,
- très bons conducteurs d'électricité,
- plus souvent durs et rigides,
- déformables plastiquement,
- un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [15].

1.3.2.2 Les céramiques

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène.

Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.), caractérisés par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées [15]. Alors qu'ils ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [13]:

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.

1.3.3. Les champs d'utilisation des FGM

Grace à leurs importantes propriétés, les FGM sont devenu un choix favorable dans la plupart des domaines d'ingénierie et d'industrie. Cela inclus une application dans le domaine aérospatial, automobile, biomédical, électrique, énergétique, et maritime.

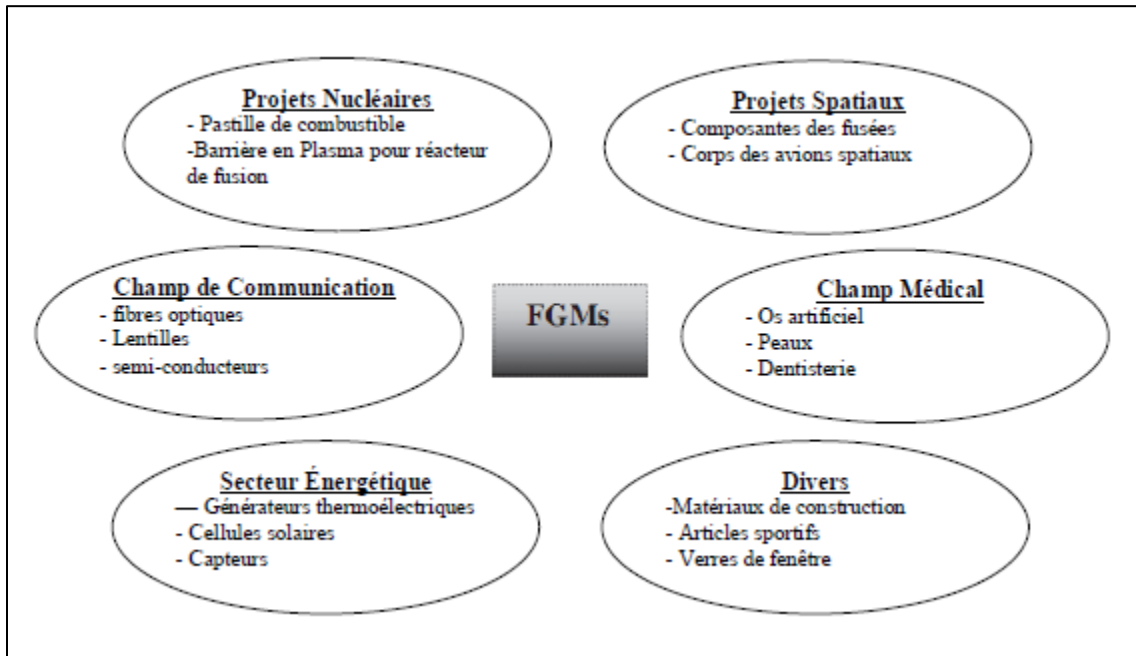


Figure 1.16. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriété [16]

1.3.4. Processus et technique de fabrication des FGM

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établies, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, ou on peut citer [14] :

- La compaction sèche des poudres,
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur.
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

1.3.5. Modèle et mécanique des structures en FGM

Depuis l'apparition des FGM, les théories particularisées à analyser les structures isotropes ou composites sont établies à nouveau, diverses théories ont été proposées et développées, et plus particulièrement qui sont concernées aux structures plaques, qu'ils ont acquis un intérêt appréciable [17].

Chapitre 2

Théorie d'élasticité

2.1 Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) est une technologie avancée des matériaux composites dont les compositions varient selon aux performances requises. Il est produit par une variation graduelle continue des fractions volumiques des constituants (Koizumi 1997), le FGM est ainsi adapté à diverses applications, telles que thermique revêtements de barrière pour moteurs céramiques, turbines à gaz, fusions nucléaires, couches minces optiques, électronique des biomatériaux, etc. Au cours des dernières années, de nombreux grades fonctionnels (FG) structures de plaques qui ont été appliquées pour l'ingénierie domaines ont conduit au développement de diverses plaques théories pour prédire avec précision la flexion, le flambement et les comportements vibratoires des plaques FG Jha et al.[18]

2.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan x, y) et par une petite épaisseur (notée $h(x,y)$), par rapport aux autres dimensions à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence CT. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène. [19]

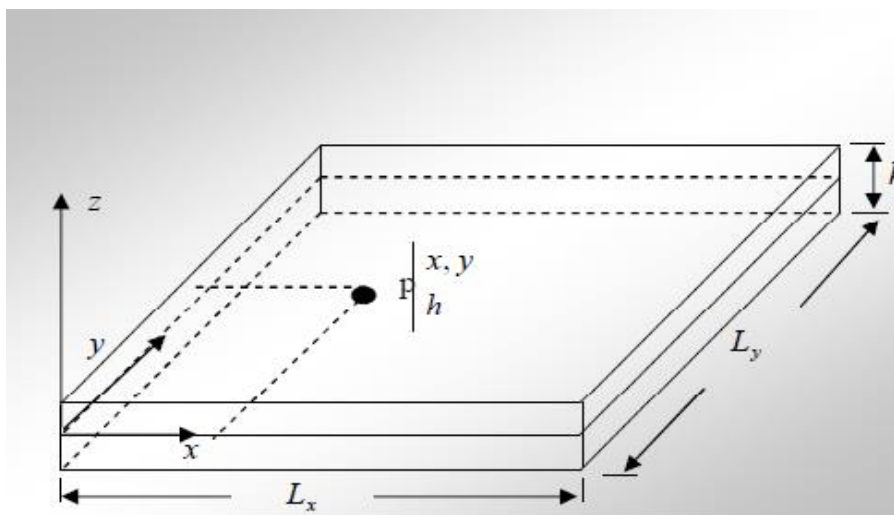


Figure 2.1 Géométrie d'une plaque

Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épaisse suivant la grandeur de l'épaisseur h , nous admettons généralement :

-pour les plaques épaisses $\frac{1}{20} < \frac{h}{l} < \frac{1}{4}$

-pour plaque minces $\frac{h}{l} < \frac{1}{20}$

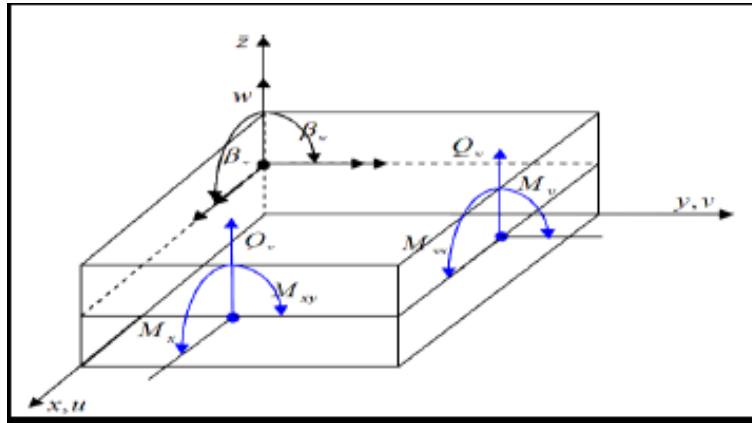


Figure 2.2 Conventions générales [19]

Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

➤ **Les plaques isotropes:** elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).

➤ **Les plaques orthotropes:** leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art.

➤ **Les plaques anisotropes:** leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale. [19]

Le comportement élastique d'une plaque doit satisfaire trois conditions :

- **L'équilibre:** toutes les forces extérieures, y compris les réactions appliquées au système, doivent s'équilibrer;
- **La résistance:** les efforts intérieurs doivent être en tout point inférieurs à la résistance ultime;
- **La compatibilité et la continuité des déformations:** la déformée de la structure doit être compatible avec les conditions d'appuis et ne doit présenter aucune discontinuité.

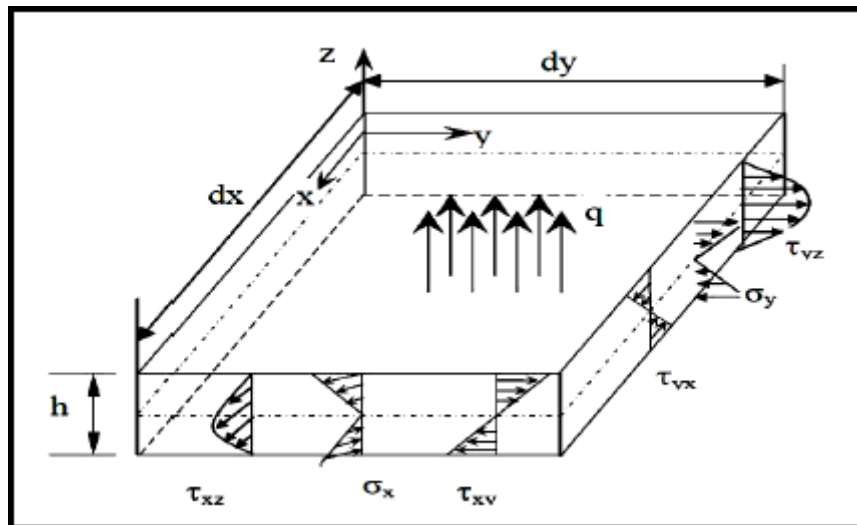


Figure 2.3 Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène [20]

2.3 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [21] de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée (Figure. 2.4 et 2.5).

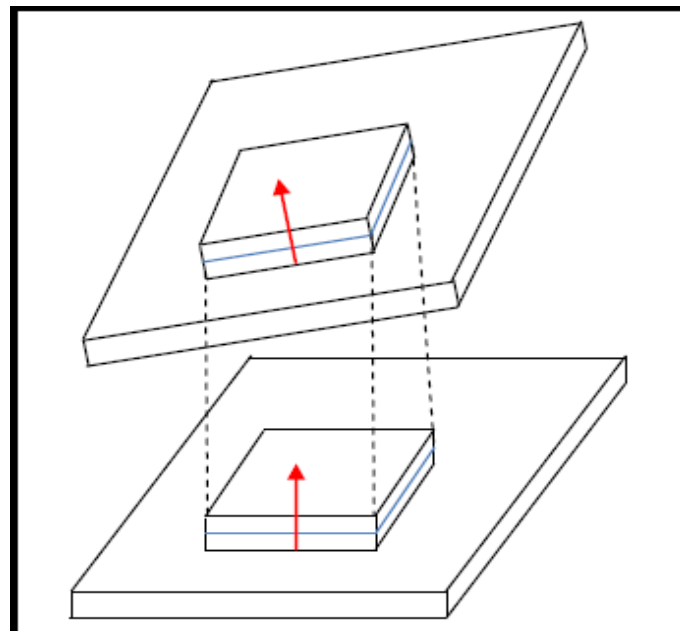


Figure 2.4 Déformation d'une plaque mince [22]

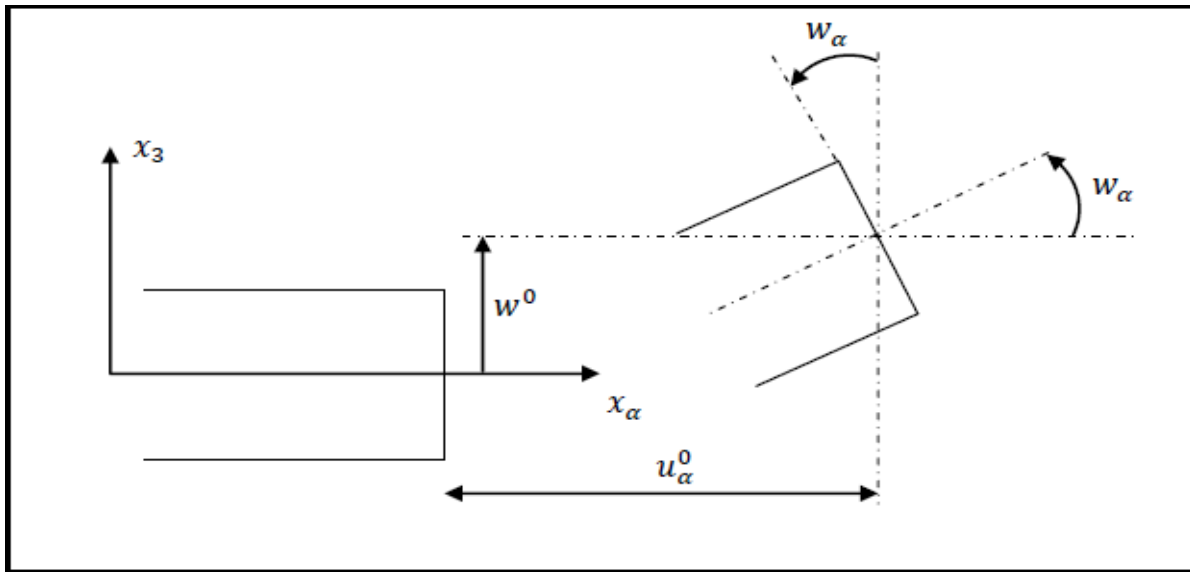


Figure 2.5 Cinématique de Love – Kirchhoff [22]

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff de contrainte plane, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- 1) La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- 2) L'hypothèse des sections droites inclut celle dite de conservation des normales (les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur la normale à la surface moyenne déformée) ce qui conduit au modèle classique généralement associé au nom de Kirchhoff (mais qui doit également beaucoup aux scientifiques français du 19ème siècle : Sophie Germain, Lagrange, Poisson, Boussinesq, Levy, Saint-Venant).
- 3) La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- 4) Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- 5) La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .
- 6) Les éléments basés sur la théorie sont les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x,y)$. Les dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression

de l'énergie de déformation. Ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments correspond à la continuité du déplacement transverse c.-à-d. à la continuité de w et de la pente normale

$$\frac{dw}{dx} [22].$$

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Avec :

u_α : le déplacement de membrane dans la direction

w : la flèche de la plaque

w_α : la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse w .

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations des déformations sont données comme suit :

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_z - \theta_x) = 0 \\
2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\theta_z - \theta_y) = 0
\end{cases} \quad (2.4)$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\
\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\
\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}
\end{cases} \quad (2.5)$$

L'équation précédente peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

2.4 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire. Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement, affectent les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux

effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 5 de celles de Kirchoff. Les points 2 et 4 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets. [23] [24].

- Les éléments basés sur la théorie Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w, θ_x, θ_y . Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de déformation n'interviennent que des dérivées premières de w, θ_x, θ_y . La condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité C^0 .

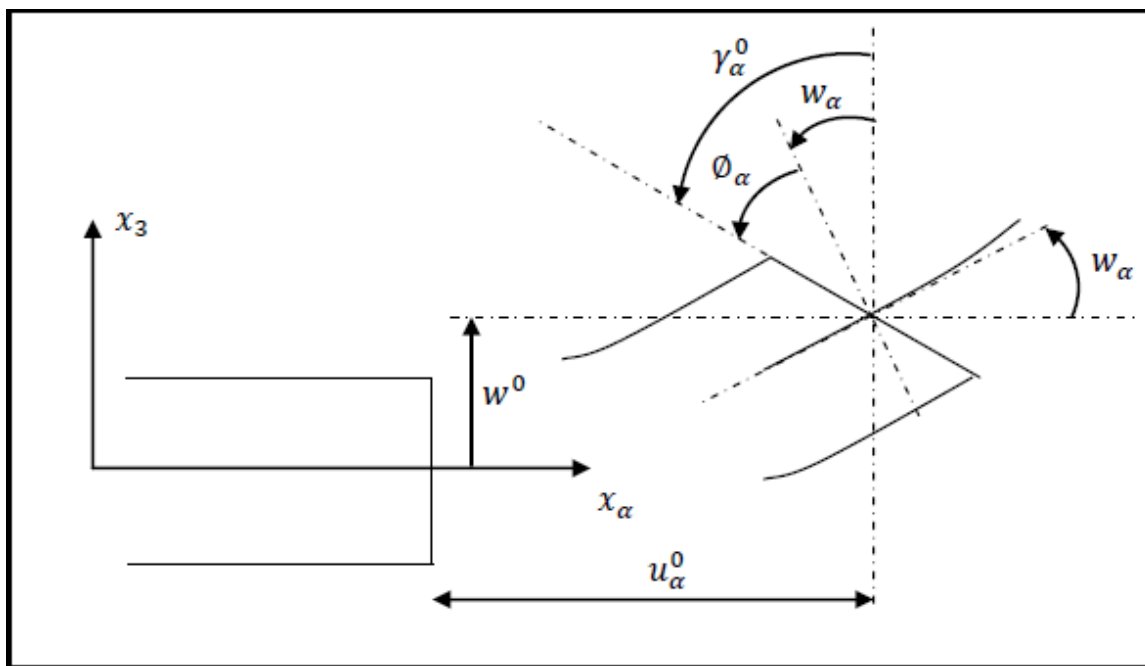


Figure 2.6 Cinématique de Reissner – Mindlin [22]

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. Si θ_x et θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe, ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z\phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\theta_x \neq \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\theta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.9)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u et v : Les déplacements de la membrane ;

w: Le déplacement transversal ;

$\beta_x(\theta_y)$: La rotation du plan xy autour de y ;

$\beta_y(-\theta_x)$: La rotation du plan xy autour de x ;

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

Et par ailleurs, ε_{xy} et ε_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{dw}{dx} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{dw}{dy} \end{cases} \quad (2.12)$$

On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Le vecteur et le tenseur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Et l'on a toujours :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = zk \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z\vec{\chi} \quad (2.16)$$

Efforts résultants de membrane

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (2.17)$$

Moments de flexions

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (2.18)$$

Efforts tranchants

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.19)$$

2.5 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites de la théorie du premier ordre, plusieurs chercheurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les concepts sont basés sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le voilement de la section dans la configuration déformée (Figure 2.7). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent, Avec $i \in \{1, 2, 3\}$

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (2.20)$$

Dans le cas des théories du premier ordre Reissner-Mindlin, on a $\phi_i^{0(i)} = 0$ pour $j=2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$

Hildebrand et al sont les premiers à introduire ces raffinements avec :

$$\phi_4^{0(4)} = \phi_i^{0(3)} = 0 \quad i=0$$

Le même développement est utilisé par Nelson et Lorch [25] en introduisant des coefficients de correction. Lo et al. [26] proposent un modèle qui prend en compte également l'effet de déformation normale : $\phi_i^{0(4)} = \phi_3^{0(3)} = 0$

Les solutions analytiques de différents modèles d'ordre supérieur sont comparées dans [26]. En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin). Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées.

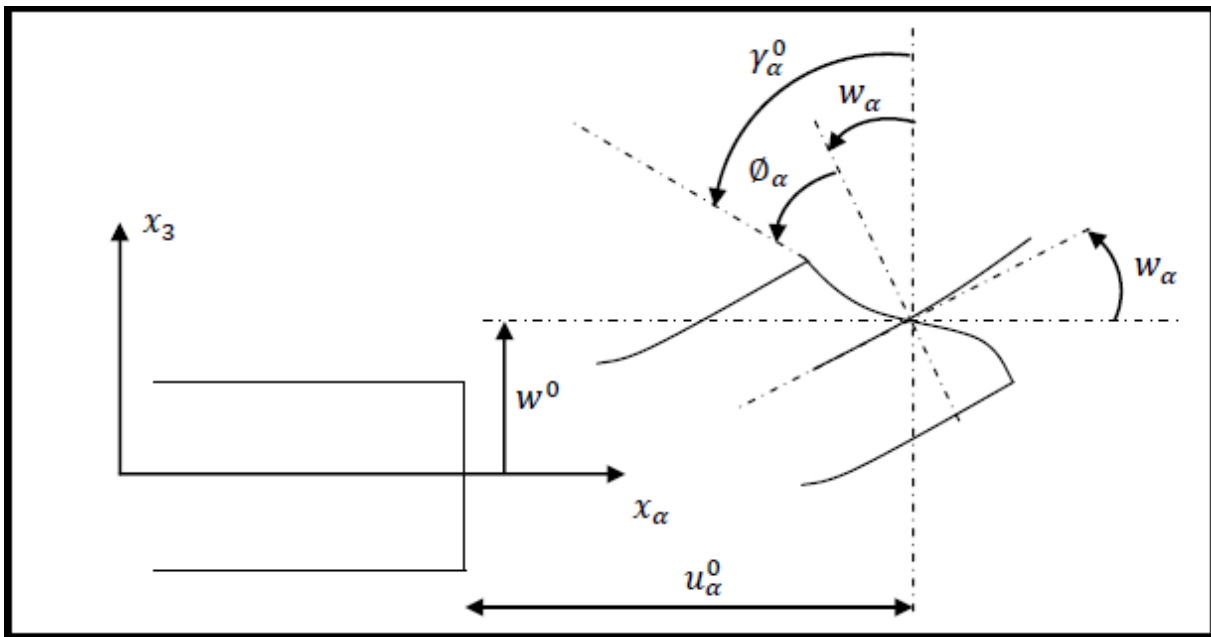


Figure 2.7 Cinématique d'ordre supérieur [22]

Souvent on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (2.1) est utilisé avec :

$$\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_3^{0(3)} = \phi_3^{0(1)} = 0, \phi_\alpha^{0(3)}, \alpha = \{1, 2\} \text{ dépend de } \phi_\alpha^{0(3)} \text{ et } w_\alpha$$

L'expression de (2.1) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha + f(z) \gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.21)$$

2.6 Revue bibliographique sur l'analyse des structures FGM

Au cours des dernières années, de nombreuses structures de plaques à gradient fonctionnel (FG) qui ont été appliquées dans des domaines d'ingénierie ont conduit au développement de diverses théories de plaques pour prédire avec précision les comportements de flexion, de flambage et de vibration des plaques FG (Jha et al. 2013). La théorie classique des plaques (CPT), connue comme la plus simple, néglige l'effet de déformation en cisaillement transversal (Feldman et Aboudi 1997 ; Javaheri et Eslami 2002 ; Mahdavian 2009 ; Mohamed et al. 2010 ; Baferani et al. 2011) ne donne que résultats convenables pour les plaques FG minces. Pour les plaques FG épaisses et moyennement épaisses, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) a été utilisée (Ardestani et al. 2014; Bellifa et al. 2016; Golmakani et Alamatian, 2013; Lazreg et al, 2016, b ; Hosseini- Hasemi et al. 2011). Dans une telle approche, les déplacements dans le plan varient linéairement dans l'épaisseur et nécessitent un facteur de correction de cisaillement pour corriger la variation irréaliste des contraintes et des déformations de cisaillement transversales dans l'épaisseur.

Alternativement, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) avec des variations d'ordre supérieur des déplacements ont été développés pour les plaques FG (Abdelbari et al., 2016; Taibi et al., 2015; Jha et al. 2013 ; Talha et Singh 2010 ; Zenkour, 2013 ; Thai et al., 2013; Mantari et Soares 2012, 2013 Nguyen et al., 2014), ils peuvent prédire plus précisément les comportements des plaques FG modérément épaisses, et aucun facteur de correction de cisaillement n'est requis. Cependant, en pratique, certains de ces HSDTs sont coûteux en calcul à cause du nombre de variables supplémentaires introduites dans la théorie (Pradyumna et Bandyopadhyay 2008 ; Jha et al. 2013 ; Neves et al. 2012, 2012, 2013 ; Reddy, 2011).

2.7 Conclusion

Comme on a vu ci-dessus, il existe donc différents types de plaques (isotropes, anisotropes et orthotropes) qui se comportent avec différents comportements (flexionnel, membrane ou mixte), dont les études se font dans différents états (statique, dynamique). Ces études se basent généralement sur différentes théories, principalement on utilise celle de Love - Kirchhoff dans le cas des plaques minces, et celle de Reissner-Mindlin dans le cas des plaques épaisses.

Chapitre 3

***Modèle théorique pour
l'analyse de la flexion
des plaques FGM***

3.1. Introduction

Considérons une plaque FGM comme indiqué sur la Fig. 3.1 ayant une épaisseur (h), la longueur (a) et une largeur (b). La plaque FG est constituée d'un mélange de composants en céramique et en métal dont les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque en fonction des fractions volumiques des constituants.

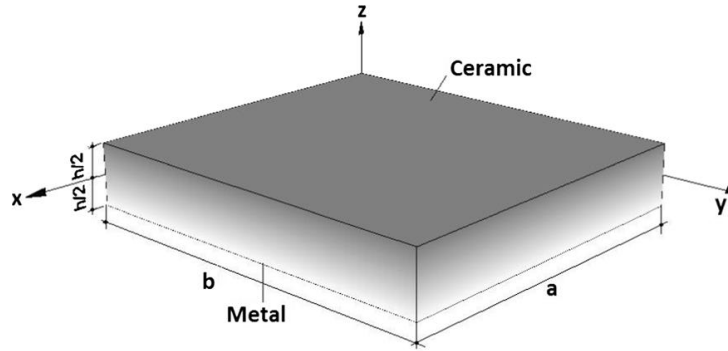


Figure 3.1 Géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée

3.2. Propriétés physiques effectives des plaques FG

Les propriétés matérielles élastiques effectives des matériaux FGM peuvent être estimées par un modèle continu et un modèle discret. Le premier modèle suppose une distribution continue du matériau dans la direction de l'épaisseur sans tenir compte de la microstructure, tandis que le second tient compte de la microstructure avec des géométries idéalisées. Le modèle continu est le plus utilisé pour étudier les FGM.

Dans cette étude, les propriétés matérielles à travers l'épaisseur de la plaque sont estimées par deux schémas d'homogénéisation : la forme de loi de puissance et la forme exponentielle. Pour la forme loi de puissance, les propriétés matérielles effectives des plaques FG sont exprimées par [28]:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m \quad (3.1)$$

Où P_c et P_m sont les modules de Young (E), le rapport de Poisson (ν) et la masse volumique (ρ) des matériaux céramique et métal situés respectivement sur les surfaces supérieure et inférieure. La fraction volumique du matériau céramique V_c est donnée comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad (3.2)$$

Où p est l'indice de puissance qui est positif et $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. La distribution de la fraction volumique de la céramique à travers l'épaisseur de la plaque est présentée sur la figure 3.2.

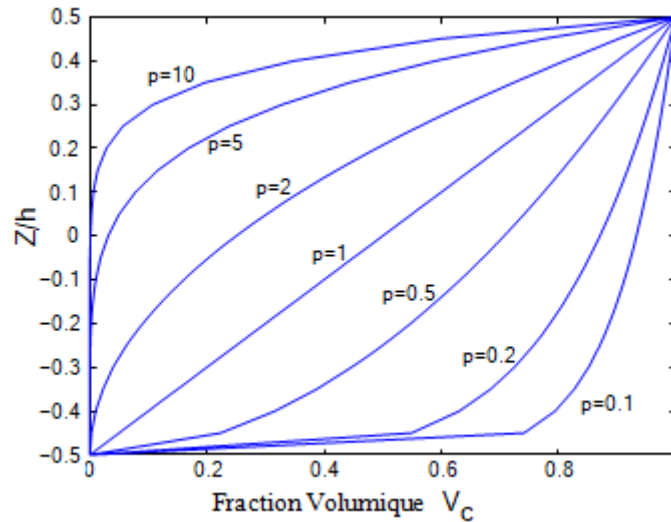


Figure 3.2. Fraction volumique du matériau céramique

En outre, le module efficace de Young de plaques FG peut être directement calculé selon la loi exponentielle [29]

$$E(z) = E_0 e^{p(z/h+0.5)} \quad (3.3)$$

Où E_0 est le module de Young du matériau homogène.

3.3. Cinématique et déformations

Le champ des déplacements de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé utilisée dans cette étude peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$ sont cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque, $f(z)$ représente la fonction de forme définissant la répartition des contraintes et contraintes transversales de cisaillement le long de l'épaisseur. En supposant que $\theta_x = -\partial\phi(x, y)/\partial x$ et $\theta_y = -\partial\phi(x, y)/\partial y$ [30] le champ de déplacement peut être réécrit sous une forme plus simple comme suit :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Où la fonction de forme $f(z)$ est choisie comme [29]

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.6}$$

On peut voir que le champ de déplacement dans Eq. (3.5) contient seulement quatre inconnues (u_0, v_0, w_0, φ). Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (3.5) est écrit sous la forme compacte suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + zk^b + fk^s \tag{3.7a}$$

$$\gamma = g\gamma^0 \tag{3.7b}$$

Où $g = -df/dz$, ε^0, k^b, k^s et γ^0 sont des déformations membranaires, des courbures et des contraintes de cisaillement transversales, respectivement. Ils sont liés au champ de déplacement dans l'équation (3.5) comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 &= \left\{ \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0 \right\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}, \\
k^b &= \left\{ k_{xx}^b, k_{yy}^b, k_{xy}^b \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\},
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$k^s = \left\{ k_{xx}^s, k_{yy}^s, k_{xy}^s \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\},$$

$$\gamma^0 = \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{matrix} \right\} \tag{3.8b}$$

Les relations linéaires constitutives des plaques FG sont écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Où

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad C_{12}(z) = \nu(z)C_{11}(z) \quad (10a)$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (10b)$$

3.4. Équations d'équilibre

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour dériver les équations d'équilibre

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V) dt \quad (3.11)$$

Où δU , δV sont les variations d'énergie de déformation et de l'énergie potentielle respectivement. La variation de l'énergie de déformation est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &= \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} \right. \\ &\quad + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} \\ &\quad + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ &\quad \left. - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right] \delta A \end{aligned} \quad (3.12)$$

Où N, M et Q sont les résultantes des efforts internes définis par :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.13a)$$

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.13b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (3.13c)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (3.13d)$$

La variation du travail effectué par les charges transversales appliquées sur la plaque est donnée par :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA \quad (3.14)$$

Substitutions des éq. (3.12), (3.14) dans l'éq. (3.11), et en faisant l'intégration par parties et la collecte des coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \varphi$. Les équations d'équilibre suivantes sont obtenues :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.15a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.15b)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (3.15c)$$

$$\delta \varphi : \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.15d)$$

Substitutions l'éq. (3.7a) dans l'éq. (3.9a) et les résultats subséquents dans les Éq. (3.13a), (3.13b) et (3.13c), les résultantes des efforts sont obtenus en termes de déformations sous forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Où A; B; D; B^s ; D^s ; H^s sont les rigidités de la plaque FGM données par:

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) C(z) dz \quad (3.17)$$

De même, à l'aide des éq. (7b), (9b) et (13d), les forces de cisaillement transversales peuvent être calculées à partir des équations constitutives comme suit :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Où les rigidités de cisaillement A^s de la plaque FG sont défini par :

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{55}(z) dz \quad (3.19)$$

En remplaçant les éq. (3.16) et (3.18) dans l'éq. (3.15a-15d), les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements ($u_0; v_0; w_0; \varphi$) comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.20b)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + q = 0 \end{aligned} \quad (3.20c)$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \\ - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.20d)$$

3.5. Solutions analytiques pour des plaques FG simplement appuyées

La procédure de solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées comme produit de coefficients indéterminés et de fonctions trigonométriques connues pour satisfaire les équations gouvernantes et les conditions aux limites.

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos \lambda x \sin \mu y \quad (3.21a)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin \lambda x \cos \mu y \quad (3.21b)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y \quad (3.21c)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y \quad (3.21d)$$

Où $\lambda = m\pi / a$, $\mu = n\pi / b$. La charge transversale q est également étendue dans la série des sinus de Fourier double comme:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (3.22)$$

Où $q_{mn} = q_0$ pour la charge répartie sinusoïdale. Substitutions l'éq. (3.21a–3.21d) et (3.22) dans l'éq. (3.20a-3.20d) et en recueillant les déplacements pour n'importe quelle valeur de m et n , on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ x_{mn}^0 \\ y_{mn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Où

$$\begin{aligned}
k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \\
k_{12} &= (A_{12} + A_{66})\lambda\mu, \\
k_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2, \\
k_{14} &= -B_{11}^s\lambda^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda\mu^2, \\
k_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, \\
k_{23} &= -B_{22}\mu^2 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2\mu, \\
k_{24} &= -B_{22}^s\mu^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2\mu, \\
k_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4, \\
k_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4, \\
k_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Chapitre 4
Résultats Numériques

4.1. Introduction

Considérons une plaque rectangulaire FG simplement supportée avec longueurs dans le plan, a et b dans les directions x et y , respectivement (Fig. 3.1). Plaques FG en combinant deux matériaux de métal (Al) et de céramique (Al_2O_3) où leurs propriétés physiques sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 4.1 Propriétés du métal et de la céramique

Matériaux	Module de Young (GPa)	Masse volumique (kg/m^3)	Coefficient de Poisson
Aluminium (Al)	70	2.702	0.3
Alumina (Al_2O_3)	380	3.800	0.3

Un certain nombre des exemples numériques sont analysés afin de vérifier l'exactitude de la présente étude et enquêter l'influence de l'indice de puissance et le rapport géométrique sur les déflexions, les contraintes des plaques FG. les propriétés des matériaux sont calculées par la formule de loi de puissance citée en Eq. (3.1). Pour commodité, les paramètres non dimensionnels suivants sont utilisés :

$$\bar{u} = \frac{100E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, z \right),$$

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right),$$

$$\sigma_{xx}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx} \left\{ \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right\},$$

$$\sigma_{xy}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}(0, 0, z),$$

$$\sigma_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}(0, 0, z)$$

4.2. Analyse de la flexion des plaques FGM

Le premier exemple vise à vérifier la validité de la théorie actuelle dans la prévision du comportement de flexion. Le déplacement axial, la flèche centrale et les contraintes de cisaillement axiales et transversales des plaques Al/Al₂O₃ modérément épaisses soumises à des charges sinusoïdales sont calculées dans le tableau 4.2. Les résultats trouvés sont comparés à ceux prévus par Wu et Chiu [31] en utilisant une théorie quasi-3D de déformation de cisaillement, Thai et Kim [32] en se basant sur une théorie hyperbolique d'ordre élevé (HSDT) et celui de Trung-Kien Nguyen [33] où une théorie des plaques de déformation par cisaillement hyperbolique (HSDT) a été utilisée. Un bon accord est constaté entre les différents résultats ce qui prouve l'efficacité du modèle proposé. Il est clair que l'augmentation de l'indice de puissance (p) conduit à l'augmentation des déplacements axial et transversal et donc à la réduction des différentes contraintes.

Tableau 4.2 Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques carrées Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$)

p	Modèles	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
1	Quasi-3D Wu et Chiu [31]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	HSDT Thai et Kim [32]	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
	Trung-Kien Nguyen [33]	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
	Présente	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
2	Quasi-3D Wu et Chiu [31]	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	HSDT Thai et Kim [32]	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
	Trung-Kien Nguyen [33]	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
	Présente	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
4	Quasi-3D Wu et Chiu [31]	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	HSDT Thai et Kim [32]	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	Trung-Kien Nguyen [33]	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
	Présente	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
8	Quasi-3D Wu et Chiu [31]	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	HSDT Thai et Kim [32]	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	Trung-Kien Nguyen [33]	1.0719	0.9744	0.9444	0.5852	0.2117
	Présente	1.0720	0.9744	0.9445	0.5853	0.2117

Le deuxième exemple est consacré à l'analyse de la flèche des plaques fonctionnellement graduées en utilisant la loi exponentielle donnée dans l'équation (3.3) pour différents valeurs d'indice matériel (p) et des rapports géométriques (a/h) et (b/a). Il convient de noter qu'une bonne corrélation est présentée avec les résultats trouvés à partir de la théorie 2D HSDT de Nguyen [33] dans tous les cas, confirmant la précision de la présente théorie permettant de prédire de bonnes réponses en flexion des plaques FGM

Tableau 4.3 Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées Al/Al₂O₃ avec la distribution du matériau selon la forme exponentielle

a/h	b/a	Théories	Indices de puissance					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
2	1	HSDT Mantari et al. [34]	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
		HSDT Thai and Kim [32]	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4011	0.3079
		Trung-Kien Nguyen [33]	0.6211	0.5615	0.5073	0.4579	0.3921	0.3014
		Présente	0.6211	0.5615	0.5073	0.4579	0.3921	0.3015
	2	HSDT Mantari et al. [34]	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
		HSDT Thai and Kim [32]	1.2775	1.1553	1.0441	0.9431	0.8086	0.6238
		Trung-Kien Nguyen [33]	1.2569	1.1367	1.0275	0.9284	0.7965	0.6153
		Présente	1.2569	1.1367	1.0275	0.9284	0.7965	0.6153
	3	HSDT Mantari et al. [34]	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
		HSDT Thai and Kim [32]	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9719	0.7506
		Trung-Kien Nguyen [33]	1.5115	1.3671	1.2360	1.1169	0.9587	0.7414
		Présente	1.5115	1.3671	1.2360	1.1169	0.9587	0.7414
4	1	HSDT Mantari et al. [34]	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		HSDT Thai and Kim [32]	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		Trung-Kien Nguyen [33]	0.3575	0.3235	0.2927	0.2649	0.2280	0.1775
		Présente	0.3575	0.3235	0.2927	0.2649	0.2280	0.1775
	2	HSDT Mantari et al. [34]	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		HSDT Thai and Kim [32]	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		Trung-Kien Nguyen [33]	0.8285	0.7498	0.6787	0.6145	0.5296	0.4135
		Présente	0.8285	0.7498	0.6787	0.6145	0.5296	0.4135
	3	HSDT Mantari et al. [34]	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		HSDT Thai and Kim [32]	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		Trung-Kien Nguyen [33]	1.0281	0.9305	0.8424	0.7628	0.6576	0.5137
		Présente	1.0281	0.9305	0.8424	0.7628	0.6576	0.5137

Afin d'illustrer l'influence de l'indice matériel sur la variation des déplacements et des contraintes des plaques FGM simplement appuyées, plusieurs graphes ont été tracés. La figure 4.1 représente la variation du déplacement axial (\bar{u}) à travers l'épaisseur de plaque carrée soumise à un chargement sinusoïdal. Il est clair que la partie inférieure est plus déformable (flexible) que la partie supérieure composée par la céramique. Dans ce cas, la flexion conduit à deux phénomènes importants ; la compression conduit à des valeurs négatives et la traction à des valeurs positives.

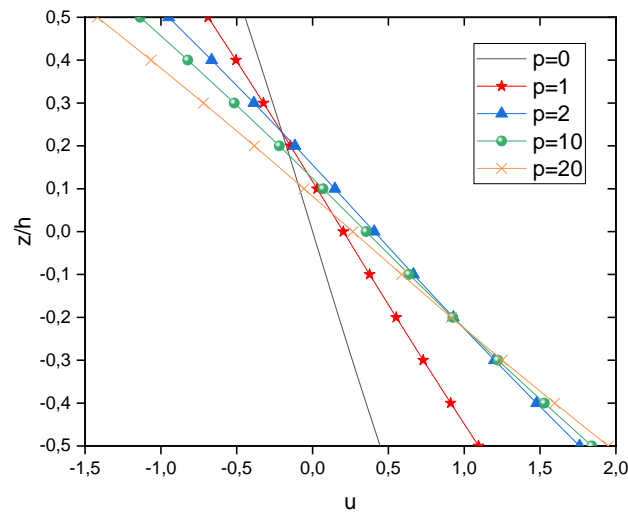


Figure 4.1. Variation du Déplacement axial (\bar{u}) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$)

Dans la figure 4.2, la distribution des contraintes axiales suivant l'épaisseur de la plaque FGM pour différents valeurs d'indice de puissance (p) est montrée. Il est important de noter que les distributions à travers l'épaisseur des contraintes dans le plan ($\bar{\sigma}_{xx}$) sont linéaires pour les plaques homogènes alors qu'elles sont paraboliques pour les plaques FGM. On peut voir que la contrainte axiale maximale augmente avec l'augmentation de (p) tandis qu'il apparaît des contraintes de compression minimales à la partie inférieure de la plaque et des contraintes de traction maximales à la partie supérieure de plaque.

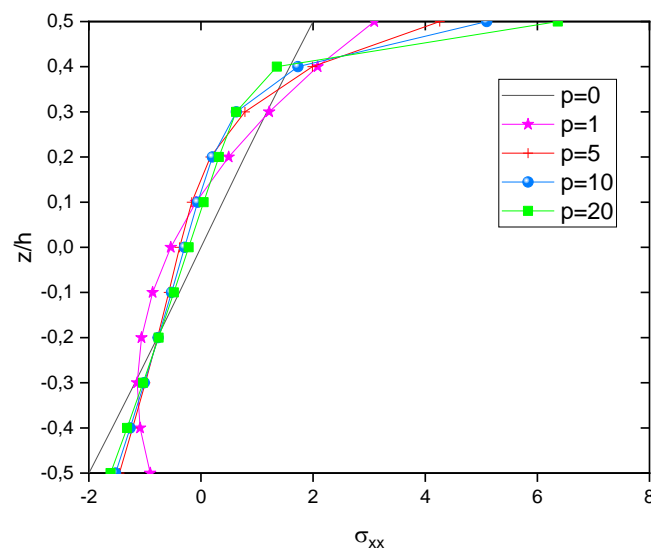


Figure 4.2. Distribution de la Contrainte normale ($\bar{\sigma}_{xx}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$)

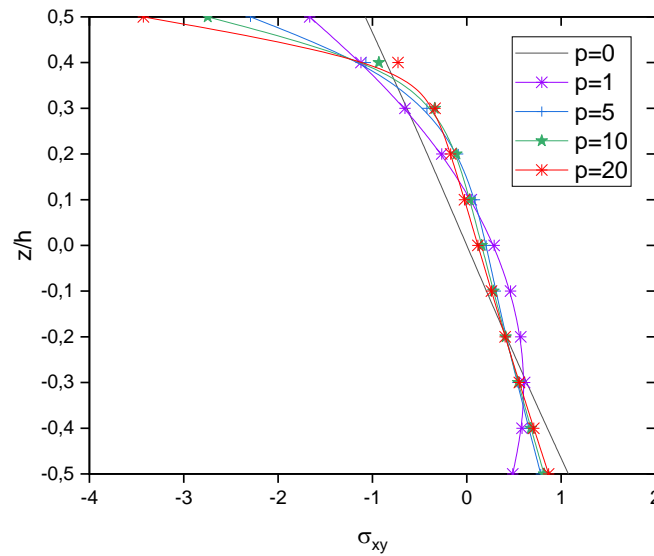


Figure 4.3. Variation de la contrainte de cisaillement axiale ($\bar{\sigma}_{xy}$) d'une plaque carrée type Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$)

La variation de la contrainte de cisaillement axiale ($\bar{\sigma}_{xy}$) selon l'épaisseur d'une plaque carrée modérément épaisse type Al/Al₂O₃ est présentée dans la figure 4.3. D'après ce graphe, on constate que des valeurs négatives des contraintes se trouvent à la partie supérieure de la plaque et des contraintes positives apparaissent dans la partie inférieure.

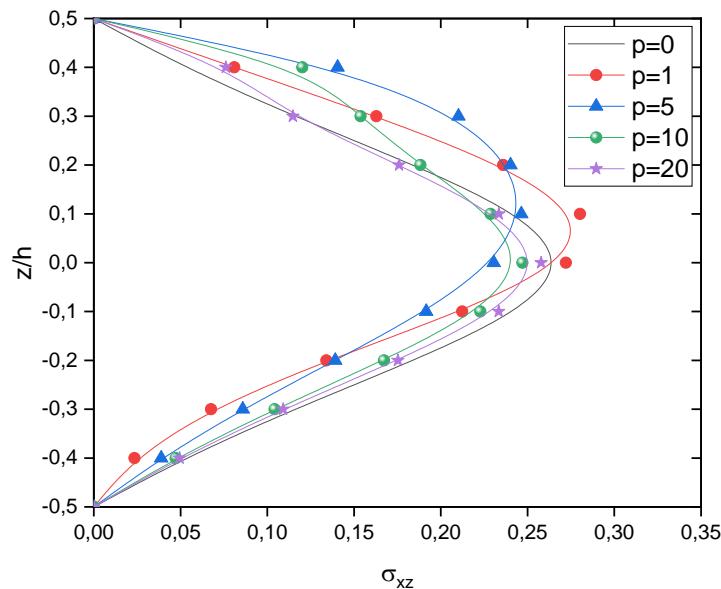


Figure 4.4. Variation de la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée type Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$)

La figure 4.4 montre l'évolution des contraintes tangentielles ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur de la plaque FGM. On voit clairement que la contrainte de cisaillement maximale est située dans le plan médian pour les plaques homogènes et a tendance à se déplacer légèrement vers la surface supérieure par rapport à $(\bar{w})_p$, ce qui est dû à la caractéristique d'asymétrie trouvée dans les matériaux FGM.

Un graphique d'interaction 3D est illustrée sur la figure 4.5 montrant l'influence de l'indice de puissance (p), du rapport géométrique (a/h) sur l'évolution du déplacement transversale (\bar{w}) d'une plaque P-FGM. On remarque sur cette figure que la flèche centrale augmente avec (p) et diminue avec une augmentation de (a/h). A partir de ces résultats, on peut conclure l'augmentation de l'indice de gradient (p) engendre une diminution de la rigidité de la plaque ce qui augmente les valeurs de la flèche.

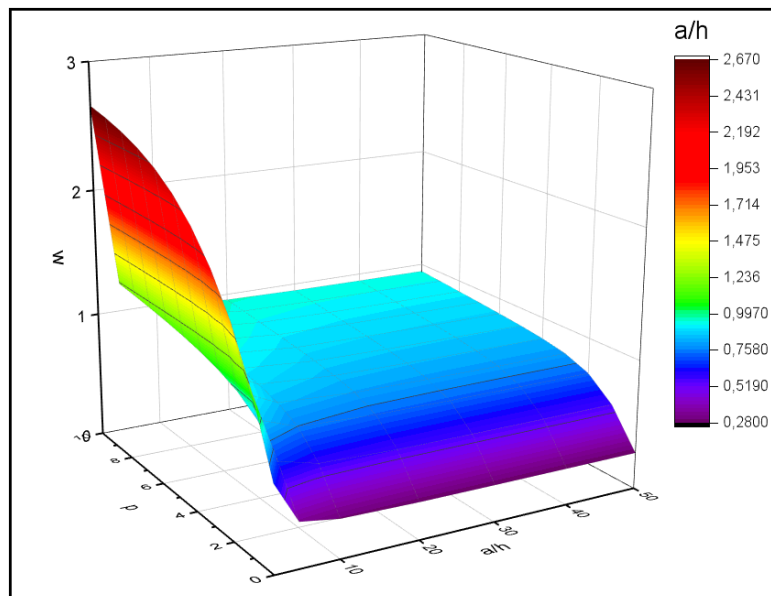


Figure 4.5. L'effet du rapport géométrique (a/h) et de l'indice de puissance (p) sur la flèche centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque type (Al/Al_2O_3).

4.3. Conclusion

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion des plaques FG simplement appuyées. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature. En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche simple et facile à mettre en œuvre pour analyser le comportement statique des plaques fonctionnellement graduées.



CONCLUSION
GENERALE ET
PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) dans les domaines de l'ingénierie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie simple et adéquate permettant d'analyser les plaques en FGMs avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques P-FGM carrées à deux constituants (céramique Al_2O_3 et métal Al), sur appuis simples aux quatre bords, et sans contraintes thermiques.

Premièrement, on a vérifié la validité de la théorie d'ordre élevé dans la prévision du comportement de flexion. Le déplacement axial, la flèche centrale et les contraintes de cisaillement axiales et transversales des plaques Al/Al_2O_3 modérément épaisses soumises à des charges sinusoïdales reposant sur des appuis simples, Les résultats trouvés sont comparés à ceux prévus.

Deuxièmement on a analysé la flèche des plaques fonctionnellement graduées en utilisant la loi exponentielle pour différents valeurs d'indice matériel (p) et des rapports géométriques (a/h) et (b/a). Il convient de noter qu'une bonne corrélation est présentée avec les résultats trouvés à partir de la théorie 2D HSDT. Dans tous les cas, confirmant la précision de la présente théorie permettant de prédire de bonnes réponses en flexion des plaques FGM.

En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche simple et facile à mettre en œuvre pour analyser le comportement statique des plaques fonctionnellement graduées.



REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Deghboudj Samir, Matériaux Composites https://www.researchgate.net/publication/356289155_Materiaux_Composites
- [2] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux composites. Engineering school. 2008
- [3] DJEBLOUN Youcef, Etude Bibliographique, Généralité sur les matériaux composites, p.7
- [4] Bessaim, A., Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S., & Bedia, E. A. A. (2013). A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(6), 671-703
- [5] Chawla, K. K., 2013. *Composite Materials Science and Engineering*. s.l.:Springer.
- [6] Ledru, Y., 2009. *Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés Aéronautiques*, Toulouse: s.n.
- [7] Baker, A., 1984. Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites—an overview of Australian work. *Composite Structures*, Volume 2, pp. 153-181.
- [8] <http://www.protechcomposites.com/2x2-twill-gloss-matte-finish-7-piece-sample-pack/>
- [9] <https://bioplasticsnews.com/2014/02/17/carbon-fiber-from-biomass/>
- [10] <https://www.airbus.com/newsroom/news/en/2017/08/composites--airbus-continues-to-shape-the-future.html>
- [11] Zouggar K., 2016. *Etude du comportement mécanique d'une plaque composite de type verre/polyester soumise à un impact à faible énergie*, thèse de doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, Algérie
- [12] <https://medium.com/@and06227/structured-ideation-refinement-82f3f7223da6>
- [13] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. *Functionally graded materials design, processing and applications*, materials technology series. Springer science+ business media, llc. Ta418.9. F85f86 1999 :2-3

- [14] Mahmoudi A. Thèse de doctorat en sciences. Étude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics. 2019 :7-8 ; 10-11 ;
- [15] Ait Sidhoum I. Thèse de doctorat en sciences. Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué. Universités Mohamed-Boudiaf. Oran. Faculté des sciences et de la technologie. 2019 :19-21
- [16] Belabed Z. Thèse de doctorat en sciences. Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil. 2016 : 9-12 ; 20-21 ; 28-29
- [17] Menasria A. Thèse Doctorat En Sciences. Étude De L'effet De La Microstructure Sur Le Flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées. Université Djillali Liabes.
- [18] Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K.: A critical review of recent research on functionally graded plates. Compos. Struct. 96, 833–849 (2013)
- [19] SAYAD Youcef, Modélisations des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis
- [20] KHILOUN Mokhtar, Investigation sur la réponse mécanique des structures en matériaux à gradient de propriété
- [21] G. KIRCHHOFF. Uher das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40.
- [22] DERBANE Said, Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis
- [23] Luc Jaouen « Vibrations de flexion des plaques », Université de Sherbrooke, édition Mars 2002.
- [24] S. Timoshenko « Théorie des plaques et coques », Université de Stanford, édition 1961, volume 1 et 2.
- [25] R.B. Nelson & D.R. Lorch. « A refined theory for laminated orthotropic plates. ASME J. Appl. Mech., vol. 41, 1974.

- [26] K.H. Lo & R.M. Christensen. « A high-order theory of plate deformation. Part 2 :laminated plates. J. Applied Mechanics, vol. 44, 1977.
- [27] T. KANIT& K. SWAMINATHAN. « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory ». Composite Structures, vol. 56, 2002.
- [28] Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47(1-3), 663-684
- [29] Zenkour, A. M. (2007). Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. Archive of Applied Mechanics, 77(4), 197-214
- [30] Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2014a). Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. International Journal of Mechanical Sciences, 78, 35-43.
- [31] Wu, C.-P., Chiu, K.-H.: Rmvt-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. Compos. Struct. 93(5), 1433–1448 (2011)
- [32] Thai, H.T., Kim, S.E.: A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. Compos. Struct. 96, 165–173 (2013)
- [33] Trung-Kien Nguyen, A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials 2013
- [34] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Soares, O.G.: Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. Compos. Struct. 94, 714–723 (2012)