



Faculty of Sciences and Technology
Department of Mechanical Engineering

كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم المهندسة الميكانيكية

N° d'ordre : M...../GM/2022

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

**ETUDE CINEMATIQUE DES MÉCANISMES DE
TRANSFORMATION DE MOUVEMENT**

Présenté par :

- ❖ CHACHOUA Ouafaa
- ❖ BONNOUR Djazia

Soutenu le 12 / 07 / 2022 devant le jury composé de :

Président	Dr BENDOUKHA Mohamed	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr BENKHETTAB Mohamed	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Pr GUECHICHI Hocine	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

Remerciement

Nous remercions tout d'abord, Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté, l'amour du savoir et la patience d'entamer et de terminer cette étude.

*Nous voudrions présenter nos remerciements en premier lieu au **Pr H. Guechichi** (Université de Mostaganem) et pour la qualité de son encadrement, sa patience, sa gentillesse, sa disponibilité. Il était toujours présent pour nous aider et pour répondre à nos questions.*

Nos profonds remerciements vont également à tous nos amis(es) et toutes les personnes qui nous ont aidé et encouragé pour réaliser ce modeste travail dans les conditions sévères.

Je voudrais adresser mes remerciements à mes parents qui m'ont toujours donné le maximum de ce qu'ils pouvaient. Vous m'avez épaulé dans les moments difficiles et toujours été un exemple dans le travail.

Nous exprimons toute notre reconnaissance au président du jury Dr Bendoukha Mohamed d'avoir accepté de présider le jury de notre mémoire. Nos vifs remerciements sont exprimés également au Dr Benkhatteb Mohamed pour avoir bien voulu accepter d'évaluer ce travail.

Dédicace

Avant tout, Elhamdulillah puisque c'est grâce à Dieu que je suis arrivé là.

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père, mon exemple éternel, celui qui m'a transmis les vraies valeurs, celui qui s'est sacrifié pour me voir réussir, celui qui m'a tant donné et tant appris. Rien au monde ne vaut les efforts qu'il a fournis jour et nuit pour mon éducation.

A ma mère, à mon adorable mère, à celle qui est toujours présente pour faire mon bonheur. Merci pour tous les sacrifices que vous avez consentis pour que tes enfants grandissent et réussissent.

Je voudrais adresser une dédicace très spéciale à mon cher mari. Pour tout ton encouragement, la motivation et l'amour que tu m'as offert, Je te dédis ce travail, qui n'aurait pas pu être achevé sans ton éternel soutien et optimisme. Tu es un modèle d'honnêteté, de loyauté et de force de caractère. J'espère te combler et te rendre toujours heureux. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, le respect, et la reconnaissance que j'ai toujours eue pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts que tu as fournis jour et nuit pour mon bien-être.

A mes enfants, sachant que sur toute la terre, Il n'existe aucune richesse plus importante pour moi, vous êtes mon paradis, Je vous aime, vous remplissez mon cœur d'amour et de tendresse.

Et à mes frères, ma sœur, mes tantes et mes oncles.

Dédicace

Tout d'abord, je dédie ce modeste ouvrage à mes chers parents que j'adore, pour leur tendresse et leur compréhension, pour leur soutien et leurs incessants encouragements, pour tous les moyens qu'ils mettent à ma disposition pour que je réussisse dans mes tâches, leurs extrêmes exigences, leur savoir vivre en toute humilité. Je ferais mon maximum pour les satisfaire et les rendre fiers de moi, « qu'Allah me les garde »

Je dédie également mon mémoire à :

Mes chers frères Mohamed, Zinou et ma sœur adorée Aya, leur soutien est sans faille ;

À mes chers Ahlem, Nora, Soumia, Roumaïssa

Résumé

La transformation de mouvement est effectuée à l'aide des mécanismes de différents types pour obtenir un mouvement rotoïde à la sortie à partir d'un mouvement de translation ou l'inverse. Dans cette étude, nous nous intéressons uniquement à la cinématique des mécanismes. En effet, l'objectif est de réaliser une étude cinématique sur différents types de mécanismes tels que : bielle-manivelle, mécanisme à quatre barres, mécanisme à cinq barres et mécanisme 'Scotch Yoke'. L'étude cinématique consiste à déterminer les positions, les vitesses et les accélérations de des mécanismes ainsi d'exploiter les résultats obtenus pour tracer les courbes correspondantes. Dans un premier temps, nous identifions les variables d'entrée et de sortie pour chaque mécanisme à analyser. La méthodologie de travail utilisée dans notre étude est l'application des équations de fermeture de boucle qui possède cinq cas de solutions. Après résolution analytique du système d'équations issues de l'analyse cinématique, nous utilisons le code Matlab r2016a afin de déterminer les graphes appropriés lesquels sont indispensables à conception des mécanismes considérés.

Mots clés : Mouvement, mécanisme, bielle-manivelle, trois barres, quatre barres, cinq barres, scotch yoke.

Abstract

Motion transformation is performed using mechanisms of different types to obtain rotoidal motion at the output from translational motion or vice versa. In this study, we are only interested in the kinematics of the mechanisms. Indeed, the objective is to carry out a kinematic study on different types of mechanisms such as : connecting rod-crank, four-bar mechanism, five-bar mechanism and 'Scotch Yoke' mechanism. The kinematic study consists in determining the positions, the speeds and the accelerations of the mechanisms as well as exploiting the results obtained to draw the corresponding curves. First, we identify the input and output variables for each mechanism to be analyzed. The working methodology used in our study is the application of loop closure equations which has five solution cases. After analytical resolution of the system of equations resulting from the kinematic analysis, we use the Matlab r2016a code to determine the appropriate graphs which are essential for the design of the mechanisms considered.

Keys words : Motion, mechanism, slider-crank, three bar, four bar, five bar, scotch yoke.

ملخص

يتم إجراء تحويل الحركة باستخدام آليات من أنواع مختلفة للحصول على الحركة الدورانية عند خرج الحركة الانتقالية أو العكس. في هذه الدراسة ، نحن مهتمون فقط بحركية الآليات. في الواقع، الهدف هو إجراء دراسة : ربط ذراع الرافعة، وآلية أربعة قضبان، وآلية خمسة قضبان، حركية على أنواع مختلفة من الآليات مثل وآلية "سكوتش يوك". تتمثل الدراسة الحركية في تحديد المواضع والسرعات والتسارع للآليات وكذلك استغلال النتائج التي تم الحصول عليها لرسم المنحنيات المقابلة. أولاً، نحدد متغيرات المدخلات والمخرجات لكل آلية يتم تحليلها. منهجية العمل المستخدمة في دراستنا هي تطبيق معادلات إغلاق الحلقة التي تحتوي على خمس حالات حل. بعد التحليل التحليلي لنظام المعادلات الناتج عن التحليل الحركي، نستخدم كود Matlab r2016a لتحديد الرسوم البيانية المناسبة والضرورية لتصميم الآليات التي تم النظر فيها.

كلمات مفتاحية : الحركة، الآلية، كرنك-المنزلق، ثلاثة أعمدة، أربعة أعمدة، خمسة أعمدة، سكوتش يوك.

Sommaire

Introduction générale	
I.1. Définition généralisée d'un mécanisme	01
I.2. Classement des mécanismes de transformation de mouvements	01
I.2.1. Le mécanisme vis-écrou	01
I.2.2. Le mécanisme bielle-manivelle	02
I.2.3. Le mécanisme pignon-crémaillère	03
I.2.4. Le mécanisme à came et galet	04
I.2.4.1. Différentes formes de cames	04
I.3. Etapes à entreprendre avant d'entamer une analyse cinématique	05
I.3.1. Faire une représentation schématique du mécanisme réel	05
I.3.1.1. Le schéma cinématique minimal	05
I.3.2. Retrouver le degré mobilité	06
I.3.3. Choisir un système de coordonnées	06
I.3.4. Identifier tous les liens par des numéros	08
I.3.5. Identifier tous les angles caractérisant les positions des liens	08
I.3.6. Identifier les variables d'entrée et de sortie	08
I.3.7. Résolution de l'équation de fermeture de boucle	09
I.3.7.1. Solutions pour l'équation de fermeture de boucle	09
I.3.8. Vérification des résultats par l'analyse numérique	13
II.1. Généralités sur l'analyse cinématique	15
II.2. Mécanisme plan	15
II.2.1. Caractéristiques géométriques des éléments du mécanisme plan	15
II.3. Mécanisme à trois barres	17
II.3.1. Résolution d'un exemple de mécanisme à trois barres (bielle-manivelle)	17
II.4. Mécanisme à quatre barres	21
II.4.1. Construction des mécanismes articulés à quatre barres	22
II.4.2. Résolution d'un exemple du mécanisme à quatre barres	22
II.5. Mécanisme à cinq barres	26
II.5.1. Résolution d'un exemple de mécanisme à cinq barres	27
II.6. Mécanisme scotch yoke	31
II.6.1. Résolution d'un exemple de mécanisme scotch yoke	32
Conclusion générale	40
Bibliographie	42

Liste de figures

Figure I.1. Illustration généralisée d'un mécanisme _____	01
Figure I.2. Mécanisme vis-écrou _____	01
Figure I.3. Schéma du mécanisme bielle-manivelle _____	02
Figure I.4. Représentation normalisée de mécanisme pignon-crémaillère _____	03
Figure I.5. Schématisation de mécanisme à came et galet _____	04
Figure I.6. Différentes formes des cames _____	05
Figure I.7. Schéma cinématique minimal en 3D et en 2D respectivement _____	06
Figure I.8. Représentation des coordonnées cartésiennes de point M _____	06
Figure I.9. Représentation des coordonnées cylindriques de point M _____	07
Figure I.10. Représentation des coordonnées sphériques de point M _____	07
Figure I.11. Exemple d'un Slider-Crank (bielle-manivelle) _____	08
Figure II.1. Les trois cas des éléments binaires _____	16
Figure II.2. Exemple d'un système à quatre barres _____	16
Figure II.3. Exemple de mécanisme bielle-manivelle _____	17
Figure II.4. Représentation de mécanisme bielle-manivelle étudié et son diagramme vectoriel _____	17
Figure II.5. Représentation de la courbe de vitesse angulaire ω_3 en fonction de θ_2 _____	18
Figure II.6. Représentation de la courbe de vitesse angulaire \dot{r}_1 en fonction de θ_2 _____	19
Figure II.7. Représentation de la courbe d'accélération angulaire α_3 en fonction de θ_2 _____	20
Figure II.8. Représentation de la courbe d'accélération linéaire \ddot{r}_1 en fonction de θ_2 _____	21
Figure II.9. Cric de pompe (mouvement rotatif à réciproque) _____	21
Figure II.10. Mécanisme à quatre barres. _____	22
Figure II.11. Mécanisme d'essuie-glace de voiture _____	22
Figure II.12. Représentation de la courbe de vitesse angulaire ω_3 en fonction de θ_2 _____	23
Figure II.13. Représentation de la courbe de vitesse angulaire ω_4 en fonction de θ_2 _____	24
Figure II.14. Représentation de la courbe d'accélération angulaire α_3 en fonction de θ_2 _____	25
Figure II.15. Représentation de la courbe d'accélération angulaire α_4 en fonction de θ_2 _____	26
Figure II.16. Mécanisme à cinq barres avec joint en P pour passerelle automatique _____	27
Figure II.17. Représentation du mécanisme à cinq barres étudié _____	27
Figure II.18. Représentation de la courbe de vitesse angulaire ω_3 en fonction de θ_2 _____	29
Figure II.19. Représentation de la courbe de vitesse linéaire \dot{r}_4 en fonction de θ_2 _____	29

Figure II.20. Représentation de la courbe d'accélération angulaire α_3 en fonction de θ_2 _____	30
Figure II.21. Représentation de la courbe d'accélération linéaire \ddot{r}_4 en fonction de θ_2 _____	31
Figure II.22. Scotch Yoke de vanne pneumatique (mouvement linéaire à rotatif) _____	32
Figure II.23. Représentation d'un mécanisme scotch yoke décalé et son diagramme vectoriel _____	32
Figure II.24. Représentation des courbes des vitesses linéaires \dot{r}_3 et \dot{r}_4 en fonction de θ_2 _____	34
Figure II.25. Représentation des courbes d'accélération linéaires \ddot{r}_3 et \ddot{r}_4 en fonction de θ_2 _____	35

Nomenclature

m	<i>Degré de mobilité</i>
N	<i>Nombre des solides mobiles</i>
L_5	<i>Nombre de liaisons à un seul degré de liberté (à contact surfacique)</i>
L_4	<i>Nombre de liaisons à un seul deux de liberté (à contact linéaire/ponctuel)</i>
x, y et z	<i>Coordonnées cartésiennes de point M</i>
r, θ et z	<i>Coordonnées cylindriques de point M</i>
r, θ, φ	<i>Coordonnées sphériques de point M</i>
\vec{n}	<i>Normale de point M</i>
i et j	<i>Indices correspondant au lien</i>
r_i et r_j	<i>Longueurs du lien correspondant</i>
θ_i et θ_j	<i>Angles correspondant au lien</i>
N	<i>Nombre des liens du mécanisme</i>
$\vec{r}(t)$	<i>Vecteur de position</i>
b	<i>Vecteur utilisé dans l'analyse de position</i>
α, γ et β	<i>Angles utilisés dans l'analyse de position</i>
\dot{r}_i	<i>Vitesse linéaire correspondante au lien</i>
V_t et V_r	<i>Vecteurs vitesse linéaire et rotationnel respectivement</i>
$\dot{\theta}_i(t)$ et $\dot{\theta}_j(t)$	<i>Vitesses angulaires correspondantes au lien</i>
\ddot{r}_i	<i>Accélération linéaire correspondante au lien</i>
α_i	<i>Accélération angulaire correspondante au lien</i>
S_1 et S_2	<i>Solide 1 et 2</i>
$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$	<i>Vecteur rotation angulaire</i>
T	<i>Période</i>

Introduction Générale

On parle de transformation de mouvement quand on retrouve, à la sortie d'un certain dispositif, un mouvement de nature différente de celui de l'entrée. Les mécanismes utilisés dans ce domaine sont composés de plusieurs organes auxquels sont imprimés de mouvements soit de rotation ou de translation. Il existe également divers types de ces mécanismes puisqu'ils présentent différents avantages lors de fonctionnement.

L'étude de la mécanique est divisée en cinématique, dynamique et statique. On s'intéresse à la cinématique qui consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement. Elle est définie par la façon dont les composants d'un mécanisme sont assemblés les uns avec les autres.

Dans le domaine technique, on distingue deux formes de mouvements : la translation et la rotation. Le mouvement de la plupart des composants est une combinaison de ces deux formes : il s'agit du mouvement plan général.

Dans la pratique, des connaissances en cinématique sont requises pour la construction et le dimensionnement des mécanismes bielle-manivelle, des cames ou des engrenages. Il est indispensable d'avoir assimilé la cinématique d'un corps rigide pour pouvoir utiliser les équations du mouvement, qui mettent en relation les forces du corps et le mouvement.

L'objectif de notre mémoire est d'entamer une étude cinématique des mécanismes de transformation de mouvement. Les mécanismes analysés sont de types : trois barres (bielle-manivelle), quatre barres, cinq barres et scotch yoke.

Notre mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier, on mentionne quelques types des mécanismes de transformation de mouvement, et on résume les cas de solutions rencontrés lors de la résolution d'un exemple avec la méthode analytique de fermeture de boucle.

Le deuxième chapitre est la partie de calcul où nous résoudrons quatre exemples. A l'aide du code Matlab, nous traçons les courbes de vitesse et d'accélération pour chaque mécanisme analysé.

Chapitre I

***Etude bibliographique sur les
mécanismes de transformation
de mouvement et la procédure
d'analyse cinématique***

I.1. Définition généralisée d'un mécanisme [1, 2]

L'ensemble des pièces (déformables ou non) assemblées entre elles par des liaisons mécaniques et mises en mouvement afin d'assurer le fonctionnement de la machine, est appelé un mécanisme.

Ce dernier permet de transmettre et de transformer le mouvement au sein du système.

D'une coté cinématique, un mécanisme est un ensemble technique transformant un ou plusieurs mouvements d'entrée en un ou plusieurs mouvements de sortie, sans préoccupation des efforts.



Figure I.1. Illustration généralisée d'un mécanisme.

I.2. Classification de quelques mécanismes de transformation de mouvements [3, 4]

Dans certains objets techniques, le mouvement d'une pièce provoque celui d'autres pièces. Toutefois, le type de mouvement de l'organe moteur change lorsqu'il est transmis à l'organe récepteur. Ainsi, un mouvement de translation de l'organe moteur peut provoquer un mouvement de rotation chez l'organe récepteur. L'inverse est aussi possible. Parmi les systèmes de transformation du mouvement, on distingue les systèmes suivants :

I.2.1. Le mécanisme vis-écrou

Il permet de transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation en combinant les mouvements d'une vis et d'un écrou.

On distingue deux types de ce mécanisme. Le premier, c'est la vis qui joue le rôle d'organe moteur. Dans ce cas, le mouvement de rotation de la vis se transforme en mouvement de translation pour l'écrou. Le deuxième, c'est plutôt l'écrou qui constitue l'organe moteur. Dans ce cas, le mouvement de rotation de l'écrou se transforme en mouvement de translation pour la vis.

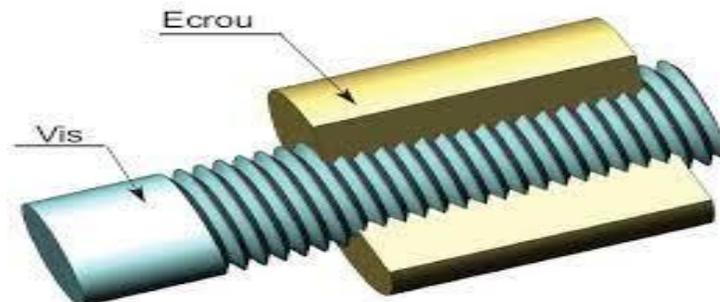


Figure I.2. Mécanisme vis-écrou.

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

Les avantages et les inconvénients sont listés ci-dessous :

Avantages

- Ce mécanisme permet d'exercer des forces et des pressions importantes.
- Il permet aussi des ajustements fins.

Inconvénients

- Ce mécanisme génère beaucoup de frottement.
- Sa fragilité peut entraîner des problèmes de guidage.
- Le système est lent à moins d'avoir un pas de vis important.

I.2.2. Le mécanisme bielle-manivelle

Il permet de transformer, par l'intermédiaire d'une bielle, le mouvement de rotation continu d'une manivelle (également appelée vilebrequin) en mouvement de translation alternatif du coulisseau (à vitesse non constante).

Dans ce mécanisme, la bielle est la tige rigide liée par une liaison pivot à ses deux extrémités alors que la partie « manivelle » représente la pièce sur laquelle on peut appliquer un mouvement de rotation. Le contact entre la bielle et la manivelle est important pour que le mouvement puisse être transmis dans le système.

En général, le mouvement commence par la rotation de la manivelle qui transmet un mouvement de translation alternatif à la bielle. Toutefois, la bielle peut aussi jouer le rôle d'organe moteur dans certains cas. Il s'agit d'un système réversible et nécessite une lubrification constante.

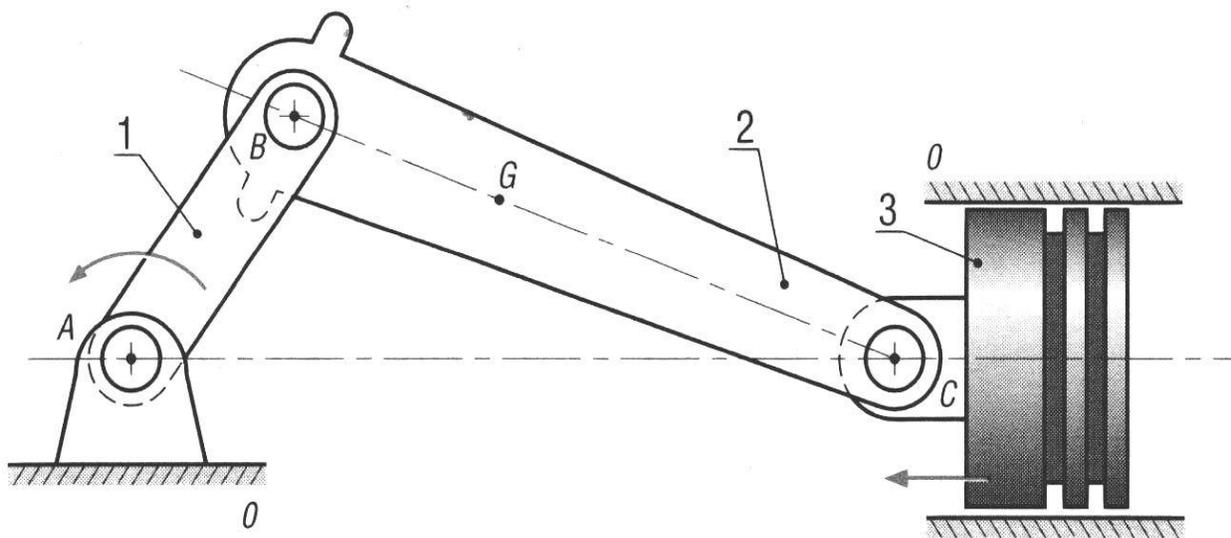


Figure I.3. Schéma du mécanisme bielle-manivelle.

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

Avantages

- Ce mécanisme peut fonctionner à grande vitesse.

Inconvénients

- Il y a trop de frottement dû aux nombreuses articulations utilisées. Il faut alors beaucoup de lubrification.

I.2.3. Le mécanisme pignon-crémaillère

Il s'agit d'un mécanisme moyennement utilisé pour transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation rectiligne ou inversement.

Il comprend une roue dentée appelée « pignon » et une tige dentée appelée « crémaillère ». Lorsque le pignon tourne, ses dents s'engrènent dans les dents de la crémaillère et entraînent cette dernière dans un mouvement de translation. À l'inverse, si on fait bouger la crémaillère, les dents de la crémaillère s'engrèneront dans les dents du pignon qui subira alors un mouvement de rotation. Il s'agit d'un système réversible, et nécessite un graissage.

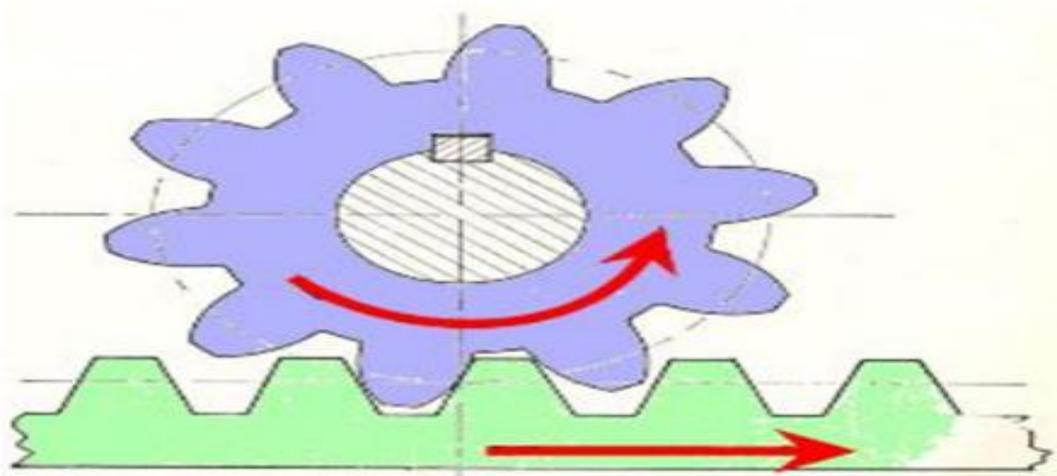


Figure I.4. Représentation d'un mécanisme pignon-crémaillère.

Avantages

- Il n'y a aucun glissement lors de la transformation de ce mouvement.
- La force de ce système est relativement importante.

Inconvénients

- Les engrenages utilisés peuvent nécessiter une lubrification importante.
- Il nécessite un ajustement précis à cause des dents entre la roue et la crémaillère.
- Il y a beaucoup d'usure.

1.2.4. Le mécanisme à came et galet

Ce mécanisme (ainsi appelée système à came et à tige-poussoir ou encore tige guidée) permet la transformation de mouvement circulaire continu de la came en un mouvement rectiligne ou angulaire alternatif de la tige-poussoir.

On appelle « came » une roue qui a la forme d'un œuf. La came peut aussi être un disque de forme irrégulière ou un disque dont le pivot est décentré. Dans ce cas, on parle d'excentrique. On appelle « tige-poussoir » la tige qui est appuyée sur la came. Lorsque la came tourne, la tige-poussoir effectue un mouvement de translation alternatif (mouvement de va-et-vient rectiligne). Il s'agit donc d'un système irréversible puisqu'il ne peut être actionné que par la came.

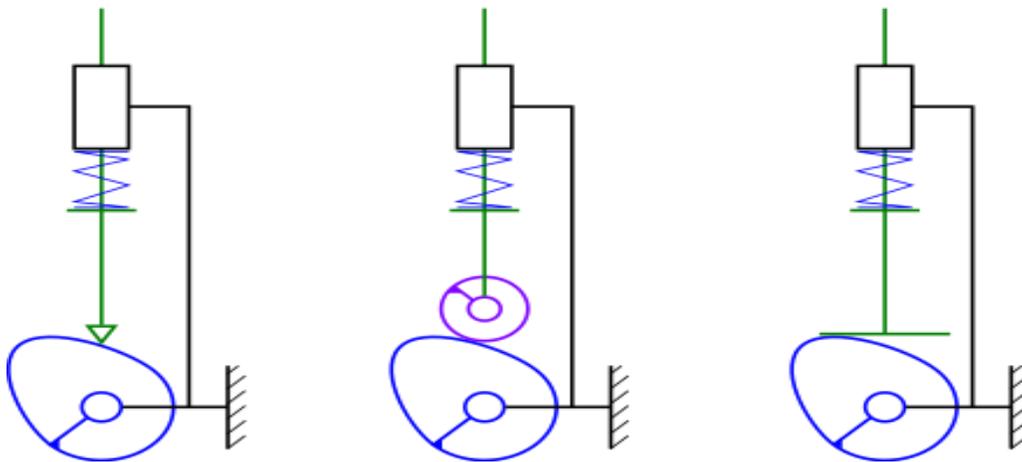


Figure I.5. Schématisation des types du mécanisme à came et galet.

Avantages

- Il n'y a aucun glissement, le rapport de vitesse est constant.
- Ce mécanisme permet une réduction considérable de la vitesse.

Inconvénients

- La tige doit être guidée en translation.
- Il faut généralement un ressort de rappel pour permettre à la tige de s'appuyer continuellement sur la came.
- Vibrations importantes sont présentes si la came tourne à grande vitesse.

1.2.4.1. Différentes formes de cames

a- Cames disques :

La partie active est sur le pourtour de la came.

b- Cames à tambour (came cloche) :

La partie active est le rebord de la base du cylindre creux

c- Cames à rainures :

La partie active est une rainure creusée sur la surface latérale d'un cylindre

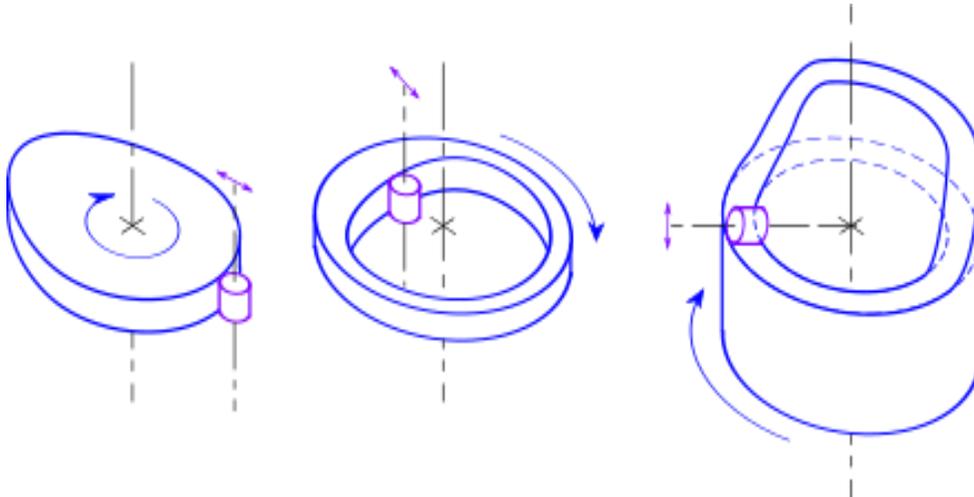


Figure I.6. Différentes formes des cames.

Il existe autres mécanismes de transformation de mouvement, on mentionne : les engrenages, roue-vis sans fin, poulies-courroie, train épicycloïdal, mécanisme articulé...

1.3. Etapes à entreprendre avant d'entamer une analyse cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement sans tenir compte de ce qui cause le mouvement. En d'autres termes, le mouvement d'entrée est supposé connu et l'objectif est de trouver la transformation de ce mouvement [5]. L'analyse cinématique comprend les étapes suivantes :

1.3.1. Faire une représentation schématique du mécanisme réel

Une représentation schématique décrit totalement la cinématique du mécanisme ; c'est-à-dire qu'elle permet de trouver les trajectoires, les vitesses et les accélérations de n'importe quel point sur un squelette. Le squelette est représenté par un système des éléments connexes. La position de chaque élément est identifiée par un angle dans le système de coordonnées [5].

1.3.1.1. Le schéma cinématique minimal [7]

C'est la représentation d'un mécanisme avec une symbolisation normalisée des liaisons. Il peut être représenté suivant des plans différents (2D) ou en perspective (3D).

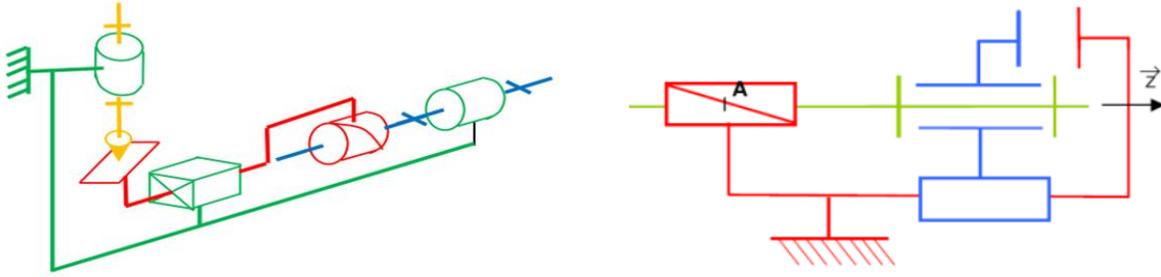


Figure I.7. Schéma cinématique minimal 3D et 2D respectivement.

I.3.2. Retrouver le degré de mobilité [6]

Le degré de mobilité (représenté par la lettre m) ne concerne pas deux solides, comme le degré de liberté (d.d.l), mais un mécanisme dans son entier. Il s'agit du nombre maximum de vitesses généralisées qui dans ce mécanisme peuvent être choisies d'une façon arbitraire, dans une configuration donnée.

$$m = 3N - 2L_5 - L_4$$

N = nombre des solides mobiles

L_5 = nombre de liaisons à un seul degré de liberté (à contact surfacique)

L_4 = nombre de liaisons à un seul deux de liberté (à contact linéaire/ponctuel)

I.3.3. Choisir un système de coordonnées [10]

Les paramètres de position sont les coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

- **Coordonnées cartésiennes**

Où les trois coordonnées de point M, paramètres de position, sont x, y, z .

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{X} + y\vec{Y} + z\vec{Z}$$

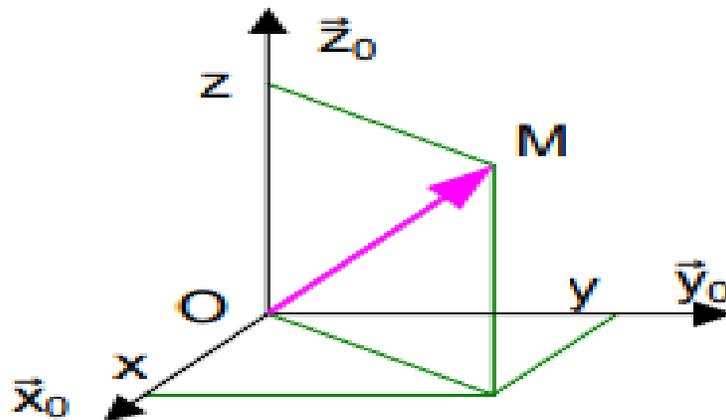


Figure I.8. Représentation des coordonnées cartésiennes du point M.

• **Coordonnées cylindriques**

Les trois paramètres de position du point M sont r , θ , z . L'expression la plus simple du vecteur position de point M est obtenue dans le repère d'expression $R(O, r, \theta, z_0)$. L'expression la plus simple du vecteur position de point M est donnée par :

$$\vec{OM} = r\vec{n} + z\vec{z} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \cos \theta \vec{X} + \sin \theta \vec{Y}$$

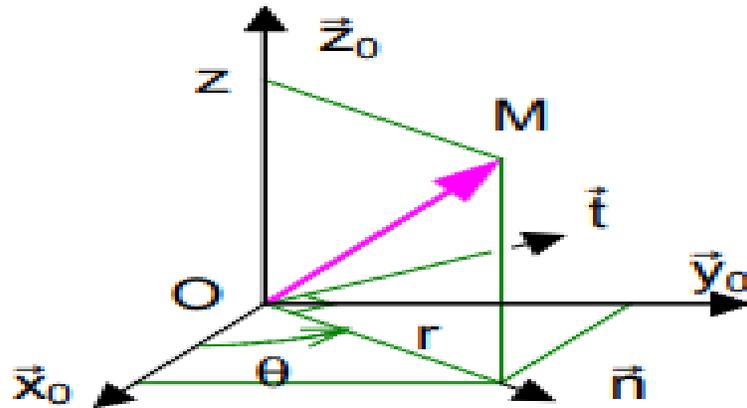


Figure I.9. Représentation des coordonnées cylindriques du point M.

• **Coordonnées sphériques**

Les trois paramètres de position de M sont r , θ , φ .

- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{u})$ angle polaire orienté par \vec{z}_0 et qui positionne un repère intermédiaire ;
- $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{n})$ angle orienté par \vec{v} et qui positionne dans le plan l'axe \vec{n} sur lequel se trouve le point M, distance radiale de l'origine O à M suivant l'axe \vec{n} .

L'expression la plus simple du vecteur position de M est

$$\vec{OM} = r\vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \cos \varphi \vec{Z} + \sin \varphi \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \cos \theta \vec{X} + \sin \theta \vec{Y}$$

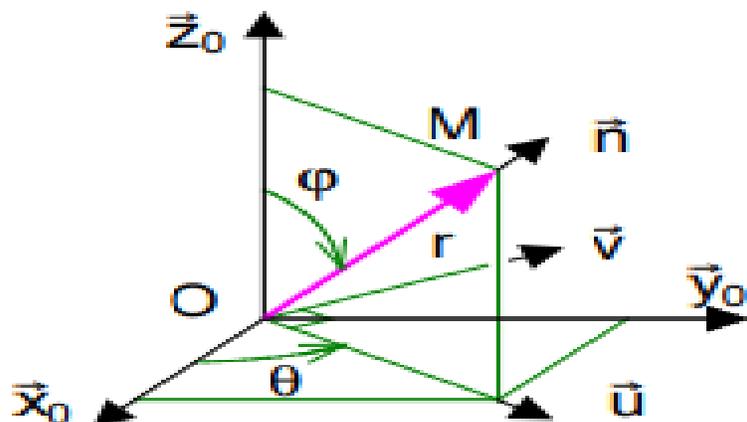


Figure I.10. Représentation des coordonnées sphériques de point M.

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

I.3.4. Identifier toutes les liaisons par des numéros

Puisque le système de coordonnées globale est généralement positionné au bâti (partie fixe dans le sol habituellement), les numéros des liaisons identifiées par la lettre ($0 \leq i \leq n$) se commencent de cette liaison jusqu'à la dernière liaison entre deux pièces du mécanisme.

I.3.5. Identifier tous les angles caractérisant les positions des éléments (solides)

Chaque élément (solide) a un angle (θ_i) qui la caractérise. Chaque angle commence de l'axe parallèle jusqu'à l'axe des (x) et fini à l'axe confondu avec l'inclinaison de l'élément correspondant.

I.3.6. Identifier les variables d'entrée et de sortie

Un exemple d'identification des éléments (solides), des angles et des variables d'entrée et de sortie est présenté. Mais on doit ignorer les directions, et les déplacements des liaisons pivots (l'exemple est résolu d'une autre méthode).

Exemple :

Exemple d'identification des liens, des angles et des variables d'entrée et de sortie. Mais nous devons ignorer les directions, et les déplacements des liaisons pivots (l'exemple est résolu d'une autre méthode).

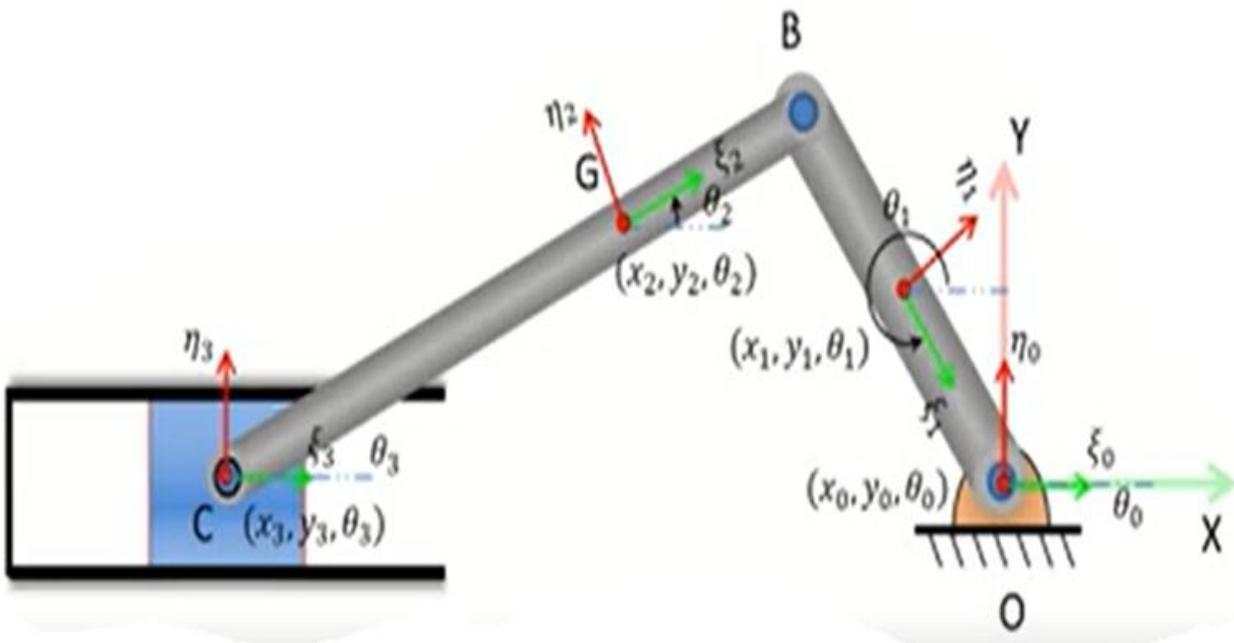


Figure I.11. Exemple de paramétrage d'un mécanisme bielle-manivelle.

I.3.7. Résolution de l'équation de fermeture de boucle [5]

Pour analyser le déplacement, la vitesse et l'accélération, on doit résoudre l'équation de fermeture de boucle (pour le mécanisme bielle-manivelle) qui s'écrit initialement comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n=3} \vec{r}_i = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{0} \quad (I.1)$$

$$\Rightarrow r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T + r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T + r_3(\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T = 0 \quad (I.2)$$

I.3.7.1. Solutions pour l'équation de fermeture de boucle

- **L'analyse de position**

Étant donné que tout mécanisme plan simple peut être décrit par une équation de fermeture de boucle, alors une équation générique peut être résolue pour divers combinaisons de paramètres connus et de variables inconnues. Pour un mécanisme composé de N éléments, l'équation sera à la forme :

$$\sum_{i=1}^N r_i(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = 0 \quad (I.3)$$

Il existe cinq cas possibles découlant de cette équation de fermeture de boucle :

- **Cas 1**

Pour le cas où le vecteur est complètement inconnu (son magnitude et sa direction sont à déterminer), on aura :

$$r_j(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T = b(\cos \alpha, \sin \alpha)^T \quad (I.4)$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} > 0 ; \cos \alpha = \frac{b_x}{b} ; \sin \alpha = \frac{b_y}{b} \Rightarrow r_j = b \text{ et } \theta_j = \alpha \quad (I.5)$$

- **Cas 2**

Dans ce cas, la magnitude d'un vecteur et la direction d'un autre vecteur sont à trouver. On aura :

$$r_i(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T + r_j(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T = b(\cos \alpha, \sin \alpha)^T \quad (I.6)$$

- **Cas 3**

Dans ce cas, les magnitudes de deux vecteurs sont à déterminer. On aura :

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

$$r_j = b \frac{\sin(\alpha - \theta_i)}{\sin(\theta_j - \theta_i)} \quad (I.7)$$

Et

$$r_i = b \frac{\sin(\alpha - \theta_i)}{\sin(\theta_i - \theta_j)} \quad (I.8)$$

• **Cas 4**

Dans ce cas, deux angles sont inconnus θ_i et θ_j :

$$r_i \sin(\alpha - \theta_i) + r_j \sin(\alpha - \theta_j) = 0 \quad (I.9)$$

Et

$$r_i \cos(\alpha - \theta_i) + r_j \cos(\alpha - \theta_j) = b \quad (I.10)$$

• **Cas 5**

Pour ce dernier cas, la magnitude d'un vecteur, la direction d'un autre vecteur et les directions des deux autres vecteurs, fonctionnellement liées à la direction du second vecteur, sont à déterminer.

$$\begin{aligned} r_i (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T + r_j (\cos(\theta_i - \gamma), \sin(\theta_i - \gamma))^T + r_k (\cos(\theta_i - \beta), \sin(\theta_i - \beta))^T \\ = b (\cos \alpha, \sin \alpha)^T \end{aligned} \quad (I.11)$$

• **L'analyse de vitesse**

Pour n'importe quel vecteur, la magnitude et la direction sont des fonctions de temps t :

$$\vec{r}(t) = r(t) [\cos \theta(t), \sin \theta(t)]^T \quad (I.12)$$

La dérivée par rapport au temps représente le vecteur de vitesse :

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r} = \dot{r}(t) [\cos \theta(t), \sin \theta(t)]^T + r(t) [-\sin \theta(t), \cos \theta(t)]^T \dot{\theta}(t) \quad (I.13)$$

Le vecteur vitesse se compose de deux composantes :

$$\text{Vecteur vitesse linéaire } V_t : \quad V_t = \dot{r}(t) [\cos \theta(t), \sin \theta(t)]^T \quad (I.14)$$

$$\text{Vecteur vitesse rotationnel } V_r : \quad V_r = r(t) \dot{\theta}(t) [-\sin \theta(t), \cos \theta(t)]^T \quad (I.15)$$

La magnitude de vitesse angulaire est proportionnelle à la vitesse angulaire : $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

Les équations de vitesse suivent l'équation de fermeture de boucle pour la position :

$$\sum_{i=1}^N \dot{r}_i(t) [\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t)]^T + r_i(t) [-\sin \theta_i(t), \cos \theta_i(t)]^T \omega_i(t) = 0 \quad (I.16)$$

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

Les cinq cas pour la vitesse sont :

- **Cas 1**

Dans ce cas (équation de position de cas 1), tous les vecteurs sauf le vecteur r_j sont déplacés vers la droite. En conséquence, l'équation de fermeture de boucle de vitesse prendra la forme :

$$\dot{r}_j [\cos \theta_j, \sin \theta_j]^T + r_j [-\sin \theta_j, \cos \theta_j]^T \omega_j = [\dot{b}_x, \dot{b}_y]^T \quad (I.17)$$

- **Cas 2**

Dans ce cas, la magnitude $r_i(t)$ et l'angle $\theta_j(t)$ étaient les deux inconnues de l'équation de position de cas 2. Ensuite, l'équation de fermeture de boucle de vitesse prend la forme :

$$\begin{aligned} \dot{r}_i [\cos \theta_i, \sin \theta_i]^T + r_i [-\sin \theta_i, \cos \theta_i]^T \omega_i + \dot{r}_j [\cos \theta_j, \sin \theta_j]^T + r_j [-\sin \theta_j, \cos \theta_i]^T \omega_j \\ = [\dot{b}_x, \dot{b}_y]^T \end{aligned} \quad (I.18)$$

- **Cas 3**

Dans ce cas, les inconnues sont $\dot{r}_i(t)$ et $\dot{r}_j(t)$. Elles sont déterminées en utilisant la procédure ci-dessus, et les expressions correspondantes sont :

$$\dot{r}_i \sin(\theta_i - \theta_j) = -r_i \omega_i \cos(\theta_i - \theta_j) - r_j \omega_j - \dot{b}_x \sin \theta_j + \dot{b}_y \cos \theta_j \quad (I.19)$$

Et

$$\dot{r}_i \sin(\theta_j - \theta_i) = -r_j \omega_j \cos(\theta_j - \theta_i) - r_i \omega_i - \dot{b}_x \sin \theta_i + \dot{b}_y \cos \theta_i \quad (I.20)$$

- **Cas 4**

Dans ce cas, les inconnues sont les vitesses angulaires $\dot{\theta}_i(t)$ et $\dot{\theta}_j(t)$. Les expressions correspondantes sont :

$$\omega_i r_i \sin(\theta_j - \theta_i) = -\dot{r}_i \cos(\theta_j - \theta_i) - \dot{r}_j + \dot{b}_x \cos \theta_j + \dot{b}_y \sin \theta_j \quad (I.21)$$

Et

$$\omega_j r_j \sin(\theta_i - \theta_j) = -\dot{r}_j \cos(\theta_i - \theta_j) - \dot{r}_i + \dot{b}_x \cos \theta_i + \dot{b}_y \sin \theta_i \quad (I.22)$$

• **Cas 5**

L'équation de fermeture de boucle de position (cas 5) est différenciée en supposant que tous les paramètres dépendent du temps sauf γ et β .

$$\begin{aligned} & \dot{r}_i [\cos \theta_i, \sin \theta_i]^T + r_i [-\sin \theta_i, \cos \theta_i]^T \omega_i + \dot{r}_j [\cos(\theta_i - \gamma), \sin(\theta_i - \gamma)]^T \\ & + r_j [-\sin(\theta_i - \gamma), \cos(\theta_i - \gamma)]^T \omega_i + \dot{r}_k [\cos(\theta_i - \beta), \sin(\theta_i - \beta)]^T \\ & + r_k [-\sin(\theta_i - \beta), \cos(\theta_i - \beta)]^T \omega_i = [\dot{b}_x, \dot{b}_y]^T \end{aligned} \quad (I.23)$$

• **L'analyse d'accélération**

Le vecteur accélération est obtenu par la dérivation du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \ddot{r} [\cos \theta, \sin \theta]^T + 2\dot{r} [-\sin \theta, \cos \theta]^T \frac{d\theta}{dt} - r [\cos \theta, \sin \theta]^T \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right)^2 \\ &+ r [-\sin \theta, \cos \theta]^T \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (I.24)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \ddot{r} [\cos \theta, \sin \theta]^T + 2\dot{r}\omega [-\sin \theta, \cos \theta]^T - r\omega^2 [\cos \theta, \sin \theta]^T + r\alpha [-\sin \theta, \cos \theta]^T$$

Les équations d'accélération suivent l'équation de fermeture de boucle :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \ddot{r}_i [\cos \theta_i, \sin \theta_i]^T + 2\dot{r}_i [-\sin \theta_i, \cos \theta_i]^T \omega_i - r_i [\cos \theta_i, \sin \theta_i]^T \omega_i^2 + r_i [-\sin \theta_i, \cos \theta_i]^T \\ & = 0 \end{aligned} \quad (I.25)$$

Les cinq cas pour l'accélération sont :

• **Cas 1**

Les inconnues α_j et \ddot{r}_j sont obtenues en différenciant les deux équations de vitesse (cas 1) :

$$\alpha_j = \frac{1}{r_j} [-\ddot{b}_x \sin \theta_j + \ddot{b}_y \cos \theta_j - 2\dot{r}_j \omega_j] \quad (I.26)$$

Et

$$\ddot{r}_j = \ddot{b}_x \cos \theta_j + \ddot{b}_y \sin \theta_j + r_j \omega_j^2 \quad (I.27)$$

• **Cas 2**

Dans ce cas, les deux inconnues $\ddot{\theta}_j$ et \ddot{r}_i sont obtenues en différenciant les deux équations de vitesse (cas 2) :

$$\alpha_j = \frac{1}{r_j \cos(\theta_j - \theta_i)} \left[\left((\omega_j - \omega_i) r_j \omega_j - \dot{r}_j \right) \sin(\theta_j - \theta_i) - (2\omega_j - \omega_i) \dot{r}_j \cos(\theta_j - \theta_i) - (\omega_i \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \sin \theta_i + (-\omega_i \dot{b}_x + \ddot{b}_y) \cos \theta_i - \omega_i \dot{r}_i - r_i \alpha_i \right] \quad (I.28)$$

Et

$$\ddot{r}_i = \frac{1}{\cos(\theta_j - \theta_i)} \left[\left((\omega_j - 2\omega_i) - r_i \alpha_i \right) \sin(\theta_j - \theta_i) - r_i \omega_i (\omega_j - \omega_i) \cos(\theta_j - \theta_i) - \dot{r}_j + (\omega_j \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \cos \theta_j + (\ddot{b}_y - \dot{b}_x \omega_j) \sin \theta_j \right] \quad (I.29)$$

• **Cas 3**

Dans ce cas les inconnues \dot{r}_i et \dot{r}_j sont obtenues en différentiant les deux équations de vitesses (cas 3) :

$$\dot{r}_i = \frac{1}{\sin(\theta_i - \theta_j)} \left[-(\dot{r}_i (2\omega_i - \omega_j) + r_i \alpha_i) \cos(\theta_i - \theta_j) + r_i \omega_i (\omega_i - \omega_j) \sin(\theta_i - \theta_j) - \dot{r}_j \omega_j - r_j \alpha_j - (\omega_j \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \sin \theta_j + (\ddot{b}_y - \dot{b}_x \omega_j) \cos \theta_j \right] \quad (I.30)$$

Et

$$\dot{r}_j = \frac{1}{\sin(\theta_j - \theta_i)} \left[-(r_j (2\omega_j - \omega_i) + r_j \alpha_j \cos(\theta_j - \theta_i) + r_j \omega_j (\omega_j - \omega_i) \sin(\theta_j - \theta_i) - \dot{r}_i \omega_i - r_i \alpha_i - (\omega_i \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \sin \theta_i + (\ddot{b}_y - \dot{b}_x \omega_i) \cos \theta_i \right] \quad (I.31)$$

• **Cas 4**

Les accélérations angulaires sont obtenues en différentiant les équations de vitesse (cas 4) :

$$\alpha_i = \frac{1}{r_i \sin(\theta_i - \theta_j)} \left[(-\omega_i r_i (\omega_j - \omega_i) - \dot{r}_i) \cos(\theta_j - \theta_i) + \dot{r}_i (\omega_j - 2\omega_i) \sin(\theta_j - \theta_i) - \dot{r}_j + (\omega_j \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \cos \theta_j + (\ddot{b}_y - \dot{b}_x \omega_j) \sin \theta_j \right] \quad (I.32)$$

Et

$$\alpha_j = \frac{1}{r_j \sin(\theta_i - \theta_j)} \left[(-\omega_j r_j (\omega_i - \omega_j) - \dot{r}_j) \cos(\theta_i - \theta_j) + \dot{r}_j (\omega_i - 2\omega_j) \sin(\theta_i - \theta_j) - \dot{r}_i + (\omega_j \dot{b}_y + \ddot{b}_x) \cos \theta_i + (\ddot{b}_y - \dot{b}_x \omega_i) \sin \theta_i \right] \quad (I.33)$$

• **Cas 5**

Dans ce cas les accélérations $\ddot{\theta}_i$ et \ddot{r}_j sont obtenues en différentiant les deux équations de vitesse (cas 5) et prenant en compte que γ et β sont constantes.

Chapitre I : Etude bibliographique sur les mécanismes et la procédure d'analyse cinématique

$$\alpha_i = \frac{-A_j \cos(\theta_i - \gamma) - B_i \sin(\theta_i - \gamma) - \ddot{r}_i \sin \gamma - \ddot{r}_k \sin(\gamma - \beta)}{-d_x \sin(\theta_i - \gamma) + d_y \cos(\theta_i - \gamma)} \quad (I.34)$$

Et

$$\begin{aligned} \ddot{r}_j = \frac{1}{T} [-A_j \cos(\theta_i - \gamma) - B_j \sin(\theta_i - \gamma) + C_j \cos \theta_i \\ + D_j \sin \theta_i + K_j \cos(\theta_i - \beta) + L_j \sin(\theta_i - \beta) + Q_j] \end{aligned} \quad (I.35)$$

I.3.8. Vérification des résultats par l'analyse numérique

Pour cette dernière étape, on a opté pour l'utilisation du logiciel de calcul numérique Matlab R2016a. A l'aide des programmes, on a obtenu les courbes des déplacements, des vitesses et des accélérations en fonction des paramètres cinématiques de l'élément d'entrée.

Chapitre II

*Analyse cinématique des
mécanismes par
programmation sous le code
Matlab*

II.1. Généralités sur l'analyse cinématique

Le but de l'analyse cinématique est de modéliser les mouvements des pièces d'un système mécanique, sans s'intéresser aux causes qui les produisent. On cherche les relations entre ces mouvements, en vue de vérifier les performances d'un système et/ou choisir des caractéristiques des actionneurs [8]. Concernant le problème d'analyse cinématique des mécanismes, les données sont : le schéma cinématique du mécanisme, la position considérée, la vitesse et l'accélération des pièces motrices. Et les inconnus à déterminer sont :

- **La position du mécanisme** : position de toutes les pièces mobiles du mécanisme.
- **La vitesse du mécanisme** : vitesse de toutes les pièces mobiles.
- **L'accélération du mécanisme** : accélération de toutes les pièces mobiles [9].

II.2. Mécanisme plan

Pour un mécanisme plan tous les points des éléments mobiles décrivent des courbes situées dans des plans parallèles, au cours de leurs mouvements [9]. Si un plan invariant existe, alors tous les plans parallèles par rapport à ce dernier sont des plans invariants. Le vecteur rotation angulaire $\vec{\Omega} (S_2/S_1)$ d'un solide S_2 par rapport au solide S_1 est porté par la normale au plan invariant. Chaque point M appartenant du solide S_2 , est toujours parallèle au plan invariant ainsi que sa trajectoire dans S_1 . Par exemple, si on a un cas d'un mouvement dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , les mouvements possibles sont : une rotation autour de (O, \vec{z}) et les translations suivant les axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) . A cet effet, deux types de liaisons à sont possibles :

- **Surfacique** : liaison pivot d'axe perpendiculaire au plan de mouvement et glissière d'axe contenu dans ce dernier.
- **Linéaire ou ponctuelle** : où sa normale \vec{n} est perpendiculaire au plan de mouvement.

II.2.1. Caractéristiques géométriques des éléments du mécanisme plan [9]

Dans une chaîne cinématique fermée, chaque élément possède au moins deux liaisons. Ces éléments sont appelés éléments binaires. On distingue trois cas : élément à deux liaisons pivot, élément à une liaison pivot et une liaison glissière, élément à deux liaison glissières. La figure II.1 montre les différents éléments binaires.

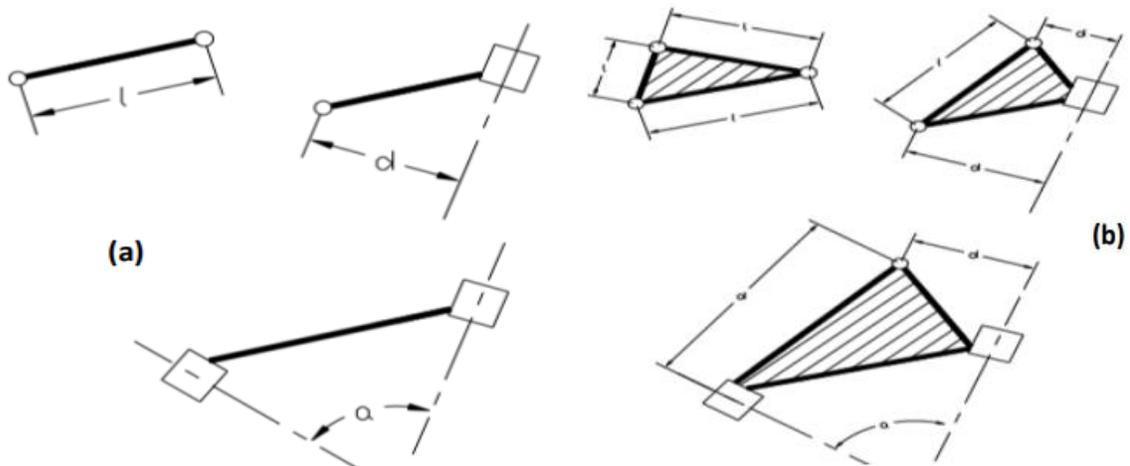


Figure II.1. Différents éléments binaires.

Il est nécessaire de connaître les caractéristiques géométriques d'un mécanisme. Généralement, il y a toujours des paramètres fixes (constants) et des paramètres variables lors de mouvement du mécanisme. On considère l'exemple indiqué par le schéma cinématique de la figure II.2.

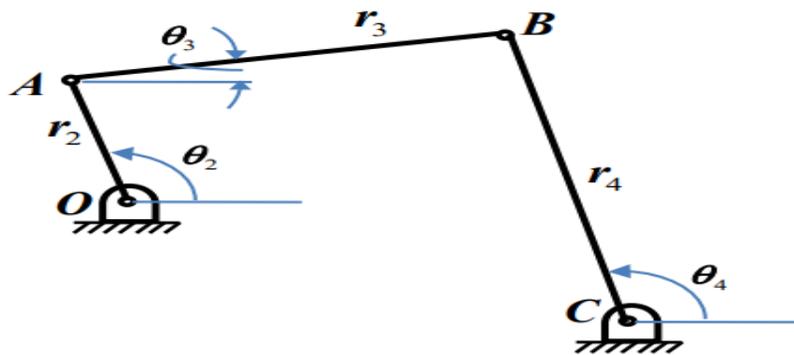


Figure II.2. Exemple d'un système à quatre barres.

- **Les paramètres fixes**

Les paramètres fixes sont :

$$r_1 = OC ; r_2 = OA ; r_3 = AB ; r_4 = BC$$

- **Les paramètres variables**

Les paramètres variables sont :

$$\theta_2 (t), \theta_3 (t) \text{ et } \theta_4 (t)$$

II.3. Mécanisme à trois barres

- Un mécanisme à trois barres peut minimiser le besoin d'alignement de précision des roulements.
- S'adapte au changement de parallélisme si la fondation de la machine change.

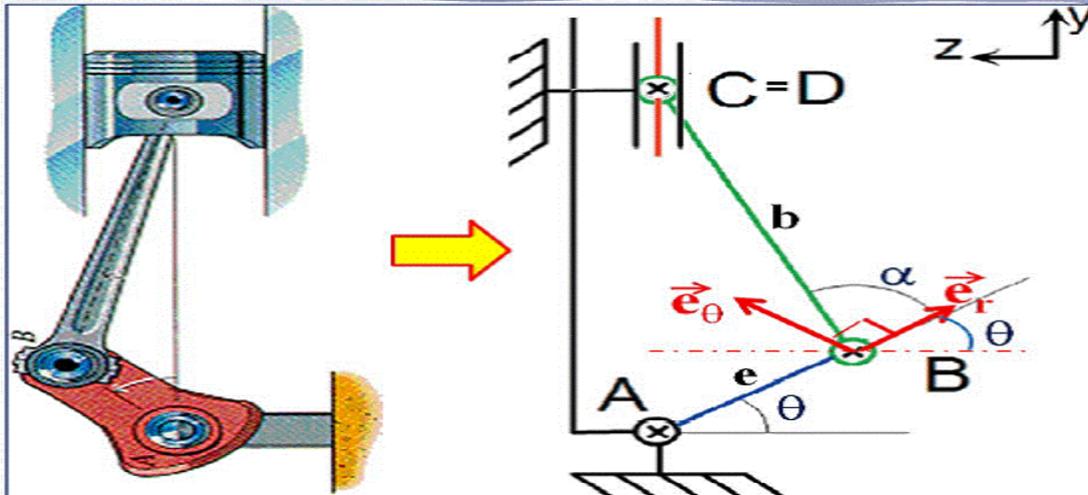


Figure II.3. Exemple de mécanisme bielle-manivelle.

II.3.1. Résolution d'un exemple de mécanisme à trois barres (bielle-manivelle)

Nous examinons le cas du mécanisme bielle-manivelle comme montré sur la figure II.4.

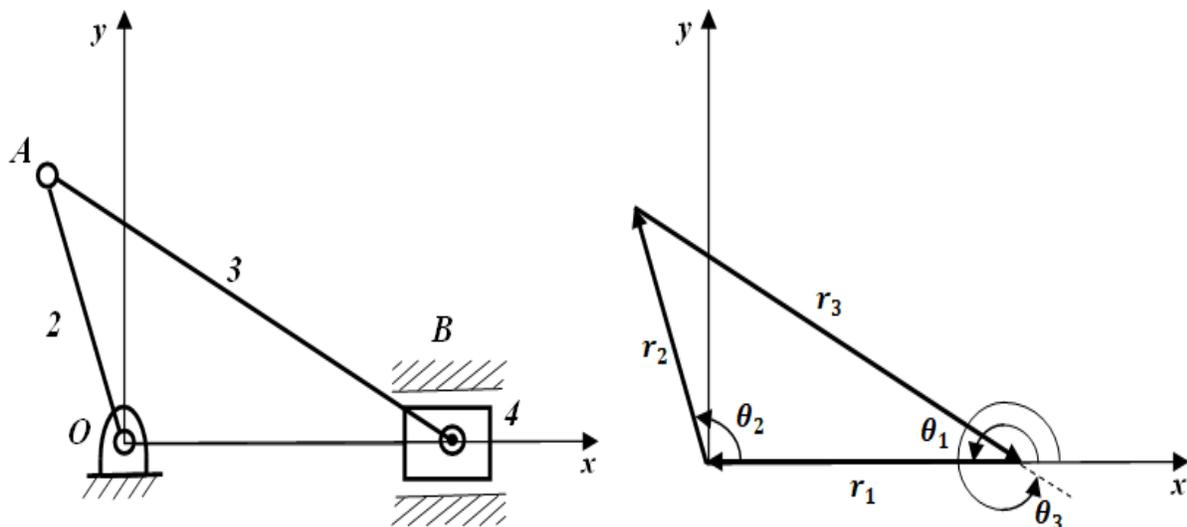


Figure II.4. Représentation de mécanisme bielle-manivelle (à gauche) étudié et son diagramme vectoriel (à droite).

Chapitre II : Analyse cinématique des mécanismes par programmation sous le code Matlab

Les inconnus sont r_4 et θ_3 . Ainsi, on considère que la manivelle 2 est l'élément d'entrée. Dans cette hypothèse, l'équation de fermeture de boucle prend la forme suivante :

$$r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T + r_3(\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T = -r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T \quad (II.1)$$

On constate que ce cas de figure s'apparente au cas 2 et on remarque que :

$$\theta_1 = \pi$$

La première étape consiste à trouver la position qui est caractérisée par le déplacement linéaire r_4 du coulisseau 4 ($r_4 = r_1$) et la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3.

$$\begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.2)$$

On aura après le remplacement de θ_1 :

$$\begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.3)$$

On obtient le déplacement linéaire r_4 de coulisseau 4 et la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3 respectivement :

$$\begin{cases} r_4 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\ \theta_3 = \arcsin\left(\frac{-r_2 \sin \theta_2}{r_3}\right) \end{cases} \quad (II.4)$$

Par la dérivation de la position par rapport au temps, on obtient les vitesses du mécanisme. Où la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 est donnée par :

$$\omega_3 = -\omega_2 \frac{r_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (II.5)$$

On utilise la condition suivante [5] dans le calcul pour avoir les courbes de vitesse et d'accélération :

$$\frac{r_3}{r_1} = 4$$

La courbe de vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 est représentée dans la figure ci-dessous :

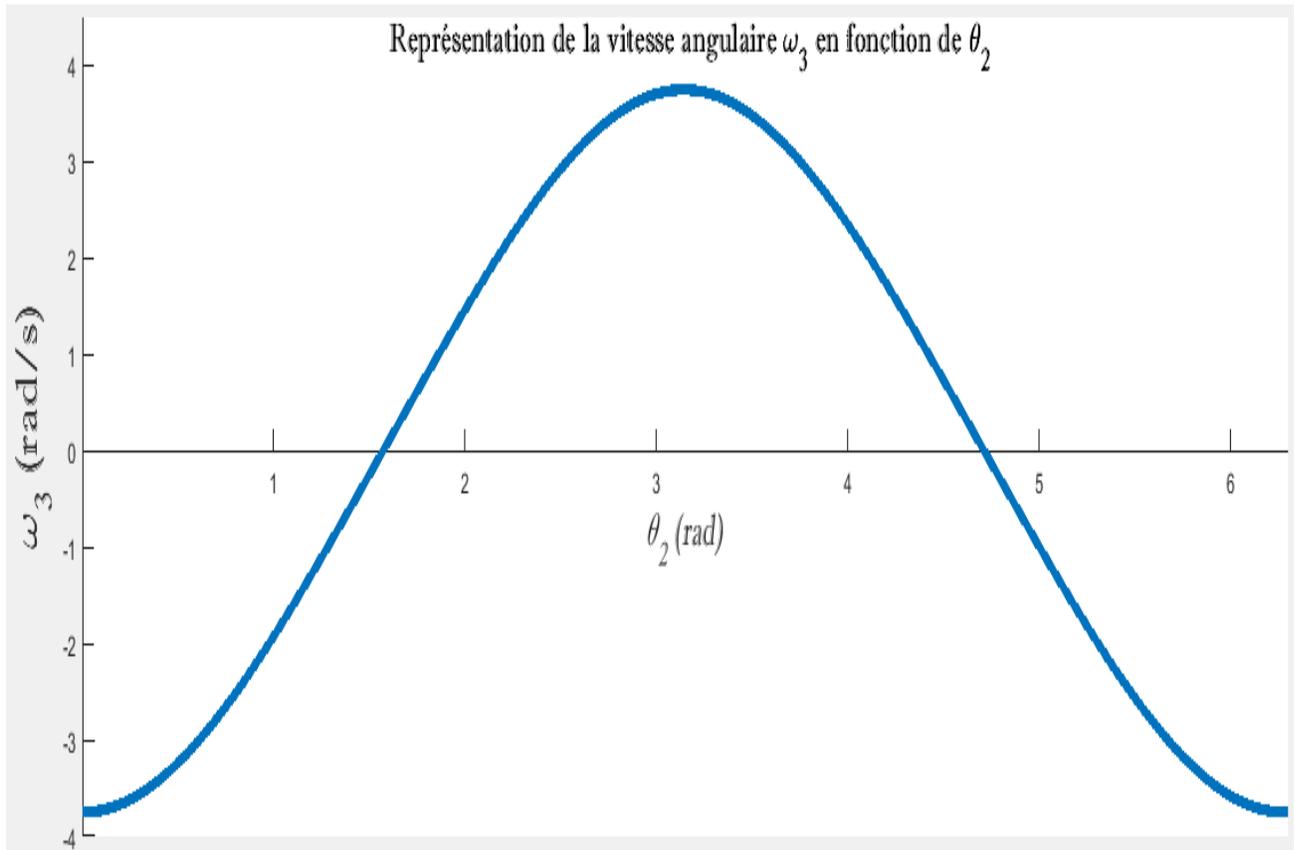


Figure II.5. Courbe de variation de vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de vitesse angulaire ω_3 en fonction de θ_2 est représentée par une courbe incurvée, uniformément croissante jusqu'à elle atteigne sa valeur maximale correspondante à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$), puis elle se décroît jusqu'à la fin de la période du cycle (T).

Pour \dot{r}_4 qui représente la vitesse linéaire du coulisseau 4, on obtient :

$$\dot{r}_4 = -r_2 \omega_2 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\cos \theta_3} \quad (II.6)$$

La vitesse linéaire \dot{r}_4 du coulisseau 4 est représentée dans la figure suivante :

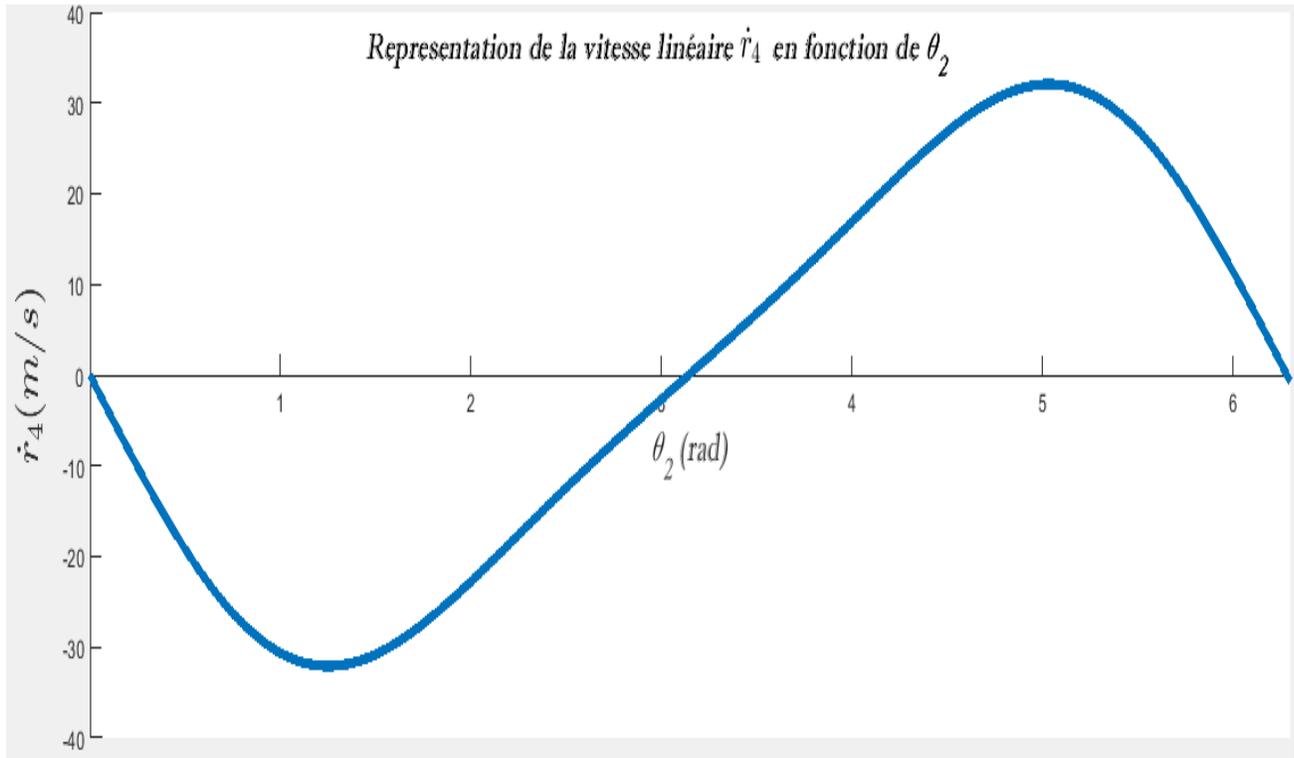


Figure II.6. Courbe de variation de vitesse linéaire \dot{r}_4 du coulisseau 4 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de vitesse linéaire \dot{r}_4 du coulisseau 4 en fonction de la coordonnée θ_2 est représentée par une courbe incurvée uniforme, composée de deux parties symétriques. La première est totalement négative (translation dans le sens opposé à l'axe des abscisses) décroissante puis croissante jusqu'à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$) où la courbe croise avec l'axe des abscisses. Dans la deuxième partie, la vitesse augmente puis diminue d'une façon uniforme jusqu'à la fin de la période (T).

Puisque on a les équations des vitesses, il suffit juste de les différentier par rapport au temps (ou par la deuxième dérivée de position par rapport au temps) pour obtenir les accélérations.

On aura pour l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 :

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (II.7)$$

La courbe de variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 est représentée dans la figure II.7.

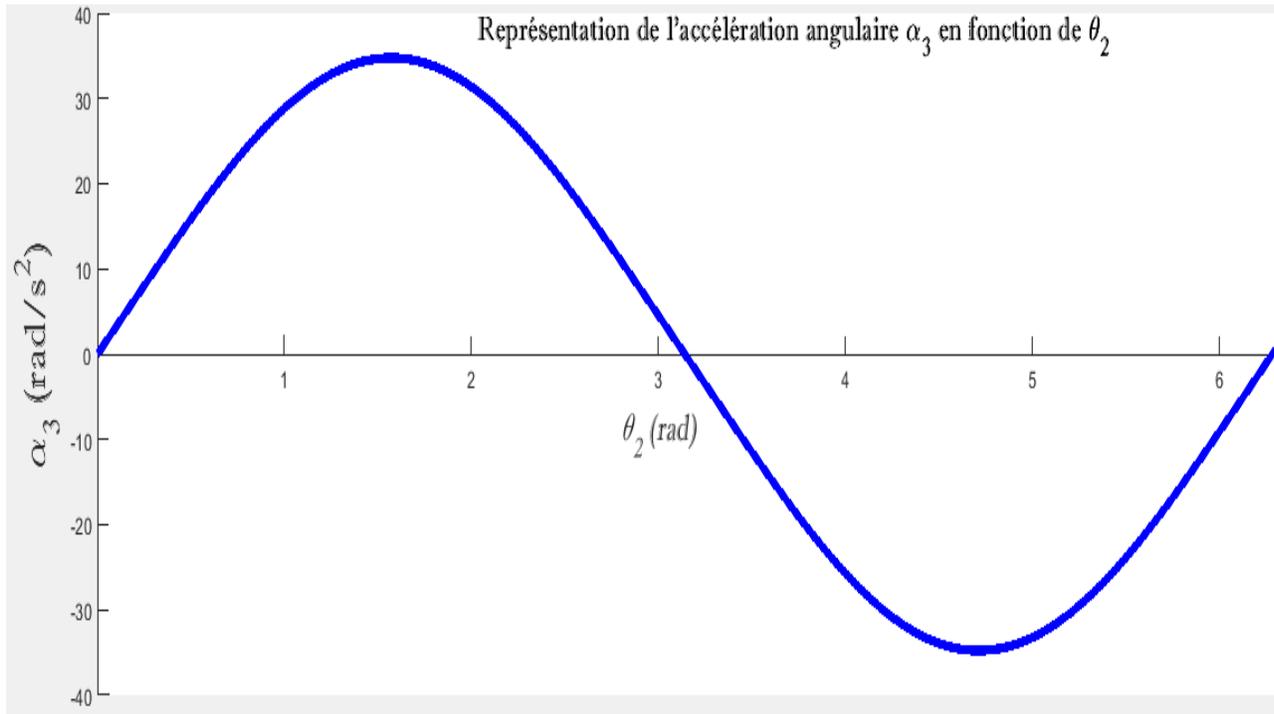


Figure II.7. Courbe de variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 en fonction de coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La représentation de la variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 est une courbe incurvée uniforme. On remarque deux parties symétriques, la première est positive croissante puis décroissante jusqu'à la moitié de la période, et la deuxième est négative totalement l'inverse de la première par rapport à l'axe des abscisses.

Pour l'accélération linéaire \ddot{r}_4 du coulisseau 4, on aura :

$$\ddot{r}_4 = \frac{1}{\cos \theta_3} [\dot{r}_4 \omega_3 \sin \theta_3 - r_2 \omega_2 (\omega_2 - \omega_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (II.8)$$

La courbe de variation de l'accélération linéaire \ddot{r}_4 du coulisseau 4 est représentée dans la figure II.8.

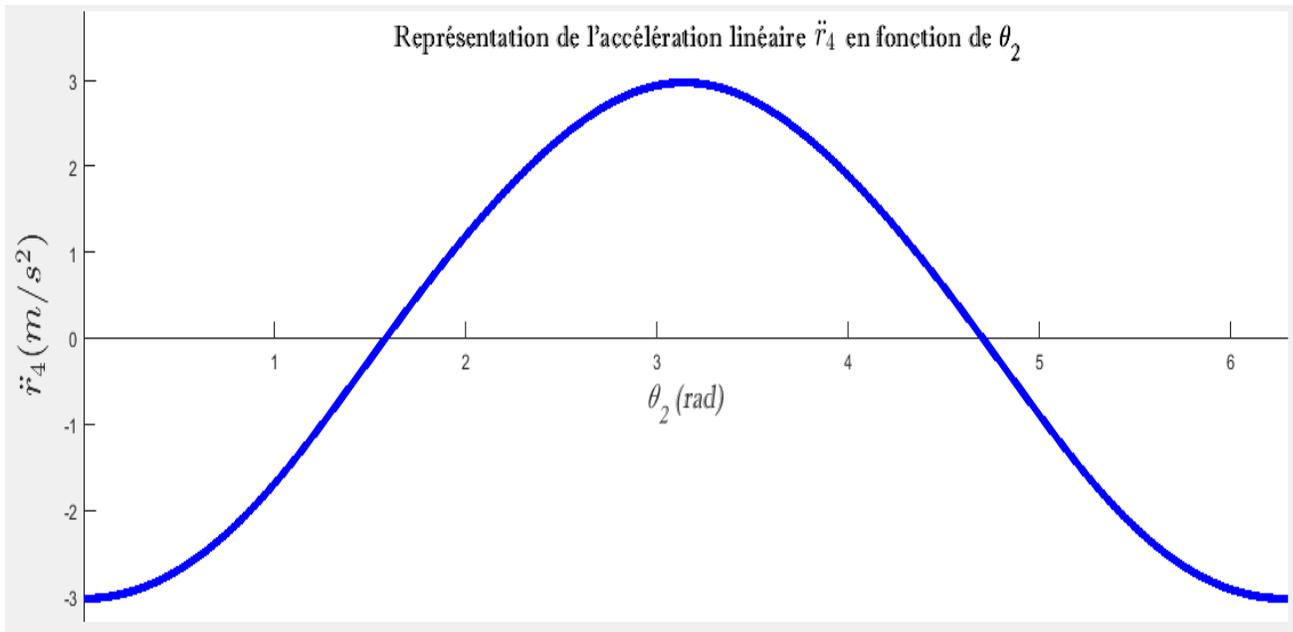


Figure II.8. Courbe de variation de l'accélération linéaire \ddot{r}_4 du coulisseau en fonction de coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de l'accélération linéaire \ddot{r}_4 du coulisseau 4 en fonction de la coordonnée θ_2 est une courbe semblable à celle de la figure II.5. Elle se croit uniformément jusqu'à la moitié de la période, puis décroît jusqu'à la fin du cycle.

II.4. Mécanisme à quatre barres

Ils sont couramment utilisés pour déplacer les plates-formes et le serrage. Ils ont les avantages :

- Ils sont relativement faciles à réaliser.
- On ne peut pas toujours obtenir le mouvement et la force que l'on souhaite.



Figure II.9. Cric de pompe (mouvement rotatif à réciproque).

II.4.1. Construction des mécanismes articulés à quatre barres [9]

Considérons un mécanisme articulé à quatre barres composé d'une bielle et de deux pièces reliées à la base.

- **Loi de Grashof**

Pour ce mécanisme, le cycle n'est effectué que dans le cas où la somme des longueurs de la plus courte et de la plus longue barre est égale ou inférieure à la somme des deux autres longueurs.

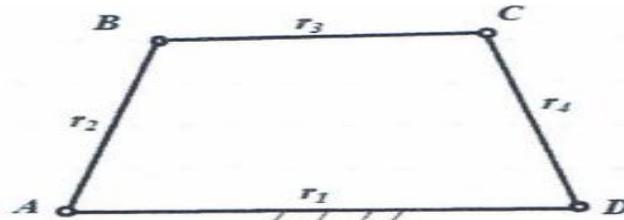


Figure II.10. Mécanisme à 4 barres.

$$r_1 < r_2 < r_3 < r_4$$

Pour que le mécanisme soit de Grashof, il faut avoir :

$$r_1 + r_4 \leq r_2 + r_3$$

II.4.2. Résolution d'un exemple du mécanisme à quatre barres

Il comprend le châssis (1), la manivelle (2), le coupleur (3) et la bascule (4) où le mouvement est transféré de la manivelle entraînée par un moteur à travers le coupleur à la bascule gauche.

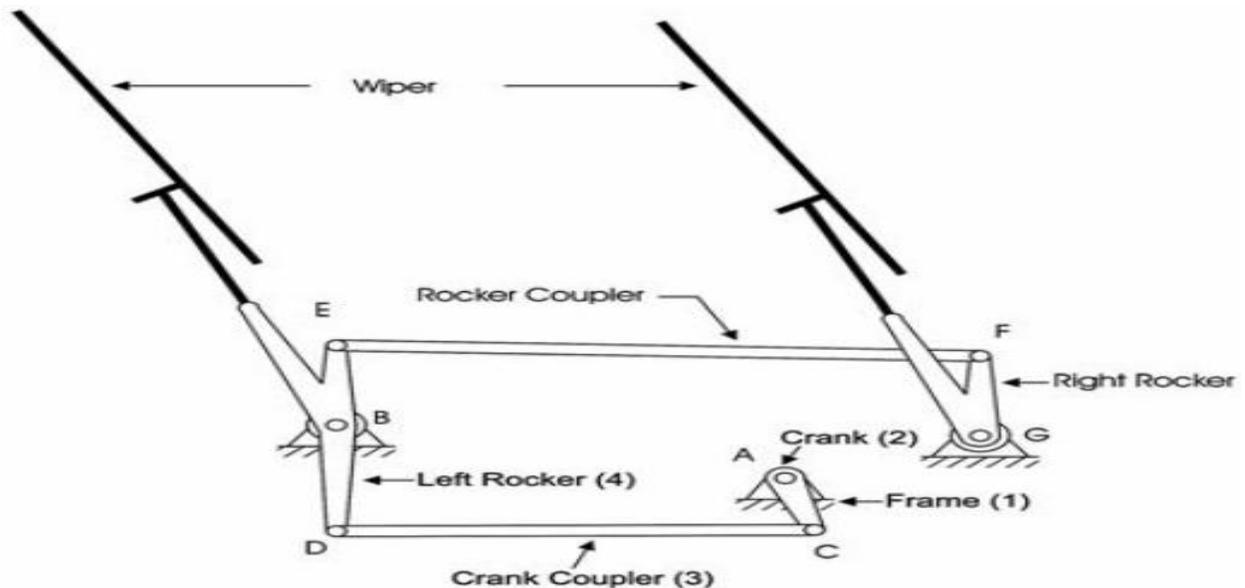


Figure II.11. Exemple d'un mécanisme à quatre barres : d'essuie-glace de voiture [5].

Chapitre II : Analyse cinématique des mécanismes par programmation sous le code Matlab

Pour ce mécanisme, la manivelle 2 représente l'élément d'entrée où l'équation de fermeture de boucle est comme suit :

$$r_3(\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T + r_4(\cos \theta_4, \sin \theta_4)^T = -r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T - r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T \quad (II.9)$$

On constate que ce cas de figure s'apparente au cas 4 et on remarque que :

$$\theta_1 = \pi$$

On cherche la position qui est caractérisée par la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3 et la coordonnée angulaire θ_4 de l'élément 4 :

$$\begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4 \cos \theta_4 \\ r_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \cos \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.10)$$

Après le remplacement de θ_1 , on obtient :

$$\begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4 \cos \theta_4 \\ r_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (II.11)$$

On multiplie la première ligne de l'équation (II.11) par $(\cos \theta_4)$ et la deuxième ligne par $(\sin \theta_4)$, puis on somme les deux nouvelles équations pour obtenir θ_4 de l'élément 4 :

$$\theta_4 = \arccos \left[\frac{r_3}{r_1} \cos(\theta_3 - \theta_4) + \frac{r_2}{r_1} \cos(\theta_2 - \theta_4) + \frac{r_4}{r_1} \right] \quad (II.12)$$

Après, on multiplie la première ligne de l'équation (II.11) par $(\cos \theta_3)$ et la deuxième ligne par $(\sin \theta_3)$, puis on somme les deux nouvelles équations pour obtenir la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3 :

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{r_4}{r_1} \cos(\theta_4 - \theta_3) + \frac{r_2}{r_1} \cos(\theta_2 - \theta_3) + \frac{r_3}{r_1} \right] \quad (II.13)$$

On utilise les données suivantes [5] pour tracer les courbes de vitesse et d'accélération :

$$\frac{r_1}{r_2} = 4 \quad ; \quad \frac{r_3}{r_2} = 7 \quad \text{et} \quad \frac{r_4}{r_2} = 3$$

On utilise les fractions suivantes :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{7}{4} \quad ; \quad \frac{r_4}{r_1} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{4}$$

Par la dérivation de la position par rapport au temps, on obtient la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 :

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (II.14)$$

La figure II.12 représente la variation de la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 .

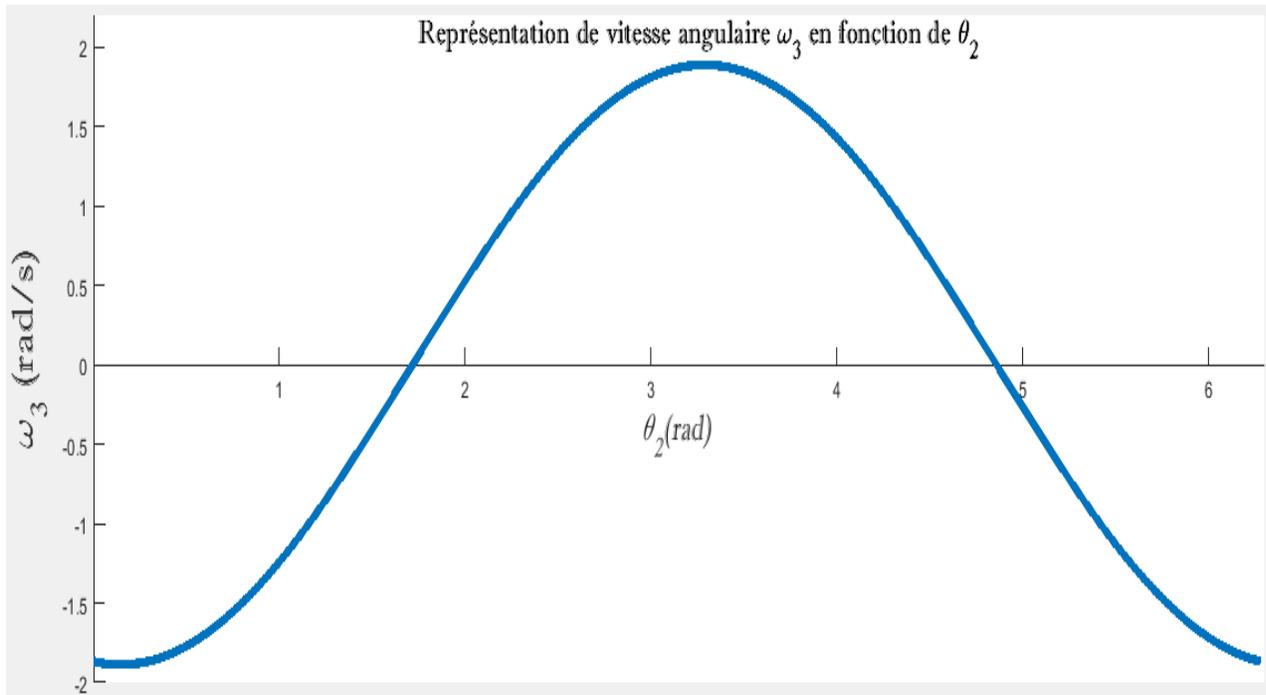


Figure II.12. Courbe de variation de la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La courbe de variation de vitesse angulaire ω_3 en fonction de coordonnée θ_2 est représentée par une ligne incurvée uniforme qui se croit jusqu'elle atteind sa valeur maximale correspondante à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$), puis elle se décroît jusqu'à la fin de la période du cycle (T).

On obtient pour la vitesse angulaire ω_4 de l'élément 4 :

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (II.15)$$

La courbe de variation de vitesse angulaire ω_4 de l'élément 4 est représentée par la figure II.13.

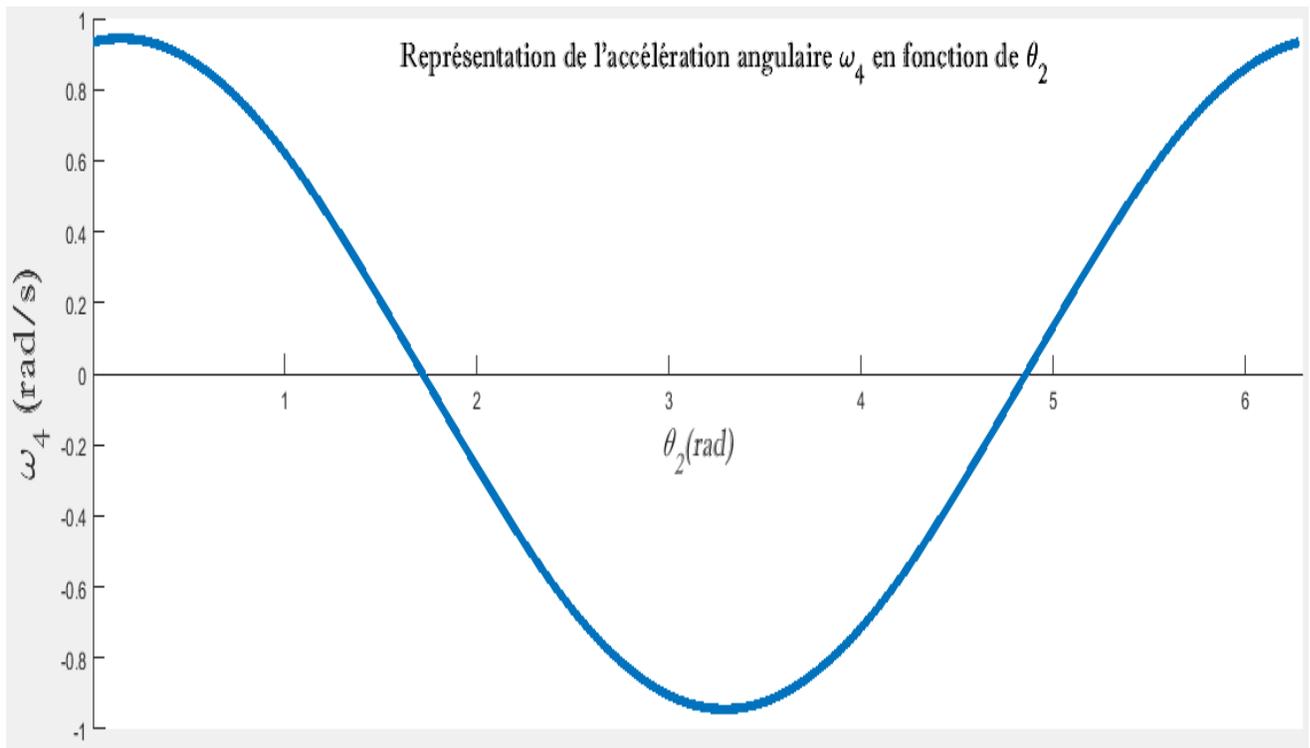


Figure II.13. Courbe de variation de la vitesse angulaire ω_4 de l'élément 4 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La courbe de variation de vitesse angulaire ω_4 en fonction de coordonnée θ_2 est représentée par une ligne incurvée uniforme qui se décroît jusqu'à elle atteindre sa valeur minimale correspondante à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$), puis elle se croît jusqu'à la fin de la période du cycle (T).

Les accélérations angulaires sont obtenues par la dérivation par rapport au temps, des vitesses angulaires des éléments 3 et 4 (ou par la deuxième dérivée de position par rapport au temps). L'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 est donnée par l'expression suivante :

$$\alpha_3 = \frac{-r_3 \omega_3 (\omega_4 - \omega_3) \cos(\theta_4 - \theta_3) + r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) + r_2 \omega_2 (\omega_2 - \omega_4) \cos(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (II.16)$$

La figure II.14 représente variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 en fonction de coordonnée angulaire θ_2 .

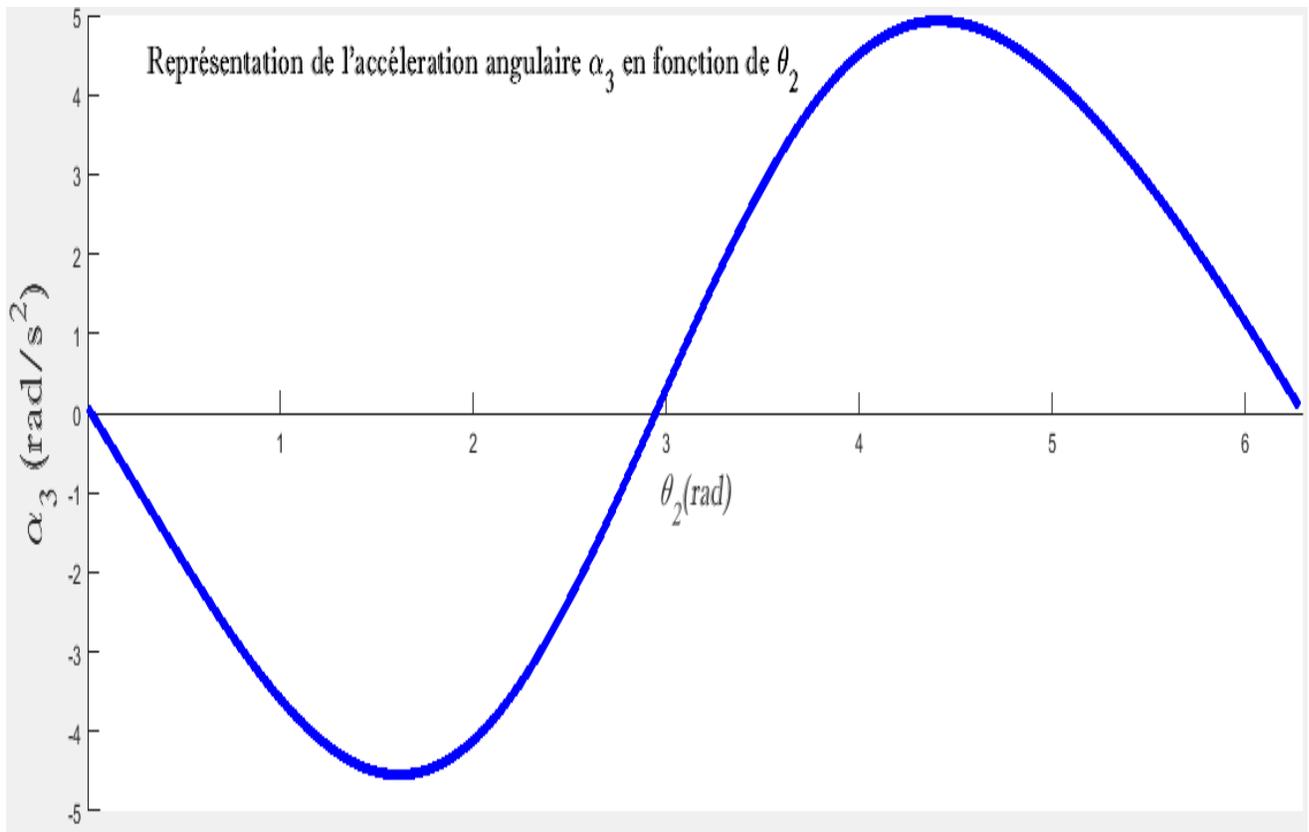


Figure II.14. Courbe de variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée angulaire θ_2 .

- **Interprétation**

La courbe de la variation d'accélération angulaire α_3 en fonction de la coordonnée θ_2 est une ligne incurvée composée de deux parties non-symétriques., la première est totalement négative décroissante jusqu'à une valeur minimale puis elle se croit jusqu'à l'axe des abscisses. La deuxième partie est totalement positive, qui croit pour atteindre sa valeur maximale puis elle recommence à diminuer jusqu'à la fin de la période du cycle (T).

Pour l'accélération angulaire α_4 de l'élément 3, on aura :

$$\alpha_4 = \frac{-r_4 \omega_4 (\omega_3 - \omega_4) \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + r_2 \omega_2 (\omega_2 - \omega_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (II. 17)$$

La figure II.15 représente la variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 4 en fonction de la coordonnée angulaire θ_2

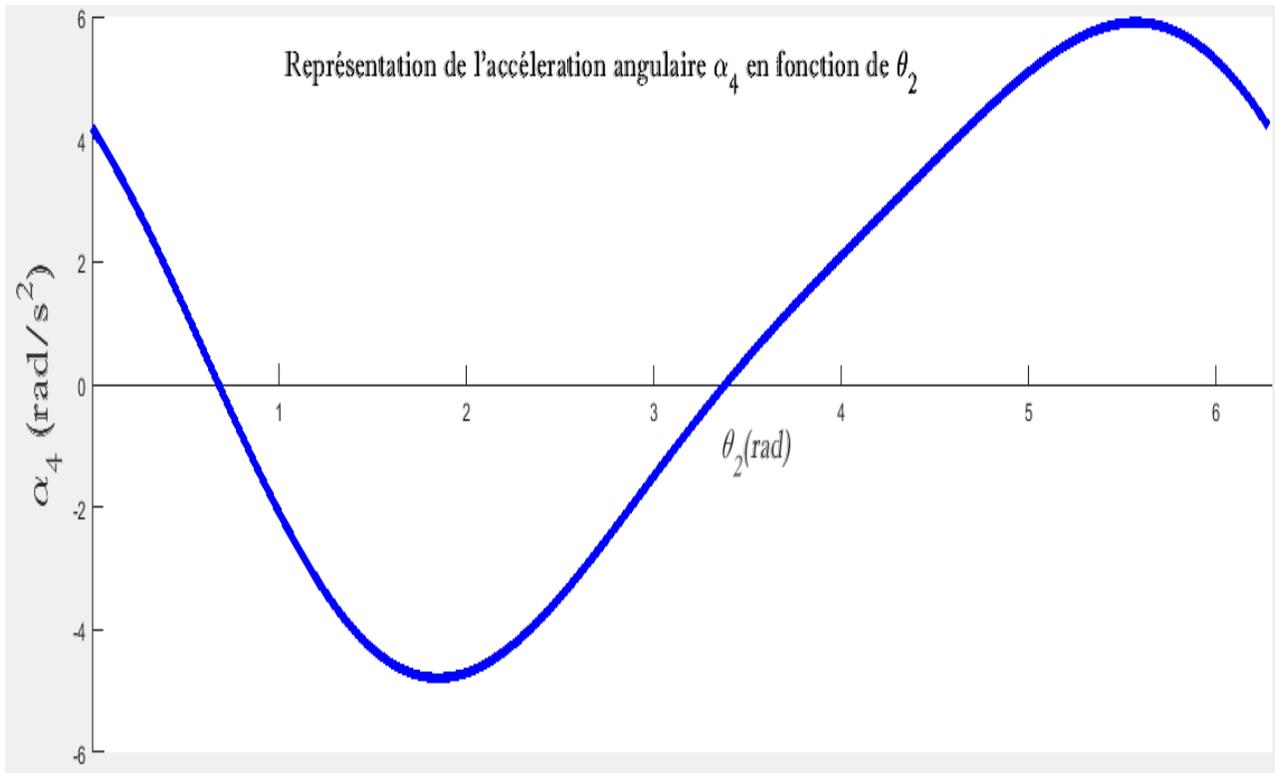


Figure II.15. Représentation de la courbe d'accélération angulaire α_4 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La courbe de la variation d'accélération angulaire α_4 en fonction de la coordonnée θ_2 est une ligne incurvée quelconque laquelle se décroît pour atteindre sa valeur minimale (négative), après elle s'augmente passant par l'axe des abscisses pour atteindre sa valeur maximale (positive) puis elle recommence à diminuer jusqu'à la fin de la période du cycle (T).

II.5. Mécanisme à cinq barres

C'est un mécanisme à deux degrés de liberté. Il est construit à partir de cinq maillons (éléments) reliés entre eux dans une chaîne cinématique fermée. Tous les maillons sont reliés les uns aux autres par cinq articulations en série formant une boucle et le bâti (la base) forme une des liaisons avec un élément. Ce type de mécanisme présente les avantages suivants :

- Il peut fournir plusieurs degrés de flexion d'appui.
- Le mécanisme à engrenages à cinq barres est facile à contrôler et mieux à effectuer divers mouvements.



Figure II.16. Mécanisme à cinq barres avec joint en P pour passerelle automatique.

II.5.1. Résolution d'un exemple de mécanisme à cinq barres

Le schéma cinématique montré sur la figure II.17 constitue un mécanisme cinq barres. Les données sont les deux vecteurs r_3 et r_5 lesquelles sont perpendiculaires par rapport au vecteur r_4 donc on déduit que : $\theta_4 = \theta_3 - \pi/2$ et $\theta_5 = \theta_3 - \pi$. Puisque on suppose que l'élément 2 est l'élément d'entrée, on aura donc deux inconnues dans le système : θ_3 et r_4 .

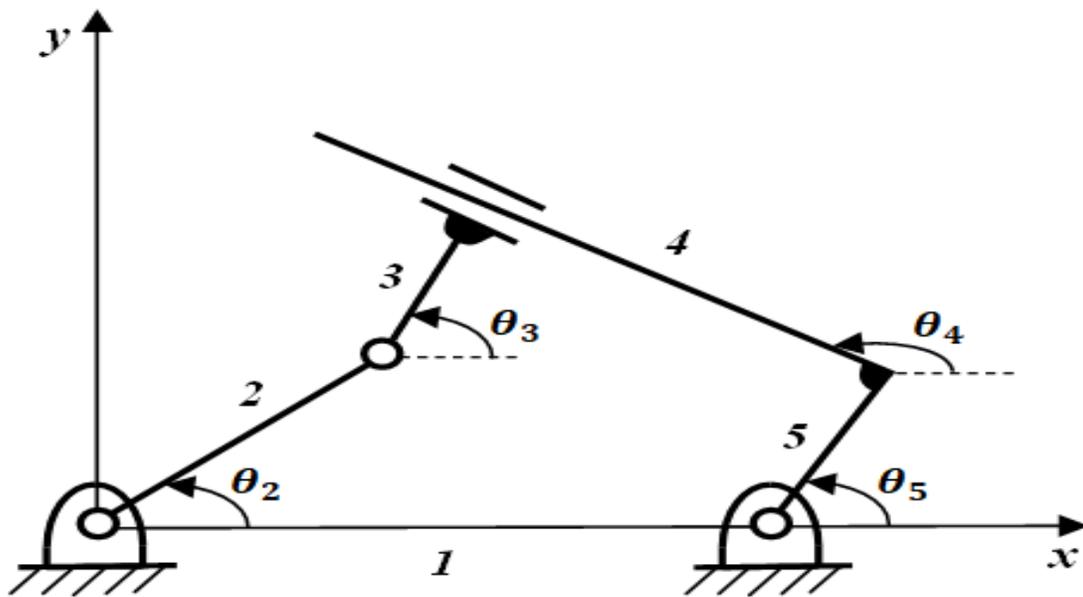


Figure II.17. Schéma cinématique d'un mécanisme cinq barres.

Chapitre II : Analyse cinématique des mécanismes par programmation sous le code Matlab

Les inconnues sont θ_3 et r_4 . L'équation de fermeture de boucle du mécanisme analysé est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} r_3(\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T + r_4(\cos \theta_4, \sin \theta_4)^T + r_5(\cos \theta_5, \sin \theta_5)^T \\ = -r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T - r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T \end{aligned} \quad (II.18)$$

On constate que ce cas de figure s'apparente au cas 5 et on remarque que :

$$\theta_4 = \theta_3 - \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta_5 = \theta_3 - \pi \quad \text{et} \quad \theta_1 = \pi$$

On cherche la position qui est caractérisée par la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3 et le déplacement linéaire r_4 de l'élément 4 :

$$\begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4 \sin \theta_3 \\ -r_4 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_5 \cos \theta_3 \\ -r_5 \sin \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \cos \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.19)$$

$$\begin{pmatrix} r_4 \sin \theta_3 \\ -r_4 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r_3 - r_5) \cos \theta_3 \\ (r_3 - r_5) \sin \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \cos \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.20)$$

Après le remplacement de θ_1, θ_4 et θ_5 , on obtient :

$$\begin{cases} r_4 \sin \theta_3 + (r_3 - r_5) \cos \theta_3 = r_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ -r_4 \cos \theta_3 + (r_3 - r_5) \sin \theta_3 = -r_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (II.21)$$

On multiplie la première ligne d'équation (II.19) par $\sin \theta_3$ et la deuxième ligne par $\cos \theta_3$, puis on soustrait les deux équations pour obtenir le déplacement linéaire r_4 de l'élément 4 :

$$r_4 = r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (II.22)$$

Pour la coordonnée angulaire θ_3 de l'élément 3, on multiplie la première ligne d'équation (II.19) par $\cos \theta_3$ et la deuxième ligne par $\sin \theta_3$ puis on somme les deux équations :

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{r_2}{r_1} \cos(\theta_2 - \theta_3) + (r_3 - r_5) \right] \quad (II.23)$$

On utilise les conditions suivantes [5] dans le calcul pour tracer les courbes de vitesses et d'accélération :

$$\frac{r_1}{r_2} = 5 \quad ; \quad \frac{r_3}{r_2} = 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{r_5}{r_2} = 1,5$$

Par la dérivation de la position par rapport au temps, on obtient la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 :

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4} \quad (II.24)$$

La figure II.18 montre la variation de la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée angulaire θ_2 .

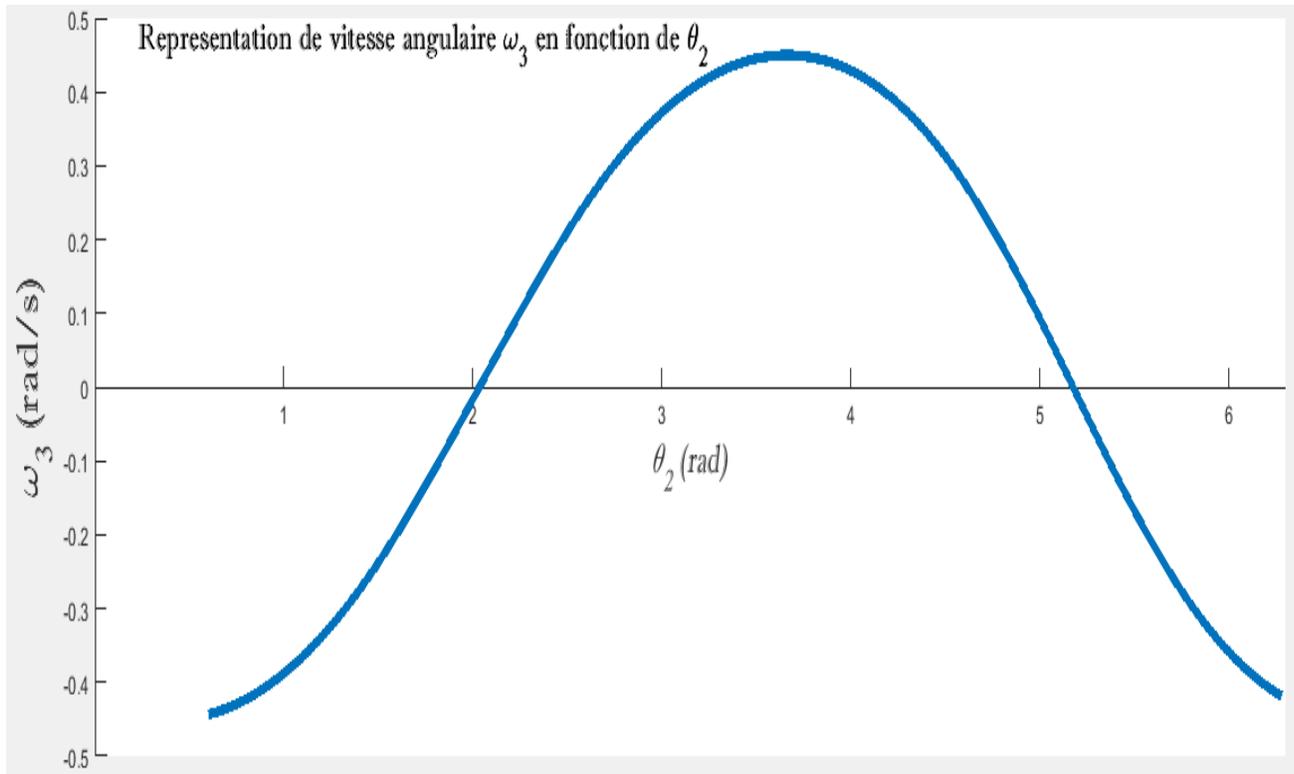


Figure II.18. Courbe de variation de la vitesse angulaire ω_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée angulaire θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de la vitesse angulaire ω_3 de en fonction de θ_2 est une courbe incurvée uniforme croissante jusqu'à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$) puis elle diminue jusqu'à la fin du cycle (T).

Pour la vitesse linéaire \dot{r}_4 de l'élément 4 on aura :

$$\dot{r}_4 = r_2 \omega_2 \left[\cos(\theta_3 - \theta_2) + \frac{r_5 - r_3}{r_4} \sin(\theta_3 - \theta_2) \right] \quad (II.25)$$

La figure II.19 montre l'évolution de vitesse relative \dot{r}_4 de translation de l'élément 4 par rapport à l'élément 3 :

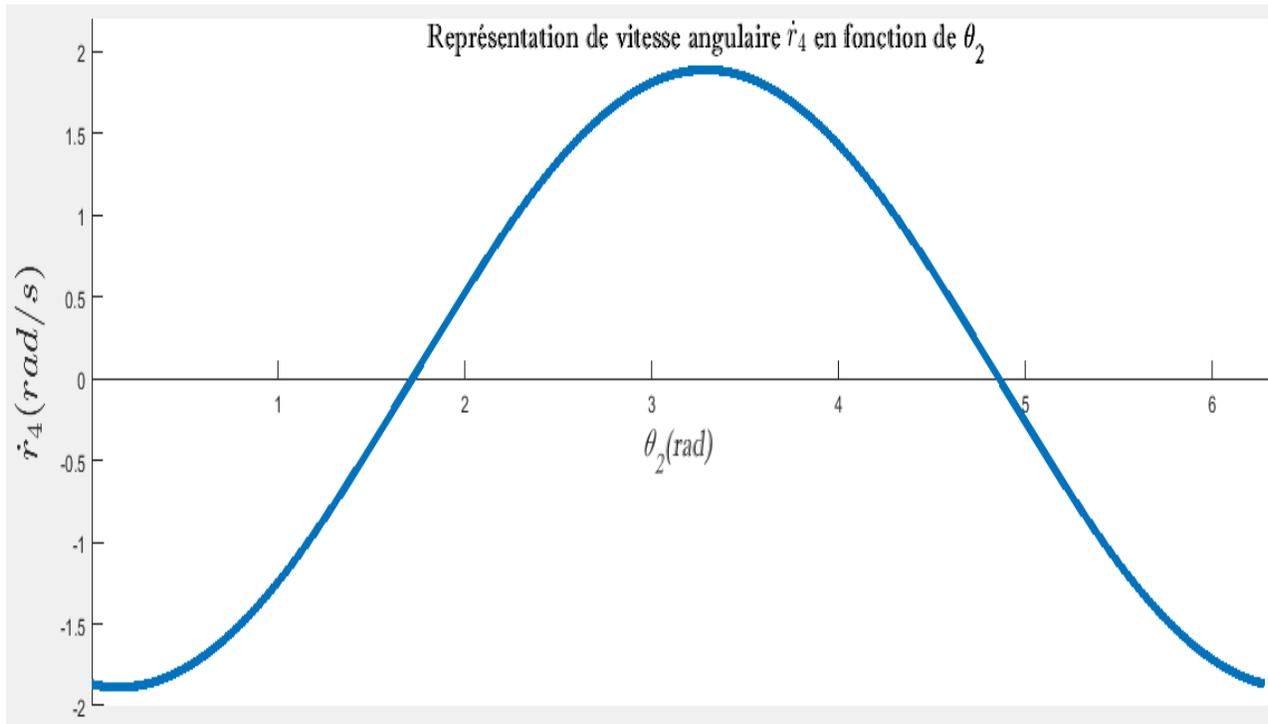


Figure II.19. Courbe de variation de vitesse relative \dot{r}_4 de translation de l'élément 4 par rapport à l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de vitesse relative \dot{r}_4 de translation de l'élément 4 par rapport à l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 est représentée par une ligne incurvée uniforme croissante jusqu'à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$) après elle commence à décroître jusqu'à la fin de période du cycle (T).

Par dérivation des équations de vitesses par rapport au temps (ou par la deuxième dérivée de position par rapport au temps), on obtient l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 et l'accélération linéaire \ddot{r}_4 de l'élément 4. L'équation de α_3 est donnée comme suit :

$$\alpha_3 = \frac{1}{r_4} [-\omega_3 \dot{r}_4 + r_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + r_2 \omega_2 (\omega_2 - \omega_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (II. 26)$$

La figure II.20 montre la variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 :

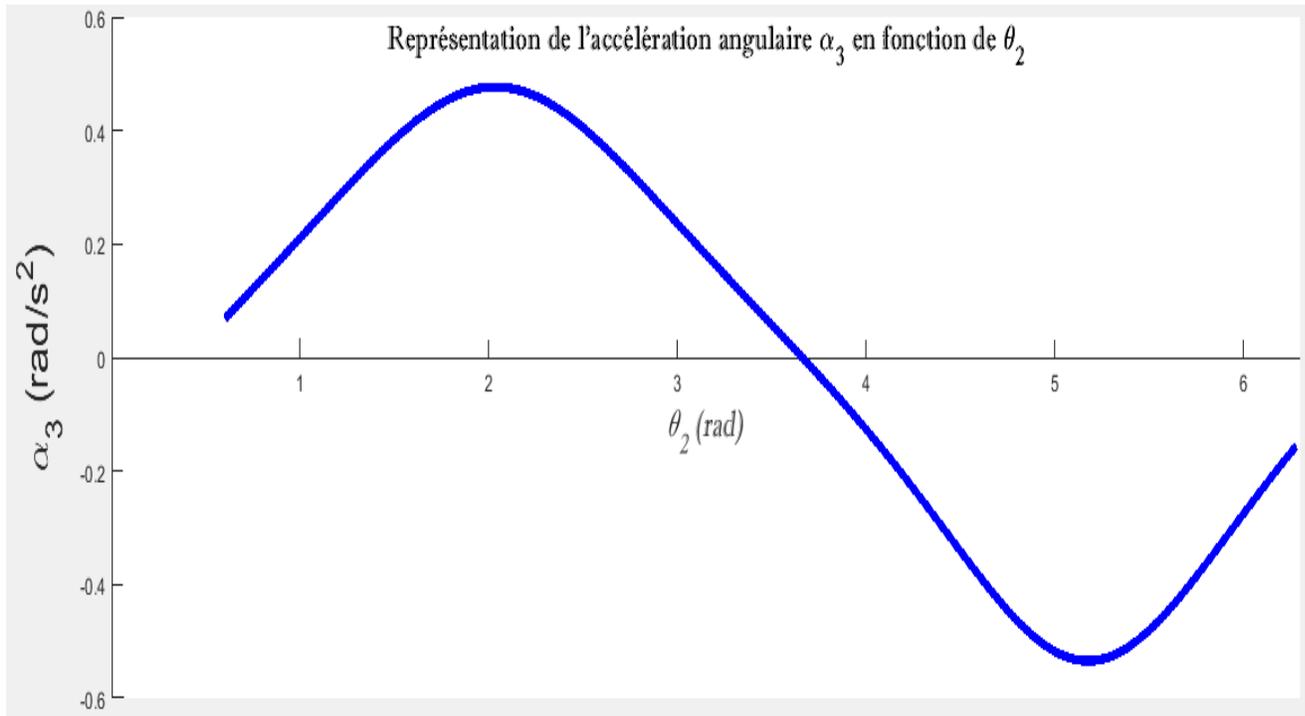


Figure II.20. Courbe de variation de l'accélération angulaire α_3 de l'élément 3 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La variation de l'accélération angulaire α_3 en fonction de θ_2 est une ligne incurvée, commençant par une partie totalement positive croissante puis décroissante jusqu'à la moitié de la période ($\frac{T}{2}$) où la courbe devient totalement négative. Elle diminue puis s'augmente d'une façon non-uniforme jusqu'à la fin de période (T).

L'expression de variation de l'accélération relative \ddot{r}_4 de translation de l'élément 4 par rapport à l'élément 3 est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_4 = & r_2 \alpha_2 \left[\cos(\theta_2 - \theta_3) + \frac{r_5 - r_3}{r_4} \sin(\theta_2 - \theta_3) \right] \\ & + r_2 \omega_2 (\omega_3 - \omega_2) \left[-\sin(\theta_3 - \theta_2) + \frac{r_5 - r_3}{r_4} \sin(\theta_3 - \theta_2) \right] \end{aligned} \quad (II. 27)$$

La figure II.21 montre la variation de l'accélération relative \ddot{r}_4 de translation de l'élément 4 par rapport à l'élément 3 :

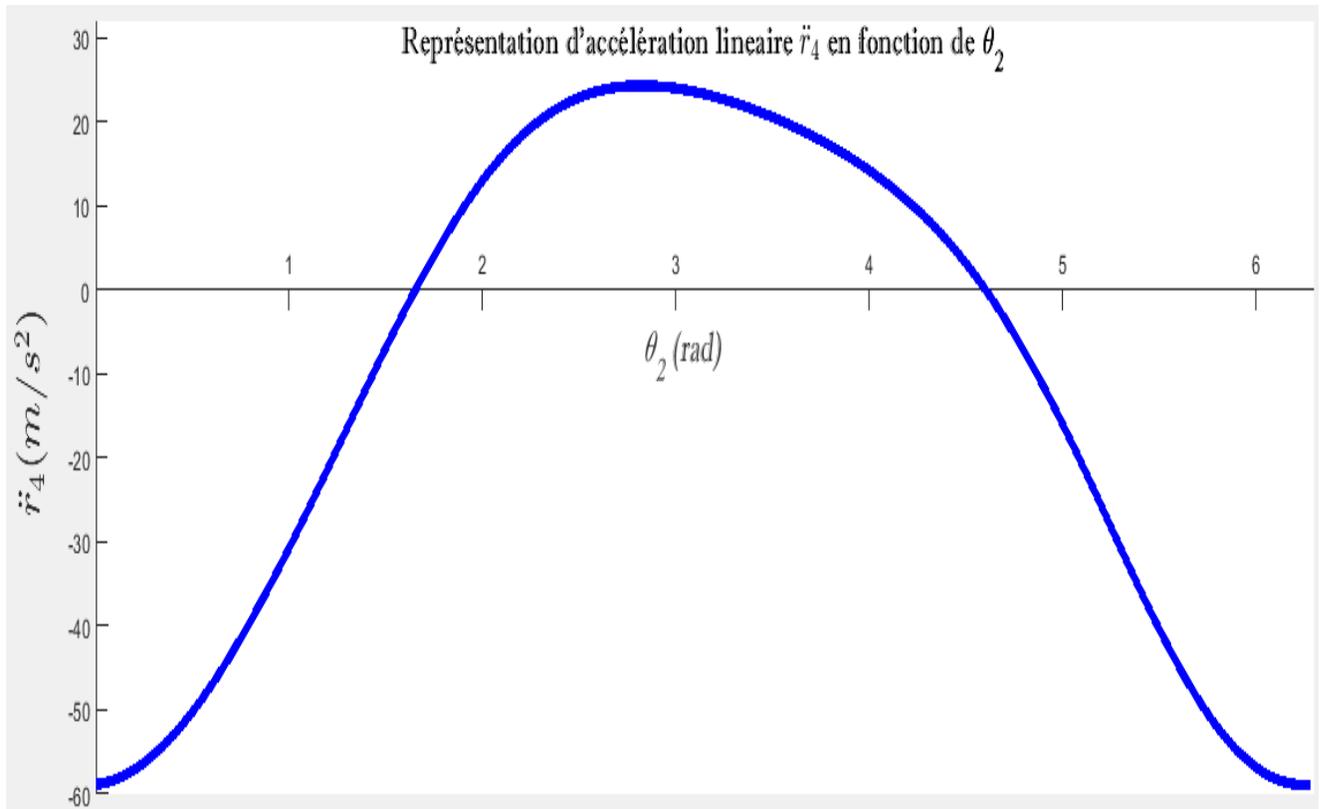


Figure II.21. Courbe de variation de l'accélération relative \ddot{r}_4 de translation de l'élément 4 en fonction de la coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

La courbe de variation de l'accélération relative \ddot{r}_4 en fonction de θ_2 est une ligne incurvée non-uniforme, qui se croit jusqu'à une position proche de la moitié de la période ($\frac{T}{2}$) correspondante à une valeur maximale. Puis, elle se diminue d'une façon non-uniforme jusqu'à la fin de période (T).

II.6. Mécanisme scotch yoke

C'est le mécanisme alternatif qui convertit les mouvements de rotation en mouvement alternatif ou vice-versa. Il est également appelé « mécanisme de liaison fendue ». Il s'agit d'une inversion du vilebrequin à double curseur.

Il peut être utilisé soit pour convertir le mouvement linéaire d'un curseur en mouvement de rotation d'une manivelle, soit pour convertir le mouvement de rotation d'une manivelle en mouvement linéaire d'un curseur.

Ce type de mécanisme présente les avantages suivants :

- Construction facile d'assemblée et d'opération.
- C'est une méthode de conversion directe du rotatif en linéaire.
- Il améliore l'efficacité du moteur.

Un exemple d'application de ce mécanisme est montré sur la figure II.22.

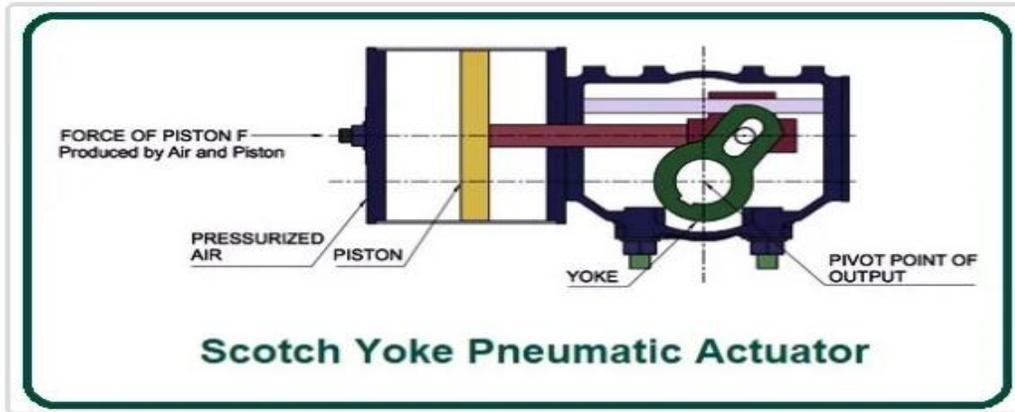


Figure II.22. Exemple d'application d'un mécanisme Scotch Yoke de vanne pneumatique (mouvement linéaire à rotatif).

II.6.1. Résolution d'un exemple de mécanisme Scotch Yoke

La figure II.23 (à gauche) représente un mécanisme Scotch Yoke dans lequel la manivelle 2 déplace la bielle 3 de haut en bas. Une approche de fermeture de boucle sera appliquée dans un souci d'universalité puisque la position verticale de la bielle 3 est définie par le point P. Le diagramme vectoriel est illustré par la figure à droite.

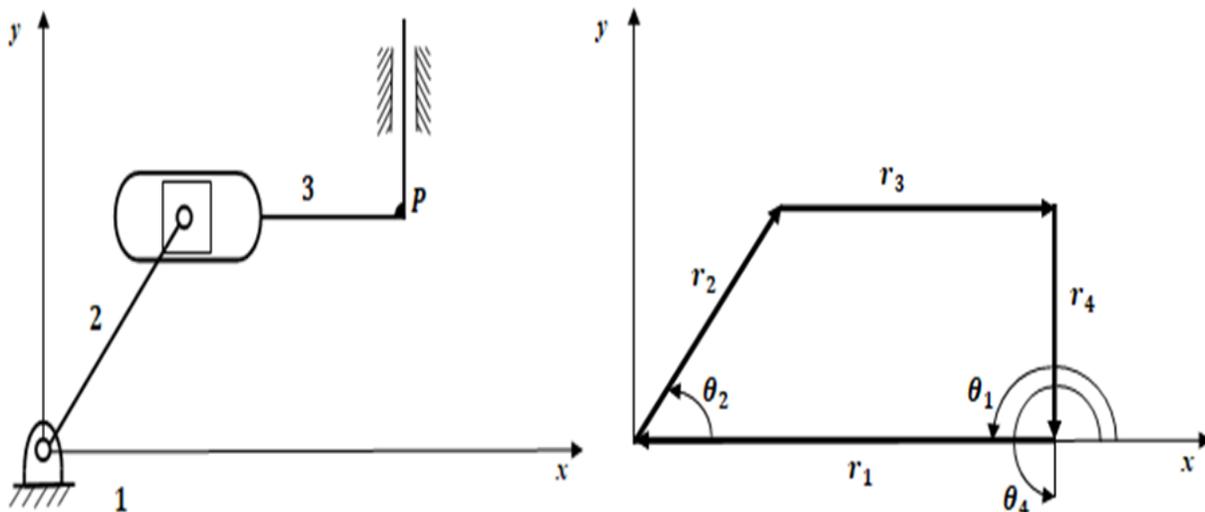


Figure II.23. Mécanisme scotch yoke décalé et son diagramme vectoriel.

Chapitre II : Analyse cinématique des mécanismes par programmation sous le code Matlab

Les deux inconnues sont r_3 et r_4 , et l'équation de fermeture de boucle s'apparente au cas 3. Elle prend la forme suivante :

$$r_3(\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T + r_4(\cos \theta_4, \sin \theta_4)^T = -r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T - r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T \quad (II.28)$$

On remarque dans le schéma du mécanisme étudié que :

$$\theta_1 = \pi \quad ; \quad \theta_3 = 0 \quad \text{et} \quad \theta_4 = \frac{3\pi}{2}$$

Après le remplacement, on cherche la position qui est caractérisée par les déplacements linéaires r_3 et r_4 :

$$\begin{pmatrix} r_3 \cos \theta_3 \\ r_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_4 \cos \theta_4 \\ r_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \cos \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.29)$$

$$\begin{pmatrix} r_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_2 \cos \theta_2 \\ -r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (II.30)$$

On obtient finalement les déplacements r_3 et r_4 des éléments 3 et 4 respectivement :

$$\begin{cases} r_3 = r_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ r_4 = r_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (II.31)$$

Par la dérivation de la position par rapport au temps, on obtient les vitesses linéaires \dot{r}_3 et \dot{r}_4 des éléments 3 et 4, respectivement :

$$\dot{r}_3 = r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \quad (II.32)$$

Et

$$\dot{r}_4 = -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \quad (II.33)$$

On utilise la condition suivante [5] dans le calcul, pour obtenir les courbes de vitesses et accélérations :

$$\frac{r_1}{r_2} = 2$$

Les courbes des vitesses linéaires des éléments 3 et 4 sont représentées sur la même figure (II.24).

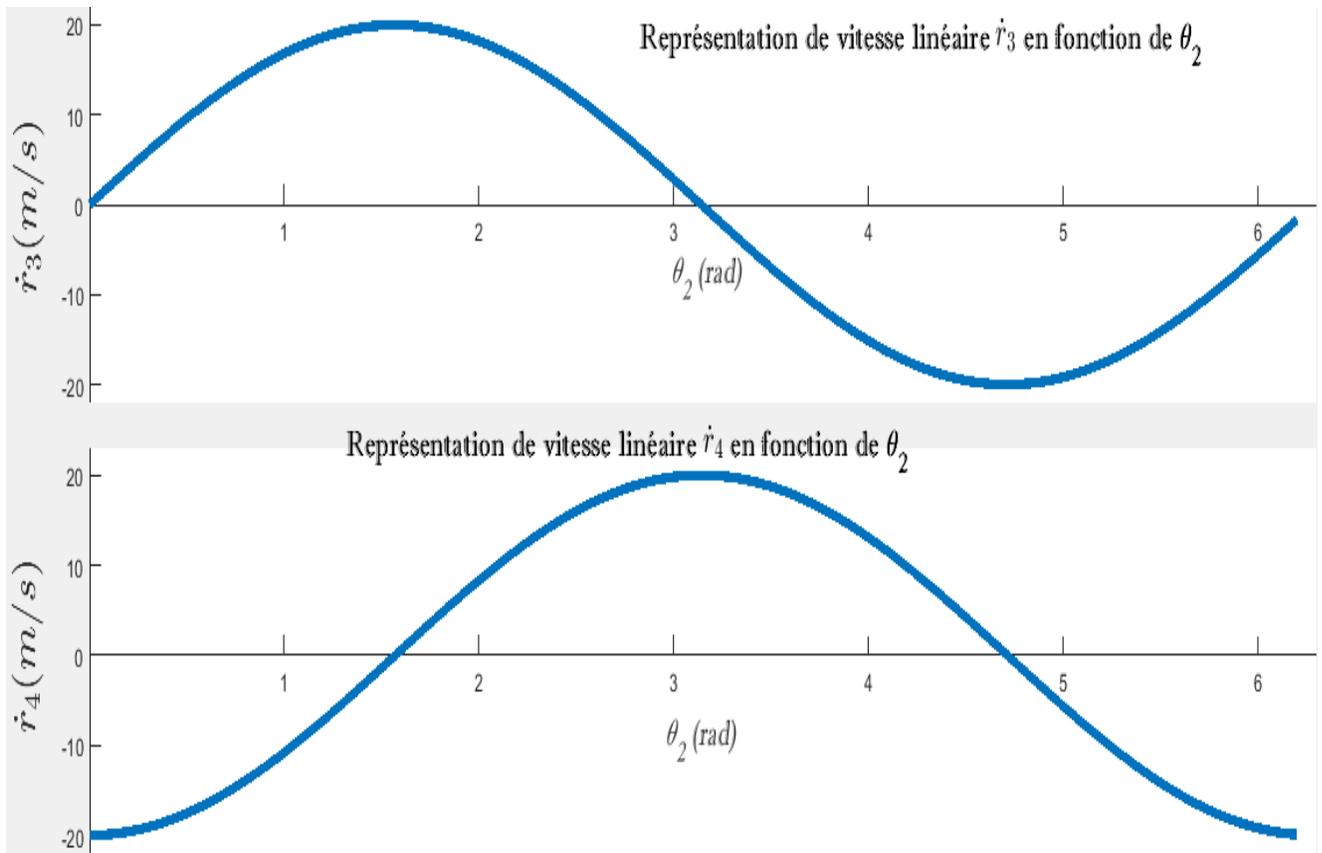


Figure II.24. Courbes de variation des vitesses linéaires \dot{r}_3 et \dot{r}_4 en fonction de coordonnée θ_2 .

- **Interprétation**

Les vitesses linéaires \dot{r}_3 et \dot{r}_4 du mécanisme de type Scotch Yoke sont représentées sur la même figure où l'on remarque :

1. La courbe de variation de la vitesse linéaire \dot{r}_3 est une ligne incurvée uniforme composée de deux parties symétriques. La première est positive croissante puis décroissante jusqu'à la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$ et la deuxième est totalement l'inverse de la première par rapport à l'axe des abscisses.
2. La courbe de variation de la vitesse \dot{r}_4 est une ligne incurvée croissante d'une façon uniforme jusqu'à elle atteigne sa valeur maximale au niveau de la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$, puis elle décroît jusqu'à la fin de la période (T).

Par la dérivation des vitesses linéaires par rapport au temps (ou par la deuxième dérivée de position), on obtient les accélérations linéaires \ddot{r}_3 et \ddot{r}_4 des éléments 3 et 4, respectivement :

$$\ddot{r}_3 = r_2 \alpha_2 \sin \theta_2 + r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 \quad (II.34)$$

Et

$$\ddot{r}_4 = -r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 \quad (II.35)$$

Les deux accélérations linéaires \ddot{r}_3 et \ddot{r}_4 sont ainsi représentées sur la même figure (II.25).

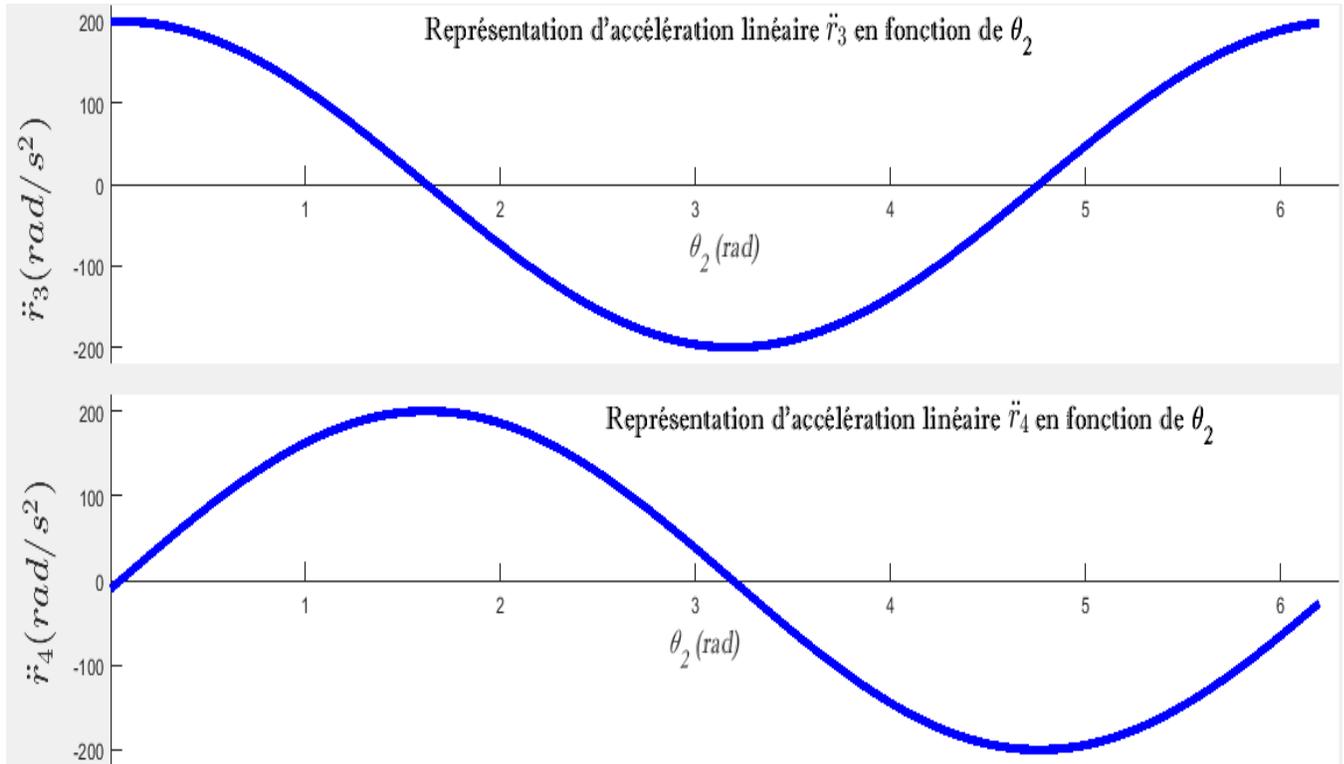


Figure II.25. Représentation des courbes d'accélération linéaires \ddot{r}_3 et \ddot{r}_4 en fonction de coordonné θ_2 .

- **Interprétation**

Les accélérations linéaires \ddot{r}_3 et \ddot{r}_4 du mécanisme de type Scotch Yoke sont représentées sur la même figure où l'on remarque :

1. La courbe de variation de l'accélération linéaire \ddot{r}_3 de l'élément 3 est une ligne incurvée décroissante jusqu'elle atteigne une valeur minimale au niveau de la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$ puis elle se croit jusqu'à la fin du cycle (T).
2. La courbe de variation de l'accélération linéaire \ddot{r}_4 de l'élément 4 est une ligne incurvée uniforme composée de deux parties, la première est totalement positive croissante puis décroissante jusqu'à la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$. La deuxième est totalement l'inverse de la première par rapport à l'axe des abscisses.

Conclusion générale

La transformation d'un mouvement de translation en un mouvement de rotation où vice versa se réalise grâce à des mécanismes qui sont des dispositifs constitués de solides assemblés. La cinématique étudie les mouvements des solides sans s'intéresser aux causes qui les ont engendrés. Les mécanismes que nous avons analysés dans notre mémoire sont les suivants : à trois barres, à quatre barres, à cinq barres et de scotch yoke. L'application de l'équation de fermeture de boucle est basée sur l'identification du type de cas que l'on rencontre puisque cela est en relation directe avec les solutions trouvées dans la littérature. La méthodologie adoptée dans notre étude est de déterminer les vitesses et les accélérations de chaque mécanisme étudié puis l'utilisation de code de calcul numérique Matlab pour l'obtention de courbes correspondantes. Notre étude nous a conduits aux résultats suivants :

- Les courbes représentant la vitesse angulaire ω_3 (bielle-manivelle, quatre barres, cinq barres), l'accélération linéaire \ddot{r}_4 (bielle-manivelle) et la vitesse linéaire \dot{r}_4 (cinq barres, Scotch Yoke) sont semblables où on remarque une ligne incurvée uniforme qui croît pour atteindre une valeur maximale jusqu'à la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$ puis décroît jusqu'à la fin du cycle (T).
- Les courbes représentant l'accélération angulaire α_3 (bielle-manivelle), la vitesse linéaire \dot{r}_3 (Scotch Yoke) et l'accélération linéaire \ddot{r}_4 (Scotch Yoke) sont des courbes similaires où on observe deux parties symétriques. La première est une ligne incurvée uniforme qui croît puis décroît jusqu'à la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$. La deuxième partie est l'inverse de la première par rapport à l'axe des abscisses.
- La variation de vitesse angulaire ω_4 (quatre barres) et l'accélération linéaire \ddot{r}_3 (Scotch Yoke) sont des courbes similaires où on remarque est une courbe incurvée uniforme décroissante jusqu'à la moitié de période $\left(\frac{T}{2}\right)$ puis elle augmente jusqu'à la fin du cycle (T).
- La variation de vitesse angulaire α_3 (quatre barres) et la vitesse linéaire \dot{r}_4 (bielle-manivelle) sont des courbes semblables où on distingue deux parties, la première est

négative décroissante puis croissante jusqu'à la moitié de période $\left(\frac{T}{2}\right)$. La deuxième est l'inverse de la première par rapport à l'axe des abscisses.

- La courbe de la variation d'accélération angulaire α_3 (cinq barres) est une ligne incurvée non-uniforme laquelle croit pour atteindre sa valeur maximale, après elle décroît pour atteindre sa valeur minimale puis elle recommence à augmenter jusqu'à la fin de la période du cycle (T).
- La courbe de la variation d'accélération angulaire α_4 (quatre barres) est une ligne incurvée laquelle décroît pour atteindre sa valeur minimale, après elle augmente pour atteindre sa valeur maximale puis elle recommence à diminuer jusqu'à la fin de la période du cycle (T).
- La courbe de variation de l'accélération relative \ddot{r}_4 (cinq barres) est une ligne incurvée non-uniforme, qui croit jusqu'à une position proche de la moitié de la période $\left(\frac{T}{2}\right)$ correspondente à valeur maximale. Puis, elle diminue d'une façon non-uniforme jusqu'à la fin de période (T).

Bibliographie

- [1] Med Amine Laribi « Contribution à la synthèse des mécanismes plans et spatiaux et de rebots parallèles par une méthode évolutionnaire » Thèse de Doctorat en génie mécanique. Université de Poitiers en 2005.
- [2] <http://lyc58-fr.ac-dijon.fr/ljr/cours/supsi/si/chaine-solides/ch1-AModelChaineCine2010.pdf>
- [3] <https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/sciences/les-mecanismes-de-transformation-du-mouvement-s1437>
- [4] <http://www.ispm.ac.ma/wp-content/uploads/2020/05/S304-trans-avec-transformation-de-MvtPR.pdf>
- [5] Oleg Vinogradov – Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms - 2000 by CRC Press LLC Boca Raton London New York Washington, D.C.
- [6] Abdelfattah Mlika « Théorie des mécanismes » Mastère Mécanique et Ingénierie des Systèmes. Ecole Nationale d'ingénieurs de Sousse - Janvier 2010
- [7] http://ssi.stjo.lasalle.free.fr/content/fichiers/FS_1ere/%5BF512%5D%20Schematisation%20des%20mecanismes.pdf
- [8] <https://s21182c7956f6fcf0.jimcontent.com/download/version/1510646504/module/16514186125/name/cin%C3%A9matique%2017%2018.pdf>
- [9] <http://www.univ-ueb.dz/fssa/wp-content/uploads/2020/03/Chapitre-3.-Analyse-Cin%C3%A9matique-M%C3%A9canismes.pdf>
- [10] Cinématique I, Modélisation et paramétrage des chaînes de solides - p.1 Modélisation cinématique des chaînes de solide.

Annexe

Remarque : il existe quatre différents programmes pour les quatre mécanismes étudiés, mais dans chaque programme on cherche deux courbes de vitesses et deux courbes d'accélération donc on va changer le paramètre au niveau de fonction plot dans Matlab, ainsi l'unité correspondante.

- **Programme de mécanisme bielle manivelle :**

```
clear; clc
r1=input('donner la valeur de longueur de lien 1');
r2=input('donner la valeur de longueur de lien 2');
r3=4*r1;
w2=input('donner la valeur de vitesse angulaire de lien 2');
T2=(0:0.02:2*pi);
T3=asin(-(r2./r3).*sin(T2));
r4=r2.*cos(T2)+r3.*cos(T3);
w3=(-w2.*r2.*cos(T2))./r3.*cos(T3);
a3=(r2.*w2.^2.*sin(T2)+r3.*w3.^2.*sin(T3))./r3.*cos(T3);
r4p=(-r2.*w2.*sin(T2-T3))./cos(T3);
r4pp=(1./cos(T3)).*(r4p.*w3.*sin(T3)-r2.*w2.*(w2-w3).*cos(T2-T3));
plot(T2,a3);
title('Representation de l acceleration angulaire \alpha_{3} en fonction de
\theta_{2}');
xlabel('\theta_{2} (rad)');
ylabel('\alpha_{3} (rad/s^2)');
```

- **Programme de mécanisme quatre barres**

```
clear; clc
r1=4;
r2=1;
r3=7;
r4=3;
w2=input('donner la valeur de vitesse angulaire de lien 2');
a2=input('donner la valeur d acceleration angulaire de lien 2');
T2=(0:0.02:2*pi);
T3=input('donner la valeur d angle de lien 3');
T4=input('donner la valeur d angle de lien 4');
w3=w2.*r2.*sin(T2-T3)./r3.*sin(T4-T3);
w4=w2.*r2.*sin(T2-T3)./r3.*sin(T3-T4);
a3=(-r3.*w3.*(w4-w3).*cos(T4-T3)+r2.*a2.*sin(T2-T4)+r2.*w2.*(w2-w4).*cos(T2-
T4))./r3.*sin(T4-T3);
a4=(-r4.*w4.*(w3-w4).*cos(T3-T4)+r2.*a2.*sin(T2-T3)+r2.*w2.*(w2-w3).*cos(T2-
T3))./r4.*sin(T3-T4);
plot(T2,w4);
title('Representation de vitesse lineaire \omega_{4} en fonction de
\theta_{2}');
xlabel('\theta_{2} (rad)');
ylabel('\omega_{4} (rad/s)');
```

- **Programme de mécanisme cinq barres**

```

clear; clc
r2=input('donner la valeur de longueur de lien 2');
r3=input('donner la valeur de longueur de lien 3');
r4=input('donner la valeur de longueur de lien 4');
r5=input('donner la valeur de longueur de lien 5');
w2=input('donner la valeur de vitesse angulaire de lien 2');
a2=input('donner la valeur d acceleration angulaire de lien 2');
T2=(0:0.02:2*pi);
T3=acos((4*sin(T2)-2*cos(T2)-1)./10);
w3=-((2.*cos(T2))./5 + sin(T2)./5)/(1 - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10).^2).^1./2);
a3=((2.*cos(T2))./5 + sin(T2)./5).^2.*(cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10))./(1 - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10).^2).^3./2) - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5)/(1 - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10).^2).^1./2);
r4p=r2.*w2.*(cos(T3-T2)+(r5-r3).*sin(T3-T2)./r4);
r4pp= (5).*cos(T2 - acos((2.*sin(T2))./5 - cos(T2))./5 - 1./10)).*((2.*cos(T2))./5 + sin(T2)./5)/(1 - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10).^2).^1./2) + 1) - 10.*sin(T2 - acos((2.*sin(T2))./5 - cos(T2))./5 - 1./10)).*((2.*cos(T2))./5 + sin(T2)./5)/(1 - (cos(T2))./5 - (2.*sin(T2))./5 + 1./10).^2).^1./2) + 1);
plot(T2,r4p);
title('Représentation de vitesse lineaire $\dot{r}_{4}$ en fonction de \theta_{2}');
xlabel('\theta_{2} (rad)');
ylabel('$\dot{r}_{4}$ (m/s)$');

```

- **Programme de mécanisme Scotch Yoke**

```

clear; clc
r2=input('donner la valeur de longueur de lien 2 ');
T2=(0:0.02:2*pi);
w2=5*r2;
a2=input('donner l acceleration angulaire de lien 2 ');
r3p=r2*w2*sin(T2);
r4p=-r2*w2*cos(T2);
r3pp=r2*a2*sin(T2)+r2*w2*w2*cos(T2);
r4pp=-r2*a2*cos(T2)+r2*w2*w2*sin(T2);
subplot(211);
plot(T2,r3p);
xlabel('\theta_{2} (rad)');
ylabel('$\dot{r}_{3}$ (m/s)$');
subplot(212);
plot(T2,r4p);
xlabel('\theta_{2} (rad)');
ylabel('$\dot{r}_{4}$ (m/s)$');

```