

N° d'ordre : M...../GM/2022

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

**Réponse dynamique des plaques composites
reposant sur des appuis élastiques**

Présenté par :

❖ *Guemmour Fatma*

❖ *Dahmani Ikram*

Soutenu le 12 / 07 / 2022 devant le jury composé de :

Président : Pr. Djamel OUIAS Université de Mostaganem UMAB

Examineur : Dr. Amina BELHACHEMI Université de Mostaganem UMAB

Encadreur : Dr. Fatima Zohra ZAOUI Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

Remerciements

Nous tenons en premier lieu à remercier "ALLAH" le Tout Puissant de nous avoir donné la volonté, la force, la patience, le courage, la santé... pour réaliser ce travail. Nous tenons à exprimer un remerciement tout spécial à nos parents, de nous avoir soutenu et encouragé tout au long de nos études.

Nos vifs remerciement vont à notre encadreur Dr. ZAOUI F. Z. pour son soutien et son aide tout au long de ce travail.

Nous adressons également nos remerciements les plus vifs à Monsieur D. Ouinas d'avoir accepté de présider le jury de ce projet de fin d'étude, et aussi Madame A. Belhachemi, de nous avoir fait l'honneur d'être examinatrice de cet mémoire.

Enfin, nous remercions tous les enseignants qui nous ont fait profiter de leur savoir, le long de nos études, ainsi les personnels administratifs



Résumé

Une théorie raffinée de déformation par cisaillement pour la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées sur des fondations élastiques est présentée. Le champ de déplacement est choisi sur la base des hypothèses selon lesquelles les déplacements axiaux et transversaux sont constitués de composantes dues à la flexion et au cisaillement. Les composantes de cisaillement des déplacements axiaux donnent lieu à la variation parabolique de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur de telle manière que les contraintes de cisaillement disparaissent sur les surfaces des plaques. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser un facteur de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée sont supposées variables à travers l'épaisseur selon la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. La fondation élastique est modélisée comme une fondation de Pasternak. Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques ont été établies à partir de la méthode de Navier et les résultats obtenus sont bien comparés aux solutions d'élasticité tridimensionnelle et aux solutions des différentes théories des plaques. Les influences de l'indice de loi de puissance, du rapport d'épaisseur et des paramètres de fondation sur la fréquence naturelle des plaques ont été évaluées.

Mots clés : Vibration libre, fréquence naturelle, plaque, matériau FGM, fondation élastique

Abstract

A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation is presented . The displacement field is chosen bases on assumptions that the in-plane transverse displacements consist of bending and shear components, and the shear components of in-plane displacements give rise to the parabolic variation of shear strain through the thickness in such a way that shear stresses vanish on the plate surface .therefore,there is no need to use shear correction factor. Material properties of functionally graded plate are assumed to vary according to power law distribution of the volume fraction of the constituents. The elastic foundation is modeled as Pasternak foundation. Equations of motion are derived using Hamilton's principale. closed-form solution of rectangular plates is derived and the obtained results are compared well with three-dimensional elasticity solutions and third-order shear deformation theory solutions. Influences of power law index, thickness ratio, foundation parameters on the fondamental frequency of plates have been evaluated.

Keywords: Free vibration, natural frequency, plate, FGM material, elastic foundation

ملخص

تم تطوير نظرية تشوه القص للاهتزاز الحر للوحات متدرجة وظيفيا على اساس مرن .يتم اختيار مجال الانتقال بناء على فرضيات مفادها ان الانتقال الطولي و العرضي يتكون من مكونات ناتجة عن الانحناء و القص .وان مكونات القص في الانتقال الطولي تؤدي الى تباين القطع المكافئ للاجهاد القص من خلال السماكة بهذه الطريقة تتلاشى ضغوط القص على اسطح الالواح . لذلك لا داعي لاستخدام معامل تصحيح القص. من المفترض ان تختلف خصائص المواد للوحة وفقا لتوزيع قانون القوة لجزء الحجم من المكونات. تم اشتقاق معادلات الحركة باستخدام مبدأ هاملتون. يتم اشتقاق حلول المعادلات للألواح المستطيلة ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع حلول المرونة ثلاثية الأبعاد وحلول نظرية تشوه القص من الدرجة الثالثة. أخيراً، تم تقييم تأثيرات مؤشر قانون القوة، نسبة السماكة ، ومعلمات الأساس على التردد الأساسي للألواح.

الكلمات المفتاحية: اهتزاز حر، تردد طبيعي، صفيحة، مادة متدرجة وظيفيا، اساس مرن

Tables des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
ملخص	iv
Tables des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Liste des Notations	ix
Introduction générale	01

Chapitre I: Généralités sur les matériaux FGM à gradient de propriétés

I.1 Introduction	04
I.2 Concepts des matériaux FGM à gradient de propriétés	04
I.3 Historique	06
I.4 Propriétés matérielles de la plaque FGM	08
I.4.1 loi demélange puissance (P-FGM)	08
I.4.2 Loi de mélange exponentielle (E-FGM)	09
I.4.3 Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)	10
I.5 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels	11
I.6 Domaines d'application des matériaux FGM à gradient de propriétés	12
I.7 Conclusion	12

Chapitre II: Théorie des plaques

II.1 Introduction	14
II.2 Le modèle classique des plaques de Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques CPT)	14
II.3 Le modèle de Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier d'ordre FSDT)	15
II.4 La théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	16
II.5 Revue de la littérature sur vibration libre des structures FGM	20
II.6 Conclusion	22

Chapitres III : Analyse de la vibration libre de plaque FGM (modèle analytique)

III.1 Introduction	23
III.2 Formulation théorique	23
III.2.1 Hypothèses de base	23
III.2.2 Cinématique	24
III.2.3 Equations constitutives	25

III.2.4 Equations de mouvement	26
III.3 Solutions analytiques pour plaques rectangulaires	30
III.3.1 l'approche de Navier	30
III.4 Conclusion	32

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1 Introduction	33
IV.2 Analyse de la vibration libre de différents type des plaque	33
IV.2.1 Analyse d'une plaque isotrope simplement appuis	34
IV.2.2 Analyse des plaques FGM simplement appuis	34
IV.2.3 Investigation sur des plaques FGM sur des appuis élastiques	35
IV.2.4 Etude paramétrique	37
IV.3 Conclusion	40
Conclusion générale	41

Liste des figures

Fig. I.1. variation continue des propriétés	05
Fig. 1.2. variation discrète des propriétés	05
Fig. 1.3. variation continue la microstructure (schématisée)[34]	05
Fig. 1.4. variation continue la microstructure (photo)[34]	05
Fig. I.5. variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	09
Fig. I.6. variation du module de young dans une plaque E-FGM	10
Fig I.7. variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	11
Fig. II.1. cinématique de la plaque de Love-Kirchhoff [15]	14
Fig. II.2. cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin [15]	16
Fig. II.3. variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur	16
Fig. II.4. schématisation des déformation des plaques par la théorie (HSDT)	17
Fig. III.1. géométrie et coordonnées d'une plaque rectangulaire reposant sur une fondation élastique	24
Fig. IV.1. effet de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des plaques FGM $Al / Al_2 O_3$ simplement appuyées	38
Fig. IV.2. l'influence des paramètres de la fondation élastique (\bar{K}_w, \bar{K}_s) sur la fréquence naturelle $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des plaque FGM $(Al / Al_2 O_3)$ (p=2, a/h=10)	38
Fig. IV.3 la variation de la fréquence naturelle $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des différents types de plaque reposant sur des fondations élastique (p=2, a/h=10)	39
Fig. IV.4 Variation de la fréquence fondamentale $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ en fonction des paramètres de fondation (\bar{K}_w, \bar{K}_s) et de l'indice de puissance (p). (a/h = 10)	40

Liste des tableaux

Tableau II.4 différentes fonctions de forme des théorie HSDT pour des plaque FGM	19
Tableau IV.1 propriétés physique des matériaux utilisés	33
Tableau IV.2 comparaison des huit premières fréquences non dimensionnelle $\tilde{\omega}$ d'une plaque carrée isotrope simplement supportée ($b=a, p=0, \bar{K}_w = \bar{K}_s = 0$)	34
Tableau IV.3 comparaison des fréquence fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / E}$ des plaque FGM Al / Al_2O_3	35
Tableau IV.4 comparaison des fréquence fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / E}$ des plaque FGM Al / Al_2O_3 sur des appuis élastiques	36

Liste des Notations

FGM: Functionally Graded materials

3-D: Tridimensionnelle

$f(z)$: La fonction de cisaillement

$g(z)$: Dérivée de la fonction de cisaillement

x, y, z : Les axes des coordonnées cartésiennes

a, b : Dimensions de la plaque

h : Epaisseur de la plaque

k : Indice de la variation matériel

u, v, w : Composantes du déplacement

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$: Composantes des dérivées de déplacement par rapport le temps

w_b : Composante de déplacement dû à la flexion

w_s : Composante de déplacement dû au cisaillement

t : Temps

C_{ij} : Matrice élastique de Hooke

U : Energie de déformation

U_p : Energie de déformation mécanique

V : Travail des effort extérieurs

K : Energie cinétique

$E(z)$: Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de (z)

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du métal

v_c : Fraction volumique de la céramique

N_x, N_y, N_{xy} : Efforts normaux dans la plaque

M_x, M_y, M_{xy} : Moments de flexion dans la plaque

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b : Moments supplémentaires dus à la flexion

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s : Moments supplémentaires dus au cisaillement

Q_{xz}, Q_{yz} : Effort tranchants dans la plaque

$A, B, D, B^b, D^b, B^s, D^s, H^s$: Matrice de rigidités de la membrane, couplage membrane/flexion, flexion et de cisaillement

$I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$: Les inerties massiques

s_{ij} : Coefficients de la matrice de rigidité

m_{ij} : Coefficients de la matrice masse

σ : Contraintes

ε : Déformations

τ_{xz}, τ_{yz} : Contraintes de cisaillement en plan

ν : Coefficient de poisson

$\rho(z)$: Masse volumique

∂ : Dérivée partielle

δ : Quantité virtuel



INTRODUCTION

GENERALE

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Les concepts de FGM ont été proposés par des scientifiques des matériaux dans la région de Sendai au Japon [1] en 1984. Typiquement, le FGM est fabriqué à partir d'un mélange d'une céramique et d'un métal de telle sorte que la céramique peut résister à des températures élevées dans des environnements thermiques, tandis que le métal peut diminuer la contrainte de traction se produisant sur la surface de la céramique au premier état de refroidissement. Les FGM sont largement utilisés dans nombreuses applications structurelles telles que la mécanique, l'aérospatiale, le nucléaire et le génie civil.

Les plaques supportées par des fondations élastiques sont très courantes dans l'ingénierie structurelle. Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, différents types de modèles de fondation ont été proposés. Le plus simple est Winkler ou modèle à un paramètre [2] qui modélise la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux. Ce modèle a été amélioré par Pasternak [3] en ajoutant un ressort de cisaillement pour simuler les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler. Le modèle de Pasternak ou à deux paramètres est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure fondation.

L'analyse des vibrations libre d'une plaque à gradient fonctionnel (FG) est basée sur les théories des plaques bidimensionnelles et la théorie de l'élasticité tridimensionnelle [4-7]. Les théories des plaques bidimensionnelles peuvent être développées soit en utilisant des théories basées sur le déplacement (lorsque le principe du travail virtuel est utilisé [8-22]) ou des théories basées sur les contraintes de déplacement (lorsque le théorème variationnel mixte de Reissner est utilisé [23-26]). La formulation unifiée bien décrite, initiée par Carrera [27] et récemment étendue par Luciano [28-32], décrit précisément et clairement les types de théories de plaque. Ces théories peuvent être classées en trois grandes catégories: la théorie classique des plaques (CPT); la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). La CPT, qui néglige les effets de déformation de cisaillement transverse, fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces. Pour une plaque modérément épaisse, elle sous-estime

la flèche et surestime la charge de flambement ainsi que la fréquence propre [8-11]. Pour pallier la déficience du CPT, de nombreuses théories de déformation par cisaillement ont été développées. La FSDT prend en compte les effets de déformation de cisaillement transversal par le biais de la variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Etant donné que la FSDT viole les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour composer la différence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constante en raison d'une hypothèse de déformation de cisaillement constant à travers l'épaisseur [12-14]. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreux HSDT ont été développés sur la base de l'hypothèse de variations d'ordre supérieur de la plan Déplacements [15-18] ou à la fois dans le plan et dans le sens transversal [19-22] dans l'épaisseur.

L'objectif de travail vise à présenter une théorie raffinée de déformation de cisaillement pour l'analyse vibratoire libre des plaques FG sur fondation élastique. Le champ de déplacement proposé est basé sur des hypothèses selon lesquelles les déplacements dans le plan et transversaux sont constitués de composantes dues à la flexion et au cisaillement. Les composantes de cisaillement des déplacements axiaux donnent lieu aux variations paraboliques des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur de telle manière que les contraintes de cisaillement disparaissent sur les surfaces des plaques. Les caractéristiques les plus intéressantes de cette théorie sont qu'elle ne contient que quatre inconnues et qu'elle ne nécessite pas l'utilisation du facteur de correction de cisaillement. De plus, elle présente de fortes similitudes avec le CPT dans certains aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes. Les propriétés matérielles du FG plaque sont supposées variables en fonction de la distribution de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. La base élastique est modélisée comme une fondation de Pasternak. Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Des solutions de forme sont dérivées pour plaques rectangulaires simplement appuyées.

A l'issue de ce travail, il serait utile de résumer les principales sections de ce mémoire comportant dans le premier chapitre les généralités sur les matériaux FGM, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre est consacré pour la présentation des différentes théories de déformation des plaques, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la

théorie classique et la théorie du premier ordre, puis les plus utilisées et enfin les plus récentes.

Le quatrième chapitre présente le modèle mathématique permettant d'analyser la réponse dynamique des plaques FGM simplement appuyées et reposant sur des fondations élastiques.

Dans le dernier chapitre, nous présenterons les résultats obtenus pour l'analyse de vibrations libre des plaques fonctionnellement graduées rectangulaires simplement appuyées où les effets de l'indice de la loi de puissance, le rapport d'épaisseur, les paramètres de fondation sur la fréquence naturelle des plaques sont étudiés.

Ce travail s'achèvera par une conclusion générale.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES

MATERIAUX A GRADIENT DE

PROPRIETES (FGM)

Chapitre I : *Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)*

I.1. Introduction

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites, connus sous le nom de matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) a attiré une attention considérable des chercheurs. On obtient un FGM typique avec un fort effet de couplage flexion-étirement, c'est un composite non homogène composé de différentes phases de constituants de matériaux (généralement de la céramique et du métal), où les particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Au sein des FGM, les différentes phases de la microstructure ont des fonctions différentes et ces derniers atteignent le statut multi structural à partir de la gradation de leurs propriétés. En faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés changent progressivement d'une surface à l'autre, en éliminant ainsi les problèmes d'interface et atténuant les concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que les constituants céramiques des FGM sont capables de résister aux environnements à haute température grâce à leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques offrent des performances mécaniques plus élevées et réduisent le risque de fracture catastrophique [33].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (Fig. I.1) ou discrète (Fig. I.2) à travers l'épaisseur. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques de la structure. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

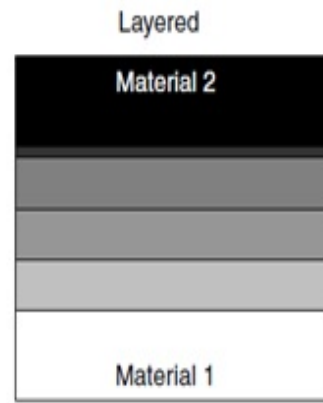
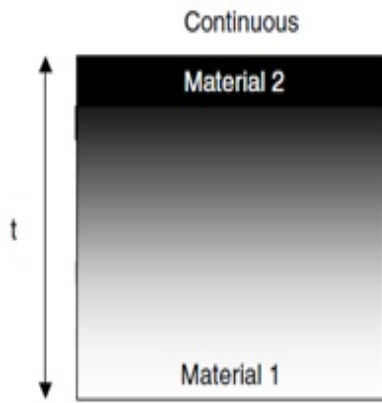
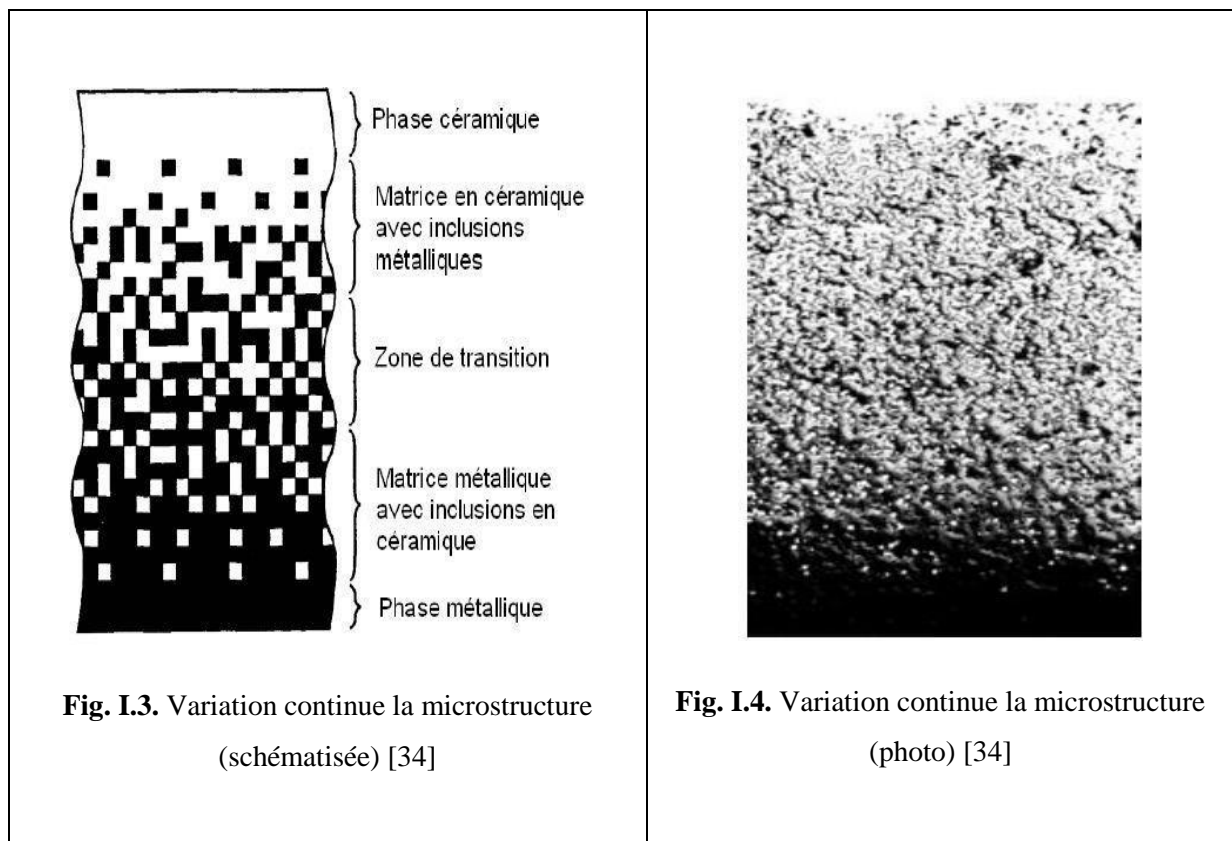


Fig. I.1. Variation continue des propriétés

Fig. I.2. Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure) ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques);
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu. [35]

I.3. Historique

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. La nature donne toujours un moyen aux scientifiques, chaque fois qu'ils sont confrontés à des problèmes technologiques [36].

Les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par Niino et ses collègues à Sendai. L'idée était de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [37]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [38]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [39].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux capables d'éliminer les concentrations de contraintes au niveau des interfaces [40]. Dix-sept laboratoires de recherches, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet. Ils ont montré également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles [41].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette époque, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [42]. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau

Durant la période des (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans les années (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique [43].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique [44].

I.4. Propriétés matérielles de la plaque FGM

I.4.1 Loi de mélange puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance

$$V(z) = ((z + h/2)/h)^p \tag{I.1}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges.

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \tag{I.2}$$

Où E_m, E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.5. On voit bien que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

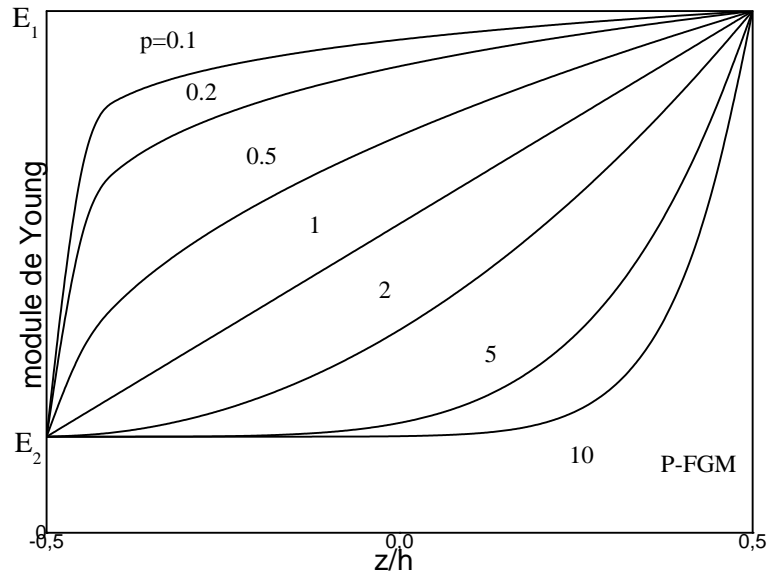


Fig. I.5. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.4.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs Utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [45] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (I.3)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (I.4)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.6.

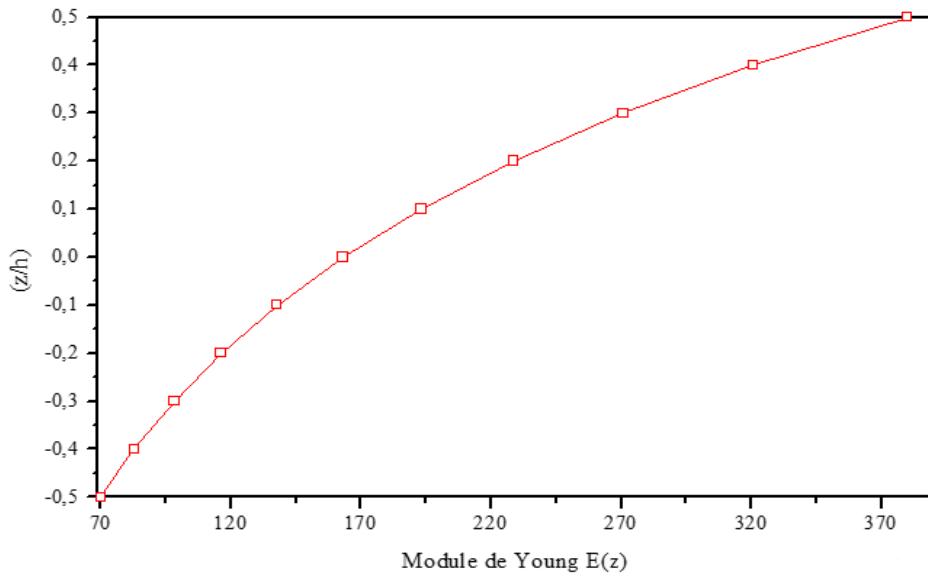


Fig. I.6. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.4.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

Dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi [46] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.b})$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.6.a) et (I.6.b) représente les distributions sigmoïdes.

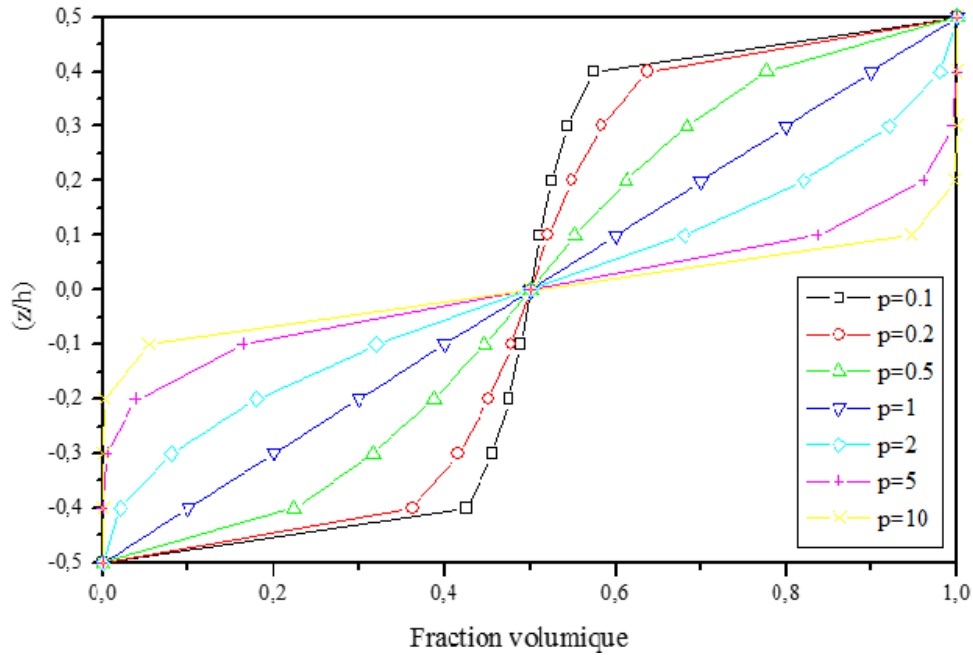


Fig. I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.5. Comparaison des matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels [47]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [48]. Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Yoshihisa a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan

composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique [49].

I.6. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Ils sont aussi applicables à la conversion d'énergie comme les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique, générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique et pile à combustible [50].

Les FGM sont également utilisés aux biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette, Les tissus vivants comme les os et les dents sont considérés comme des matériaux à gradient fonctionnel naturels.

Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables dans les composants des réacteurs nucléaires.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil [33].

I.7. Conclusion

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites innovants dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du

volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers. Nous avons aussi cité quelques procédés de leur fabrication ainsi que les domaines de leur application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

THEORIES D'ELASTICITE

Chapitre II : Théorie des plaques

II.1.Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques dans le domaine élastique, il est nécessaire de trouver la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à utiliser.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Le modèle classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

Commençant par la théorie la plus simple appelée théorie de Love-Kirchhoff. Cette théorie est basée sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [51]. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation figure II.1.

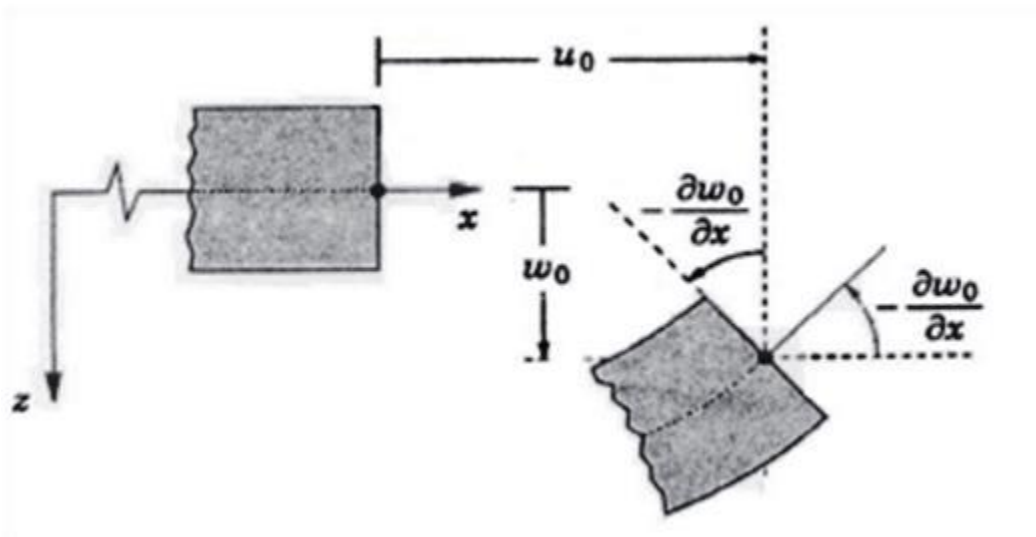


Fig. II.1. Cénimatique de la plaque de love-kirchhoff [52]

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec u_0, v_0, w_0 sont les composante du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

II.3. Le modèle de Reissner-Mindlin (Théorie de déformation en cisaillement du premier d'ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante:

- La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (figure II.2).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec u_0, v_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$). ϕ_x, ϕ_y sont les rotations normales au plan moyen autour des axes y et x , respectivement.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur ce qui nécessite l'utilisation des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [53].

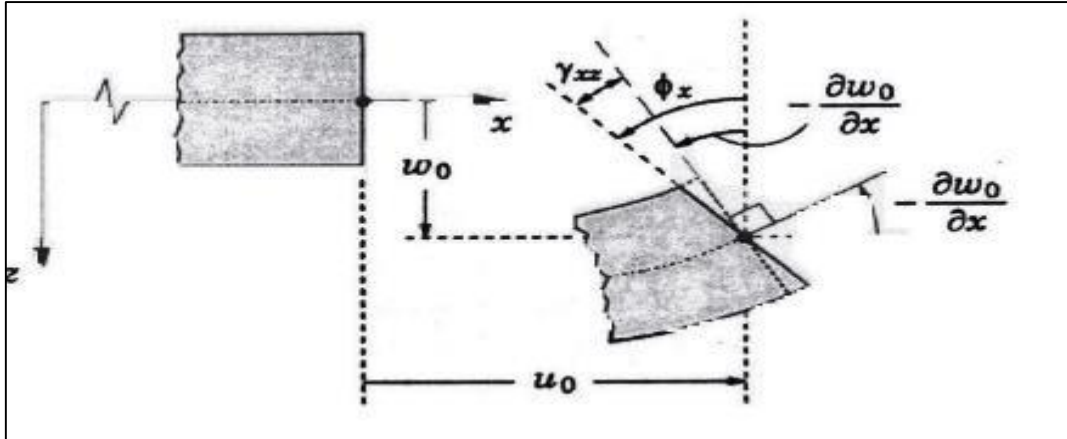


Fig. II.2. Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin [52]

La Figure II.4 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface, il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

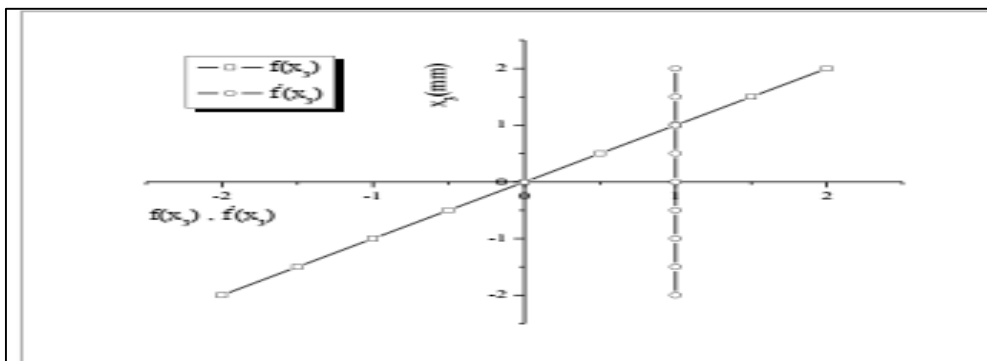


Fig. II.3. Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.4. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre élevé ont été proposées par Naghdi [54], Reddy [55-57], Iyengar et al. [58,59], Krishna Murty [60-62]. Généralement ces théories utilisent un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement avec la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_\alpha(x, y) + z^2\phi_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\phi_\alpha^n(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Où n détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love $n=0$. La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec $n=1$ pour les déplacements dans le plan et $n=0$ pour le déplacement normal.

La figure II.4 montre une cinématique schématique d'un modèle d'ordre élevé.

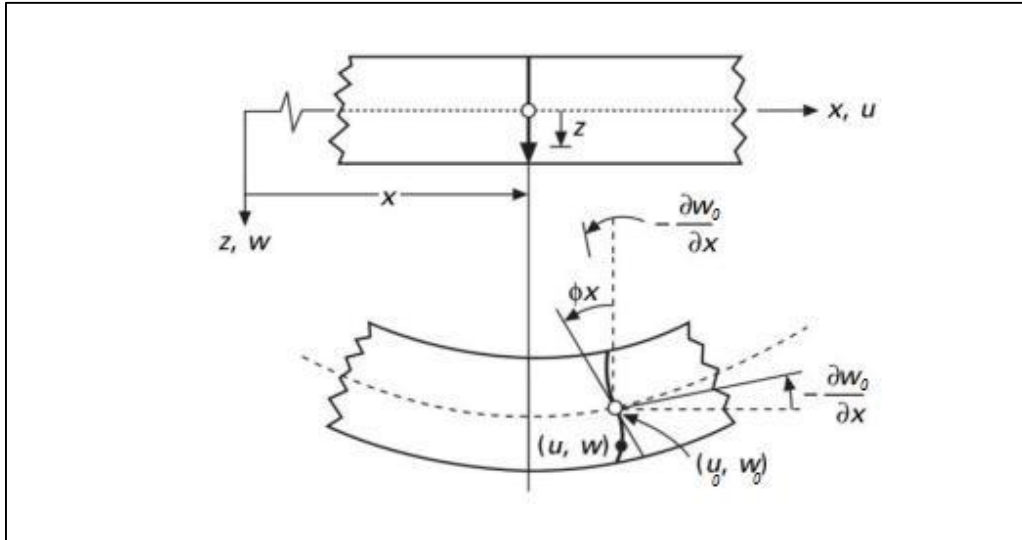


Fig. II.4: Schématisation des déformation des plaques par la théorie « HSDT » .

Selon Reddy [63] et Mallikarjuna et Kant [64] les hypothèses qui sont à l'origine du développement de ces théories d'ordre élevé sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de Reissner [65] Henchy-Mindlin [66] et d'Ambartsumyan et leur champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II.4.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{II.4.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.4.c})$$

Où (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en membrane et (ϕ_x, ϕ_y) les rotations autour des axes x et y, respectivement.

On pose aussi $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. On remarque que les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) peut être obtenue en prenant $f(z) = 0$, tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction $f(z) = z$.

Reddy avait proposé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) [57] qui peut être obtenu par :

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad (\text{II.5})$$

Dans ce modèle le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. D'où on peut obtenir une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Touratier a proposé un modèle SSDT (The sinusoidal shear deformation plate theory) en utilisant une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur qui utilise des fonctions polynomiales [67]. Cette fonction s'écrit comme ci-dessous

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.6})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèles SSDT prennent une forme cosinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. Ce modèle est considéré plus précis par rapport à la théorie TSDT de Reddy.

Une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDT) a été développée par Karama et al. [68] en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.7})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en utilisant des différentes fonctions de cisaillement transverse le tableau II.1 montre les différentes fonctions caractérisant chaque théorie.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM

Théorie	Fonction de forme $f(z)$
Reddy [57]	$f(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2)$
Touratier [67]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Karama [68]	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Reissner [69]	$f(z) = \frac{5z}{4}(1 - \frac{4}{3h^2} z^2)$
Soldatos [70]	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Mantari et al. [71]	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Ait Atmane et al. [72]	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$
Aydogdu [73]	$f(z) = z\alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$
Zaoui et al. [74, 75]	

II.5. Revue de la littérature sur la vibration libre des structures FGM

De nombreuses études ont été consacrées aux comportements statiques et thermomécaniques des structures en FGMs. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Praveen et Reddy [76] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy [77] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. Yang et Shen [78] ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'éclatement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM. Reddy et Chen [79] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle.

En 2004, Huang et Shen [80] ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra [81] pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian et al. [82] ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur.

En 2006, les travaux de Ferreira et al. [83] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger.

Uymaz et Aydogdu [84] ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Étant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li et al. [85]. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'un présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM.

L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse.

Matsunaga [86] a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

Ait Atmane et al. [72] ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

Hasani Baferani et al. [87] ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appui simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le

support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration. Hadji et al. [88] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches. Benachour et al. [89] ont utilisé la même théorie développée par Hadji et al. [88] pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité [90].

Zaoui et al. [91] ont présenté une théorie quasi-3D hybride afin d'étudier la vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastique. Rachid et al. [92] ont analysé le comportement statique et la vibration libre des plaques, coques, cylindres et des sphères en utilisant une théorie 2D de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) a été présenté. La formulation est basée sur des hypothèses pour chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

CHAPITRE III

ANALYSE DE LA VIBRATION

LIBRE DE PLAQUE FGM

(MODELE ANALYTIQUE)

Chapitre III : Analyse de la vibration libre de plaques FGM (modèle analytique)

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, une étude analytique du comportement vibrationnel des structures FGM simplement appuyées reposant sur des fondations de type Winkler-Pasternak par le biais d'une théorie des plaques d'ordre élevé a été présentée. La spécificité de cette théorie est qu'elle emploie un champ des déplacements à 4 inconnus seulement tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres ce qui ne requièrent pas la prise en compte du facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre est obtenue par l'utilisation du principe d'Hamilton. Ces équations régisseuses sont ensuite résolues par la méthode de Navier. Par conséquent, les fréquences fondamentales sont obtenues en résolvant le problème des valeurs propres.

III.2. Formulation théorique

III.2.1. Hypothèses de base

Supposons une plaque FGM rectangulaire de longueur (a), largeur (b) et épaisseur (h) repose sur des appuis élastiques de type Winkler-Pasternak comme indiquée sur la figure III.1. Le modèle est limité au comportement linéaire élastique. Le champ des déplacements de la théorie des plaques utilisée est choisi en se basant sur les hypothèses suivantes :

- i. Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et par conséquent, les contraintes impliquées sont infinitésimales.
- ii. La contrainte normal transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- iii. Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion w_b et cisaillement w_s . Ces composants sont des fonctions de coordonnées x , y et temps t uniquement.

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.1})$$

- iv. Les déplacements dans le plan U et V consistent à des composantes d'extension, de flexion et de cisaillement

$$U = u + u_b + u_s \quad \text{et} \quad V = v + v_b + v_s \quad \text{(III.2)}$$

-les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée comme

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \text{(III.3a)}$$

-les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, conjointement avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{yz} , γ_{xz} et donc aux contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de manière à ce que les contraintes de cisaillement soient nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée par :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{(III.3b)}$$

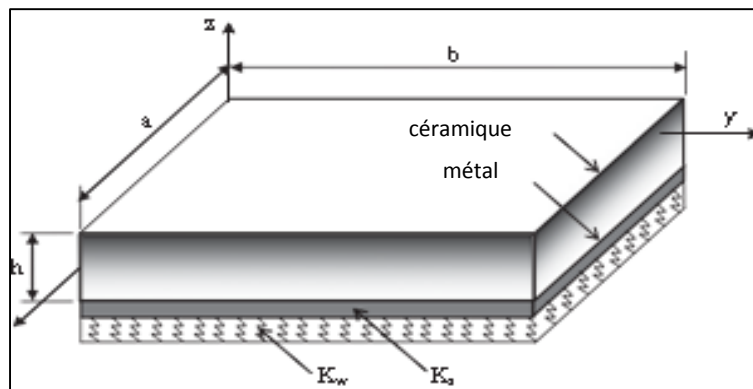


Fig. III.1 : Géométrie et coordonnées d'une plaque rectangulaire reposant sur une fondation élastique.

III.2.2. Cinématique

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ des déplacements peut être obtenu à l'aide des équations (III-3) comme

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Les déformations linéaires associées aux déplacements peuvent être obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{III.5}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \tag{III.6}$$

$$g(z) = 1 - f'(z)$$

$f(z)$ est la fonction de forme déterminant la distribution de la déformation de cisaillement transversale et de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Les fonctions de forme $f(z)$ sont choisies de telle façon que les conditions limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque soient satisfaites, ainsi un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Dans cette étude, la fonction hyperbolique utilisée est présentée dans l'équation suivante [70]

$$f(z) = z - h \sinh(z/h) + z \cosh(1/2) \tag{III.7}$$

III.2.3. Equations constitutives

Considérons des plaques FG fabriquées à partir d'un mélange de deux matériaux par exemple, un métal et une céramique, comme le montre la figure III.1. Deux méthodes d'homogénéisation sont utilisées pour calculer les propriétés de la plaque FG, telles que le module de Young E et la masse volumique ρ :

- **La loi de puissance:** les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM sont assurées par une fonction de loi de puissance sous la forme suivante

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.8})$$

- **La loi exponentielle:** la fonction exponentielle utilisée pour décrire les propriétés matérielles des matériaux E-FGM est défini par la formule ci-dessous

$$P(z) = P_m e^{p(1/2+z/h)} \quad (\text{III.9})$$

Où P représente la propriété matérielle effective, les indices m et c représentent respectivement les constituants métalliques et céramiques, et p est l'indice de loi de puissance. Etant donné que les effets de la variation du coefficient de poisson ν sur la réponse des plaques FG sont très faibles [93,94]. le coefficient de poisson ν est généralement supposé constant.

Les relations linéaires constitutives d'une plaque FG peuvent s'écrire

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad c_{12} = \nu c_{11}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.10})$$

III.2.4. Equations de mouvement

L'énergie potentielle de la plaque est donnée par

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

En substituant l'éqs. (6) et (9) dans l'éq. (11) et en intégrant en fonction de l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite de la manière suivante

$$U_p = \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + Q_{yz} \gamma_{yz}^s + Q_{xz} \gamma_{xz}^s) dx dy \quad (III.12)$$

Où les contraintes résultantes N, M et Q sont définies par

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} g \sigma_i dz, \quad (i = xz, yz) \quad (III.13)$$

En remplaçant l'éq. (9) dans l'éq. (13) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contrainte sont liées à la déformation par les relations suivantes

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x^b \\ K_y^b \\ K_{xy}^b \\ K_x^s \\ K_y^s \\ K_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (III.14a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (III.14b)$$

Où les termes de rigidité sont déterminés par les expressions (III.15) ci-après

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2, f, zf, f^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (15a)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} (g(z))^2 dz \quad (15b)$$

La variation de l'énergie de déformation de la plaque dans l'éq. (12) peut s'écrire

$$\delta U_p = - \int_A \left[\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v + \left(\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right) \delta w_b + \left(\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \right) \delta w_s \right] dx dy \quad (III.16)$$

L'énergie de déformation de la fondation élastique est exprimée par la formule suivante

$$U_F = \frac{1}{2} \int_A \left\{ K_w (w_b + w_s)^2 + K_s \left[\left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (III.17)$$

Où K_w et K_s sont les coefficient de rigidité transvarsale et de cisaillement de la fondation , respectivement. La variation de l'énergie de déformation de la fondation peut être obtenue comme

$$\delta U_f = \int_A \left\{ \left[K_w (w_b + w_s) - K_s \nabla^2 (w_b + w_s) \right] (\delta w_b + \delta w_s) \right\} dx dy \quad (III.18)$$

Où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (III.19)$$

L'énergie cinétique du système de masse est donnée par

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\dot{u} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\dot{v} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right)^2 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2 \right] dx dy dz \quad (III.20)$$

Où $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (III.8) et l'exposant point ($\dot{}$) indique la dérivation par rapport au temps (t). la variation de l'énergie cinétique est obtenue en utilisant l'équation ci-dessous

$$\begin{aligned} \delta T = - \int_A \left\{ \left(I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) \delta u + \left(I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \delta v \right. \\ \left. + \left[I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_3 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \right] \delta w_b \right. \\ \left. + \left[I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_5 \nabla^2 \ddot{w}_b - I_4 \nabla^2 \ddot{w}_s \right] \delta w_s \right\} dx dy \end{aligned} \quad (III.21)$$

Où les termes (I_i) sont les inerties de masse exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, z^2, f^2, zf) \rho(z) dz \quad (III.22)$$

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour trouver les équations de mouvement. Le principe peut être énoncé sous la forme analytique suivante

$$0 = \int_0^t \delta(U_p + U_f - T) dt \quad (\text{III.23})$$

Par remplacement d'éqs. (16), (18) et (21) dans l'éq. (23) et collectons les expressions en fonction des coefficients δu , δv , δw_b et δw_s , les équations du mouvement de la plaque sont obtenus comme

$$\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.24a})$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (\text{III.24b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - K_w (w_b + w_s) + K_s \nabla^2 (w_b + w_s) \\ = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_3 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{III.24c})$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - K_w (w_b + w_s) \\ + K_s \nabla^2 (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_5 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (\text{III.24d})$$

Éq. (III.22) peut être exprimé en termes des déplacements (u, v, w_b, w_s) en remplaçant les résultantes des efforts donnés dans l'éq. (III.14). Donc, pour des plaques FG appuyées sur des fondations élastiques, les équations du mouvement prennent la forme ci-après

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y} \\ - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{11}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.25a})$$

$$\begin{aligned} A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\ - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.25b})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - K_w (w_b + w_s) + K_s \nabla^2 (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\
 & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_3 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned} \tag{III.25c}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - K_w (w_b + w_s) + K_s \nabla^2 (w_b + w_s) \\
 & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_4 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned} \tag{III.25d}$$

III.3. Solutions analytiques pour des plaques rectangulaires

III.3.1. L'approche de Navier

Prenons une plaque rectangulaire simplement appuyée de longueur (a) et de largeur (b). Les conditions aux limites pour des appuis simples dans cette étude sont

$$v = w_b = w_s = N_x = M_x^b = M_x^s = 0, \text{ sur le bord } x = 0, a \tag{III.26a}$$

$$u = w_b = w_s = N_y = M_y^b = M_y^s = 0, \text{ sur le bord } y = 0, b \tag{III.26b}$$

En se basant sur l'approche de Navier, les expressions suivantes des déplacements sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de l'éq. (III.26).

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \tag{III.27a}$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \tag{III.27b}$$

$$w_b(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{III.27b})$$

$$w_s(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta x \quad (\text{III.27b})$$

Où $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $i = \sqrt{-1}$, $(U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn})$ sont des coefficients à déterminer, et ω est la fréquence propre. En substituant l'éq. (III.27) dans l'éq. (III.25), le système d'équations aux valeurs propres est présenté par

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Où les coefficient des matrice de rigidité et de masse dans l'éq. (III.28) sont données en Eq. III.29. Les fréquences propres de la plaque FG peuvent être déterminées, en prenant le déterminant du système (III.28) égale à zéro.

$$s_{11} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}$$

$$s_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}), \quad s_{14} = -\alpha(\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))$$

$$s_{23} = -\alpha^2\beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \quad s_{24} = -\beta((B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2 + \beta^2 B_{22}^s)$$

$$s_{33} = \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$s_{34} = \alpha^4 D_{11}^s + 2\alpha^2\beta^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) + \beta^4 D_{22}^s + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{III.29})$$

$$s_{44} = \alpha^4 H_{11}^s + \beta^4 H_{22}^s + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = -\alpha I_2, \quad m_{23} = -\beta I_1$$

$$m_{24} = -\beta I_2, \quad m_{33} = I_0 + I_3(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$m_{34} = I_0 + I_5(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_0 + I_4(\alpha^2 + \beta^2)$$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement vibratoire des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » en utilisant une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement. Le nombre d'Einconnus dans cette théorie est seulement quatre par rapport à d'autres théories déformation de cisaillement à ordre élevé « HSDT ». La théorie considère la déformation dû au cisaillement sans exigence du facteur de correction de cisaillement et elle donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ses dernières sur les extrémités libres. Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISSCUSION

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans cette section, les résultats de l'analyse de la vibration libre des plaques FG sont présentés. Les calculs ont été faite en utilisant une théorie de déformation de cisaillement type 2D avec seulement quatre inconnues. Plusieurs calculs numériques ont été établies pour des plaques homogènes, fonctionnellement graduées, simplement appuyées et sur des fondations élastiques.

IV.2. Analyse de la vibration libre de différents type de plaques

Pour le calcul numérique, une plaque (Al/Al_2O_3) composée d'un alliage d'aluminium (comme métal) et l'alumine (comme céramique) est examinée. Pour simplifier les calculs, le coefficient de poisson est supposé constant en tout point de l'épaisseur de la plaque. Le modules de Young, la masse volumique de la céramique et du métal utilisés sont énumérées dans le tableau ci-dessous.

Tableau IV.1 : Propriétés physiques des matériaux utilisés

Matériau	Propriétés		
	$E(GPa)$	$\rho(kg / m^3)$	ν
Métal : Al	70	2702	1/3
Céramique : Al_2O_3	380	3800	1/3
Céramique : ZrO_2	200	5700	1/3

Des études comparatives sont réalisées pour une large gamme des paramètre de la plaque et de la fondation. Pour plus de commodité, des paramètres non dimensionnels sont utilisées pour présenter les résultats numériques sous forme de tableaux et de graphiques :

$$\bar{K}_w = \frac{k_w a^4}{D}, \bar{K}_s = \frac{k_s a^2}{D}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}, \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / E}, \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho / E}$$

IV.2.1. Analyse d'une plaque isotrope simplement appuyée

Le premier exemple est étali pour une plaque homogène carrée. les huit premiers modes des différents rapports de géométrie sont calculés et comparées à ceux données par Hosseini-Hashemi et al. [95] basé sur une théorie TSDT à variables et ceux présenté par Thai et Choi [96] en utilisant une théorie de troisième ordre dans le tableau IV.2. On peut voir que les résultats du modèle établi sont en bonne corrélation pour tous les cas allant de plaques très minces à très épaisses.

Tableau IV. 2: Ccomparaison des huit premières fréquences non dimensionnelles $\tilde{\omega}$ d'une plaque carrée isotrope simplement supportée ($b = a, p = 0, \bar{K}_w = \bar{K}_s = 0$).

h/a	Méthode	Modes		
		1	2	3
0.01	Ref. [95]	19.7320	49.3032	78.8421
	Thai et Choi [96]	19.7320	49.3032	78.8421
	Modèle Présent	19.7320	49.3031	78.8421
0.1	Ref. [95]	19.0653	45.4869	69.8093
	Thai et Choi [96]	19.0653	45.4869	69.8093
	Modèle Présent	19.0653	45.4869	69.8091
0.2	Ref. [95]	17.4523	38.1883	55.2543
	Thai et Choi [96]	17.4523	38.1883	55.2543
	Modèle Présent	17.4522	38.1876	55.2524
0.3	Ref. [95]	15.5745	31.6413	44.0236
	Thai et Choi [96]	15.5744	31.6413	44.0236
	Modèle Présent	15.5742	31.6396	44.0190
0.4	Ref. [95]	13.8136	26.5910	36.1319
	Thai et Choi [96]	13.8136	26.5908	36.1319
	Modèle Présent	13.8131	26.5877	36.1242

IV.2.2 Analyse des plaque FGM simplement appuyées

Dans cet exemple, les résultats présentés dans les tableaux IV.3 sont établis pour des plaques FG type Al_2O_3 posées des appuis simples. Les fréquences fondamentales adimensionnelles pour différentes valeurs du rapport de forme (b/a), rapport géométrique (a/h) et d'indice matériel (p) sont calculées et comparées à la solution 2D exacte proposée par Jin et al. [97], à la théorie raffinée présentée par Mantari [98] et à la théorie de troisième

ordre de Thai et Choi [96]. Un bon accord est trouvé pour tous les cas en allant des plaques minces aux plaques épaisses.

Tableau IV.3 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / E}$) des plaque FGM type (Al / Al_2O_3) .

b/a	a/h	P	Théorie				
			Jin et al. [97]	Mantari [98]	Thai et Choi [96] (2D)	Présente	
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1134	0.1134	
		1	0.0870	0.0883	0.0868	0.0868	
		2	0.0789	0.0806	0.0788	0.0788	
		5	0.0741	0.0756	0.0740	0.0740	
	5	0	0.4169	0.4183	0.4151	0.4150	
		1	0.3222	0.3271	0.3205	0.3205	
		2	0.2905	0.2965	0.2892	0.2892	
		5	0.2676	0.2726	0.2665	0.2667	
	2	0	1.8470	1.8543	1.8266	1.8265	
		1	1.4687	1.4803	1.4452	1.4451	
		2	1.3095	1.3224	1.2891	1.2891	
		5	1.1450	1.1565	1.1319	1.1320	
	2	10	0	0.0719	0.0719	0.0717	0.0717
			1	0.0550	0.0558	0.0549	0.0549
			2	0.0499	0.0510	0.0498	0.0498
			5	0.0471	0.0480	0.0470	0.0470
5		0	0.2713	0.2721	0.2705	0.2704	
		1	0.2088	0.2121	0.2081	0.2081	
		2	0.1888	0.1928	0.1882	0.1882	
		5	0.1754	0.1789	0.1749	0.1750	
2		0	0.9570	1.3075	1.2904	1.2904	
		1	0.7937	1.0371	1.0134	1.0134	
		2	0.7149	0.9297	0.9066	0.9066	
		5	0.6168	0.8248	0.8070	0.8071	

IV.2.3 Investigation sur des plaque FGM sur des appuis élastiques

En se basant sur la théorie actuelle, les fréquences naturelles des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques ont été évaluées. Le tableau IV.4 montre les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques rectangulaires avec un rapport géométrique (h/a) variant de 0.05 à 0.2, un indice matériel variant de 0 à 5 et différentes valeurs des paramètres

élastiques (\bar{K}_w, \bar{K}_s) qui sont comparées aux résultats de Baferani et al. [87] et Zaoui et al. [91]. A partir de ce tableau, on peut noter qu'une très bonne concordance entre les solutions est observée confirmant la précision de la théorie actuelle dans la prédiction du comportement en vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.

Tableau IV.4: Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / E}$) des plaques FGM ($Al / Al_2 O_3$) sur des appuis élastiques.

$(\bar{k}_w, \bar{k}_s)^b$	a/h	Méthode	p			
			0	1	2	5
(0,0)	0.05	Baferani et al. [87]	0.0291	0.0227	0.0209	0.0197
		Zaoui et al. [91]	0.0291	0.0222	0.0202	0.0191
		Présente	0.0291	0.0222	0.0202	0.0191
	0.1	Baferani et al. [87]	0.1134	0.0891	0.0819	0.0767
		Zaoui et al. [91]	0.1134	0.0868	0.0788	0.0740
		Présente	0.1134	0.0868	0.0788	0.0740
	0.2	Baferani et al. [87]	0.4154	0.3299	0.03016	0.2765
		Zaoui et al. [91]	0.4151	0.3205	0.2892	0.2665
		Présente	0.4150	0.3205	0.2892	0.2667
(0,100)	0.05	Baferani et al. [87]	0.0406	0.0382	0.0380	0.0381
		Zaoui et al. [91]	0.0406	0.0378	0.0374	0.0377
		Présente	0.0406	0.0378	0.0374	0.0376
	0.1	Baferani et al. [87]	0.1599	0.1517	0.1508	0.1515
		Zaoui et al. [91]	0.1597	0.1494	0.1478	0.1487
		Présente	0.1597	0.1494	0.1478	0.1486
	0.2	Baferani et al. [87]	0.6080	0.5876	0.5861	0.5879
		Zaoui et al. [91]	0.6075	0.5753	0.5694	0.5722
		Présente	0.6074	0.5752	0.5694	0.5722
(100,0)	0.05	Baferani et al. [87]	0.0298	0.0238	0.0221	0.0210
		Zaoui et al. [91]	0.0298	0.0233	0.0214	0.0204
		Présente	0.0298	0.0232	0.0214	0.0204
	0.1	Baferani et al. [87]	0.1162	0.0933	0.0867	0.0821
		Zaoui et al. [91]	0.1162	0.0910	0.0836	0.0795
		Présente	0.1161	0.0910	0.0836	0.0795
	0.2	Baferani et al. [87]	0.4273	0.3476	0.3219	0.2999
		Zaoui et al. [91]	0.4269	0.3381	0.3097	0.2900
		Présente	0.4268	0.3381	0.3096	0.2901
(100,100)	0.05	Baferani et al. [87]	0.0411	0.0388	0.0386	0.0388
		Zaoui et al. [91]	0.0411	0.0384	0.0381	0.0384
		Présente	0.0411	0.0384	0.0381	0.0384
	0.1	Baferani et al. [87]	0.1619	0.1542	0.1535	0.1543
		Zaoui et al. [91]	0.1617	0.1519	0.1505	0.1515
		Présente	0.1617	0.1519	0.1504	0.1514

0.2	Baferani et al. [87]	0.6162	0.5978	0.5970	0.5993
	Zaoui et al. [91]	0.6156	0.5852	0.5800	0.5833
	Présente	0.6156	0.5852	0.5800	0.5834

Les résultats montrent que les paramètres de fondation de Winkler et Pasternak ont des effets d'augmentation de la fréquence non dimensionnelle, et le paramètre Pasternak a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence que le paramètre Winkler. L'effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence non dimensionnelle est très intéressant. Il est observé que si une plaque repose juste sur la fondation Winkler, l'augmentation de l'indice de loi de puissance diminue la fréquence non dimensionnelle. la situation est différente si plaque repose sur la fondation Pasternak indépendamment de la présence /absence de la fondation Winkler.

IV.2.4. Etude paramétrique

Dans les illustrations suivantes, une étude paramétrique a été établie afin d'analyser l'influence des différents paramètres sur les fréquences naturelles des plaques FGM. La figure IV.1 présente la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle d'une plaque FG à simplement appuyées en fonction de l'indice de puissance (p) et différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h). On peut remarquer sur cette figure que la fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de l'indice matériel et augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h). Pour des valeurs élevées de l'indice de gradient (p) et le même rapport d'épaisseur (a/h), la fréquence naturelle ne varie pas considérablement.

A partir de ces résultats, on peut observer que plus l'indice de gradient (p) augmente, plus la fréquence naturelle diminue et cela est dû à la diminution de la rigidité de la plaque. On peut également constater que pour une valeur fixe de l'indice de gradient (p), à mesure que le rapport de forme (a/b) augmente, la fréquence nominale augmente.

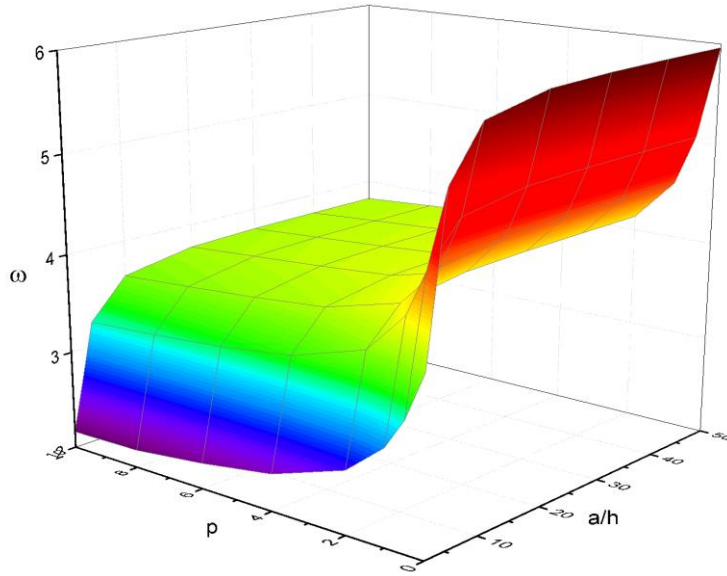


Fig. IV.1. Effet de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des plaques FGM (Al / Al_2O_3) simplement appuyées.

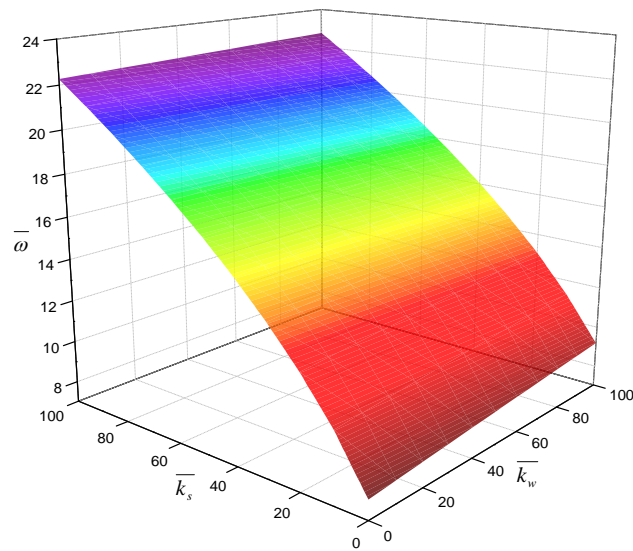


Fig. IV.2. L'influence des paramètres de la fondation élastique (\bar{K}_w, \bar{K}_s) sur la fréquence naturelle $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des plaques FGM (Al / Al_2O_3) ($p = 2, a / h = 10$)

Dans la figure IV.2, l'effet des paramètres de la fondation élastique sur la réponse en vibratoire libre des plaques FG (Al / Al_2O_3) a été présenté. Cette figure révèle que la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente lorsque les paramètres de fondation (\bar{K}_s, \bar{K}_w) augmentent. En comparaison avec le paramètre de Winkler (\bar{K}_w), le paramètre de fondation Pasternak (\bar{K}_s) a un effet dominant sur l'augmentation de la fréquence naturelle adimensionnelle. Ce comportement est dû au fait que l'inclusion des paramètres de fondation augmente la rigidité de la plaque, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence

Dans l'exemple suivant, l'influence du type de matériau utilisé sur la variation des fréquences fondamentales des plaques FG reposant sur des fondations élastiques est examiné comme le montre la figure IV.3. Trois matériaux ont été utilisés un matériau homogène (Al) et deux matériaux fonctionnellement gradués ($Al / Al_2O_3, Al / ZrO_2$). On remarque que les plaques fabriquées avec (Al / Al_2O_3) ont des valeurs de fréquences naturelles plus élevées que les plaques fabriquées avec (Al / ZrO_2) ou un matériau homogène. Il est dû à la rigidité élevée du matériau (Al / Al_2O_3) par rapport aux deux autres matériaux.

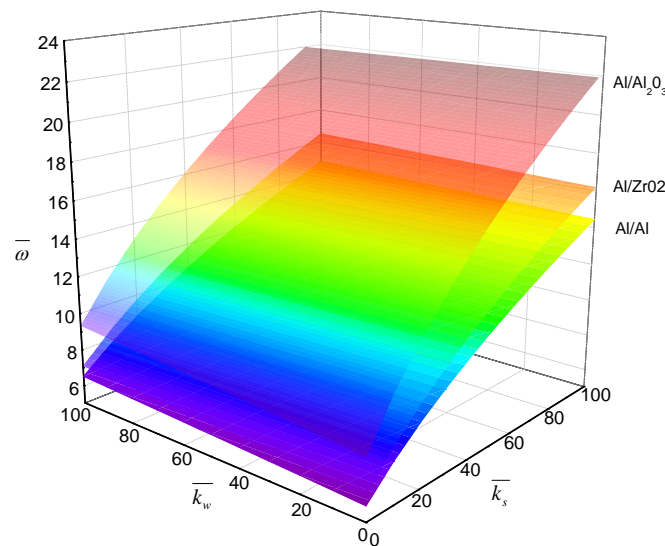


Fig. IV.3. La variation de la fréquence naturelle $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ des différents types de plaques reposant sur des fondations élastiques ($p = 2, a / h = 10$)

La Figure IV.4 montre la variation de la fréquence fondamentale en fonction des paramètres de fondation (\bar{K}_w, \bar{K}_s) et différents valeurs de l'indice de puissance (p). On observe que la fréquence adimensionnelle diminue lorsque l'indice de puissance augmente, et que le paramètre de fondation Pasternak (\bar{K}_s) a plus d'effet que le paramètre Winkler (\bar{K}_w). l'augmentation de l'indice de puissance entraîne une diminution de la rigidité de la plaque en diminuant le module de Young des matériaux utilisés.

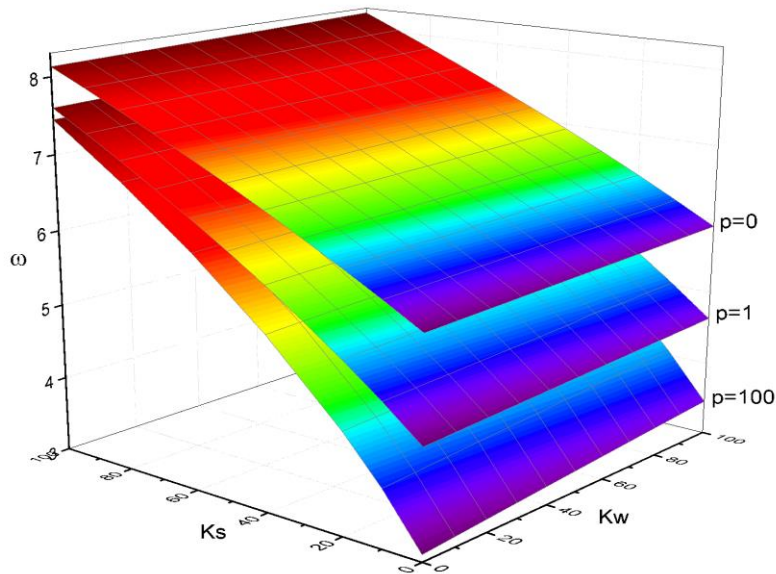


Fig. IV.4. Variation de la fréquence fondamentale $\omega = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E}$ en fonction des paramètres de fondation (\bar{K}_w, \bar{K}_s) et de l'indice de puissance (p). ($a / h = 10$)

IV.3 Conclusion

Dans la présente étude, le comportement vibratoire des plaques **FGM** reposant sur des fondations élastiques a été étudié. L'influence des paramètres de la plaque comme l'indice de puissance « p », le rapport géométrique « a/b », le paramètre d'épaisseur « a/h » et les paramètres de la fondation sur la variation des fréquences naturelles de la plaque **FG** ont été complètement analysés.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les matériaux à gradient de propriétés ont prouvé leur valeur parmi les matériaux modernes avancés. Ils sont devenus un concurrent sérieux dans de nombreux domaines d'application, notamment l'énergie, la défense, l'aviation et la médecine. L'intérêt croissant des FGM dans les milieux de la recherche et de l'industrie rend nécessaire le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Celles-ci permettent de mieux comprendre le comportement des FGM et leur réponses vis à vis les différentes sollicitations.

A travers ce travail, la vibration libre des structures en matériaux fonctionnellement gradués reposant sur des appuis simples ou élastiques a été étudiée. Pour ce faire une formulation en se basant sur les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé a été proposée.

La première formulation consiste à la proposition d'un modèle de la théorie de déformation de cisaillement permettant l'analyse de la vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques. Ce modèle utilise une fonction de gauchissement qui décrit une variation adéquate des déformations et des contraintes de cisaillement et respectent les conditions aux limites aux surfaces inférieures et supérieures des plaques FGM.

En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des plaques en FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En outre, les résultats doivent être confirmés par des résultats expérimentaux. Par conséquent, l'étude expérimentale de la stabilité dynamique des plaques de matériaux gradués fonctionnellement peut être considérée comme un futur travail pour approuver la méthode de calcul utilisée et valider expérimentalement les résultats théoriques obtenus.

En fin, on souhaite que ce travail reflète la modeste participation dans le domaine de recherche des matériaux composites en matériaux à gradient de propriétés (FGM) et précisément leurs comportement vis-à-vis la vibration libre dans différentes conditions environnementales.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] **Koizumi M.** FGM activities in Japan. *Compos Part B Eng* 1997;28(1-2):1-4.
- [2] **Winkler E.** Die lehre von der elasticitaet und festigkeit. Prag Dominicus; 1867.
- [3] **Pasternak PL.** On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu i Arkhitekture* 1954;1:1-56.
- [4] **Malekzadeh P.** Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct* 2009;89(3):367-73.
- [5] **Lu CF, Lim CW, Chen WQ.** Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech Adv Mater Struct* 2009;16(8):576-84.
- [6] **Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A.** Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct* 2009;18(8):1-9.
- [7] **Tajeddini V, Ohadi A, Sadighi M.** Three-dimensional free vibration of variable thickness thick circular and annular isotropic and functionally graded plates on Pasternak foundation. *Int J Mech Sci* 2011;53(4):300-8.
- [8] **Yang J, Shen HS.** Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Compos Struct* 2001;54(4):497-508.
- [9] **Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H.** Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations. *Compos Struct* 2010;92(7):1734-43.
- [10] **Hosseini-Hashemi S, Akhavan H, Taher HRD, Daemi N, Alibeigloo A.** Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation. *Mater Des* 2010;31(4):1871-80.
- [11] **Baferani AH, Saidi AR, Jomehzadeh E.** An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proc Inst Mech Eng Part C J Mech Eng Sci* 2011;225(3):526-36.
- [12] **Alipour MM, Shariyat M, Shaban M.** A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations. *Int J Mech Mater Des* 2010;6(4):293-304.
- [13] **Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omid M.** Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Mathe Modell* 2010;34(5):1276-91.

- [14] **Malekzadeh P, Golbahar Haghghi MR, Atashi MM.** Free vibration analysis of elastically supported functionally graded annular plates subjected to thermal environment. *Meccanica* 2011. doi:10.1007/s11012-010-9345-5 1-21.
- [15] **Reddy JN.** Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 2000;47(1–3):663–84.
- [16] **Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H.** Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(7):1842–53.
- [17] **Zenkour AM.** The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci* 2009;51(11–12):869–80.
- [18] **Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Bedia EAA.** Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations 2346 H.-T. Thai, D.-H. Choi / *Composites: Part B* 43 (2012) 2335–2347 using a new shear deformation theory. *Int J Mech Mater Des* 2010;6(2):113–21.
- [19] **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2008;82(4):499–512.
- [20] **Fares ME, Elmarghany MK, Atta D.** An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91(3):296–305.
- [21] **Talha M, Singh BN.** Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl Mathe Modell* 2010;34(12):3991–4011.
- [22] **Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al.** A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Part B Eng* 2012;43(2):711–25.
- [23] **Wu CP, Li HY.** An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Compos Struct* 2010;92(10):2591–605.
- [24] **Wu CP, Li HY.** The RMVT- and PVD-based finite layer methods for the three-dimensional analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos Struct* 2010;92(10):2476–96.
- [25] **Wu CP, Chiu KH, Wang YM.** RMVT-based meshless collocation and elementfree Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos Struct* 2011;93(2):923–43.

- [26] **Wu CP, Yang SW.** RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the approximate 3D analysis of multilayered composite and FGM circular hollow cylinders. *Compos Part B Eng* 2011;42(6):1683–700.
- [27] **Carrera E.** Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch Comput Meth Eng* 2003;10(3):215–96.
- [28] **Luciano D.** Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: governing equations. *Compos Struct* 2009;87(1):1–11.
- [29] **Luciano D.** Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos Struct* 2009;87(3):183–94.
- [30] **Luciano D.** Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: zig–zag theories. *Compos Struct* 2009;87(3):195–205.
- [31] **Luciano D.** Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: results. *Compos Struct* 2009;88(1):1–16.
- [32] **Luciano D.** Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation.: Part II: layerwise theories. *Compos Struct* 2009;87(1):12–22.
- [33] **DERKAOUI Fatima Zohra, GORINE Somia,** « Analyse des contraintes d’une plaque FGM avec des couches de surface piézoélectriques par la théorie de déformation en cisaillement ». 2019 2018
- [34] **Amale MAHL.** ’’Analyse et etude des plaques composites fgm en vibration libres’’ thèse de doctorat, Blida, 05 avril 2012.
- [35] **ZAOUI, F.Z.** Contribution à l’étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l’intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées. Thèse de Doctorat, Université de Mostagane, 2021.
- [36] **Mahmoud, D., & Elbestawi, M. (2017).** Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants : A review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>
- [37] **Koizumi, A. (1994).** Recent progress of functionally gradient materials in Japan. In J. B. Wachtman (Éd.), *Ceramic Engineering and Science Proceedings* (Vol. 13, p. 332-347). John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470313954.ch33>
- [38] **Koizumi, M. (1997).** FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)

- [39] **Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007)**. Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), 567-575. <https://doi.org/10.1080/15376490701672575>
- [40] **Abdizadeh, H. (1997)**. *Elaboration et caractérisation de composites duplex « composites laminaires tri-couches à base d'alumine* [Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon]. <http://theses.insalyon.fr/publication/1997ISAL0076/these.pdf>
- [41] **Koizumi, M. (1997)**. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
- [42] **Koizumi, A. (1994)**. Recent progress of functionally gradient materials in Japan. In J. B. Wachtman (Éd.), *Ceramic Engineering and Science Proceedings* (Vol. 13, p. 332-347). John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470313954.ch33>
- [43] **Kamura, H. (1991)**. State of the art of material design projects for severe service applications. *Materials Science and Engineering: A*, 143(1-2), 3-9. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90720-8](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90720-8)
- [44] **Attia, A. (2015)**. *Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- [45] **Delale, F., Erdogan, F. (1983)** "The crack problem for a non homogeneous plane", *Journal of Applied Mechanics*, 50(6), 609-614.
- [46] **Chi, S.-H. and Chung, Y.L. (2003)**, "Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings", *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227-1243.
- [47] **Koizumi, M.**, "The concept of FGM", *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, **34**, 3-10, (1993).
- [48] **Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M.**, "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191 -192, (1986).
- [49] **Tounsi, A.** « Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil », p. 107.
- [50] **Baron, C., Naili, S. (2008)**, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *compte Rendue Mécanique* ;336(9) :722-730.
- [51] **Reissner, E. (1961)** "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77
- [52] **Reddy, J.N.** *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

- [53] **Whitney, J.M., Pagano. N.J.**, “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, **37**, 1031–1036, (1973)
- [54] **Naghdi, P. M.** On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.
- [55] **Reddy, J.N.** A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*; 51:745–52,1984.
- [56] **Reddy, J.N.** "Theory and analysis of elastic plates", Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- [57] **Reddy, J.N.**, "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, 47(41–43):663–684, 2000.
- [58] **Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K.**, "On the analysis of thick rectangular plates", *Z Angew Math Mech*, 589–591, 1974.
- [59] **Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K.**, "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, 149–156, 1982.
- [60] **Krishna Murty, A.V.**, "Higher-order theory for vibrations of thick plates", *AIAA Journal*, 1823–1824, 1977.
- [61] **Krishna Murty, A.V.**, "Toward of consistent plate theory", *AIAA Journal*, 1047–1048, 1986.
- [62] **Krishna Murty, A.V.**, "Flexural of composite plates", *Composite Structures*, 161–177, 1987.
- [63] **Reddy, J.N.**, "A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", 22(7), 1990.
- [64] **Mallikarjuna, M. et Kant, T.**, "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", 23(4), 1993.
- [65] **Reissner, E.**, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, 69–77, 1945.
- [66] **Mindlin RD.** Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* ,18(1):31–8, 1951.
- [67] **M. Touratier**, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.
- [68] **Karama., K.S. Afaq., S. Mistou**, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40(6): 1525-1546, 2003

- [69] **Reissner, E.**, "On transverse bending of plates including the effects of transverse shear deformation", *Int J Solids Struct*, 25, 495–502, 1975.
- [70] **K. P. Soldatos and T. Timarci.** A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25:165–171, 1993.
- [71] **J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares.** A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43:1489–1499, 2012.
- [72] **H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia,** Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater.Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [73] **Aydogdu, M.**, "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94-101, 2009.
- [74] **Zaoui, F. Z.,** Ouinas, D., & Tounsi, A. (2019). New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, 159, 231-247. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.051>
- [75] **Zaoui, F.Z.,** Ouinas, D., Tounsi, A. Viña Olay, J.A., Achour B., & Touahmia, M. (2020), Fundamental frequency analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties based on improved exponential-trigonometric two-dimensional higher shear deformation theory, *Archive of Applied Mechanics*. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01793-1>
- [76] **Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998).** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00253-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9)
- [77] **Reddy, J.N.,**"Analysis of functionally graded plates", *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 47, 663,684 (2000)
- [78] **Yang, J., & Shen, H.-S. (2001).** Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures*, 54(4), 497-508. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(01\)00122-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(01)00122-2)
- [79] **Reddy, J. N., & Cheng, Z. Q. (2003).** Frequency of functionally graded plates with three dimensional asymptotic approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(8), 896-900. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:8\(896\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:8(896))
- [80] **Huang, X.-L., & Shen, H.-S. (2004).** Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9-10), 2403-2427.

- [81] Vel, S. S., & Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5), 703-730. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7)
- [82] Qian, L. F., Batra, R. C., & Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8), 685-697. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.02.004>
- [83] Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., & Jorge, R. M. N. (2005b) et al, Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41), 4265-4278. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.004>
- [84] Uymaz B, Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos* ;26(18):1847–63, 2007.
- [85] Li Q, Iu VP, Kou KP et al . Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib*; 311(1–2):498–51, 2008.
- [86] Matsunaga, H., "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D Higher order deformation theory", *Compos.Struct.*90,76-86, (2009).
- [87] Baferani, A. H., Saidi, A., & Ehteshami, H. (2011). Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*, 93(7), 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>
- [88] Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 32, 7925-7942, (2011).
- [89] Benachour, A., Tahar, H. D., Atmane, H. A., Tounsi, A., & Ahmed, M. S. (2011). A fourvariable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites Part B: Engineering*, 42(6), 1386-1394. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.05.032>
- [90] BENBAKHTI A., « Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials) ».
- [91] Zaoui, F. Z., Tounsi, A., Ouinas, D. (2017), Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theoryll, *Smart structures and systems, An Int'l J*, 20(4), 509-524. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.20.4.509>
- [92] Rachid, A., Ouinas, D., Lousdad, A., Zaoui, F.Z., Achour, B., Gasmi, H., Butt, T.A. and Tounsi, A. (2022). Mechanical behavior and free vibration analysis of FG doubly curved shells on elastic foundation via a new modified displacements field model of 2D and quasi-3D HSDTs. *Thin-Walled Structures*, 172, 108783. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108783>

- [93] **Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F. Z., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R.** (2018), Novel quasi3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates, *Geomechanics and Engineering, An Int'l Journal*, 14(6):519-532. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.6.519>
- [94] **Kitipornchai S, Yang J, Liew KM.** Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. *Comput Meth Appl Mech Eng* 2006;195(9-12):1075–95. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.11.062>
- [95] **Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Rokni Damavandi Taher H.** Exact solutions for free flexural vibration of Levy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Appl Mathe Model* 2011;35(2):708–27
- [96] **Thai, H.-T., & Choi, D.-H.** (2012). A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 43(5), 2335-2347.
- [97] **Jin, Guoyong, Su, Z., Shi, S., Ye, T., & Gao, S.** (2014). Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 108, 565-577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>
- [98] **Mantari, J. L.** (2015). A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation. *Mechanics of Materials*, 86, 31-43. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.02.010>