République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences et de la Technologie
Socle Commun des Sciences Techniques

Polycopié de cours

Etabli par :

Dr. HIRECHE Faouzi

Intitulée

Mathématiques II

Expertisé par :

Mr. Haoua Rabah	MCA.	Université de Mostaganem
Mr. Saada Hamouda	Prof.	Université de Mostaganem

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année sciences et techniques.

Année Universitaire : 2022/2023

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié de «Mathématiques II» est destiné surtout aux étudiants de première année sciences et techniques. Il peut aussi être utilement utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en Mathématiques et informatique ou autre.

Il couvre le programme officiel du «Mathématiques II», à savoir :

- ▶ Matrices et déterminants.
- ▶ Système d'équations linéaires.
- ▶ Les intégrales.
- ▶ Les équations différentielles.
- ▶ Les fonctions à plusieurs variables.

À la fin de chaque chapitre nous proposons des exercices corrigés.

Toutes les remarques et commentaires sont les bienvenus de la part des étudiants ainsi que de la part d'enseignants ou spécialistes en mathématiques ou utilisateurs de mathématiques. Ces remarques et commentaires nous permettront certainement d'améliorer le contenu ainsi que la présentation de la version finale. Elles peuvent être envoyées à : faouzienset@gmail.com

L'auteur

Chapitre 1

Matrices et déterminants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

1.1 Les matrices (Définition, opération)

1.1.1 Définition d'une matrice

Définition 1.1.1. *Soient n et p deux entiers naturels non nulss.*

- *Une matrice A de taille $n \times p$ sur $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes constitué d'éléments appartenant au cops $\mathbb{K}$:*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

  On la note aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à la i-ième ligne et à la j-ième colonne du tableau. Cet élément s'appelle un coefficient de la matrice A.

- *On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 1.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3, *avec par exemple,* $a_{11} = 2$ *et* $a_{23} = 45$.

Définition 1.1.2. *Soit A une matrice de taille $n \times p$ sur $\mathbb{K}$.*

- *Si $n = p$ alors A dite matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Si $p = 1$ alors $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et est appelée matrice colonne.*
- *Si $n = 1$ alors $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et est appelée matrice ligne.*

Définition 1.1.3. *Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée, les coefficients a_{ii} s'appellent les coefficients diagonaux de A. Une matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls s'appelle une matrice diagonale. On note $diag\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, a_2, ..., a_n$.*

Ainsi par exemple, on a $diag\,(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.4.

- *On note $0_{n,p}$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls. On l'appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
- *On note I_n la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres coefficients égaux à 0. On l'appelle matrice identité (ou unité) d'ordre n.*

Autrement dit,

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Opérations sur les matrices

Addition des matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 1.1.5.

- *Soient* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *deux matrices de taille* $n\times p$ *sur* $\mathbb{K}$*. On appelle somme de* A *et* B*, et on note* $A+B$*, la matrice de taille* $n\times p$ *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

- *Soient* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *une matrice de taille* $n\times p$ *sur* $\mathbb{K}$ *et* $\alpha\in\mathbb{K}$*. On appelle produit de* A *par* α*, et on note* $\alpha.A$ *ou* αA*, la matrice de taille* $n\times p$ *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$\alpha A = (\alpha\times a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Exemple 1.1.2. *Si* $A = \begin{pmatrix}5 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix}0 & 5\\2 & -1\end{pmatrix}$ *alors* $A + B = \begin{pmatrix}5 & 7\\2 & 3\end{pmatrix}$.

Par contre si $B' = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ *alors* $A+B'$ *n'est pas définie.*

Exemple 1.1.3. *Si* $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 4 & -5\end{pmatrix}$ *et* $\alpha = 2$ *alors* $\alpha A = \begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\0 & 8 & -10\end{pmatrix}$.

Remarque 1.1.1. *La matrice* $(-1)A$ *est l'opposée de* A *et est notée* $-A$*. La différence* $A-B$ *est définie par* $A+(-B)$*.*

Proposition 1.1.1. *Soient* A, B *et* C *trois matrices de taille* $n\times p$ *sur* $\mathbb{K}$*. Soient* α, $\beta\in\mathbb{K}$ *deux scalaires.*

1. $A + B = B + A$ *(commutativité),*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité),*
3. $A + 0_{n,p}(\mathbb{K}) = A$,
4. $0.A = 0_{n,p}(\mathbb{K})$,
5. *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$*, on note* $(-A)$ *la matrice* $(-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *et on a :*

$$A + (-A) = 0_{n,p}(\mathbb{K}),$$

6. $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$,
7. $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$,
8. $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$

Multiplication de matrices

Définition 1.1.6. *Soient* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *une matrice de taille* $n \times p$ *sur* $\mathbb{K}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ *une matrice de taille* $p \times q$ *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle produit de* A *et* B, *et on note* AB, *la matrice de taille* $n \times q$ *sur* $\mathbb{K}$ *définie par* $AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ *où*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$$

pour tous $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *et* $j \in \{1, 2, ..., q\}$.

Remarque 1.1.2. *Le produit* AB *de deux matrices* A *et* B *est défini si et seulement si le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B.

Exemple 1.1.4.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5\times 1 + 2\times(-1) + (-3)\times 0 & 5\times 0 + 2\times 2 + (-3)\times 5 \\ 0\times 1 + 4\times(-1) + (-1)\times 0 & 0\times 0 + 4\times 2 + (-1)\times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. *Soient* n, p, q, m *quatre entiers naturels non nuls.*

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad A(B+C) = AB + AC.$
- $\forall B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad (B+C)A = BA + CA.$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K}),\quad A(BC) = (AB)C.$

1.1.3 Transposition de matrices

Définition 1.1.7. *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle transposée de* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *notèe* ${}^tA$ *définie par :*

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant p}}.$$

Exemples 1.1.1. *1. Si* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *alors* ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1.1.4 Déterminants

Déterminant de matrices de taille 2×2

Définition 1.1.8. *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2}}$ *une matrice de taille* 2×2. *On appelle déterminant de la matrice* A *le nombre :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemple 1.1.5. *Pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *on a* $det(A) = 0 \times 2 - (1) \times (-1) = 1$.

Déterminant de matrices de taille $n \times n$

Définition 1.1.9. *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On appelle déterminant de la matrice* A *le nombre, noté* $det(A)$, *qui peut être calculé, par récurrence, de la façon suivante :*

- *par un* **développement suivant la ligne** i, $i \in \{1, ..., n\}$ *:*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \triangle_{ij} (A).$$

- *par un* **développement suivant la colonne** j, $j \in \{1, ..., n\}$ *:*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \triangle_{ij} (A).$$

où, pour tout couple d'indices $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $\triangle_{ij}$, *appelé* **mineur d'indice** (i, j), *est le déterminant de la matrice obtenue en enlevant à* A *la ligne* i *et la colonne* j.

Exemples 1.1.2. *1. Calculons la déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \bigtriangleup_{1j} (A) \\ &= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(0) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 - 4 = -6. \end{aligned}$$

2. Calculons la déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

On développe par rapport à la 2^{eme} *colonne :*

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i2} \bigtriangleup_{i2} (B) \\ &= (-1)^{1+2}(3) \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(2) \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(6) \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -18 + 2 + 18 = 2. \end{aligned}$$

Définitions 1.1.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *Soit* $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, *on appelle* **cofacteur d'indice** (i, j) *:*

$$(-1)^{i+j} \bigtriangleup_{ij} .$$

- *On appelle* **comatrice** *de la matrice* A, *et on note* $Com(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice des cofacteurs :*

$$Com(A) = \left((-1)^{i+j} \bigtriangleup_{ij}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} .$$

Exemples 1.1.3. *1. Pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *on a :*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +2 & -1 \\ -(-1) & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 & -1 \\ 1 & +3 \end{pmatrix}.$$

2. Pour la matrice $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$*, on a :*

$$Com(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} \\ & & \\ +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propriétés des déterminants

Propriétés relatives aux colonnes

1. Si deux colonnes de la matrice sont égales, alors le déterminant est nul.
2. Si l'on permute deux colonnes de la matrice, le déterminant est changé de signe.
3. Le déterminant est additif par rapport à chaque vecteur colonne :

$$det(C_1, ..., C_j + C'_j, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_j, ..., C_n) + det(C_1, ..., C'_j, ..., C_n).$$

4. Si une colonne est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
5. Si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres, le déterminant garde la même valeur.
6. Si l'on multiplie une colonne par λ, le déterminant est multiplié par λ.

Propriétés relatives aux lignes

1. Si deux lignes de la matrice sont égales, alors le déterminant est nul.
2. Si l'on permute deux lignes de la matrice, le déterminant est changé de signe.
3. Le déterminant est additif par rapport à chaque vecteur ligne.

4. Si l'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres, le déterminant garde la même valeur.
5. Si l'on multiplie une ligne par λ, le déterminant est multiplié par λ.

Exemple 1.1.6. *Calculons le déterminant de la matrice A définie par :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 6. \end{aligned}$$

1.1.5 Inverse d'une matrice

Définition 1.1.10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = I \quad et \quad BA = I,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on note A^{-1}.

Proposition 1.1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $det(A) \neq 0$, alors A est inversible et sa matrice inverse est :*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, {}^t\left(Com(A)\right).$$

Exemple 1.1.7. *Calculons l'inverse de :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 2 = 4 \neq 0.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, {}^t\left(Com(A)\right)$.

On a :

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad {}^t\left(Com(A)\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.2 Matrice associée a une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que $dim\,(E) = p$ et $dim\,(F) = n$. Munissons l'espace E d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et l'espace F d'une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$.

Les images par l'application f des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_p$ s'écrivent dans la base $\mathcal{B}_F$ comme suite :

$$\begin{cases} f(e_1) = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{n1}e'_n \\ f(e_2) = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{n2}e'_n \\ \quad\vdots & \\ f(e_p) = & a_{1p}e'_1 + a_{2p}e'_2 + ... + a_{np}e'_n \end{cases}$$

Définition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et f une application linéaire de E dans F.*

- *On appelle matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de taille $n \times p$ sur $\mathbb{K}$ dont la j-ième colonne est constituée par les coordonnées de l'image par f du j-ième vecteur de la base de départ $\mathcal{B}_E$ par rapport à la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$. On la note :*

$$Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F), \;\; ou \;\; Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

- *En particulier, lorsque $E = F$ on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F := \mathcal{B}$. On appelle matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$ la matrice $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. On la note plus simplement*

$$Mat(f, \mathcal{B}), \;\; ou \;\; Mat_{\mathcal{B}}(f).$$

Avec les notations utilisées, on a de façon symbolique :

$$Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.1. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (-2x+3z, x-z) \end{array}$$

Soient $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \quad e'_1 = (1,0),\ e'_2 = (0,1)$$

Ecrivons $Mat(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$

- *On a $f(e_1) = (-2,1) = -2e'_1 + e'_2$. La première colonne de la matrice $Mat(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ est donc $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.*
- *On a $f(e_2) = (0,-1) = -e'_2$. La deuxième colonne de la matrice $Mat(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.*
- *On a $f(e_3) = (3,0) = 3e'_1$. La troisième colonne de la matrice $Mat(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ est donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

Ainsi :

$$Mat(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Application linéaire associée à une matrice

Proposition 1.3.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$ et f une application linéaire de E dans F. Alors, si $y = f(x)$, on a :*

$$\forall x \in E : \quad Mat_{\mathcal{C}}(f(x)) = Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\, Mat_{\mathcal{B}}(x).$$

où $Mat_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, et $Mat_{B'}(f(x)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de y dans $\mathcal{C}$.

Exemple 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice associée relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donnée par :*

$$Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
On a :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}}\,(f(x, y, z)) &= Mat\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\, Mat_{\mathcal{B}}\,((x, y, z)) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x + 5y + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$f(x, y, z) = (-2x + 5y + 3z) \cdot f_1 + (x - y) \cdot f_2 = (-2x + 5y + 3z, x - y).$$

1.4 Changement de base, matrice de passage

Considérons dans un espace vectoriel E de dimension n deux bases distinctes $\mathcal{B}_E = \{e_1, ..., e_n\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{e'_1, ..., e'_n\}$. Décomposons chacun des vecteurs $e'_1, ..., e'_n$ de la nouvelle base $\mathcal{B}'_E$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}_E$:

$$\begin{cases} e'_1 = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n \\ e'_2 = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n \\ \quad\vdots & \\ e'_n = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{cases}$$

où $p_{ij} \in \mathbb{K},\ i, j \in \{1, ..., n\}$.

Définition 1.4.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$, et on note $P_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E)}$, la matrice carrée d'ordre n dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'_E$.*

Avec les notations utilisées, la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ est donc la matrice $P_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)}$ définie par

$$P_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.4.1. *On munit l'espace* $\mathbb{R}^3$ *de la base* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$ *(c'est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*) et de la base* $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^3} = \{u_1, u_2, u_3\}$ *où* $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ *et* $u_3 = (1, -1, 0)$.
Ecrivons $P_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)}$:
On a :

$$\begin{cases} u_1 = & e_2 - e_3 \\ u_2 = & e_1 + e_3 \\ u_3 = & e_1 - e_2 \end{cases}$$

Ainsi

$$P_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4.1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni des bases* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}'_E$*. Si* $P_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)}$ *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}_E$ *à* $\mathcal{B}'_E$ *alors* $P^{-1}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E)}$ *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}'_E$ *à* $\mathcal{B}_E$.

1.4.1 Effet d'un changement de bases

Théorème 1.4.1. *Soient* E *un espace vectoriel muni des deux base* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}'_E$*,* F *un espace vectoriel muni des deux bases* $\mathcal{B}_F$ *et* $\mathcal{B}'_F$*. Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors les matrices* $Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ *et* $Mat(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$ *vérifient l'égalité matricielle :*

$$Mat(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = Q^{-1} Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) P$$

où P *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}_E$ *à* $\mathcal{B}'_E$ *et où* Q *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}_F$ *à* $\mathcal{B}'_F$.

Exemple 1.4.2. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y+z) \end{array}$$

1. *Ecrivons $Mat(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')$, où $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{B}_1' = \{e_1', e_2'\}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*
   On a :
$$\begin{cases} f(e_1) = & (1,0) = e_1' \\ f(e_2) = & (-1,1) = -e_1' + e_2' \\ f(e_3) = & (0,1) = e_2' \end{cases}$$
   Ainsi
$$Mat(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *On va maitenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs*
$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (0,1,1) \quad v_1 = (1,0),\ v_2 = (1,1)$$
   On montre facilement que $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2' = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Ecrivons $Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2')$
   On a :
$$\begin{cases} u_1 = & e_1 + e_2 \\ u_2 = & e_1 + e_3 \\ u_3 = & e_2 + e_3 \end{cases} \qquad d'où \quad P = P_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   et
$$\begin{cases} v_1 = & e_1' \\ v_2 = & e_1' + e_2' \end{cases} \qquad d'où \quad Q = P_{(\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On clacule Q^{-1} et on trouve :
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Mat(f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2) &= Q^{-1}Mat(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2. *Soient E un espace vectoriel muni des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Alors on a :*

$$Mat(f,\mathcal{B}') = P^{-1}Mat(f,\mathcal{B})P,$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1.5 Énoncés des exercices

Exercice 1 : Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B+C,\ B-C,\ B+2C,\ 2B-3C$.
2. Calculer $AB,\ AC,\ A^2$.
3. Calculer ${}^tA,\ {}^tB,\ {}^t(AB)$.

Exercice 2 :

Calculer le déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} cos\,x & sin\,x \\ -sin\,x & cos\,x \end{pmatrix}$$

et donner A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 3 : Soit f une application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccl} f \; : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+2y, y-3z). \end{array}$$

1. Déterminer la matrice associée à l'application f relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. En utilisant deux méthodes différentes, écrire $Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$ la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, où
$$\mathcal{B}' = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}.$$
et
$$\mathcal{C}' = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}.$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice associée relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{C}_1 = \{f_1, f_2\}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$Mat(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. En utilisant deux méthodes différentes, écrire $Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2)$ la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, où

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, -1, 0)\}.$$

et

$$\mathcal{C}_2 = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 1)\}.$$

Exercice 5 : Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x - y).$$

1. Déterminer $Mat(f, \mathcal{B})$ la matrice associée à f relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
2. En utilisant deux méthode différentes, écrire la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}'$, où

$$\mathcal{B}' = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}.$$

1.6 Corrigés des exercices

Exercice 1 :

Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\1&1&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&-2\\2&5\\8&2\end{pmatrix}.$$

1.

- $B+C=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2\\2&5\\8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&10\\9&4\end{pmatrix}$
- $B-C=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2\\2&5\\8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\-2&-5\\-8&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-2&0\\-7&0\end{pmatrix}.$
-
$$\begin{aligned}B+2C&=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&-2\\2&5\\8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-4\\4&10\\16&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-2\\4&15\\17&6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned}2B-3C&=2\begin{pmatrix}1&2\\0&5\\1&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&-2\\2&5\\8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&10\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6\\-6&-15\\-24&-6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&10\\-6&-5\\-22&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.

-

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 1 & 0\times 2 + 1\times 5 + (-1)\times 2 \\ (-3)\times 1 + 4\times 0 + (-3)\times 1 & (-3)\times 2 + 4\times 5 + (-3)\times 2 \\ 1\times 1 + 1\times 0 + 2\times 1 & 1\times 2 + 1\times 5 + 2\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 8 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\times 0 + 1\times 2 + (-1)\times 8 & 0\times (-2) + 1\times 5 + (-1)\times 2 \\ (-3)\times 0 + 4\times 2 + (-3)\times 8 & (-3)\times (-2) + 4\times 5 + (-3)\times 2 \\ 1\times 0 + 1\times 2 + 2\times 8 & 1\times (-2) + 1\times 5 + 2\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -16 & 20 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -15 & 10 & -15 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t(AB) = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}. $$

Exercice 2 :

1.

- $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1) \times 2 = 5.$
- On calcule le déterminant de la matrice B suivant la première ligne :

  $$ det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2. $$

- $det(C) = \begin{vmatrix} cos\,x & sin\,x \\ -sin\,x & cos\,x \end{vmatrix} = cos^2\,x + sin^2\,x = 1.$

2.

- On a $det(A) = 5 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^t\left(Com(A)\right).$

  On a :

  $$ Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad {}^t\left(Com(A)\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

  Ainsi

  $$ A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. $$

- On a $det(B) = 2 \neq 0$. Donc B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{det(B)}\,{}^t\left(Com(B)\right).$

  On a :

  $$ Com(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}. $$

et

$$
{}^t(Com(B)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Ainsi

$$
B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
$$

Exercice 3 :

Soient $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. **Ecrivons** $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

   On a :

$$
\begin{cases} f(e_1) = & (1,0) = f_1 \\ f(e_2) = & (2,1) = 2f_1 + f_2 \\ f(e_3) = & (0,-3) = -3f_2 \end{cases}
$$

   Ainsi

$$
Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.
$$

2. **Ecrivons** $Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

   (a) 1^{ere} **méthode :**

   On a :

   - $f(u_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ où α_1 et α_2 sont à déterminer.

$$
\begin{aligned}
f(u_1) = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (3,-2) = \alpha_1 \cdot (1,1) + \alpha_2 \cdot (1,-1) \\
&\Longrightarrow (3,-2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = & -2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = & \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = & \frac{5}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

   d'où

$$
f(u_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2
$$

- $f(u_2) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ où β_1 et β_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(u_2) = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (1,-3) = \beta_1 \cdot (1,1) + \beta_2 \cdot (1,-1) \\
&\Longrightarrow (1,-3) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = & 1 \\ \beta_1 - \beta_2 = & -3 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = & -1 \\ \beta_2 = & 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(u_2) = -v_1 + 2v_2.$$

- $f(u_3) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$ où γ_1 et γ_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(u_3) = \gamma_1 \cdot v_1 + \gamma_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (2,-2) = \gamma_1 \cdot (1,1) + \gamma_2 \cdot (1,-1) \\
&\Longrightarrow (2,-2) = (\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 - \gamma_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = & 2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 = & -2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = & 0 \\ \gamma_2 = & 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(u_3) = 2v_2.$$

Ainsi

$$Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) 2^{eme} **méthode :**

On a :

$$Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = Q^{-1} Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) P, \text{ où } P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} \text{ et } Q = P_{(\mathcal{C}, \mathcal{C}')}.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} u_1 = & e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = & e_1 + e_3 \\ u_3 = & e_2 + e_3 \end{cases} \qquad d'où \quad P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$\begin{cases} v_1 = & f_1 + f_2 \\ v_2 = & f_1 - f_2 \end{cases} \qquad d'o\grave{u} \quad Q = P_{(\mathcal{C},\mathcal{C}')} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On clacule Q^{-1} :

On a : $Q^{-1} = \frac{1}{det(Q)}\,{}^t\left(Com(Q)\right),\ \ det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$

$$Com(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad {}^t\left(Com(Q)\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$Q^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Mat(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. Calculons $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
   On a :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}_1}\left(f(x,y,z)\right) &= Mat\left(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1\right) Mat_{\mathcal{B}_1}\left((x,y,z)\right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x+5y+3z \\ x-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$f(x,y,z) = (-2x+5y+3z)\cdot f_1 + (x-y)\cdot f_2 = (-2x+5y+3z, x-y).$$

2. Ecrivons $Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2)$:

   (a) 1^{ere} **méthode :**

   On a :

   - $f(u_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ où α_1 et α_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(u_1) = \alpha_1\cdot v_1 + \alpha_2\cdot v_2 &\Longrightarrow (-3,-1) = \alpha_1\cdot(1,-1) + \alpha_2\cdot(0,1)\\
&\Longrightarrow (-3,-1) = (\alpha_1, -\alpha_1+\alpha_2)\\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3\\ -\alpha_1+\alpha_2 = -1\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3\\ \alpha_2 = -4\end{cases}
\end{aligned}$$

   d'où

$$f(u_1) = -3v_1 - 4v_2$$

   - $f(u_2) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ où β_1 et β_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(u_2) = \beta_1\cdot v_1 + \beta_2\cdot v_2 &\Longrightarrow (1,1) = \beta_1\cdot(1,-1) + \beta_2\cdot(0,1)\\
&\Longrightarrow (1,1) = (\beta_1, -\beta_1+\beta_2)\\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1\\ -\beta_1+\beta_2 = 1\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1\\ \beta_2 = 2\end{cases}
\end{aligned}$$

   d'où

$$f(u_2) = v_1 + 2v_2.$$

- $f(u_3) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$ où γ_1 et γ_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(u_3) = \gamma_1 \cdot v_1 + \gamma_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (-2, 2) = \gamma_1 \cdot (1, -1) + \gamma_2 \cdot (0, 1) \\
&\Longrightarrow (-2, 2) = (\gamma_1, -\gamma_1 + \gamma_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -2 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 = 2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -2 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(u_3) = -2v_1.$$

Ainsi

$$Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) 2^{eme} **méthode :**

On a :

$$Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2) = Q^{-1} Mat(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) P, \text{ où } P = P_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)} \text{ et } Q = P_{(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)}.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} u_1 = e_2 - e_3 \\ u_2 = e_1 + e_3 \\ u_3 = e_1 - e_2 \end{cases} \quad d'o\grave{u} \quad P = P_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$\begin{cases} v_1 = f_1 - f_2 \\ v_2 = f_2 \end{cases} \quad d'o\grave{u} \quad Q = P_{(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On clacule Q^{-1} :

On a : $Q^{-1} = \frac{1}{det(Q)} {}^t(Com(Q))$, $det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$$Com(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad {}^t(Com(Q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Mat(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.

1. **Ecrivons** $Mat(f, \mathcal{B})$

   On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = & (1,3) = e_1 + 3e_2 \\ f(e_2) = & (2,-1) = 2e_1 - e_2 \end{cases}$$

   Ainsi

$$Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Ecrivons** $Mat(f, \mathcal{B}')$

   (a) 1^{ere} **méthode :**

   On a :

- $f(v_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ où α_1 et α_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(v_1) = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (3,2) = \alpha_1 \cdot (1,1) + \alpha_2 \cdot (2,1) \\
&\Longrightarrow (3,2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = & 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = & 2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = & 1 \\ \alpha_2 = & 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(v_1) = v_1 + v_2$$

- $f(v_2) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ où β_1 et β_2 sont à déterminer.

$$\begin{aligned}
f(v_2) = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 &\Longrightarrow (4,5) = \beta_1 \cdot (1,1) + \beta_2 \cdot (2,1) \\
&\Longrightarrow (4,5) = (\beta_1 + 2\beta_2, \beta_1 + \beta_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = & 4 \\ \beta_1 + \beta_2 = & 5 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = & 6 \\ \beta_2 = & -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(v_2) = 6v_1 - v_2.$$

Ainsi

$$Mat(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) 2^{eme} **méthode :**

On a :

$$Mat(f, \mathcal{B}') = P^{-1} Mat(f, \mathcal{B}) P, \ \text{ où } P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} v_1 = & e_1 + e_2 \\ v_2 = & 2e_1 + e_2 \end{cases} \qquad d'où \quad P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On clacule P^{-1} :

On a : $P^{-1} = \frac{1}{det(P)}\, {}^t\left(Com(P)\right),\;\; det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$$Com(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad {}^t\left(Com(P)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Mat(f, \mathcal{B}') &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Système d'équations linéaires

2.1 Généralités

Définitions 2.1.1. *1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on appelle système linéaire de n équations, d'inconnues $x_1, ..., x_p$:*

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = & b_n \end{cases}$$

Les a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ sont appelés coefficients du système. Tout p-uplet $(x_1, ..., x_p)$ vérifiant les n équations précédentes est appelé solution du système.

2. Un système linéaire, d'inconnues $x_1, ..., x_p$, de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = & 0 \end{cases}$$

est dit homogène.

3. Le système homogène associé au système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = & b_n \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = & 0 \end{cases}$$

Propriétés 2.1.1. *1. Un système linéaire, d'inconnues $x_1, ..., x_p$, de la forme :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = & b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On appelle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second member.

2.2 Etude de l'ensemble des solutions

Définitions 2.2.1.

- *Une solution du système linéaire* $(\mathbf{S})$ *est un p-uplet* $(x_1, ..., x_p)$ *qui vérifie simultanément les* n *équations du système* $(\mathbf{S})$.
- *Résoudre* $(\mathbf{S})$ *signifie chercher toutes les solutions.*
- *Un système est impossible s'il n'admet pas de solution.*
- *Un système est possible s'il possède une ou plusieurs solutions.*

Définition 2.2.1.

- *On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents ssi ils ont même ensemble de solutions.*
- *Un système linéaire est dit déterminé (resp. indéterminé) lorsqu'il admet une unique solution (resp. une infinité de solutions).*

Théorème 2.2.1. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

2.3 Les méthodes de résolutions d'un système linéaire

2.3.1 Résolution par la méthode de Cramer

Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = & b_n \end{array}\right.$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B.

Théorème 2.3.1 (Règle de Cramer). *Soit*

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $det(A) \neq 0$. Alors le système admet une solution unique donnée par :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \quad \cdots \quad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}.$$

Exemple 2.3.1. *Soit le système d'équations linéaires suivant :*

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} -x + y + z = & 1 \\ x - y + z = & 2 \\ x + y - z = & 3 \end{cases}$$

Le système $(\mathbf{S})$ s'écrit matriciellement sous la forme : $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On $det(A) = 4 \neq 0$. Donc le système $(\mathbf{S})$ admet une solution unique donnée par :

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-(1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (3) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système $(\mathbf{S})$ *est :* $\{(\frac{5}{2},\, 2,\, \frac{3}{2})\}$.

2.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$, A est une matrice carrée d'ordre n et X et B sont des vecteurs colonnes.
Si A est inversible alors ce système possède une unique solution X donnée par $X = A^{-1}B$.

Exemple 2.3.2. *Résoudre le système suivant :*

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} x + y + 3z = & -2 \\ 2x + y + 5z = & -5 \\ x + 3y + 2z = & 6 \end{cases}$$

Le système $(\mathbf{S})$ *s'écrit matriciellement sous la forme :*

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad et \ B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a $det(A) = 3 \neq 0$. *Donc* A *est inversible et on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -13 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} AX = B &\Longrightarrow X = A^{-1}B \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -13 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aisin l'ensemble des solutions du système $(\mathbf{S})$ *est :* $\{(1,3,-2)\}$.

2.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Définition 2.3.1 (Système échelonné)**.** *Un système* $(\mathbf{S})$ *est échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.*

Exemple 2.3.3.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = & b_1 \\ 3x_3 - x_4 + 2x_5 = & b_2 \\ -x_5 + x_6 = & b_3 \\ 5x_6 = & b_4 \\ 0 = & b_5 \end{cases} \qquad \textit{est échelonné.}$$

Définition 2.3.2 (Opération élémentaire)**.** *Une opération élémentaire sur les équations est une transformation d'un des trois types suivants :*

1. *ajouter à une équation* L_i *un multiple d'une autre équation* L_j : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j,\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
2. *échanger deux équations :* $L_i \longleftrightarrow L_j$.
3. *multiplier une équation par un nombre réel non nul :* $L_i \longleftarrow \lambda L_i,\ \lambda \neq 0$.

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss transforme un système linéaire quelconque en un système échelonné équivalent.

La méthode de Gauss comporte $n-1$ étapes : à chaque étape j on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$ par des opérations élémentaires sur les lignes.
Étape j : en permutant éventuellement deux équations du système linéaire, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$. On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

ainsi on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$.

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

Exemple 2.3.4. *Résoudre le système d'équations linéaires suivant :*

$$(\mathbf{S}) \left\{ \begin{array}{rlr} x + 2y - z = & 1 & L_1 \\ 2x - 3y + 2z = & -2 & L_2 \\ 3x + y - z = & 3 & L_3 \end{array} \right.$$

En éliminant x dans L_2 et L_3, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rlr} x + 2y - z = & 1 & \\ -7y + 4z = & -4 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ -5y + 2z = & 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

En éliminant y dans L_3, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rlr} x + 2y - z = & 1 & \\ -7y + 4z = & -4 & \\ -\frac{6}{7}z = & \frac{20}{7} & L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{5}{7}L_2 \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned} -\frac{6}{7}z = \frac{20}{7} &\implies 6z = -20 \implies z = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}. \\ -7y + 4z = -4 &\implies y = \frac{1}{7}(4 + 4z) = -\frac{4}{3}. \\ x + 2y - z = 1 &\implies x = 1 - 2y + z = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système $(\mathbf{S})$ *est :* $\left\{ (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}) \right\}$.

2.4 Énoncés des exercices

Exercice 1 : En utilisant la méthode de Cramer résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$(\mathbf{S})\begin{cases} x+y+z = & 1 \\ x+2y+3z = & 0 \\ 2x+y-z = & 2 \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(\mathbf{1})\begin{cases} x+y+2z = & 5 \\ x-y-z = & 1 \\ x+z = & 3 \end{cases} \qquad (\mathbf{2})\begin{cases} 3x-y+2z = & a \\ -x+2y-3z = & b \\ x+2y+z = & c \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que A est inversible, et donner A^{-1}.
2. En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} -x+y-z = & 10 \\ x+y+z = & -4 \\ x-2y+4z = & 6 \end{cases}$$

2.5 Corrigés des exercices

Exercice 1 :

Le système (**S**) s'écrit matriciellement sous la forme : $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On $det(A) = -1 \neq 0$. Donc le système (**S**) admet une solution unique donnée par :

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{(1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (0) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

$$y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-(1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (0) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{(1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (0) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système (**S**) est : $\{(3, -3, 1)\}$.

Exercice 2 :

1.

$$(\mathbf{1}) \begin{cases} x + y + 2z = & 5 \qquad L_1 \\ x - y - z = & 1 \qquad L_2 \\ x + z = & 3 \qquad L_3 \end{cases}$$

En éliminant x dans L_2 et L_3, on obtient :

$$\begin{cases} x+y+2z = & 5 \\ -2y-3z = & -4 & \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -y-z = & -2 & \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

En éliminant y dans L_3, on obtient :

$$\begin{cases} x+y+2z = & 5 \\ -2y-3z = & -4 \\ z = & 0 & \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ -2y-3z = -4 &\implies y = \frac{-1}{2}(-4+3z) = 2. \\ x+y+2z = 5 &\implies x = 5-y-2z = 3. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système (**1**) est : $\{(3,2,0)\}$.

2.

$$(\mathbf{2}) \begin{cases} 3x-y+2z = & a & \qquad L_1 \\ -x+2y-3z = & b & \qquad L_2 \\ x+2y+z = & c & \qquad L_3 \end{cases}$$

En éliminant x dans L_2 et L_3, on obtient :

$$\begin{cases} 3x-y+2z = & a \\ 5y-7z = & 3b+a & \qquad L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1 \\ 7y+z = & 3c-a & \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

En éliminant y dans L_3, on obtient :

$$\begin{cases} 3x-y+2z = & a \\ 5y-7z = & 3b+a \\ 54z = & 5(3c-a)-7(3b+a) & \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} z = 5(3c-a)-7(3b+a) &\implies z = \frac{1}{54}(-12a-21b+15c) = \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \\ 5y-7z = 3b+a &\implies y = \frac{1}{18}(-2a+b+7c). \\ 3x-y+2z = a &\implies x = \frac{1}{18}(8a+5b-c). \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système $(\mathbf{2})$ est :

$$\left\{\left(\frac{1}{18}(8a+5b-c), \frac{1}{18}(-2a+b+7c), \frac{1}{18}(-4a-7b+5c)\right)\right\}.$$

Exercice 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour vérifier que A est inversible, il faut calculer son déterminant

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 8 = -6.$$

$det(A) \neq 0$, alors A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^tCom(A) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit le système

$$\begin{cases} -x+y-z = & 10 \\ x+y+z = & -4 \\ x-2y+4z = & 6 \end{cases}$$

ce dernier peut être reécrit sous la forme :

$$\begin{cases} x-2y+4z = & 6 \\ x+y+z = & -4 \\ -x+y-z = & 10 \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad et \;\; B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
AX = B &\Longrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} \\ 3 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aisin l'ensemble des solutions de ce système est : $\left\{\left(-\frac{40}{3}, 3, \frac{19}{3}\right)\right\}$.

Chapitre 3

Les intégrales

3.1 Intégrale indéfinie, propriété

Définition 3.1.1. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On appelle* **primitive** *de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 3.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f.*

Proposition 3.1.1. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f sont sous la forme :*

$$x \mapsto F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.1.2 (Linéarité)**.** *Si F et G sont des primitives respectives de f et de g et k un réel, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ et kF une primitive de kf.*

Notation 3.1.1. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. On notera :*

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

$\int f(x)dx$ est appelée **intégrale indéfinie** *de la fonction f.*

Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, c désigne la constante additive.

$f(x)$	$\int f(x)dx$	commentaire
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$ln\,\lvert x\rvert + c$	sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$cos\, x$	$sin\, x + c$	sur $\mathbb{R}$
$sin\, x$	$-cos\, x + c$	sur $\mathbb{R}$
$tan\, x$	$-ln\,(\lvert cos\, x\rvert) + c$	sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[,\ n \in \mathbb{Z}$
e^x	$e^x + c$	sur $\mathbb{R}$
$sh\, x$	$ch\, x + c$	sur $\mathbb{R}$
$ch\, x$	$sh\, x + c$	sur $\mathbb{R}$
$th\, x$	$ln\,(ch\, x) + c$	sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan\, x + c$	sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin\, x + c = \frac{\pi}{2} - arccos\, x + c$	sur $]-1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$argch\, x + c$	sur $]1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argsh\, x + c$	sur $\mathbb{R}$

3.1.1 Méthodes de calcul

Intégration par parties

Théorème 3.1.1. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Exemple 3.1.2. *Calcul de $\int arcsin\, x\, dx$.*
On pose $u(x) = arcsin\, x$ et $v'(x) = 1$. D'où $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x) = x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int 1\,.\, arcsin\, x\, dx &= x\, arcsin\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\, arcsin\, x - [-\sqrt{1-x^2}] + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= x\, arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Changement de variable

Théorème 3.1.2. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Alors*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

et on dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exemple 3.1.3. *Calculons la primitive $\int \frac{dx}{9+x^2}$.*

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{3})^2}.$$

Soit le changement de variable $t = \frac{x}{3}$. D'où $x = 3t$ et $dx = 3dt$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{9+x^2} &= \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{1}{3}\,arctan\,(t) + c,\ \ c \in \mathbb{R}\\ &= \frac{1}{3}\,arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cte,\ \ avec\ a > 0.$$

3.2 Intégration des fonctions rationnelles

Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha}{(x-\beta)^n}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $n = 1$ alors $\int \frac{\alpha}{x-\beta}dx = \alpha\, ln\,|x-\beta| + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.
- Si $n \geq 2$ alors $\int \frac{\alpha}{(x-\beta)^n}dx = \frac{-\alpha}{(n-1)(x-\beta)^{n-1}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

Intégration de la forme $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $a,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^*$ et $b,\ c \in \mathbb{R}$

Premier cas. Le dénominateur ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe des nombres $A,\ B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$. On a alors

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx = A\,ln|x-x_1| + B\,ln|x-x_2| + cte.$$

Exemple 3.2.1. *Calcul de* $\int \frac{x}{2x^2+2x-4}dx$.

Ecrivons $\frac{x}{2x^2+2x-4}$ *sous la forme :*

$$\frac{x}{2x^2+2x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

où A *et* B *sont à déterminer.*
D'après les calcules $A = \frac{1}{6}$ *et* $B = \frac{1}{3}$, *d'où*

$$\int \frac{x}{2x^2+2x-4}dx = \frac{1}{6}\, ln\,|x-1| + \frac{1}{3}\, ln\,|x+2| + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ admet une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe des nombres A, $B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a donc

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{A}{x-x_0} + B\, ln|x-x_0| + cte.$$

Exemple 3.2.2. *Calcul de* $\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx$.

Ecrivons $\frac{x+1}{2x^2-2x+1}$ *sous la forme :*

$$\frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

où A *et* B *sont à déterminer.*
D'après les calcules $A = 2$ *et* $B = 1$, *d'où*

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx = -\frac{2}{x-1} + ln|x-1| + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 3.2.3. *Calcul de* $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+8}{x^2+2x+5}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.\end{aligned}$$

On a

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = ln\,|x^2+2x+5| + c_1, \;\; c_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-1+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

Faisons le chagement de variable $t = x+1$. D'où $dt = dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2} arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c_2, \ \ c_2 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c_2, \ \ c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} ln\left(x^2+2x+5\right) + 2\, arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Intégration de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes

1^{er} **cas :**

Si $deg\left(P(x)\right) \geqslant deg\left(Q(x)\right)$, on effectue la division euclidienne

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

où N est un polynôme de degré $n-m$ et R est un polynôme de degré au plus $n-1$.

On en déduit que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int N(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

2^{eme} **cas :**

Si $deg\left(P(x)\right) < deg\left(Q(x)\right)$ et si $Q(x)$ possède k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k, alors $Q(x)$ s'écrit

$$Q(x) = c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}...(x-a_k)^{m_k}$$

et $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en fractions simples sous la forme

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{P(x)}{Q(x)} & = & \dfrac{A_{1,1}}{x-a_1}+\dfrac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\dfrac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\ & + & \dfrac{A_{2,1}}{x-a_2}+\dfrac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\dfrac{A_{2,m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} \\ & \vdots & \\ & + & \dfrac{A_{k,1}}{x-a_k}+\dfrac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2}+\cdots+\dfrac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}}\end{array}$$

où les $A_{i,j}$ sont des constantes.

Exemples 3.2.1. 1. *Calcul de* $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

On a

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x & \quad\quad x \\ \cline{1-1} -x+1 & \end{array}$$

D'où

$$\frac{x^3+1}{x^2+1}=x+\frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx & = & \displaystyle\int \left(x+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx \\ & = & \displaystyle\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ & = & \displaystyle\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)+arctan\left(x\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.\end{array}$$

2. *Calcul de* $\int \frac{x}{(x+1)^2(x-2)}dx$

Ecrivons $\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}$ *sous la forme :*

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x-2)},$$

où a, b *et* c *sont des constantes à déterminer.*

On a :

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{x}{(x+1)^2(x-2)} & = & \dfrac{a}{(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x-2)} \\ & = & \dfrac{(a+c)x^2+(-a+b+2c)x+(-2a-2b+c)}{(x+1)^2(x-2)}\end{array}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -a+b+2c= \;\; 1 \\ -2a-2b+c= \;\; 0 \end{cases}$$

On calcule et on trouve : $a=-\frac{2}{9}$, $b=\frac{1}{3}$, *et* $c=\frac{2}{9}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^2(x-2)}dx &= -\frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx+\frac{2}{9}\int \frac{1}{x-2} \\ &= -\frac{2}{9}ln|x+1|+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x+1}\right)+\frac{2}{9}ln|x-2|+C, \quad C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.3 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques

Intégration des fractions rationnelles en e^x.

Le changement de variable $t=e^x$ conduit au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en la variable t.

Exemple 3.3.1. *Calcul de* $\int \frac{dx}{1+e^x}$
Faisons le changement de variable $t=e^x$, *d'où* $dt=e^x dx$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dt}{t(t+1)}=\int \frac{dt}{t}-\int \frac{dt}{1+t} \\ &= ln|t|-ln|1+t|+c, \quad c\in\mathbb{R}, \\ &= ln\left(\frac{t}{1+t}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Intégration des fonctions trigonométriques

On peut calculer les primitives de la forme $\int R(cos\,x,\,sin\,x)dx$ où R est une fonction rationnelle en $cos\,x$ et $sin\,x$, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle. Il existe deux méthodes :

1. **Règles de Bioche :** Posons $\omega(x) = R(cos\, x,\ sin\, x)dx$.
   - Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $t = cos\, x$.
   - Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $t = sin\, x$.
   - Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $t = tan\, x$.
2. **le changement de variable** $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ **:**
   Avec $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a $cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Exemples 3.3.1. *1. Calcul de* $\int \frac{1+tan\, x}{1+sin\, 2x} dx$

Posons $\omega(x) = \frac{1+tan\, x}{1+sin\, 2x} dx$. *Comme*

$$\omega(\pi+x) = \frac{1 + tan\,(\pi + x)}{1 + 2sin\,(\pi + x)cos\,(\pi + x)} d(\pi+x) = \frac{1 + tan\, x}{1 + 2sin\, x\, cos\, x} dx = \omega(x),$$

alors le changement de variable qui convient est $t = tan\, x$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + tan\, x}{1 + sin\, 2x} dx &= \int \frac{1+t}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = ln|1+t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= ln|1 + tan\, x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int \frac{1}{5-3cos\, x} dx$

Faisons le changement de variable $t = tan\,(\frac{x}{2})$, *d'où*

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \;\; et \;\; cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5 - 3cos\, x} dx &= \int \frac{1}{5 - 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{1+4t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 + (\frac{1}{2})^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\, arctan\,(2t) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} arctan\left(2\, tan\,(\frac{x}{2})\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Cas particuliers

1. Primitives du type $\int cos^m x\, sin^n x\, dx$, où $n, m \in \mathbb{N}$
   (a) Si m est **impair**, on fait le changement de variable $t = sin\, x$.

(b) Si n est **impair**, on fait le changement de variable $t = cos\, x$.

(c) Si n et m sont **pairs**, il faut linéariser l'expression.

2. Si l'intégrale est de la forme $\int R(sin\, x) cos\, x\, dx$, on fait le changement de variable : $t = sin\, x$.
3. Si l'intégrale est de la forme $\int R(cos\, x) sin\, x\, dx$, on fait le changement de variable : $t = cos\, x$.
4. Si l'intégrale est de la forme $\int R(tan\, x) dx$, on fait le changement de variable : $t = tan\, x$.

Exemples 3.3.2. 1. *Calculons* $\int cos^2 x\, sin^3 x\, dx$

On a :

$$\int cos^2 x\, sin^3 x\, dx = \int cos^2 x\, sin^2 x\, sin\, x\, dx = \int cos^2 x\, (1 - cos^2 x)\, sin\, x\, dx$$

Faisons le changement de variable $t = cos\, x$, *d'où* $dt = -sin\, x\, dx$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int cos^2 x\, sin^3 x\, dx &= -\int t^2 (1 - t^2) dt \\ &= -\int (t^2 - t^4) dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. *Calculons* $\int cos^3 x\, dx$

On a :

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos^2 x\, cos\, x\, dx = \int (1 - sin^2 x)\, cos\, x\, dx$$

Faisons le changement de variable $t = sin\, x$, *d'où* $dt = cos\, x\, dx$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int cos^3 x\, dx &= \int (1 - t^2) dt \\ &= t - \frac{t^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= sin\, x - \frac{sin^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. *Calculons* $\int \frac{tan\,x}{1+tan\,x}dx$

Faisons le changement de variable $t = tan\,x$*, d'où* $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{tan\,x}{1+tan\,x}dx &= \int \frac{t}{1+t}\frac{dt}{t^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt \\
&= \frac{1}{4}ln(t^2+1) + \frac{1}{2}arctan\,t - \frac{1}{2}ln|t+1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}ln(tan^2 x+1) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln|tan\,x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3.4 Intégrales Abéliennes

Intégrales de fractions rationnelles en x et $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Il suffit de faire le changement de variable $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ et on obtient une nouvelle fonction plus facile à intégrer.

Intégrales de fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et b, $c \in \mathbb{R}$.

Il faut commencer par écrire :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\
&= \frac{|\triangle|}{4a}\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{|\triangle|}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{\triangle}{|\triangle|}\right], \quad avec\ \triangle = b^2-4ac \neq 0.
\end{aligned}$$

On fait ensuite le changement de variable $t = \frac{2a}{\sqrt{|\triangle|}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$et on regarde la fonction obtenue.

Fonction rationnelle en t et $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t = ch\,y$.

Fonction rationnelle en t et $\sqrt{1-t^2}$: on pose $t = sin\,y$.

Fonction rationnelle en t et $\sqrt{1+t^2}$: on pose $t = sh\,y$.

Exemple 3.4.1. *Calculons* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}}$.

On a :

$$x^2 + 12x + 48 = (x+6)^2 + 12 = 12\left[\left(\frac{x+6}{\sqrt{12}}\right)^2 + 1\right]$$

Faisons le changement de variable $t = \frac{x+6}{\sqrt{12}}$, *d'où* $x = \sqrt{12}t - 6$ *et* $dx = \sqrt{12}dt$.

Ainsi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \int \frac{\sqrt{12}dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

Faisons le changement de variable $t = sh\, y$, *d'où* $dt = ch\, y\, dy$.

D'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+48}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= \int \frac{ch\, y\, dy}{\sqrt{sh^2\, y+1}} \\
&= \int \frac{ch\, y\, dy}{\sqrt{ch^2\, y}} \\
&= y + c \quad c \in \mathbb{R} \\
&= argsh(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&= argsh\left(\frac{x+6}{\sqrt{12}}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3.5 Intégration définie

Théorème 3.5.1. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et* F *une primitive de* f *sur* $[a,b]$. *Alors*

1. *la dérivée de* $g(x) = \int_a^x f(x)dx$ *existe et est égale à* $f(x)$,
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b$.

Exemple 3.5.1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= [\arcsin\, x]_0^1 \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(0) \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3.6 Énoncés des exercices

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int (x+1)e^x dx$ 2) $\displaystyle\int arctan\,x\,dx$ 3) $\displaystyle\int x^2 ln\,x\,dx$

4) $\displaystyle\int arccos\,x\,dx$ 5) $\displaystyle\int ln\,x\,dx$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{ch\,x}dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int cos^3 x\,sin^2\,x\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{cos\,x}{2-cos^2\,x}dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{2+cos\,x}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{sin\,(2x)}{1+cos\,x}dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{sin\,x\,dx}{cos\,x\,(1+cos\,x)}$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$ 3) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx$

Exercice 6 : On désigne par I et J les primitives :

$$I(x) = \int \frac{sin\,x}{sin\,x+cos\,x}dx \quad et \quad \int \frac{cos\,x}{sin\,x+cos\,x}dx$$

1. Calculer $I(x)+J(x)$.
2. Calculer $I(x)-J(x)$.
3. En déduire $I(x)$ et $J(x)$.

3.7 Corrigés des exercices

Exercice 1 :

1) Calcul de $\int (x+1)e^x dx$

On calcule cette intégrale par parties.
Posons

$$\begin{cases} u(x) = & (x+1) \\ v'(x) = & e^x \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} u'(x) = & 1 \\ v(x) = & e^x \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int (x+1)e^x dx &= (x+1)e^x - \int e^x dx \\ &= xe^x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calcul de $\int arctan\, x\, dx$

On calcule cette intégrale par parties.
Posons

$$\begin{cases} u(x) = & arctan\, x \\ v'(x) = & 1 \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} u'(x) = & \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = & x \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int (x+1)e^x dx &= x\, arctan\, x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x\, arctan\, x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= x\, arctan\, x - \frac{1}{2} ln\,(1+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calcul de $\int x^2 ln\, x\, dx$

On calcule cette intégrale par parties.
Posons

$$\begin{cases} u(x) = & ln\, x \\ v'(x) = & x^2 \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} u'(x) = & \frac{1}{x} \\ v(x) = & \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int x^2 ln\,x\,dx &= \frac{x^3}{3} ln\,x - \int \left(\frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} ln\,x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} ln\,x - \frac{1}{9}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4) Calcul de $\int arccos\,x\,dx$

On calcule cette intégrale par parties.

Posons

$$\left\{\begin{array}{rl} u(x) = & arccos\,x \\ v'(x) = & 1 \end{array}\right. \quad d'où \quad \left\{\begin{array}{rl} u'(x) = & \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v(x) = & x \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int arccos\,x\,dx &= x\,arccos\,x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\,arccos\,x - \frac{1}{2}\int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= x\,arccos\,x - \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5) Calcul de $\int ln\,x\,dx$

On calcule cette intégrale par parties.

Posons

$$\left\{\begin{array}{rl} u(x) = & ln\,x \\ v'(x) = & 1 \end{array}\right. \quad d'où \quad \left\{\begin{array}{rl} u'(x) = & \frac{1}{x} \\ v(x) = & x \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int ln\,x\,dx &= x\,ln\,x - \int x\,\frac{1}{x} dx \\ &= x\,ln\,x - \int 1\,dx \\ &= x\,ln\,x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) Calcul de $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-1}dx &= \int \frac{x^3-x+x}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int xdx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln\left|x^2-1\right|+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Calcul de $\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx$

$$\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{x}{(x-1)(x+3)}dx$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

On a :

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3} = \frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+b= & 1 \\ 3a-b= & 0 \end{cases}$$

On calcule et on trouve : $a=\frac{1}{4}$ et $b=\frac{3}{4}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= \frac{1}{4}ln\left|x-1\right|+\frac{3}{4}ln\left|x+3\right|+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calcul de $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer.

On multiplie par x puis on remplace x par 0, et on obtient : $a=\frac{1}{2}$.

On multiplie par $x+1$ puis on remplace x par -1, et on obtient : $b=-1$.
On multiplie par $x+2$ puis on remplace x par -2, et on obtient : $c=\frac{1}{2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{2}ln\,|x| - ln\,|x+1| + \frac{1}{2}ln\,|x+2| + C, \qquad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

4) Calcul de $\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$ Ecrivons $\frac{1}{x(1+x^2)}$ sous la forme

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

On a :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+b = & 0 \\ c = & 0 \\ a = & 1 \end{cases}$$

On calcule et on trouve : $a=1,\ b=-1$ et $c=0$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= ln\,|x| - \frac{1}{2}ln\,(1+x^2) + C, \qquad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) Calcul de $\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$
Faisons le changement de variable $t=e^x$, d'où $dt=e^x dx$.
Ainsi

$$\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{2}{t}} = \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

2) Calcul de $\int \frac{1}{ch\,x}dx$

On a :

$$\frac{1}{ch\,x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{2}{(e^x)^2+1}e^x.$$

Faisons le changement de variable $t = e^x$, d'où $dt = e^x dx$.

Ainsi

$$\int \frac{1}{ch\,x}dx = \int \frac{2}{(e^x)^2+1}e^x dx = \int \frac{2}{t^2+1}dt = 2\,arctan\,(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\int \frac{1}{ch\,x}dx = 2\,arctan\,(e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) Calcul de $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

On a

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Faisons le changement de variable $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, d'où $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-x+1} &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{(t)^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}arctan\,(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1) Calcul de $\int cos^3 x\, sin^2 x\, dx$

On a

$$\int cos^3 x\, sin^2 x\, dx = \int cos^2 x\, sin^2 x\, cos\, x\, dx = \int (1 - sin^2 x)\, sin^2 x\, cos\, x\, dx$$

Faisons le changement de variable $t = sin\,x$, d'où $dt = cos\,x\,dx$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int cos^3 x\, sin^2 x\, dx = \int (1-t^2)t^2 dt &= \int \left(t^2 - t^4\right) dt\\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &= \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^5 x}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Calcul de $\int \frac{cos\, x}{2-cos^2 x} dx$

Posons $\omega(x) = \frac{cos\, x\, dx}{2-cos^2 x}$. Comme

$$\omega(\pi - x) = \frac{cos\,(\pi - x)\, d(\pi - x)}{2 - cos^2\,(\pi - x)} = \frac{(-cos\, x)(-dx)}{2 - cos^2 x} = \omega(x),$$

alors le changement de variable qui convient est $t = sin\, x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{cos\, x}{2 - cos^2 x} dx &= \int \frac{cos\, x}{2 - (1 - sin^2 x)} dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctan(t) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= arctan(sin\, x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calcul de $\int \frac{1}{2+cosx} dx$

Faisons le changement de variable $t = tan\, \left(\frac{x}{2}\right)$, d'où

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad et \quad cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2+cosx} dx &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{3+t^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} artan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} artan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) Calcul de$\int \frac{sin\,(2x)}{1+cos\, x} dx$

On a :

$$\int \frac{sin\,(2x)}{1+cos\, x} dx = \int \frac{2sin\, x\, cos\, x}{1+cos\, x} dx = \int \frac{2cos\, x}{1+cos\, x} sin\, x\, dx$$

Faisons le changement de variable $t = cos\, x$, d'où $dt = -sin\, x\, dx$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{sin\,(2x)}{1+cos\, x} dx &= -2 \int \frac{t}{1+t} dt = -2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = -2 \int 1\, dt + 2 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= -2\, t + 2\, ln\, |1+t| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= -2\, cos\, x + 2\, ln\, |1 + cos\, x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5) Calcul de $\int \frac{sin\, x\, dx}{cosx(1+cosx)}$

Faisons le changement de variable $t = tan\,\left(\frac{x}{2}\right)$, d'où

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad et \;\; sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{sin\, x\, dx}{cosx(1+cosx)} &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2t}{1-t^2}dt = -\int \frac{-2t}{1-t^2}dt \\
&= -ln\,|1-t^2| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&= -ln\,\left|1 - tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) Calcul de $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Faisons le changement de variable $t = \sqrt{x}$, d'où

$$x = t^2 \qquad et \;\; dx = 2tdt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2tdt}{1+t} \\
&= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= 2t - 2\,ln|1+t| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&= 2\sqrt{x} - 2ln(1+\sqrt{x}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Calcul de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$

Faisons le changement de variable $t = \sqrt{1-3x}$, d'où

$$x = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3} \qquad et \;\; dx = -\frac{2}{3}tdt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}} &= -\frac{2}{3}\int \frac{tdt}{t} \\
&= -\frac{2}{3}t + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3) Calcul de $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \int \frac{2x+4-3}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \underbrace{\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx}_{I_1} - 3\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx}_{I_2}.$$

On a :

$$I_1 = \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\int \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\sqrt{x^2+4x+6}+c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

et

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}dx$$

Faisons le changement de variable $t = \frac{x+2}{\sqrt{2}}$, d'où $x = \sqrt{2}t - 2$ et $dx = \sqrt{2}dt$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = argsh(t) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \\ &= argsh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\sqrt{x^2+4x+6} - 3\,argsh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 :

1.

$$\begin{aligned} I(x) + J(x) &= \int \frac{sin\,x}{sin\,x + cos\,x}dx + \int \frac{cos\,x}{sin\,x + cos\,x}dx \\ &= \int \frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x + cos\,x}dx = \int 1\,dx = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I(x) - J(x) &= \int \frac{sin\,x}{sin\,x + cos\,x}dx - \int \frac{cos\,x}{sin\,x + cos\,x}dx \\ &= \int \frac{sin\,x - cos\,x}{sin\,x + cos\,x}dx = -\int \frac{cos\,x - sin\,x}{sin\,x + cos\,x}dx \\ &= -\ln|sin\,x + cos\,x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Puisque $I(x) = \frac{1}{2}\left((I(x)+J(x)) + (I(x)-J(x))\right)$, on a

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(x - \ln|sin\,x + cos\,x|\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

De même,

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(x + \ln|sin\,x + cos\,x|\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 4

Les équations différentielles

4.1 Les équations différentielles ordinaires

Définition 4.1.1. *Une équation différentielle est une relation entre la variable en général notée x et une fonction inconnue y et ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$ qu'on peut mettre sous la forme*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{E}$$

L'entier n est l'ordre de l'équation différentielle (**E**)

Exemple 4.1.1. $y'' + 3y' + 2y = cos\, x$ *est une équation différentielle du second ordre.*

Définition 4.1.2. *Une solution de l'équation différentielle* (**E**) : $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ *est une fonction $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable sur I et qui vérifie l'équation* (**E**).

Exemple 4.1.2. *Considérons l'équation différentielle* (**E**) : $y' - 2x = 0$.
La fonction $g : x \mapsto x^2$ est une solution de l'équation différentielle (**E**), *car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 2x$ donc*

$$g'(x) - 2x = 2x - 2x = 0.$$

4.2 Les équations différentielles d'ordre 1

4.2.1 Équation différentielles à variables séparables

Définition 4.2.1. *Une équation différentielle d'ordre 1 est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f(y)y' = g(x) \qquad \textbf{(vs)}$$

Exemple 4.2.1. *Résoudre l'équation différentielle :* $y' - \frac{1}{x}y = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y = 0 &\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow ln\,|y| = ln\,|x| + c \\ &\Longrightarrow e^{ln\,|y|} = e^{ln\,|x|+c} \\ &\Longrightarrow y = Kx, \;\; K = \pm e^c \;\in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{x}y = 0$ *est donnée par :* $y = Kx, \;\; K \in \mathbb{R}^*$.

4.2.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 4.2.2. *Soient a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*

- *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :*

$$y' = a(x)y + b(x).$$

- *On appelle équation homogène associée à $y' = a(x)y + b(x)$ l'équation :*

$$y' = a(x)y.$$

Résolution de l'équation homogène associée

Proposition 4.2.1. *La solution générale de l'équation différentielle*

$$y' = a(x)y$$

s'écrit

$$y = Ce^{\int a(x)dx}$$

où C est une constante quelconque.

Résolution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$

Proposition 4.2.2. *La solution générale de l'équation différentielle*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

s'écrit

$$y = y_{part} + y_{hom} = y_{part} + Ce^{\int a(x)dx}$$

où

y_{hom} *est la solution de l'équation homogène associée* $y' = a(x)y$;
y_{part} *est la solution particulière de l'équation différentielle* $y' = a(x)y + b(x)$.

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante

La solution générale de $y' = a(x)y$ est donnée par $y = Ce^{\int a(x)dx}$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_{part} = C(x)e^{\int a(x)dx}$, où C est maintenant une fonction à déterminer pour que y_{part} soit une solution de $y' = a(x)y + b(x)$.

Exemple 4.2.2. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \qquad \textbf{(E)}$$

On a :

$y'+2xy = 2xe^{-x^2} \iff y' = -2xy+2xe^{-x^2}$, *c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

On cherche la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation **(E)** *; c'est-à-dire l'équation différentielle :* $y' = -2xy$.

$$
\begin{aligned}
y' = -2xy \implies & \frac{y'}{y} = -2x \\
\implies & \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -2x \\
\implies & \int \frac{dy}{y} = \int -2x dx \\
\implies & ln\,|y| = -x^2 + k, \;\; k = cte \\
\implies & |y| = e^{-x^2+k} \\
\implies & y = \pm e^k e^{-x^2} \\
\implies & y = Ce^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Cherchons ensuite une solution particuliere de **(E)** *sous la forme*

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle **(E)**, *on obtient* $C'(x) = 2x$. *D'où* $C(x) = x^2 + k, \; k \in \mathbb{R}$.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle **(E)** *est donnée par :*

$$y = (x^2 + k)e^{-x^2}, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

4.2.3 Équation de Bernoulli

Définition 4.2.3. *Une équation différentielle de Bernoulli est de la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^n$$

où a *et* b *sont des fonctions définies et continues sur* $I \subset \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Méthode de solution

1. On divise les deux membres par y^n, on obtient $a(x)\frac{y'}{y^n} + b(x)y^{1-n} = f(x)$.
2. Poser $z = y^{1-n}$ d'où $z' = (1-n)y^{-n}y'$.

Ceci conduit à l'équation linéaire d'ordre 1 à résoudre :

$$\frac{a(x)}{1-n}z' + b(x)z = f(x).$$

Exemple 4.2.3. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x-1)y^3 \quad (\mathbf{E})$$

On a :

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x-1)y^3 &\implies \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{2}\frac{y}{y^3} = \frac{1}{2}(x-1) \\ &\implies \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(x-1). \end{aligned}$$

Faisons le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y^2}$. D'où $z' = -\frac{2y'}{y^3}$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(x-1) &\implies -\frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(x-1) \\ &\implies z' = z + (1-x) \qquad (\mathbf{E}_\ell). \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} z' = z &\implies \frac{z'}{z} = 1 \\ &\implies \int \frac{dz}{z} = \int 1\, dx \\ &\implies ln|z| = x + \alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \\ &\implies e^{ln|z|} = e^{x+\alpha}, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \\ &\implies z = Ce^x, \;\; C = \pm e^\alpha \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Cherchons ensuite une solution particuliere de $(\mathbf{E}_\ell)$ sous la forme

$$z = C(x)e^x.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle $(\mathbf{E}_\ell)$, on obtient $C'(x) = (1-x)e^{-x}$. D'où

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (1-x)e^{-x}dx \\ &= -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x}dx \\ &= xe^{-x} + k, \;\; k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_\ell)$ est donnée par :

$$z = x + ke^x, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de l'équation $(\mathbf{E})$ est donnée par :

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{x + ke^x}}, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

4.3 Les équations différentielles linéaire d'ordre 2

Définition 4.3.1. *Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{1}$$

où a, b, c et f sont des fonctions données définies et continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- L'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{2}$$

  est appelée l'équation homogène associée à (1).

Dans la suite nous supposons que a ne s'annule pas sur I.

Théorème 4.3.1 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $x_0 \in I$, et soit $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe une unique solution y de (1) sur I vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.*

Mais dans cette situation, il est en général beaucoup plus difficile de trouver les solutions de (2). Nous ne saurons le faire que lorsque les fonctions a, b, c sont constantes, c'est-à-dire lorsque l'équation différentielle (1) est à coefficients constants.

4.4 Les équations différentielles ordinaires du second ordre à coefficient constant

Définitions 4.4.1.

- *Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme*

$$ay'' + by + cy = f(x) \tag{E}$$

  où a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- *L'équation homogène associée à* $(\mathbf{E})$ *est*

$$ay'' + by + cy = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

- *L'équation* $a\lambda^2+b\lambda+c = 0$ *est appelée l'équation caractéristique associée à* $(\mathbf{E_h})$.

Théorème 4.4.1. *Soit* $\triangle = b^2 - 4ac$, *le discriminant de l'équation caractéristique associée à* $(\mathbf{E_h})$.

1. *Si* $\triangle > 0$, *l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *et les solutions de* $(\mathbf{E_h})$ *sont :*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si* $\triangle = 0$, *l'équation caractéristique admet une solution double* λ_0 *et les solutions de* $(\mathbf{E_h})$ *sont :*

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_0 x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si* $\triangle < 0$, *l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ *et les solutions de* $(\mathbf{E_h})$ *sont :*

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 cos(\beta x) + c_2 sin(\beta x)\right), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.4.1. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (\mathbf{E_1})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_1})$ *est :*

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $1 + i$ *et* $1 - i$.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E_1})$ *est donnée par :*

$$y = e^x(c_1 cos\, x + c_2 sin\, x), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre f qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

Proposition 4.4.1. *La solution générale de l'équation* $ay'' + by' + cy = f(x)$ *s'écrit :*

$$y = y_{part} + y_{hom}$$

où :

y_{part} *est la solution quelconque de l'équation donnée ;*

y_{hom} *est la solution générale de l'équation homogène associée.*

4.4.1 Recherche d'une solution particulière

On donne deux cas particuliers importants et une méthode générale.

Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$.

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_{part}(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_{part}(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 0)$, si α n'est pas une solution de l'équation caractéristique,
- $y_{part}(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 1)$, si α est une solution simple de l'équation caractéristique,
- $y_{part}(x) = x^2e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 2)$, si α est une solution double de l'équation caractéristique.

Second membre du type $e^{\alpha x}\left(P_1(x)cos(\beta x) + P_2(x)sin(\beta x)\right)$.

Si $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)cos(\beta x) + P_2(x)sin(\beta x)\right)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_{part}(x) = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2(x)sin(\beta x)\right)$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique,
- $y_{part}(x) = xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2(x)sin(\beta x)\right)$ si $\alpha + i\beta$ est une solution de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = max\left\{deg\, P_1, deg\, P_2\right\}$.

Méthode de variation des constantes.

Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée. On cherche une solution particulière de $(\mathbf{E_h})$ sous la forme $y_{part} = c_1y_1 + c_2y_2$, où c_1 et c_2 sont des fonctions vérifiant $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$. Ainsi $y'_{part} = c_1y_1' + c_2y_2'$, et $(\mathbf{E_h})$ devient $a\,(c_1'y_1' + c_2'y_2') = f(x)$, (car $ay_i'' + by_i' + cy_i = 0$ pour $i = 1, 2$).
Donc, c_1' et c_2' sont solutions du système :

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = & 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = & \frac{1}{a}f(x) \end{cases}$$

Ce système se résoud aisément, ce qui donne c_1', c_2', puis c_1, c_2 par integration.

Exemples 4.4.1. *1. Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 4y' = x^2 - 2x \qquad (\mathbf{E})$$

- *L'équation homogène associée à* $(\mathbf{E})$ *est :*

$$y'' - 4y' = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ *est :*

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ *admet deux solutions réelles distinctes :* 0 *et* 4.
Ainsi la solution générale y_{hom} *de l'équation différentielle* $(\mathbf{E_h})$ *est donnée par :*

$$y_{hom} = c_1 + c_2e^{4x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- *Le second membre est le produit d'une fonction polynomiale de degré* 2 *par une exponentielle d'exposant nul. Comme* 0 *est une solution simple de l'équation caractéristique* $(\mathbf{E_c})$, *alors la solution particulière* y_{part} *de* $(\mathbf{E})$ *est cherchée sous la forme :*

$$y_{part} = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx,$$

où a, b *et* c *sont des constantes à déterminer.*
On a alors :

$$y''_{part} - 4y'_{part} = -12ax^2 + (6a - 8b)x + 2b - 4c.$$

Pour que y_{part} soit une solution de $(\mathbf{E})$*, il suffit que :*

$$\begin{cases} -12a = & 1 \\ 6a - 8b = & -2 \\ 2b - 4c = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = & -\frac{1}{12} \\ b = & \frac{3}{16} \\ c = & \frac{3}{32} \end{cases}$$

D'où

$$y_{part} = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x$$

Ainsi la solution générale de l'équation $(\mathbf{E})$ *est donnée par :*

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x \ , \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^x \qquad (\mathbf{E})$$

L'équation homogène associée à $(\mathbf{E})$ *est :*

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ *est :*

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ *admet deux solutions réelles distinctes :* 1 *et* 2.
Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ *est donnée par :*

$$y_{hom} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme :

$$y_{part} = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$$

où cette fois $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient $(\mathbf{S})$ *:*

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = & 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = & \frac{1}{a}f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = & 0 \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = & (x+1)e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = & -x-1 \\ c_2'(x) = & (x+1)e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = & -\frac{1}{2}(x+1)^2 \\ c_2(x) = & -(x+2)e^{-x} \end{cases}$$

D'où

$$y_{part} = -\frac{1}{2}(x+1)^2e^x - (x+2)e^x = -(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2})$$

Ainsi la solution générale de l'équation $(\mathbf{E})$ *est donnée par :*

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1e^x + c_2e^{2x} - (\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.5 Énoncés des exercices

Exercice 1 : Résoudre les équation différentielles suivantes :

1) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$ 2) $y' \sin x - y \cos x = 1$ 3) $y' = \dfrac{1-y}{1-2x}$

4) $xy' + y = x.$

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) :

$$(\mathbf{E}) : \; y'' + 2xy = 2xy^3.$$

Soit $x \mapsto y(x)$ une solution. On considère la fonction z définie par $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$.

1. Montrer que $z'(x) = \frac{-2y'(x)}{y^3(x)}$.
2. Former une équation différentielle $(\mathbf{E}')$ vérifiée par z.
3. Résoudre $(\mathbf{E}')$ puis $(\mathbf{E})$.

Exercice 3 : Résoudre les équation différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$ 3) $y'' + y' + y = 0$

Exercice 4 : Résoudre les équation différentielles suivantes :

1) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 2) $y'' - 4y' + 4y = 7 \sin x - \cos x$ 3) $y'' + 9y = x \cos x$

4) $y'' + y = e^x$ 5) $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)e^x$

Exercice 5 : En utilisant la méthode de la variation des constantes trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

4.6 Corrigés des exercices

Exercice 1 :

1) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}, \quad (\mathbf{E_1})$

On a :

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \Longleftrightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{x+1}{x}, \textit{ c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.}$$

On cherche la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation $(\mathbf{E_1})$; c'est-à-dire l'équation différentielle : $y' = \frac{y}{x}$.

$$\begin{aligned} y' = \frac{y}{x} &\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow ln\,|y| = ln\,|x| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow |y| = e^{ln\,|x|+k} \\ &\Longrightarrow y = \pm e^{k}\,x \\ &\Longrightarrow y = C\,x, \quad C = \pm e^{k} \in \mathbb{R}^{*}. \end{aligned}$$

Cherchons ensuite une solution particuliere de $(\mathbf{E_1})$ sous la forme

$$y = C(x)\,x.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle $(\mathbf{E_1})$, on obtient $C'(x) = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. D'où $C(x) = ln\,|x| - \frac{1}{x} + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}$.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E_1})$ est donnée par :

$$y = (ln\,|x| - \frac{1}{x} + \beta)x, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

2) $y'\,sin\,x - y\,cos\,x = 1, \quad (\mathbf{E_2})$

On a :

$$y'\,sin\,x - y\,cos\,x = 1 \Longleftrightarrow y' = \frac{cos\,x}{sin\,x}y + \frac{1}{sin\,x}, \textit{ c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.}$$

On cherche la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation $(\mathbf{E_2})$; c'est-à-dire l'équation différentielle : $y' = \frac{cos\,x}{sin\,x}y$.

$$\begin{aligned}
y' = \frac{cos\,x}{sin\,x}y \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{cos\,x}{sin\,x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{cos\,x}{sin\,x} \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{cos\,x}{sin\,x}dx \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|y| = ln\,|sin\,x| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad |y| = e^{ln\,|sin\,x|+k} \\
&\Longrightarrow \quad y = \pm e^k\,sin\,x \\
&\Longrightarrow \quad y = C\,sin\,x, \quad C = \pm e^k \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Cherchons ensuite une solution particuliere de $(\mathbf{E_2})$ sous la forme

$$y = C(x)\,sin\,x.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle $(\mathbf{E_2})$, on obtient $C'(x) = \frac{1}{sin^2\,x}$. D'où $C(x) = -\frac{cos\,x}{sin\,x} + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}$.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E_2})$ est donnée par :

$$y = -cos\,x + \beta\,sin\,x, \;\; \beta \in \mathbb{R}.$$

3) $y' = \frac{1-y}{1-2x}, \quad (\mathbf{E_3})$
On peut remarquer que $y = 1$ est une solution évidente de $(\mathbf{E_3})$. Donc pour $y \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E_3}) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y-1} = \frac{1}{2x-1} \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y-1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|y-1| = \frac{1}{2}ln\,|2x-1| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|y-1| = ln\left(\sqrt{|2x-1|}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad |y-1| = e^{ln\left(\sqrt{|2x-1|}\right)+k} \\
&\Longrightarrow \quad y - 1 = \pm e^k\sqrt{|2x-1|} \\
&\Longrightarrow \quad y = C\sqrt{|2x-1|} + 1, \quad C = \pm e^k \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E_3})$ est donnée par :

$$y = C\sqrt{|2x-1|} + 1, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

4) $xy' + y = x, \quad (\mathbf{E_4})$

On a :

$$xy'+y = x \Longleftrightarrow y' = -\frac{1}{x}y+1, \text{ c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.}$$

On cherche la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation $(\mathbf{E_4})$; c'est-à-dire l'équation différentielle : $y' = -\frac{1}{x}y$.

$$\begin{aligned}
y' = -\frac{1}{x}y \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|y| = -ln\,|x| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|y| = ln\,\frac{1}{|x|} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad |y| = e^{ln\,\frac{1}{|x|}+k} \\
&\Longrightarrow \quad y = \frac{\pm e^k}{x} \\
&\Longrightarrow \quad y = \frac{C}{x}, \quad C = \pm e^k \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Cherchons ensuite une solution particuliere de $(\mathbf{E_4})$ sous la forme

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle $(\mathbf{E_4})$, on obtient $C'(x) = x$. D'où $C(x) = \frac{x^2}{2} + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}$.

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(\mathbf{E_4})$ est donnée par :

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\beta}{x}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

1. Comme on a $z(x) = \frac{1}{y^2(x)} = y^{-2}(x)$, en application des formules de dérivation :
$$z'(x) = -2y'(x)y^{-3}(x) = -\frac{2y'(x)}{y^3(x)}.$$

2. Puisqu'on a supposé que y est solution de $(\mathbf{E})$: $y' + 2xy = 2xy^3$, en divisant par y^3, on obtient $\frac{y'}{y^3} + 2\frac{x}{y^2} = 2x$, soit en utilisant l'expression de z et de z' :
$-\frac{z'}{2} + 2xz = 2x$, ce qui donne $(\mathbf{E'})$: $z' - 4xz = -4x$.
3. $(\mathbf{E'})$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
On a :

$$\begin{aligned}
z' - 4xz = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{z'}{z} = 4x \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = 4x \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int 4x\,dx \\
&\Longrightarrow \quad ln\,|z| = 2x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad |z| = e^{2x^2+k}, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad z = \pm e^k e^{2x^2}, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad z = Ce^{2x^2}, \quad C = \pm e^k \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

$z = 1$ est une solution évidente de l'équation $(\mathbf{E'})$, donc les solutions de $(\mathbf{E'})$ sont les fonctions de la forme $z = 1 + Ce^{2x^2}$, $C \in \mathbb{R}^*$.

- Si y est solution de $(\mathbf{E})$, alors $z = \frac{1}{y^2}$ est solution de $(\mathbf{E'})$, donc on a

$$z = \frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{2x^2},$$

par conséquent $y^2 = \frac{1}{1+Ce^{2x^2}}$ et $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{2x^2}}}$.

Exercice 3 :

1) $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (E_1)$
L'équation caractéristique de (E_1) est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet deux solutions réelles distinctes : 1 et 3.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle (E_1) est donnée par :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (E_2)$
L'équation caractéristique de (E_2) est :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet une solution réelle double : 3.
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle (E_2) est donnée par :

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + y' + y = 0 \quad (E_3)$
L'équation caractéristique de (E_3) est :

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet deux solutions complexes conjuguées : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ainsi la solution générale de l'équation différentielle (E_3) est donnée par :

$$y = \left(c_1 cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

1) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x} \quad (E_1)$

- L'équation homogène associée à (E_1) est :

$$y'' - 6y' + 9 = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

  L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ est :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

  L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet une solution réelle double : 3.
  Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ est donnée par :

$$y_{hom} = (c_1 + c_2 x)e^{3x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Comme 3 est une solution double de l'équation caractéristique $(\mathbf{E_c})$, alors la solution particulière y_{part} de (E_1) est cherchée sous la forme :

$$y_{part} = x^2(ax+b)e^{3x}$$

  où a et b sont des constantes à déterminer.
  On a alors :

$$y''_{part} - 4y'_{part} + 4y_{part} = (6ax + 2b)\, e^{3x}.$$

Pour que y_{part} soit une solution de (E_2), il suffit que :

$$\left\{\begin{array}{rl} 6a = & \\ 2b = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} a = & \frac{1}{6} \\ b = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

D'où

$$y_{part} = (\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{3x},$$

Ainsi la solution générale de l'équation (E_2) est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= y_{hom} + y_{part} = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + (\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{3x} \quad , \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R} \\ &= (c_1 + c_2 x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{3x} \quad , \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) $y'' - 4y' + 4y = 7\,sin\,x - cos\,x \quad (E_2)$

- L'équation homogène associée à (E_2) est :

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet une solution réelle double : 2.
Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ est donnée par :

$$y_{hom} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Comme $\pm i$ ne sont pas des solutions de l'équation caractéristique $(\mathbf{E_c})$, alors la solution particulière y_{part} de (E_2) est cherchée sous la forme :

$$y_{part} = a\,cos\,x + b\,sin\,x,$$

où a et b sont des constantes à déterminer.
On a alors :

$$y''_{part} - 4y'_{part} + 4y_{part} = (4a + 3b)\,sin\,x + (3a - 4b)\,cos\,x.$$

Pour que y_{part} soit une solution de (E_2), il suffit que :

$$\left\{\begin{array}{rl} 4a + 3b = & 7 \\ 3a - 4b = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} a = & 1 \\ b = & 1 \end{array}\right.$$

D'où

$$y_{part} = cos\, x + sin\, x,$$

Ainsi la solution générale de l'équation (E_2) est donnée par :

$$y = y_{hom} + y_{part} = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + cos\, x + sin\, x \;\;, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + 9y = x\, cos\, x \quad (E_3)$

- L'équation homogène associée à (E_3) est :

$$y'' + 9y = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ est :

$$\lambda^2 + 9 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\pm 3i$.

Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ est donnée par :

$$y_{hom} = c_1\, cos\, 3x + c_2\, sin\, 3x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Comme $\pm i$ ne sont pas des solutions de l'équation caractéristique $(\mathbf{E_c})$, alors la solution particulière y_{part} de (E_2) est cherchée sous la forme :

$$y_{part} = (ax + b)\, cos\, x + (cx + d)\, sin\, x,$$

où a, b, c et d sont des constantes à déterminer.

On a alors :

$$y''_{part} + 9y_{part} = (8ax + 8b + 2c)\, cos\, x + (8cx - 2a + 8d))\, sin\, x.$$

Pour que y_{part} soit une solution de (E_2), il suffit que :

$$\begin{cases} 8a = & 1 \\ 8b + 2c = & 0 \\ 8c = & 0 \\ -2a + 8d = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{8} \\ b = & 0 \\ c = & 0 \\ b = & \frac{1}{32} \end{cases}$$

D'où

$$y_{part} = \frac{1}{8} x\ cos\, x + \frac{1}{32}\, sin\, x,$$

Ainsi la solution générale de l'équation (E_2) est donnée par :

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1\, cos\, 3x + c_2\, sin\, 3x + \frac{1}{8} x\ cos\, x + \frac{1}{32}\, sin\, x \;\;, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y = e^x \quad (E_4)$

- L'équation homogène associée à (E_4) est :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ est :

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\pm i$.
Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ est donnée par :

$$y_{hom} = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Une solution particulière de (E_2) , évidente, est :

$$y_{part} = \frac{1}{2}e^x.$$

Ainsi la solution générale de l'équation (E_4) est donnée par :

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x, \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 : L'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ est une équation du second ordre, à coefficients constants.

L'équation homogène associée à $(\mathbf{E})$ est :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

L'équation caractéristique de $(\mathbf{E_h})$ est :

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (\mathbf{E_c})$$

L'équation $(\mathbf{E_c})$ admet deux solutions complexes conjuguée : $+i$ et $-i$.
Ainsi la solution générale y_{hom} de l'équation différentielle $(\mathbf{E_h})$ est donnée par :

$$y_{hom} = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme :

$$y_{part} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

où cette fois $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient $(\mathbf{S})$:

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = & 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = & \frac{1}{a} f(x) \end{cases} \quad donc \quad \begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = & 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = & \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $sin\, x$ et la seconde par $cos\, x$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rl} c_1'\, cos\, x\, sin\, x + c_2'\, (sin\, x)^2 = & 0 \\ -c_1'\, cos\, x\, sin\, x + c_2'\, (cos\, x)^2 = & \frac{1}{cos\, x} \end{array}\right.$$

Donc par somme $c_2' = 1$, ainsi $c_2 = x$, et la première ligne des équations devient $c_1' = -\frac{sin\, x}{cos\, x}$ donc $c_1 = ln\,(cos\, x)$.
D'où

$$y_{part} = ln\,(cos\, x) cos\, x + x\, sin\, x$$

Ainsi la solution générale de l'équation (**E**) est donnée par :

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1 cos\, x + c_2 sin\, x + ln\,(cos\, x) cos\, x + x\, sin\, x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 5

Les fonctions à plusieurs variables

5.1 Rappel sur la topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition 5.1.1. *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application :*

$$\|\ \| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

Exemple 5.1.1. *En posant, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ on définit une norme, appelée norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 5.1.2.

- *La boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, notée $B(a, r)$, est l'ensemble suivant :*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| < r\}$$

- *La boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, notée $B_f(a, r)$, est l'ensemble suivant :*

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| \leq r\}$$

- *Soient V une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in V$. On dit que V est un voisinage de a, si V contient une boule ouverte centrée en a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.*

$$V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists r > 0, \ \ B(a, r) \subset V.$$

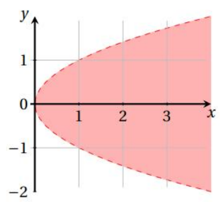
5.2 Limite, continuité et dérivées partielles d'une fonction

Définition 5.2.1 (Fonction de plusieurs variables)**.**

- *Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ au plus un réel $f(x)$.*
- *Le domaine de définition de f est l'ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ des points $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ qui ont une image par f.*

Exemple 5.2.1. *Déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ln(x - y^2)$.*
On a :

$$\mathcal{D}_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x - y^2 > 0\big\} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y^2 < x\big\}$$



5.2.1 Limites des fonctions à plusieurs variables

Définition 5.2.2. *Soit f une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sauf peut-être en x_0.*

- *La fonction f admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in U \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad ou \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

- *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0, et on l'écrit* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *si :*

$$\forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > A$$

- *On définirait de même* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *par :*

$$\forall A < 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < A$$

Proposition 5.2.1 (Opérations sur les limites)**.** *Soient f, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettent des limites en x_0. Alors on a :*

$$\lim_{x \to x_0} (f + g) = \lim_{x \to x_0} f + \lim_{x \to x_0} g \qquad \lim_{x \to x_0} (fg) = \lim_{x \to x_0} f \times \lim_{x \to x_0} g$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f}{\lim\limits_{x \to x_0} g}$$

Théorème 5.2.1. *Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage U de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

- *Si pour tout $x \in U$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,*
- *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f = \lim\limits_{x \to x_0} g = \ell$.

Alors h admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} h = \ell$.

Proposition 5.2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sauf peut être en x_0.*

- *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, *alors la restriction de f à toute courbe passant par x_0 admet une limite en x_0 et cette limite est ℓ.*
- *Par contraposée, si les restrictions de f à deux courbes passant par x_0 ont des limites différentes au point x_0, alors f n'admet pas de limite au point x_0.*

Exemple 5.2.2. *On veut calculer* $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
La fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Comme les restrictions de f à deux courbes continues passant par $(0, 0)$ donnent deux limites différents, on conclut que la $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ *n'existe pas.*

Proposition 5.2.3.

- *S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $r \mapsto \varphi(r)$ telle que au voisinage de (a,b) on a*

$$|f(a + r\,cos\,\theta,\ b + r\,sin\,\theta) - \ell| \leq \varphi(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell.$$

- *S'il existe une fonction $r \mapsto \psi(r)$ telle que au voisinage de (a,b) on a*

$$|f(a + r\,cos\,\theta,\ b + r\,sin\,\theta) - \ell| \geq \psi(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

alors la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exemple 5.2.3. *On veut calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.*
La fonction $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
On pose $x = r\,cos\,\theta$ et $y = r\,sin\,\theta$ pour $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$; on obtient

$$f\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{r^2 cos\,\theta\,sin\,\theta}{\sqrt{r^2\left(cos^2\theta + sin^2\theta\right)}} = r cos\,\theta\,sin\,\theta = \frac{r}{2} sin(2\theta).$$

Comme $|sin(2\theta)| \leq 1$, alors $|f(x,y)| \leq \frac{r}{2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ indépendamment de θ, donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

5.2.2 Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Définition 5.2.3.

- *$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in U$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *f est continue sur U si f est continue en tout point de U.*

Théorème 5.2.2. *Si f et g deux fonctions continues en x_0. Alors :*

- *la fonction $f + g$ est continue en x_0,*
- *de même fg et f/g (avec $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de x_0) sont continues en x_0,*
- *si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $h \circ f$ est continue en x_0.*

Exemples 5.2.1.

1. *$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy - x$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).*
2. *$g(x,y) = ln(x^2+y)+4$ est continue dans $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y > 0\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme et d'une constante.*

5.2.3 Dérivées partielles

Définition 5.2.4. *Soit* $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *Etant donné* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{D}_f$, *les fonctions partielles de* f *en* a *sont*

$$f_{a,i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ t \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n),\ \ i \in \{1, ..., n\}.$$

L'ensemble de définition de $f_{a,i}$ *est :*

$$\mathcal{D}_{f_{a,i}} = \{t \in \mathbb{R}|\ (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \in \mathcal{D}_f\}.$$

f est supposée définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.2.5. *Soit* $a \in U$ *et* $i \in \{1, ..., n\}$, *on appelle* i^{eme} *dérivée partielle de* f *en* a, *lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction partielle* $f_{a,i}$ *en* a_i.
On la note $D_i f(a)$ *ou* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{t}.$$

Exemple 5.2.4. *La fonction* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = cos(xy)$ *admet des dérivées partielles par rapport aux variables* x *et* y *en tout* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\, sin(xy),\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x\, sin(xy),\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Définition 5.2.6. *Soit* $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction dont la dérivée partielle par rapport à* x_i *existe en tout point de* U. *Alors, la fonction*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R},\ \ a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est appelée la dérivée partielle de f *par rapport à* x_i.

Définition 5.2.7. *Soit* $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction dont les* n *dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

existent. Alors, la fonction $\nabla f : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ *définie par*

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \right)$$

est appelé le gradient de f.

Proposition 5.2.4. *Soit $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dont les n dérivées partielles*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R},$$
existent et sont continues en a. Alors, la fonction f est aussi continue en a.

Définition 5.2.8. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si les n fonctions*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R},$$
existent et sont continues.

D'après la proposition précédente, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction admettant sur U une dérivée partielle par rapport à x_k. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_p, on aura la nouvelle fonction
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{\partial f}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$
- Dans le cas où $p = k$, on écrit :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}.$$
- Les fonctions
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
sont appelées les dérivées partielles secondes de la fonction f.
- On peut définir ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles d'ordre q de la fonction f. Par exemple, la dérivée partielle d'ordre q de la fonction f par rapport aux variables $x_{j_1}, ..., x_{j_q}$ (prises dans cette ordre) sera notée $\frac{\partial^q f}{\partial x_{j_1}, ..., x_{j_q}}$.

Définition 5.2.9. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U.*
$\mathcal{C}^0(U)$ désignant l'ensemble des fonctions continues sur U et $\mathcal{C}^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées partielles successives existent et sont continues sur U.

Théorème 5.2.3 (Théorème de Schwarz). *Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}$. Si ces fonctions sont continue en $a \in U$, on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}(a).$$

5.3 Différentiabilité

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.3.1. *Pour tout $a \in U$, on note $df(a)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :*

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \quad \textit{pour tout } h = (h_1, ..., h_n) \textit{ de } \mathbb{R}^n.$$

L'application $df(a)$ est appelée différentielle de f en a.

Théorème 5.3.1. *$df(a)$ est l'unique application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \textit{quand } h \textit{ tend vers 0}, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 5.3.2 (Linéarité de la différentiation). *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et tout $a \in U$:*

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a).$$

Définitions 5.3.1.

- *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^n$. La matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

  est la matrice de $df(x)$ et est appelée matrice jacobienne de f en x et se note : $J_f(x)$.

- *On suppose $n = p$. Le déterminant de $J_f(x)$ est appelé jacobien de f en x, on note $\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(x)$.*

Exemple 5.3.1. *1) Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r,\theta) \longmapsto f(r,\theta) = (r\,cos\,\theta,\ r\,sin\,\theta)$.
- Vérifier que f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *puis calculer la matrice jacobienne et le jacobien de* f *en* (r,θ).
2) Mêmes questions pour :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\gamma) \longmapsto f(r,\theta,\gamma) = (r\,cos\,\gamma\,cos\,\theta,\ r\,cos\,\gamma\,sin\,\theta,\ r\,sin\,\gamma).$$

- Dans les deux cas, on a affaire à des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ puisque leurs composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.

  1) Premier exemple.

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -r\,sin\,\theta \\ sin\,\theta & r\,cos\,\theta \end{pmatrix}, \qquad \frac{D(f_1,f_2)}{D(r,\theta)} = det\,(J_f(r,\theta)) = r.$$

  2) Deuxième exemple.

$$J_f(r,\theta,\gamma) = \begin{pmatrix} cos\,\gamma\,cos\,\theta & -r\,cos\,\gamma\,sin\,\theta & -r\,sin\,\gamma\,cos\,\theta \\ sin\,\gamma\,sin\,\theta & r\,cos\,\gamma\,cos\,\theta & -r\,sin\,\gamma\,sin\,\theta \\ sin\,\gamma & 0 & r\,cos\,\gamma \end{pmatrix},$$

$$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(r,\theta,\gamma)} = det\,(J_f(r,\theta,\gamma)) = r^2\,cos\,\gamma.$$

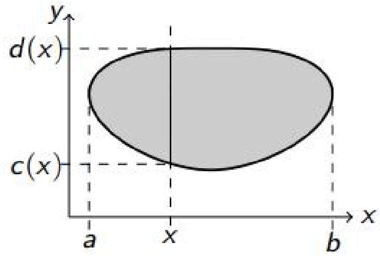
5.4 Intégrales double, triple

5.4.1 Intégrales double

Définition 5.4.1. *On appelle intégrale d'une fonction* $f(x,y)$ *de deux variables, l'intégrale double de la fonction* $f(x,y)$ *sur le domaine* A *et on note :* $\iint_A f(x,y)dxdy$.

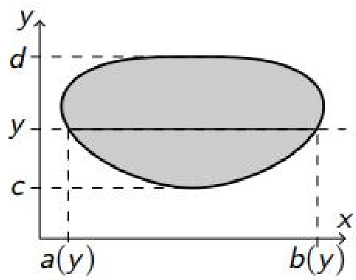
Théorème 5.4.1 (Théorème de Fubini). *Soit $x \mapsto c$ et $x \mapsto d$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $c \leq d$, notons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\}$. Alors :*

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$



Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y : soit $y \mapsto a$ et $y \mapsto b$ deux fonctions continues sur $[c,d]$ avec $a \leq b$, notons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$. Alors :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



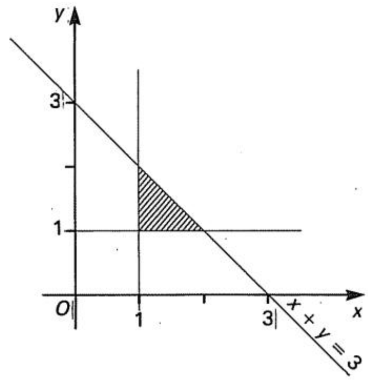
Exemple 5.4.1. *Calculer*

$$I = \iint_A \frac{dxdy}{(x+y)^3}.$$

avec A défini par $\begin{cases} x \geq & 1 \\ y \geq & 1 \end{cases}$ *et $x + y \leq 3$.*

Lorsque y est compris entre 1 et 2, le nombre x varie de 1 à $3 - y$. Donc

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_1^2 \left(\int_1^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^3} \right) dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_1^{3-y} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy \\
&= -\frac{1}{18} [y]_1^2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+y} \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$



Corollaire 5.4.1. *Une intégrale double de la forme $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy$*

peut se calculer en séparant les variables :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right).$$

Exemple 5.4.2. *Soit* $A = [0,2]\times[0,1]$; *on veut calculer l'intégrale double* $\iint_A xy\,dxdy$. *On a*
$\iint_A xy\,dxdy = \int_0^2\int_0^1 xy\,dxdy = \left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1.$

Changement de variable dans une intégrale double :

Supposons qu'on effectue le changement de variables $\begin{cases} x = & \varphi(u,v) \\ y = & \psi(u,v) \end{cases}$.
Lorsque (x,y) varie dans le domaine A; (u,v) varie dans un domaine A'. On considère le déterminant de la matrice $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}$ qu'on appelle matrice Jacobienne du changement de coordonnées.
On a :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_{A'} F(u,v).|J|\,dudv.$$

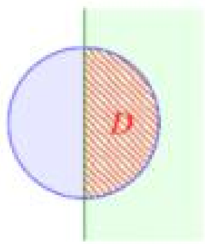
Cas particuliers : Pour les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = & \varphi(r,\theta) = a + r\,cos\,\theta \\ y = & \psi(r,\theta) = a + r\,sin\,\theta \end{cases}$$

où $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(a,b)\}$.

Exemple 5.4.3. *Calculer* $\iint_D \frac{x\,dxdy}{1+x^2+y^2}$ *où* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,x^2+y^2\leq 1\ \ et\ x\geq 0\}$.

Si on passe en coordonnées polaires on a :
$D' = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}|\,0\leq r\leq 1\ \ et\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$.



On doit alors calculer

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x\,dxdy}{1+x^2+y^2} &= \iint_{D'} \frac{r\cos\theta}{1+r^2} r\,dr\,d\theta \\
&= \left(\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta\right) \\
&= \left(\int_0^1 \frac{r^2+1-1}{1+r^2} dr\right)[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 1-\frac{1}{1+r^2} dr\right)\times 2 \\
&= 2\,[r-\arctan r]_0^1 \\
&= 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5.4.2 Intégrales triple

Principe f étant continue sur un domaine fermé et borné Ω de $\mathbb{R}^3$, l'intégrale triple $I = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ se définit de façon analogue aux intégrales doubles, et se calcule par intégrations successives.

Proposition 5.4.1 (Changement de variables)**.** *Soit* $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ *une fonction continue sur le domaine* Ω *fermé et borné, soit* φ, ψ *et* ξ *trois bijections de* Ω *de classe* $\mathcal{C}^1$

$$(u,v,w) \longmapsto (x=\varphi(u,v,w),\; y=\psi(u,v,w),\; z=\xi(u,v,w))$$

alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u,v,w),\,\psi(u,v,w),\,\xi(u,v,w)).|J|\,dudvdw$$

où

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.4.4. *On veut calculer* $\iiint_\Omega (1-2yz)\,dxdydz$.
où Ω *est le cylindre plein de hauteur* 3 *et de base le disque*

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\; x^2+y^2 \le 1,\; z=0\right\}.$$

- *On décrit explicitement* Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 3\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\in[-1,1],\ y\in\left[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\right],\ z\in[0,3]\right\}.\end{aligned}$$

- *On a,*

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\,dxdydz &= \int_0^3\left(\iint_D (1-2yz)dxdy\right)dz\\ &= \int_0^3\left(\int_{-1}^1 \left[y-y^2z\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx\right)dz\\ &= \int_0^3\left(\int_{-1}^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)z+\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)z\right]dx\right)dz\\ &= \left(\int_0^3 dz\right)\left(\int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}dx\right)\\ &= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2cos^2 t\,dt\\ &= 3\pi.\end{aligned}$$

Changements de variables particuliers dans $\mathbb{R}^3$

1. Pour les **coordonnées cylindriques**

$$\begin{cases} x &= \varphi(r,\theta,z) = a + r\cos\theta\\ y &= \psi(r,\theta,z) = b + r\sin\theta\\ z &= \xi(r,\theta,z) = z,\end{cases}$$

où $(r,\theta,z)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$ sont les coordonnées du point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$.

Le jacobien du passage en coordonnées cylindriques est : $|J|=r$, donc

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta, z).r\,drd\theta dz$$

2. Pour les **coordonnées sphériques**

$$\begin{cases} x &= \varphi(r,\gamma,\theta) = a + r\cos\gamma\cos\theta\\ y &= \psi(r,\gamma,\theta) = b + r\cos\gamma\sin\theta\\ z &= \xi(r,\gamma,\theta) = c + r\sin\gamma,\end{cases}$$

où $(r,\gamma,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sont les coordonnées du point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Le jacobien du passage en coordonnées sphériques est : $|J| = r^2\,cos\,\gamma$, donc

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(a+r\,cos\,\gamma\,cos\,\theta,\ b+r\,cos\,\gamma\,sin\,\theta,\ c+r\,sin\,\gamma).r^2\,cos\,\gamma\,drd\theta d$$

Exemple 5.4.5. *Considérons à nouveau* $\iiint_\Omega (1-2yz)\,dxdydz$.
où Ω *est le cylindre plein de hauteur* 3 *et de base le disque*

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2\le 1,\ z=0\right\}.$$

- *En coordonnées cylindriques, on a*

$$\Omega = \{(r,\theta,z)|\ r\in\,]0,1]\,,\ \theta\in[0,2\pi[\,,\ z\in[0,3]\}\,.$$

- *On a,*

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (1-2yz)\,dxdydz &= \int_0^3 dz\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r(1-2rz\,sin\,\theta)d\theta\right)dr\\
&= \int_0^3 dz\int_0^1 \left[r(\theta+2rz\,cos\,\theta)\right]_0^{2\pi} dr\\
&= \int_0^3 dz\int_0^1 r(2\pi+2rz-2rz)dr\\
&= \int_0^3 dz\int_0^1 2\pi r dr\\
&= 3\pi\left[r^2\right]_0^1\\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

5.5 Énoncés des exercices

Exercice 1 : Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y+x^2}}{y}$ 2) $g(x,y) = \dfrac{ln(y)}{\sqrt{x-y}}$ 3) $h(x,y) = ln(x+y)$.

Exercice 2 : Soit $f; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Soit $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculer

$$\iint_D y \frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x} dxdy.$$

Exercice 4 : Calculer

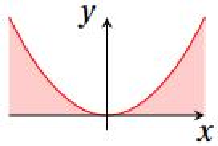
$$\iint_D (2x+y)^2 \, dxdy$$

où D est le triangle de sommets $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(0,2)$.

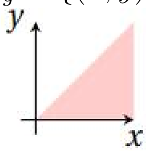
5.6 Corrigés des exercices

Exercice 1 :

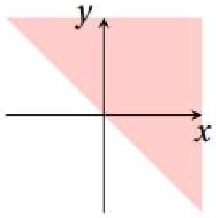
1) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \leqslant x^2 \ \ et \ \ y > 0\}$



2) $\mathcal{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0 \ \ et \ \ x > y\}$



3) $\mathcal{D}_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > -x\}$



Exercice 2 :

On a :

- La fonction $(x,y) \longmapsto \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Posons : $x = r\,cos\,\theta$, $y = r\,sin\,\theta$; alors $f(r,\theta) = r(cos^3\,\theta + sin^3\,\theta)$ et comme $|f(r,\theta)| \leq |2r| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta) = 0$ indépendamment de θ, donc $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

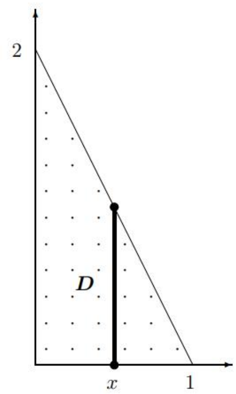
Exercice 3 :

$$\begin{aligned}
\iint_D y\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}dxdy &= \int_0^1 \frac{(e^x)^2}{1+e^x}dx \int_0^2 ye^{y^2}dy \\
&= \int_1^e \frac{t}{1+t}dt \int_0^2 ye^{y^2}dy \\
&= [t-ln(1+t)]_1^e \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(e-1-ln\Big(\frac{1+e}{2}\Big)\right)(e^4-1).
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

On a : $y_{(AB)} = 2-2x$.

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $2-2x$. Donc



$$\begin{aligned}
\iint_D (2x+y)^2\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x}(2x+y)^2dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{(2x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2-2x}\right)dx \\
&= \frac{8}{3}\int_0^1 \left(1-x^3\right)dx \\
&= \frac{8}{3}\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] B. Aebischer. Introduction à l'analyse : cours & exercices corrigés, *Vuibert*, 2011.

[2] S. Balac, F. Sturm. Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, *PPUR presses polytechniques*, 2003.

[3] C. David, S. Mustapha. Mathématiques-Tout le cours en fiches-Licence 1-Capes, *Dunod*, 2017.

[4] J. Douchet. Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 2, *PPUR Presses polytechniques*, 2010.

[5] G. Faccanoni. Calcul différentiel, 2016.

[6] H. Matzinger. Aide-mémoire d'analyse, *PPUR presses polytechniques*, 2000.

Résumé:

Ce polycopié de <<Mathématiques II >> est destiné surtout aux étudiants de première année sciences et techniques. Il peut aussi être utilement utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en Mathématiques et informatique ou autre.
Ce polycopié concernant les mathématiques générales, est composé de 5 chapitres: 1. Matrices et déterminants. 2. Système d'équations linéaires. 3. Les intégrales. 4. Les équations différentielles. 5. Les fonctions à plusieurs variables. Il comporte des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Les solutions sont détaillées et permette à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation.

Mots-clés: Matrice, Equations linéaires, Intégrale, Equations différentielles, fonctions.