

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



Thèse Présentée par :

Kamel BENYETTOU

Pour l'Obtention du Diplôme de :

Doctorat LMD

Filière : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

Analyse de la Stabilité et Contrôle des Modèles Uni et Multidimensionnels Fractionnaires et Applications

Date de soutenance : 22/03/2023

Devant le jury composé de :

| | | | | |
|------------------------------|---|------------------------|------------|-------------|
| Président | : | Mohand OULD ALI | Professeur | UMAB |
| Examineurs | : | Ahmed MEDEGHRI | Professeur | NHSM, Alger |
| | : | Abdessamad AMIR | Professeur | UMAB |
| | : | Boubakeur BENAHMED | Professeur | ENPO, Oran |
| Directeur de thèse | : | Djillali BOUAGADA | Professeur | UMAB |
| Co-Directeur de thèse | : | Mohammed Amine GHEZZAR | MCA | NHSM, Alger |

Année Universitaire : 2022 / 2023

D
O
C
T
O
R
A
T

Dédicaces

Je dédie ce travail :

*A mes chers parents et mes soeurs pour tous leurs
sacrifices,
leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.*

Remerciements

Je tiens à témoigner mes sincères remerciements en premier lieu à mon Directeur de thèse le Professeur Djillali BOUAGADA pour son soutien permanent tout au long de la réalisation de cette thèse, ainsi que pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de diriger ce projet de thèse ; pour toutes ses multiples conseils et pour les années qu'il a consacré pour mener à bien ce modeste travail de recherche, et de m'avoir initié à l'étude d'un grand axe de recherche de Mathématiques Appliquées qui est la théorie de contrôle et des systèmes, et la théorie des systèmes différentiels fractionnaires bidimensionnels et positifs. Je le remercie pour ses multiples conseils et encouragements, et pour sa haute clairvoyance mathématique et académique qui m'ont permis de faire une analyse approfondie dans la théorie de contrôle et des systèmes. Merci Professeur de m'avoir accueilli dans votre équipe de recherche " ACSY Team " au sein du laboratoire des Mathématiques Pures et

Appliquées " LMPA ". Un grand merci de ma part pour mon Professeur de m'avoir soutenu et m'avoir orienté vers l'avant durant ces années. Sans oublier mon Co-directeur de thèse le Docteur Mohammed Amine GHEZZAR qui a consacré son temps pour me diriger, de m'avoir donné des conseils académiques, professionnels et mathématiques dans le but de réaliser cette thèse. J'ai eu vraiment la chance d'être un étudiant durant mon cursus Licence et Master puis un doctorant en mathématiques sous la direction de mes deux Professeurs Djillali Bouagada et GHEZZAR Mohammed Amine.

Je voudrais également exprimer ma gratitude aux membres de jury d'avoir accepté d'expertiser ma thèse de doctorat.

Tout d'abord, je voudrais remercier Mr Mohand OULD ALI Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour m'avoir honorer d'être le président de la jury.

Ma gratitude va également à Mr Ahmed MEDEGHRI Professeur à l'école Nationale Supérieure de Mathématiques, Mr Abdessamed AMIR Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, Mr Boubakeur BENAHMED, Professeur à École Nationale Polytechnique d'Oran Maurice Audin, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer et d'expertiser mon travail de thèse.

Liste des Publications

Revues Internationales

1. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, Admissibility tests for multidimensional singular fractional continuous-time models, Archives of Control Sciences, 32(3), (2022), 607-625, 10.24425/acs.2022.142851. (**Catégorie A, Thomson reuters**) .
2. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, Solution of 2D State Space Continuous-Time Conformable Fractional Linear System Using Laplace and Sumudu Transform, Computational Mathematics and Modeling, 32 : 94–109 (2021), DOI : <https://doi.org/10.1007/s10598-021-09519-w> . Publication en ligne 23 juin 2021. (**Catégorie B, SCOPUS**).
3. Kamel BENYETTOU, Mohammed Amine GHEZZAR and Djillali BOUAGADA, Influence of the discretization step on the positivity of conformable fractional linear systems, Scientific Bulletin Series A- Applied Mathematics and Physics, publication en ligne (13 d Mars 2023), (**Catégorie A, Thomson reuters**) . https://www.scientificbulletin.upb.ro/SeriaA_-_Matematica_si_fizica_aplicate.php?page=revistaonline&a=1&cat=A
4. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, On the positivity of fractional two-dimensional systems using the non conformable derivative, International Journal of Dynamics and Control, Publication en ligne 20 Mars 2023, (**Catégorie B, SCOPUS**). <https://link.springer.com/article/10.1007/s40435-023-01137-1>
5. Aissa Omar Elosmani , Djillali Bouagada , Paul Van Dooren , Kamel Benyettou . LMI stability test for state-space models (2021), Journal of Computational and Applied Mathematics volume 390, july 2021, pp : 113363 , <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113363>. (**Catégorie A, Thomson reuters**).
6. Mohammed Amine GHEZZAR , Djillali BOUAGADA , Kamel BENYETTOU , Mohammed CHADLI , and Paul VAN DOOREN, On the stability of 2D general Roesser Lya-

punov systems, *Mathematica cluj* 63(86), 2020. DOI : 10.24193/mathcluj.2021.1.08.
(Catégorie B, SCOPUS).

Conférences Internationales

1. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "Minimum Energy Control of Singular 2D Continuous-Discrete time Linear Systems by the use of Weierstrass-Kronecker Decomposition", International Workshop on Functional Analysis, Control systems & Decision support, Mostaganem, May, 25-27, 2021.
2. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "On the syability of singular Roesser state space models", International conference on : Recent Developments in Ordinary and Partial Differential Equations, 22-26 May 2022 Bejaia (Algeria).
3. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR. "Influence of Discretization Step Influence of Discretization Step on Positivity of Conformable Fractional Linear Systems", The first edition- International Symposium and International Student workshop on Interdisciplinary Mathematics in the Citi areas, University POLITEHNICA of Bucharest, Center for Research and Training in Innovative Techniques of Applied Mathematics in Engineering "Traian Lalescu" (CiTi), Romanie, 27-28 Juin 2022.
4. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "New Lmi Stability Test For The General Continuous", The first edition of the International Conference on Mathematics Applied in Life Sciences, 23-24 June 2022, Iasi University of Life Sciences, Romania.
5. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR. "Stability Analysis of Singular Two Dimensional Systems", International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems July 29-30, 2022, Tunisia- Morocco.
6. Mohammed Amine GHEZZAR, Amel BERILHA, Kamel BEYETTOU, Djillali BOUAGADA. "On The Positivity of 2D Fractional Linear Roesser Model Using The Conformable Derivative". The first edition- International Symposium and International Student workshop on Interdisciplinary Mathematics in the Citi areas, University POLITEHNICA of Bucharest, Center for Research and Training in Innovative Techniques of Applied Mathematics in Engineering "Traian Lalescu" (CiTi) 27-28 Juin 2022.
7. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "On the Analysis of Minimum Energy Control of Two Dimensional Hybrid Systems", Fourth BYMAT Conference : Bringing Young Mathematicians Together, Universitat de València and Universitat Politècnica de València, Espagne , on the 9th-11th November 2022.

Conférences Nationales

1. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. " Analyse de la Stabilité et Contrôle des Modèles Uni et Multidimensionnels ", Exposé en séminaire de la formation doctorale RO & Aide à la décision, 21 Novembre 2021.
2. Kamel BENYETTOU Participation à la conférence de formation " Comment rédiger un article de catégorie A & B et la thèse de doctorat ", Mostaganem 27 février 2020.
3. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "Minimum Energy Control of Singular Two-dimensional Continuous-Discrete time Linear Systems", First National Conference on Mathematics and its Applications, Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj , 13-14 décembre 2021.
4. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "Analyse de la Stabilité et Contrôle des Modèles Uni et Multidimensionnels", Doctorale des Mathématiques Appliquées, Spécialité : Recherche Opérationnelle, et Aide a la Décision, Université Adelhamid Ibn Badis de Mostaganem 23 Juin 2022.
5. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA and Mohammed Amine GHEZZAR, "New Approach for the Asymptotic Stability of Two Dimensional Models", The Second National Conference on Mathematics and its Applications, September 17-18, 2022 Bordj Bou Arréridj, Algérie.

Congrès-Ateliers et Formations

1. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. IT Webinar Python Programming, The Hope International Company , Série des webinaires sur Python, Jordan, 27 décembre 2021.
2. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, Les commandes MPPT : La commande perturbée et observée pour un générateur photovoltaïque, Série des webinaires sur Matlab, IT Support and Consulting, Maroc 16 janvier 2022.
3. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, Modélisation et simulation d'un système de conversion de l'énergie eolienne, Série des webinaires sur Matlab, IT Support and Consulting, Maroc 23 janvier 2022.
4. Kamel BENYETTOU. MathWorks Webinars, From PID Control to Adaptive Control : Systematically Designing Controllers in Simulink, 17 February 2022.
5. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, IEEE Xplore Webinar : Search Strategies to Personalize your Research Experience, 03 Mars 2022.

6. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, ISE Webinar : Issues to contemplate when considering and conducting research to solve unmet needs in endocrine disorders : From cells to patients and populations, 03 Mars 2022.
7. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : Comment faire pour que mon projet de recherche soit visible à l'international ?, at Afrique du Nord, on Saturday 12 March, 2022.
8. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : Éviter les revues prédatrices. Comment faire ? at Afrique du Nord, on Saturday 19 March, 2022.
9. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, IEEE Xplore Webinar : IEEE Authorship and Open Access Symposium : Tips and Best Practices to Get Published from IEEE, 30 Mars 2022.
10. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. IEEE education Webinar, The Institute of Electrical and Electronics Engineers INC : Why Lifelong Learning is an Essential Part of Your Professional Home, 05 Avril 2022.
11. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. MathWorks Webinars, Introduction to MATLAB, 19 avril 2022.
12. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : Explorez la base de données Scopus , Afrique du Nord, on Saturday 23 April 2022.
13. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. MathWorks Webinars, Introduction to Simulink for System Modeling and Simulation, 26 avril 2022.
14. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, IEEE Webinar, The Institute of Electrical and Electronics Engineers INC : The Future of Electric Transportation : Targets, Plans and Actions, 16 Mai 2022.
15. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, IEEE Advanced Technology Webinar : IEEE Authorship and Open Access Symposium : Tips and Best Practices to Get Published from IEEE, 19 Mai 2022.
16. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect et Scopus : Comment alterner entre les différentes plateformes pour avancer mon projet de recherche, Afrique du Nord on Wednesday 06 July, 2022.
17. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect et Scopus : Cycle de publication : les différentes étapes d'un projet de recherche, Afrique du Nord on Wednesday 16 July, 2022.

18. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect : gagner du temps avec la recommandation personnalisée sur ScienceDirect (60 min), Afrique du Nord on Saturday 30 July, 2022.
19. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect : Objectifs de développement durable : La recherche liée aux objectifs de développement durable et comment les identifier sur Scopus (60 min), Afrique du Nord on Saturday 06 August, 2022
20. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA, IEEE Webinar, The Institute of Electrical and Electronics Engineers INC : Pathways to Academia : Applying for a First Tenure Track Position? Making Your Case as a Candidate, How to write a good statement on teaching/ research/ diversity , 11 August 2022.
21. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. MathWorks Webinars, Using MATLAB with Python, 26 aout 2022.
22. Kamel BENYETTOU, International Workshop on Recent Trends in Modeling and its Applications-2022 (IWRTMIA 2022), Department of Mathematics, Post Graduate College, Ghazipur, UP 233001, India during September 04-08.
23. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect : Comment collaborer avec des auteurs et comment trouver des moyens de financement , Algérie 01 Octobre , 2022.
24. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : ScienceDirect : Sélection de revues pour publier à l'aide de Scopus/ Sciencedirect, Afrique du Nord on Saturday 08 Ocobre , 2022.
25. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : Évitez le haut degré de similarité et écrire des citations de manière appropriée en utilisant Mendeley (60 Min) , at Algérie on Saturday 22 October, 2022
26. Kamel BENYETTOU, Djillali BOUAGADA. Elseiver Researcher Academy On Campus : Conseils et astuces pour la préparation de votre manuscrit (90min), at Algérie on 01 November, 2022.

Notations

1. \otimes : Le produit de Kronecker
2. \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
3. \mathbb{R}^+ : L'ensemble des nombres réels positifs.
4. \mathbb{N} : L'ensemble des entiers naturels .
5. \mathbb{R}^n : L'ensemble des vecteurs de taille n .
6. $\mathbb{R}^{m \times n}$: L'ensemble des matrices de dimension $m \times n$.
7. I_n : Matrice identité de dimension n .
8. \mathbb{M}_n : L'ensembles des matrices de Metzler de dimension n ..
9. \mathbb{C} : Corps des nombres complexes.
10. \mathbb{C}^- : Corps des nombres complexes à parties réels négatives.
11. B^T : Transposée de la matrice B .
12. B^{-1} : Inverse de la matrice B .
13. B^+ : Inverse généralisé de la matrice B .
14. $\sigma(A)$: Spectre de la matrice A .
15. $\sigma(A, B)$: Spectre de la paire (A, B) .
16. $X(s)$: Transformée de Laplace de la fonction $x(t)$.
17. $X_\alpha(s)$: Transformée de Laplace Conformable pour la fonction $x(t)$.
18. $L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}(X(p, s))$: La transformée de Laplace conformable de la fonction $x(t_1, t_2)$.
19. $\mathcal{S}_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}(p, s)$: Transformée de Sumudu conformable de la fonction $x(t_1, t_2)$.
20. \mathcal{LMJ} : (En anglais) Linear Matrix inequalities.
21. $T_\alpha x(t)$: Dérivée Fractionnaire Conformable de la fonction $x(t)$.
22. $T_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre α par rapport à la variable t_1 de la fonction $x(t_1, t_2)$.
23. $T_{t_2}^\beta x(t_1, t_2)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre β par rapport à la variable t_2 de la fonction $x(t_1, t_2)$.
24. $T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2)$: Dérivée Fractionnaire Conformable d'ordre (α, β) de la fonction $x(t_1, t_2)$.
25. $D_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2)$: Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo d'ordre (α, β) de la fonction $x(t_1, t_2)$.

Table des matières

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Dédicaces | 2 |
| Remerciements | 3 |
| Liste des Publications | 5 |
| Notations | 10 |
| Introduction | 13 |
| 1 Notions de Bases et Préliminaires | 17 |
| 1 Notions sur la théorie des matrices | 17 |
| 2 Aperçu sur les inégalités matricielles linéaires | 21 |
| 3 Notions sur le calcul fractionnaire et application | 23 |
| 4 Applications : Équation de la chaleur fractionnaire | 26 |
| 2 Analyse des modèles linéaires à dérivées non entières uni et multidimensionnels | 29 |
| 1 Notions sur la dérivée conformable | 29 |
| 2 Solvabilité et analyse des systèmes fractionnaires unidimensionnels | 31 |
| 2.1 Systèmes singuliers unidimensionnels | 32 |
| 2.2 Contrôlabilité des systèmes singuliers | 36 |
| 2.3 Contrôle à énergie minimale | 40 |
| 2.4 Fonction de transfert | 44 |
| 3 Exemples | 51 |
| 4 Solvabilité et analyse des systèmes bidimensionnels | 55 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.1 | Les systèmes bidimensionnels à temps continu-discrèt | 56 |
| 4.2 | Solution du modèle de Fornasini-Marchesini de première forme par l'utilisation de la double transformée de Laplace conformable | 58 |
| 4.3 | Solution du modèle de Fornasini-Marchesini de deuxième forme par l'utilisation de la double transformée de Sumudu conformable | 64 |
| 4.4 | Solution des modèles fractionnaires $2D$ singuliers | 72 |
| 3 | Contrôle à énergie minimale, Discrétisation et influence sur la positivité des systèmes fractionnaires | 85 |
| 1 | Positivité des systèmes conformable unidimensionnels | 85 |
| 1.1 | Processus de discrétisation | 86 |
| 1.2 | Influence de la discrétisation sur la positivité | 87 |
| 2 | Solvabilité et positivité des systèmes à temps continue-discrèt | 93 |
| 2.1 | Solvabilité et positivité des systèmes $2D$ | 93 |
| 3 | Énergie minimale | 96 |
| 3.1 | Atteignabilité | 96 |
| 3.2 | Contrôle à énergie minimale | 98 |
| 3.3 | Cas particulier | 100 |
| 4 | Admissibilité et stabilité des systèmes multidimensionnels fractionnaires | 102 |
| 1 | Conditions de stabilité et d'admissibilité | 103 |
| | Conclusion | 121 |
| | Résumé | 122 |
| | Bibliographie | 123 |

Introduction

Ces dernières années, un énorme développement analytique pour les systèmes fractionnaires uni et multidimensionnels a été accordé sous l'influence de la concurrence et des besoins de plus en plus exigent en matière de qualité et performance. Le développement des mathématiques en général a toujours été et continuera d'être nécessaire pour résoudre des problèmes de physique, d'ingénierie, technologique et industriel. Cette thèse est due au développement croissant qu'a connu la recherche fondamentale et approfondie dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique, de la théorie des systèmes multidimensionnels fractionnaires [19, 35, 62]. Cela nous a conduit à mettre en oeuvre des méthodes et approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes.

Un système dynamique fractionnaire décrit par une équation différentielle à dérivée non entière d'ordre fractionnaire est un modèle qui évolue en fonction de la variable d'état et l'ordre de dérivation. Cela peut être un modèle électrique, l'évolution spatio-temporelle des réactions chimiques, le mouvement des planètes dans les systèmes solaires ou encore des modèles de la dynamique de population pour la biologie, problèmes d'automatisation pour l'industrie [34, 35, 38, 40, 42, 45, 46, 63, 64].

Dans ce cadre, plusieurs approches utilisant le calcul fractionnaire moyennant les dérivations au sens de Riemann Liouville, Caputo, ou encore Grunwald-Letnikov ... [8, 19, 42, 45]. Cependant, les dérivés fractionnaires existants ne satisfont pas les propriétés utiles telles que la règle de produit, la règle du quotient, par exemple, la définition de Caputo suppose que la fonction est différentiable afin de pouvoir calculer la dérivée fractionnaire d'une fonction donnée, ce qui est en pratique difficile à trouver dans les modèles obtenus par modélisation. Récemment, une nouvelle définition d'une dérivée fractionnaire appelé "la dérivée fractionnaire conformable" introduite par Khalil et de Abdeljawad [16, 17]. Les auteurs dans [16, 17, 34] ont montré que la dérivée conformable satisfait la règle du produit, du quotient ainsi que les résultats similaires au théorème de Rolle et le théorème de la valeur moyenne dans le calcul classique. Une vue d'ensemble de ces systèmes est donnée dans [16, 17, 19, 34, 40, 42, 43], nos principales références

pour cette théorie.

Au cours des dernières décennies, une attention considérable a été consacrée aux systèmes bidimensionnels et multidimensionnels qui propage l'information en plusieurs directions indépendantes, ces modèles ont attiré de nombreux chercheurs [35, 40, 41, 45, 48, 51, 53].

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires bidimensionnels est un sujet qui est étudié depuis plus de deux décennies. Il s'inscrit dans un vaste champ de recherches qui est l'analyse de la robustesse, et qui englobe plusieurs domaines relatifs aux sciences expérimentales tel le traitement d'images, la biotechnologie, la géophysique ainsi que l'économie et la biologie. Néanmoins, la stabilité trouve ses principales applications dans la théorie de la commande et l'automatique [37, 79]. Ainsi, en automatique, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Des dynamiques sont négligées, comme celles qui se trouvent en dehors de la bande passante du système asservi. Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à une analyse de robustesse ou à une analyse de stabilité des modèles, qui consiste à établir si le système demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont donné un grand intérêt à l'étude de la classe des systèmes multidimensionnels et à l'analyse de leur stabilité. Notons que la classe des systèmes standards est très importante pour bien comprendre le comportement de la trajectoire d'état du modèle considéré, notamment, la stabilité asymptotique et structurelle; contrairement à la classe des modèles singuliers, la détermination et la localisation des valeurs propres est insuffisante pour caractériser la stabilité, d'autres tests et propriétés doivent être cherché et vérifié. Nous signalons que très peu de recherches traitent les problèmes de stabilité asymptotique et d'analyse des systèmes multidimensionnels fractionnaires singuliers. Comme préalable par rapport à l'étude des différentes méthodes d'analyse de la stabilité qui sont développées dans notre thèse, il convient d'explicitier les outils nécessaires à sa réalisation, ainsi, nous consacrerons un volet important à l'exposé de ces derniers. Pour toutes ces raisons, nous nous intéressons dans ce projet de thèse à l'utilisation du formalisme \mathcal{LMJs} (Inégalités Matricielles Linéaires), lesquelles ont été développées, notamment par A. Lyapunov, dans un esprit de recherche de stabilité d'équations différentielles. Puis nous notons que sur la base de décomposition, partitionnement (Schur), et de réduction d'une \mathcal{LMJ} à contraintes multiples en une \mathcal{LMJ} à une seule contrainte, une approche unifiée est présentée pour l'analyse de problèmes de commande, tout en préservant l'esprit d'efficacité et de réalisabilité de la résolution de problèmes. Au cours des dernières années, la recherche s'est concentrée sur la reformulation du \mathcal{LMJ} en un problème d'optimisation convexe, donnant la possibilité d'une résolution numérique, si l'approche analytique n'est pas réalisable.

Nous apportons aussi, les outils nécessaires, pour situer tout l'environnement où peut se

développer le concept des \mathcal{LMJs} , pour se faire nous nous basons sur les références suivantes [38–40, 43, 44, 51, 74, 84, 93].

Nous mentionnons à titre historique que dans les années 1940 - 1950 Lur'e Postnikov a appliqué les méthodes de Lyapunov à certains problèmes pratiques dans l'ingénierie et la théorie de contrôle, en particulier, le problème de la stabilité d'un système de contrôle avec une non linéarité dans l'actionneur. Des critères de stabilité en forme de \mathcal{LMJs} ont été dérivés. Ces inégalités ont été réduites à des inégalités polynomiales qui ont ensuite été résolue à la main pour des systèmes de petites dimensions. Suite à ça, ses travaux ont été publiés dans un livre [76].

Le rôle important des \mathcal{LMJs} dans la théorie du contrôle était déjà reconnu au début des années 60, en particulier par Yakubovich [73–75] en 1962 où il a publié son travail "La solution de certaines inégalités matricielles dans la théorie du contrôle et l'automatique".

Récemment une nouvelle classe de systèmes à deux dynamiques a été introduite par de nombreux chercheurs [8, 18, 45, 88, 92, 93]. On en parle d'une modélisation rigoureuse de processus réels qui conduit souvent à écrire des équations aux dérivées partielles. Lorsque celles-ci sont linéaires, une description par des modèles à plusieurs dynamiques est toujours possible et cela mène à des modèles singuliers. Notons dans ce cadre que la modélisation est à priori continue mais les approximations sont plutôt discrètes. On peut aussi envisager des cas hybrides continus/discrets.

Cette classe de systèmes 2D a été étudié pour la première fois dans les années 1970, afin de traiter certains problèmes importants dans les applications de filtrage de données (dans les articles fondateurs de Fornasini-Marchisini [8, 88]). Leur utilité fut rapidement appréciée, en trouvant rapidement des applications dans le traitement d'images numériques [13, 31, 64, 92], dans la modélisation d'équations différentielles [52, 53] comme l'équation de Darboux utilisée dans la modélisation des gaz, absorption, chauffage par jet d'eau, séchage à l'air, etc. [10, 31, 35, 45, 46]. La littérature sur les systèmes (2-D) et les systèmes multidimensionnels en général est aujourd'hui assez riche. Cependant plusieurs classes de systèmes ont été négligées dans la littérature en raison de leurs difficultés inhérentes, en particulier les systèmes avec contraintes sur les variables, avec des retards, ou avec des non-linéarités. Dans les dernières décennies, un intérêt croissant pour les systèmes bidimensionnels fractionnaires est vite observé, ce sont des sujets à contraintes de positivité sur les variables dynamiques. Ces systèmes positifs doivent avoir pour des conditions initiales non négatives, des variables d'états non négatifs. Ils ont été étudiés par plusieurs auteurs [8, 19, 51, 93].

Notre travail est structuré comme suit : Dans le premier chapitre, la première partie consiste à rappeler les notions de bases d'algèbre linéaire et matricielle, tel que : le produit de Kronecker et ses propriétés, les matrices positives, matrices de Metzler, l'inverse généralisé, la décomposition en valeur singulière ainsi que la décomposition de Weierstrass et les inégalités

matricielle linéaires, ensuite dans la deuxième partie nous rappelons la notion de dérivation fractionnaire au sens de Caputo à partir des références suivantes [8, 18, 34, 40, 45, 47, 51, 60, 61]. Dans le deuxième chapitre nous exposons quelques notions et définitions de la dérivée fractionnaire conforme avec toutes ses propriétés et applications, puis nous étudions en deuxième section le problème de solvabilité d'un système à temps continu fractionnaire linéaire singulier conforme en utilisant la décomposition de Weierstrass et l'inverse généralisé, nous avons établies par la suite de nouveaux critères de contrôlabilité par l'utilisation de la matrice Grammienne dans le cas d'une dérivée fractionnaire conforme pour résoudre le problème de l'énergie minimale, cette partie est achevée par la formulation d'un problème de représentation d'état et la formule de fonction de transfert donnée pour le cas d'un système standard. Dans la quatrième section, la première partie traite le problème de solvabilité des systèmes bidimensionnels à temps continu-discret (hybrides), dans la deuxième et la troisième partie nous abordons la solution d'un système fractionnaire de Fornasini-Marchesini par la double transformée de Laplace et de Sumudu tout en se basant sur les références [8, 9, 15–17, 34]. Dans la dernière partie de cette section, nous avons généralisée les résultats obtenus par D. Bouagada et P. Van Dooren [42] où nous avons étendu les résultats de la Delta-Kronecker et des matrices de transition pour pouvoir résoudre un nouveau système fractionnaire singulier (au sens de Caputo) pour le cas bidimensionnel.

Le troisième chapitre est divisé en trois parties. La première comporte une partie qui analyse l'impact de la discrétisation sur la positivité des systèmes $1D$ fractionnaires conformes en proposant de nouveaux critères pour la préservation de la positivité. Dans la deuxième section nous introduisons une classe générale de systèmes hybrides bidimensionnels fractionnaires conformes (continu-discret), ensuite nous proposons la solution avec les conditions nécessaires et suffisantes de la positivité pour ce type de modèles pour pouvoir traiter le problème d'énergie minimale.

Le quatrième chapitre sera donc consacré à l'étude d'une nouvelle classe des systèmes de Roesser fractionnaires singuliers multidimensionnels dD où $d \geq 2$, nous développons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité et d'admissibilité pour cette classe de systèmes par l'approche basée sur le produit de Kronecker et les \mathcal{LMJs} .

Notions de Bases et Préliminaires

Nous présentons dans ce premier chapitre un aperçu des notions de base de l'algèbre linéaire et de la théorie des matrices positives, de Metzler, la notion d'inverse généralisé, le Produit de Kronecker, ainsi que les inégalités matricielles linéaires tout en se basant sur les références [18, 34, 40, 41, 43, 50, 60, 76]. Nous exposerons également des concepts et des outils importants tels que la théorie des équations différentielles ordinaires et fractionnaires et la théorie du contrôle [8, 17, 19, 30, 31, 45, 46, 54].

1 Notions sur la théorie des matrices

Nous présentons les définitions de quelques types de matrices particulières.

Définition 1.1. [34] Une matrice $A = [a_{ij}]$ de Metzler est une matrice dans laquelle toutes les composantes hors diagonale sont positives. Autrement dit : $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Définition 1.2. [51] On dit que A est une matrice non-négative si $\forall i = \overline{1, n} \forall j = \overline{1, m} : a_{ij} \geq 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Définition 1.3. [51] On dit que A est une matrice positive si A est non-négative et $\exists k = \overline{1, n}$, $\exists l = \overline{1, m} : a_{kl} > 0$, i.e.. toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$.

Définition 1.4. [18]

1. Un vecteur est dit monomial si l'une de ses composantes est positive et les autres nulles.
2. Une matrice monomiale est une matrice $n \times n$ dont les colonnes sont monomiales et linéairement indépendants.

Théorème 1.1. [18] *Théorème de Weierstrass : Cas d'un faisceau régulier*

Tout faisceau régulier $A + \lambda B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente)

$$\begin{bmatrix} J + \lambda I & & & \\ & N^{\mu_1} & & \\ & & N^{\mu_2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J + \lambda I$ est déterminée par les diviseurs élémentaires finis d'une façon unique et les 's' derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis μ_1, \dots, μ_s avec :

$$\begin{aligned} N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} + H^{\mu_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \\ & & \dots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 1 & \\ & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On appelle diviseur élémentaire toute puissance q d'un nombre premier intervenant dans la décomposition d'un invariant d de G en produit de facteurs premiers. La théorie des diviseurs élémentaires est due entièrement à M. Weierstrass [18, 54, 96]. Nous utilisons cette notion pour décomposer un système singulier en deux sous-systèmes équivalents.

Exemple 1.1. Dans ce qui suit nous présentons quelques types de matrices particulières

1. La matrice A suivante est une matrice de Metzler

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

2. La matrice B suivante est une matrice positive

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

3. La matrice C suivante est une matrice monomiale

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Définition 1.5. [4] Soit A une matrice de taille $m \times n$ ie : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Il existe deux matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :

$$\begin{aligned} A &= USV^T \\ S &= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \\ \text{et } UU^T &= U^T U = I \\ VV^T &= V^T V = I \end{aligned}$$

avec $k = \text{rank}(A)$ et les σ_i sont les valeurs singulières de la matrice A telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$.

Où,

1. Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$ ou AA^T .
2. U est la matrice des vecteurs propres de $A^T A$.
3. V est la matrice des vecteurs propres de AA^T .

Théorème 1.2. [43] Soit A une matrice de taille $m \times n$ de rang r ainsi que sa décomposition en valeurs singulières $A = USV^T$. La matrice $A^+ = VS^+U^T$ est appelée la matrice pseudo inverse ou l'inverse généralisée de Moore-Penrose de la matrice A , où S^+ est définie par,

$$S^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k}\right)$$

Avec,

1. $A^+ A = I_k$ (matrice identité de rang r).
2. Si $\text{rg}(A) = n < m$, alors $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

3. Si $\text{rg}(A) = n = m$, $A^t = A^{-1}$.

Proposition 1.1. [44] L'inverse généralisée de Moore-Penrose d'une matrice A noté A^+ possède les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} AA^+A &= A \\ A^+AA^+ &= A^+ \\ AA^+ &= (AA^+)^* \\ (A^+A) &= (A^+A)^* \end{aligned}$$

Définition 1.6. [60] Le produit de Kronecker de deux matrices $A \in M_{mn}$ et $B \in M_{pq}$ est la matrice $A \otimes B$ définie par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mn \times pq}$$

Proposition 1.2. [40] Le produit de Kronecker possède les propriétés suivantes : Soient $A \in M_{m_1, n_1}$, $B \in M_{m_2, n_2}$, $C \in M_{c, d}$ et $D \in M_{e, f}$,

1. Le produit de Kronecker est associatif c.à.d ,

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

2. Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition,

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

3. Le produit de Kronecker est distributif par rapport au produit c.à.d,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

4. L'adjoint,

$$(A \otimes B)^* = (A^* \otimes B^*)$$

5. Si A et B sont inversibles alors,

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$$

6. Si $m_1 = n_1$ et $m_2 = n_2$ alors,

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= (\det(A))^{m_1} \cdot (\det(B))^{n_1} \\ &= \det(B \otimes A)\end{aligned}$$

Pour plus de propriétés, nous orientons le lecteur vers les références [4, 47, 51, 60].

Définition 1.7. [51]

1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite définie positive si et seulement toutes ses valeurs propres sont positives, et on note $A \succ 0$.
2. Une matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite définie négative si et seulement toutes ses valeurs propres sont négatives, et on note $B \prec 0$.

2 Aperçu sur les inégalités matricielles linéaires

Le terme inégalités matricielles linéaires (en abréviation \mathcal{LMJs}) est maintenant largement employé dans la théorie de contrôle liée à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, voir [4, 39, 76].

L'étude des \mathcal{LMJs} est apparue autours des années 1890, lorsque Alexadar Lyapunov a publié son ouvrage au début de ses travaux et propose une méthode analytique pour analyser quelques propriétés du mouvement et la trajectoire d'état d'une certaine classe de système dynamique [76]. Il a dans ce cadre montré que l'équation différentielle

$$x' = Ax(t) \tag{1.4}$$

est stable, si et seulement s'il existe une matrice P définie positive telle que

$$A^T P + P A \prec 0 \tag{1.5}$$

La nécessité de $P \succ 0$, telle que $A^T P + P A \prec 0$ est solvable mène à la dite inégalité matricielle de Lyapunov. Lyapunov a également montré que cette première \mathcal{LMJ} pouvait être explicitement résolu.

Actuellement les \mathcal{LMJs} jouent un rôle très intéressant dans les méthodes numériques et analytiques modernes pour analyser la stabilité des systèmes linéaires. En automatique, par exemple, de nombreux résultats trouvent leurs formulations en termes de \mathcal{LMJ} , ce formalisme nous a donc permis de résoudre plusieurs problèmes qui n'avaient pas encore trouvé de solution pour la contrôlabilité et la stabilité des systèmes dynamiques [40, 48, 51, 75, 76]. Cependant, nous rappelons quelques définitions et notions de bases sur les \mathcal{LMJs} .

Définition 2.1. [51] Une inégalité matricielle linéaire notée \mathcal{LMJ} est une expression (ou une forme affine) sous forme d'une somme de matrices réelles, carrées et symétriques : $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$ et $x \in \mathbb{R}^m$ telles que

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (1.6)$$

L'inégalité (1.6) désigne que : $F(x)$ est une matrice définie positive,

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \text{ et } z \neq 0 : z^T F(x) z \succ 0$$

D'une manière équivalente, la valeur propre la plus petite de $F(x)$ est positive. Les matrices symétriques F_i sont fixées (connues) et $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ est un vecteur de valeurs inconnues (variables de décisions).

Exemple 2.1. L'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} x_1 - 4 & x_1 + x_2 & -2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 5 & 0 \\ -2 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (1.7)$$

est une \mathcal{LMJ} à deux variables x_1, x_2 . On peut reformuler cette \mathcal{LMJ} de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (1.8)$$

L'inégalité (1.6) est une contrainte convexe en x , ie : l'ensemble $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ est convexe. cette \mathcal{LMJ} peut sembler avoir une forme affine particulière.

Définition 2.2. [51] Un ensemble Ψ est dit convexe si et seulement si pour toutes paire $(x_1, x_2) \in \Psi$ et $0 < \alpha < 1$ alors,

$$(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \in \Psi \quad (1.9)$$

Définition 2.3. [40] Soit g est une fonction telle que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction g est dite convexe si et seulement si pour toute paire $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ et $0 < \alpha < 1$ on a ,

$$g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (1 - \alpha)g(x_2) \quad (1.10)$$

autrement dit, Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au dessous de ces cordes.

3 Notions sur le calcul fractionnaire et application

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie les différentes possibilités de définir des puissances de nombres réels ou complexes de l'opérateur de différenciation D^α ou T^α d'ordre α , et de l'opérateur d'intégration I^α , J^α et de développer un calcul qui généralise l'opérateur classique.

Des exemples réels en pratique illustrent l'applicabilité d'une dérivée fractionnaire, dans la littérature comme [70] les auteurs décrivent le comportement statique des systèmes complexes et montrent comment le calcul fractionnaire peut être utilisé pour modéliser ce comportement en démontrant le lien profond entre les dérivées fractionnaires et la géométrie fractale. Il est à noter que dans la modélisation de systèmes thermodynamiques chaotiques, il est nécessaire d'utiliser des opérateurs fractals car la séparation des échelles de temps de la physique classique n'est plus valide.

Définition 3.1. [45] La fonction définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(x) \geq 0 \quad (1.11)$$

est appelée la fonction gamma, elle vérifie la propriété : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Définition 3.2. [19] Une fonction de la variable complexe z définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (1.12)$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

Une extension de la fonction Mittag-Leffler à un paramètre est la fonction à deux paramètres.

Définition 3.3. [19] Une fonction de la variable complexe z définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad (1.13)$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Définition 3.4. [51] Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors l'intégrale $I^\alpha f(x)$ défini par :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.14)$$

est appelée intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α .

Définition 3.5. [8] La dérivation au sens de Caputo

Soit f une fonction de classe $C^n [a; b]$, $n - 1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

La dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Définition 3.6. [45] La transformée de Laplace d'une fonction f d'une variable réelle $t \geq 0$, est la fonction F de la variable complexe s ($\Re(s) > 0$) telle que,

$$L(f(t)) := F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.15)$$

Définition 3.7. [19] La fonction à temps continu définie par

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

est appelée la convolution des fonctions en temps continus de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

Théorème 3.1. [45] Le théorème de convolution

Si

$$F_1(s) = L[f_1(t)], \quad F_2(s) = L[f_2(t)] \quad (1.17)$$

Alors,

$$L \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) \quad (1.18)$$

Théorème 3.2. [42] La transformée de Laplace de la dérivée de f au sens de Caputo est :

$$\begin{aligned} L(D^\alpha f(t)) &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^n s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

Théorème 3.3. [42] La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre α fractionnaire a la forme

$$\mathcal{L} [I^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad (1.19)$$

Proposition 3.1. [19] La transformée de Laplace inverse de l'expression $s^\alpha F(s)$ pour $\alpha > 0$ est définie par,

$$L^{-1} [s^\alpha F(s)] = D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.20)$$

Théorème 3.4. [19] Soit le système fractionnaire linéaire en temps continu décrit par les équations,

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont des vecteurs d'états, d'entrées et de sorties respectivement, et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

La solution du système fractionnaire d'ordre $\alpha : 0 < \alpha \leq 1$ (1.21) est de la forme,

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.22)$$

Où,

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \end{aligned} \quad (1.23)$$

et $E_\alpha(At^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler, $\Gamma(x)$ est la fonction gamma.

Pour le cas particulier $\alpha = 1$ on obtient,

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{\Gamma[(k+1)]} = e^{At} \quad (1.24)$$

Exemple 3.1. Pour trouver la solution de l'équation (1.21) avec $0 < \alpha \leq 1$ et les matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1 \quad (1.25)$$

Par utilisation des formules (1.22) et (1.23) on trouve

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = I_2 + \frac{At^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} = I_2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + A \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \frac{Ax_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \int_0^t \left[\frac{B}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1} + \frac{AB}{\Gamma(2\alpha)} (t - \tau)^{2\alpha-1} \right] d\tau \\
 &= x_0 + \frac{Ax_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{ABt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

La représentation graphique de la trajectoire d'état $x(t)$ pour $\alpha = 0.7$ est

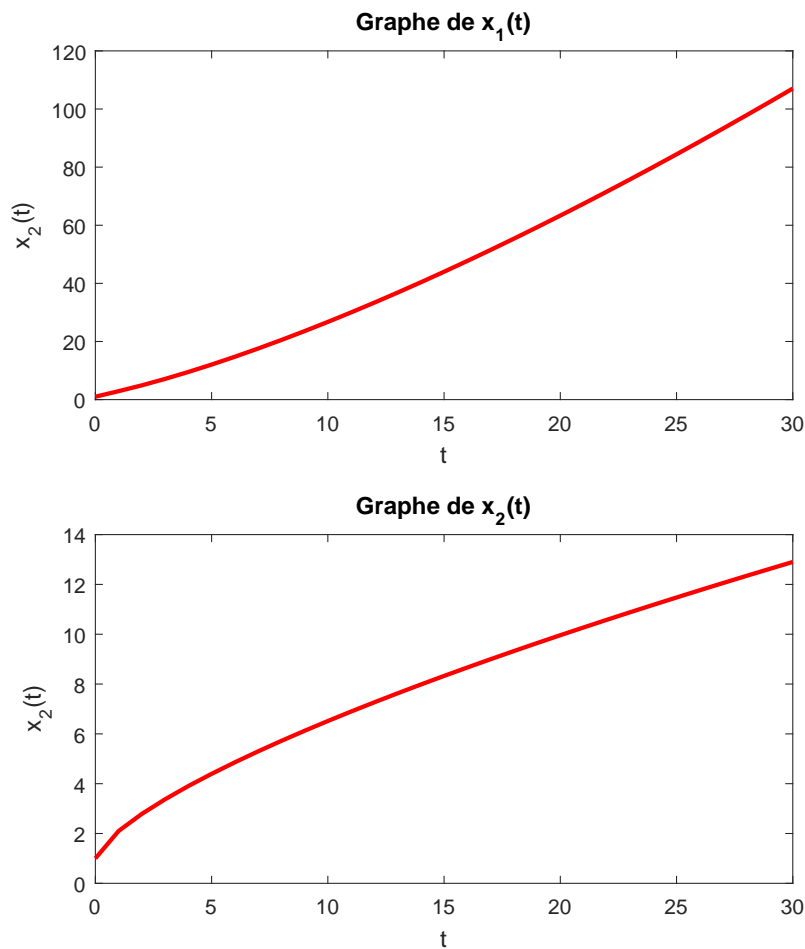


FIGURE 1.1 – La trajectoire d'état des variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$

4 Applications : Équation de la chaleur fractionnaire

Dans le domaine des mathématiques et physique appliquée, l'équation de la chaleur est une équation parabolique (aux dérivées partielles), elle est utilisée pour décrire la conduction

thermique qui représente le déplacement de l'énergie interne des parties chaudes d'un système vers les parties froides. Cette équation est introduite pour la première fois en 1807 par Joseph Fourier [78] après plusieurs expériences faites sur la propagation de la chaleur, suivies par la lois de modélisation pour proposer un modèle mathématique qui représente l'évolution de la température en utilisant la transformation de Fourier.

La propagation ou le déplacement de l'énergie se transfère par un mécanisme brownien de photons et de porteurs de charges électriques (électrons ou trous). Une application de cette équation apparaît très souvent en physique sous le nom d'équation de diffusion, transfert par rayonnement, l'équation de Schrödinger et à l'équation de Burgers [79, 80].

Application 4.1. Dans cet exemple on considère le modèle fractionnaire de l'équation de la chaleur unidimensionnel qui peut représenter le comportement (déplacement) de la chaleur dans une barre métallique, ce phénomène physique peut se modéliser par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (1.28)$$

où $\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = D_t^\alpha v(x, t)$ est la dérivée partielle fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $v(x, t)$ par rapport à la variable t d'ordre α de la source $v(x, t)$, avec la condition initiale $v(x, 0) = x^2$.

La solution de l'équation (1.28) est donnée dans la littérature [78] par,

$$v(x, t) = x^2 \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \dots \right) \quad (1.29)$$

pour le cas particulier où $\alpha = 1$, la solution est : $v(x, t) = x^2 e^t$.

La figure 1.2 montre le comportement de la solution proposée $v(x, t)$ pour différentes valeurs de $\alpha = 1, \alpha = 0.8, \alpha = 0.7, \alpha = 0.5$ et $0 < t \leq 1$ et $0 < x \leq 2$:

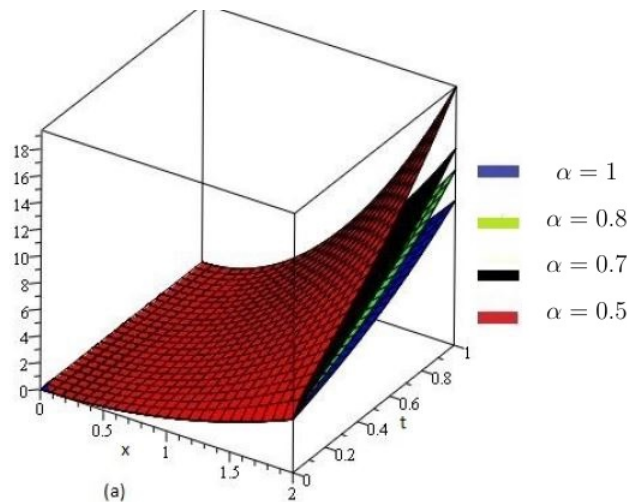


FIGURE 1.2 – La solution de l'équation de la chaleur (1.28)

Application 4.2. Dans cet exemple, on considère le modèle fractionnaire de l'équation de la chaleur bidimensionnel qui représente physiquement la diffusion de particules et le champ électromagnétique dans un conducteur qu'on modélise par l'équation suivante,

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.30)$$

où $\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = D_t^\alpha v(x, y, t)$ est la dérivée partielle fractionnaire au sens de Caputo par rapport à la variable t d'ordre α de la source $v(x, y, t)$, avec la condition initiale $v(x, y, 0) = y^2$.

La solution de l'équation (1.30) est donnée dans la littérature [78] par

$$v(x, y, t) = x^2 \sinh t + y^2 \cosh t \quad (1.31)$$

La figure 1.3 montre le comportement de la solution proposée $v(x, y, t)$ pour différentes valeurs de $\alpha = 1, \alpha = 0.8, \alpha = 0.7, \alpha = 0.5$ et $0 < x \leq 1$ et $0 < y \leq 1$ avec $t = 1$:

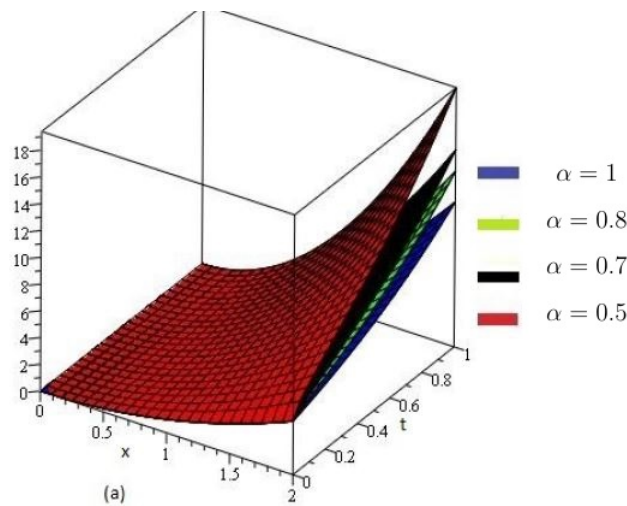


FIGURE 1.3 – La solution de l'équation de la chaleur (1.30)

Analyse des modèles linéaires à dérivées non entières uni et multidimensionnels

1 Notions sur la dérivée conformable

En mathématiques, plusieurs types de dérivées fractionnaires sont introduites dans la littérature comme celle de : Caputo, Riemann-Liouville , Hadamard \dots . Pour surmonter certaines difficultés trouvées, Khalil et al. [16] ont proposé une nouvelle définition intéressante dite dérivée conformable qui étend la définition limite de la dérivée d'une fonction donnée. Suite à cette définition, la dérivée fractionnaire conformable présente deux avantages par rapport aux dérivées fractionnaires classiques. Premièrement, cette nouvelle définition est naturelle et satisfait la plupart des propriétés de la dérivée intégrale classique, telles que la linéarité, la règle du produit, la règle du quotient, la règle de la puissance, théorème de dérivation des fonctions composées, dérivées nulles pour les fonctions constantes, théorème de Rolle et valeur moyenne. Deuxièmement, la dérivée conformable nous apporte beaucoup de facilité lorsqu'elle est appliquée à la modélisation de nombreux problèmes physiques, car les équations différentielles à ce stade sont plus faciles à résoudre analytiquement et numériquement que dans le cas de la dérivée fractionnaire associée par exemple aux dérivées de Riemann-Liouville ou Caputo [9, 14–17, 20, 34].

Définition 1.1. [16] Soit $x(\cdot)$ une fonction telle que $x : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, alors la dérivée fractionnaire conformable d'ordre α où $n - 1 < \alpha \leq n$, est définie pour ($t > 0$), par

$$T_{\alpha}^{t_0} x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon(t - t_0)^{n-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DES MODÈLES LINÉAIRES À DÉRIVÉES NON
ENTIÈRES UNI ET MULTIDIMENSIONNELS

1. NOTIONS SUR LA DÉRIVÉE CONFORMABLE

Remarque 1.1. 1) Si $t_0 = 0$, alors

$$T_\alpha x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{n-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

2) Si $t_0 = 0$ $n = 1$ donc $0 < \alpha \leq 1$ alors

$$T_\alpha x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

3) Si (2.1) existe on dit que x est α -différentiable.

Proposition 1.1. [17] Si x est α -différentiable et $0 < \alpha \leq 1$ alors,

$$T_\alpha^{t_0} x(t) = (t - t_0)^{1-\alpha} \frac{dx}{dt} \quad (2.4)$$

$$T_\alpha^{t_0} x(t) = (t - t_0)^{1-\alpha} x'(t) \quad (2.5)$$

Démonstration. Par définition on a ,

$$\begin{aligned} T_\alpha^{t_0} x(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon(t - t_0)^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \\ T_\alpha^{t_0} x(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon(t - t_0)^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \cdot \frac{(t - t_0)^{1-\alpha}}{(t - t_0)^{1-\alpha}} \\ T_\alpha^{t_0} x(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon(t - t_0)^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon(t - t_0)^{1-\alpha}} \cdot (t - t_0)^{1-\alpha} \\ (\text{posons } h &= \varepsilon(t - t_0)^{1-\alpha} \text{ donc si } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ et alors } h \rightarrow 0) \\ T_\alpha^{t_0} x(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t + h) - x(t)}{h} \cdot (t - t_0)^{1-\alpha} \\ T_\alpha^{t_0} x(t) &= (t - t_0)^{1-\alpha} x'(t) \end{aligned}$$

□

Théorème 1.1. [16] Si les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont α -différentiables avec $0 < \alpha \leq 1$, alors

$$T^\alpha[ax(t) + by(t)] = aT^\alpha x(t) + bT^\alpha y(t) , \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

$$T^\alpha[x(t)y(t)] = x(t)T^\alpha y(t) + y(t)T^\alpha x(t) \quad (2.7)$$

$$T^\alpha \left[\frac{x(t)}{y(t)} \right] = \frac{T^\alpha[x(t)]y(t) - T^\alpha[y(t)]x(t)}{[y(t)]^2} \quad (2.8)$$

$$T^\alpha[t^q] = qt^{q-\alpha} \quad (2.9)$$

$$T^\alpha[e^{qt}] = qt^{1-\alpha} e^{qt} \quad (2.10)$$

Définition 1.2. [13] L'intégrale fractionnaire conformable (à gauche) de la fonction $f \in$

$L^1[a, b]$ d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ est définie par,

$$I_a^\alpha x(t) = \int_a^x f(u) d_a^\alpha u = \int_a^x (u - a)^{\alpha-1} f(u) du \quad (2.11)$$

et l'intégrale fractionnaire conformable (à droite) de la fonction $f \in L^1[a, b]$ d'ordre α tel que $0 < \alpha \leq 1$ est définie par,

$${}_b I^\alpha x(t) = \int_x^b f(u) {}_b d^\alpha u = \int_x^b (b - u)^{\alpha-1} f(u) du \quad (2.12)$$

Théorème 1.2. [17] (Intégration par partie) : Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telle que fg est différentiable. alors,

$$\int_a^x f(x) T_a^\alpha [g(x)] d_a^\alpha x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) T_a^\alpha [f(x)] d_a^\alpha x \quad (2.13)$$

et

$$\int_a^x f(x) T_b^\alpha [g(x)] {}_b d^\alpha x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) T_b^\alpha [f(x)] {}_b d^\alpha x \quad (2.14)$$

2 Solvabilité et analyse des systèmes fractionnaires unidimensionnels

Avant d'analyser ce type de systèmes, nous présentons quelques définitions et théorèmes qui nous aiderons par la suite dans la recherche des solutions.

Définition 2.1. [17] Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, la transformée de Laplace fractionnaire conformable d'ordre α est définie par,

$$L_\alpha^{t_0}[f(t)](s) = F_\alpha^{t_0}(s) \quad (2.15)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t) d_\alpha^{t_0} t \quad (2.16)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t) (t - t_0)^{\alpha-1} dt \quad (2.17)$$

Théorème 2.1. Soient $a \in \mathbb{R}$, ($0 < \alpha \leq 1$) et $f : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable alors,

$$L_\alpha^{t_0}[T^\alpha f(t)](s) = s F_\alpha(s) - f(t_0) \quad (2.18)$$

Démonstration. Par définition on a,

$$L_{\alpha}^{t_0}[T^{\alpha} f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} T^{\alpha} f(t) d_{\alpha}^{t_0} t \quad (2.19)$$

par une simple intégration par partie (conformable) on trouve,

$$L_{\alpha}^{t_0}[T^{\alpha} f(t)](s) = \left[e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} f(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} T^{\alpha} (e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}) f(t) d_{\alpha}^{t_0} t \quad (2.20)$$

$$L_{\alpha}^{t_0}[T^{\alpha} f(t)](s) = -f(t_0) + s \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} f(t) d_{\alpha}^{t_0} t \quad (2.21)$$

$$L_{\alpha}^{t_0}[T^{\alpha} f(t)](s) = -f(t_0) + sF_{\alpha}(s). \quad (2.22)$$

□

2.1 Systèmes singuliers unidimensionnels

Considérons le système fractionnaire conformable suivant,

$$ET^{\alpha} X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.23)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur qui représente le contrôle (ou la commande) du système, A, B et E sont des matrices réelles de dimensions appropriées, et $0 < \alpha \leq 1$.

Définition 2.2. 1. On dit que le système décrit par l'équation (2.23) est singulier si $\det E = 0$.

2. La matrice $Es - A$ est appelée le faisceau associé au système (2.23), avec $s \in \mathbb{C}$.

3. Le faisceau $Es - A$ est dit régulier si et seulement si $(\det (Es - A)) \neq 0$ pour certaines valeurs de $s \in \mathbb{C}$.

Si le faisceau est régulier, alors il existe deux matrices $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singulières telle que (2.23) peut être décomposée en deux sous systèmes,

1. Un sous système lent

$$T^{\alpha} X_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t) \quad (2.24)$$

2. Un sous système rapide,

$$NT^{\alpha} X_2(t) = X_2(t) + B_2 U_2(t) \quad (2.25)$$

où

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = Q^{-1}X, \quad X_1 \in R^{n_1}, X_2 \in R^{n_2}$$

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad N \in R^{n_1}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix} \in R^{n_1}$$

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R^{n_2}$$

telle que N est une matrice nilpotente d'indice μ et $n_1 = \deg(\det(Es - A)) + 1$, $n_1 + n_2 = n$,
 $\mu = rg(E) - \deg(\det(Es - A))$.

L'étude du système (2.24) :

$$T^\alpha X_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t)$$

On cherche la solution de ce système en utilisant la transformée de Laplace fractionnaire
conformable sur l'intervalle $[a, b]$. donc,

$$\begin{aligned} L_\alpha^a [T^\alpha X_1(t)] &= L_\alpha^a [A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t)] \\ sX_{1\alpha}(s) - X_1(a) &= A_1 L_\alpha^a X_1(t) + B_1 L_\alpha^a U_1(t) \\ sX_{1\alpha}(s) - X_1(a) &= A_1 X_{1\alpha}(s) + B_1 U_{1\alpha}(s) \\ sX_{1\alpha}(s) - A_1 X_{1\alpha}(s) &= X_1(a) + B_1 U_{1\alpha}(s) \\ (sI - A_1)X_{1\alpha}(s) &= X_1(a) + B_1 U_{1\alpha}(s) \\ X_{1\alpha}(s) &= (sI - A_1)^{-1}(X_1(a) + B_1 U_{1\alpha}(s)) \end{aligned}$$

Sachant que,

$$(sI - A_1)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i}$$

donc,

$$\begin{aligned} X_{1\alpha}(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i} (X_1(a) + B_1 U_{1\alpha}(s)) \\ X_{1\alpha}(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i} X_1(a) + \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i} B_1 U_{1\alpha}(s) \end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse (fractionnaire conformable) de Laplace,

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^{-1}(X_{1\alpha}(s)) &= L_{\alpha}^{-1}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i} X_1(a) + \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i s^{-1-i} B_1 U_{1\alpha}(s)\right) \\ X_{1\alpha}(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_{\alpha}^{-1}[s^{-1-i}] X_1(a) + \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_{\alpha}^{-1}[s^{-1-i} B_1 U_{1\alpha}(s)] \end{aligned}$$

pour le premier terme de cette somme on a,

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^{-1}[s^{-1-i}] &= \frac{(t-a)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} \\ &= \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\alpha^i} \\ &= \frac{((t-a)/\alpha)^i}{i!} \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_{\alpha}^{-1}[s^{-1-i}] X_1(a) &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i \frac{((t-a)/\alpha)^i}{i!} X_1(a) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(A_1((t-a)/\alpha))^i}{i!} X_1(a) \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha}(t-a)} X_1(a) \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_{\alpha}^{-1}[s^{-1-i} B_1 U_{1\alpha}(s)]$$

On définit d'abord le produit de convolution pour la transformée de Laplace fractionnaire conformable de f et g pour $t \in [a, +\infty[$ par,

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^a(f * g) &= \int_a^t f(t^{\alpha} - s^{\alpha}) g(s) d_{\alpha}^a s \\ &= \int_a^t f(t^{\alpha} - s^{\alpha}) g(s) (s-a)^{1-\alpha} ds \\ &= F_{\alpha}(s) \cdot G_{\alpha}(s) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_\alpha^{-1}[s^{-1-i} B_1 U_{1\alpha}(s)] &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i L_\alpha[s^{-1-i}] * L_\alpha[B_1 U_{1\alpha}(s)] \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i \left(\frac{(t-a)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} * B_1 U_{1\alpha}(t) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} A_1^i \int_a^t \frac{(t-a)^{i\alpha} - (\tau-a)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} B_1 U_{1\alpha}(\tau) d_\alpha^a \tau \\
 &= \int_a^t \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A_1^i ((t-a)^{i\alpha} - (\tau-a)^{i\alpha})}{i! \alpha^i} B_1 U_{1\alpha}(\tau) (\tau-a)^{1-\alpha} d\tau \\
 &= \int_a^t e^{\frac{A_1}{\alpha} [(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_{1\alpha}(\tau) (\tau-a)^{1-\alpha} d\tau
 \end{aligned}$$

En conséquence, la solution du système (2.24) est donnée par,

$$X_1(t) = e^{\frac{A_1}{\alpha} (t-a)^\alpha} X_1(a) + \int_a^t e^{\frac{A_1}{\alpha} [(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_{1\alpha}(\tau) (\tau-a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.26)$$

L'étude du système (2.25) :

Pour pouvoir étudier et résoudre ce système, on utilise les définitions 1.5, 1.1 et le théorème 1.2 en insistant sur la notion de l'inverse généralisé de Moore Penrose à gauche pour la matrice N définie dans le système (2.25),

$$N^+ N T^\alpha X_2(t) = N^+ (X_2(t) + B_2 U_2(t)) \quad (2.27)$$

$$T^\alpha X_2(t) = N^+ X_2(t) + N^+ B_2 U_2(t) \quad (2.28)$$

Si on applique la solution du système (2.24) on aura,

$$X_2(t) = e^{\frac{N^+}{\alpha} (t-a)^\alpha} X_2(a) + \int_a^t e^{\frac{N^+}{\alpha} [(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \tilde{B}_2 U_2(\tau) (\tau-a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.29)$$

avec

$$\tilde{B}_2 = N^+ B_2$$

Finalement la solution générale du système (2.23) est donnée par,

$$X = Q \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X(t) = & Q \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \left(e^{\frac{A_1}{\alpha}(t-a)^\alpha} X_1(a) + \int_a^t e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_1(\tau) (\tau-a)^{\alpha-1} d\tau \right) \\
 & + Q \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix} \left(e^{\frac{N^+}{\alpha}(t-a)^\alpha} X_2(a) + \int_a^t e^{\frac{N^+}{\alpha}[(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \tilde{B}_2 U_2(\tau) (\tau-a)^{\alpha-1} d\tau \right)
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.2 Contrôlabilité des systèmes singuliers

Dans cette section notre étude portera sur l'analyse et de la contrôlabilité des systèmes de la forme,

$$ET^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.31)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ et E est une matrice non généralement inversible.

Nous donnerons la définition d'un système contrôlable pour ensuite établir quelques lemmes, théorèmes et caractérisations.

Problème posé,

Étant donnée deux états $X(t_0)$ et $X(t_f)$, la question est la suivante : Peut-on trouver un moyen ou une commande qui peut transférer l'état du système de l'état initiale $X(t_0)$ vers l'état finale $X(t_f)$?

Définition 2.3. *Le système (2.31) est dit contrôlable si et seulement si : $\forall X_0, \forall X_f, \forall T > 0$ fini $\exists u(\cdot) : [t_0; T] \rightarrow R^n / X(T, X_0, u) = X_f$.*

On suppose que le faisceau est régulier, la décomposition de Weierstrass mène aux deux sous systèmes suivants,

1. Un sous système lent,

$$T^\alpha X_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t) \quad (2.32)$$

2. Un sous système rapide,

$$NT^\alpha X_2(t) = X_2(t) + B_2 U_2(t) \quad (2.33)$$

Remarque 2.1. *L'étude du système (2.31) sera équivalente à l'étude des sous systèmes (2.32) et (2.33).*

Définition 2.4. *Sous-espace de contrôlabilité du sous systèmes (2.32) :*

On définit le sous espace vectoriel , noté L_{1c}^α qui contient toutes les états contrôlables, comme suit :

$$L_{1c}^\alpha = \left\{ X / X(t) = \int_{t_0}^t e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t-t_0)^\alpha - (\tau-t_0)^\alpha]} B U_1(\tau) (\tau - t_0)^{\alpha-1} d\tau \quad U_1(t) : [t_0 : t] \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \right\} \quad (2.34)$$

L_{1c}^α est dit sous-espace de cotrôlabilité.

Définition 2.5. Sous-espace de cotrôlabilité du (2.33) :

On définit le sous espace vectoriel , noté L_{2c}^α qui contient toutes les états contrôlables, comme suit :

$$L_{2c}^\alpha = \left\{ X / X(t) = \int_{t_0}^t e^{\frac{N^+}{\alpha}[(t-t_0)^\alpha - (\tau-t_0)^\alpha]} \tilde{B}_2 U_2(\tau) (\tau - t_0)^{\alpha-1} d\tau \quad U_2(t) : [t_0 : t] \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} \right\} \quad (2.35)$$

L_{2c}^α est dit sous-espace de cotrôlabilité.

Proposition 2.1. Le sous système (2.32) est dit complètement contrôlable si et seulement si $L_{1c}^\alpha = \mathbb{R}^{n_1}$.

Proposition 2.2. Le sous système (2.33) est dit complètement contrôlable si et seulement si $L_{2c}^\alpha = \mathbb{R}^{n_2}$.

Dans ce qui suit nous caractériserons les conditions de contrôle des sous systèmes (2.32) et (2.33) en utilisant " la matrice gramienne de cotrôlabilité " .

Définition 2.6. On définit la matrice gramienne de cotrôlabilité ou de commandabilité du sous système (2.32) par,

$$W_{1\alpha} = \int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t-\tau)^\alpha} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t-\tau)^\alpha} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \quad (2.36)$$

Définition 2.7. On définit la matrice gramienne de cotrôlabilité ou de commandabilité du (2.33) par,

$$W_{2\alpha} = \int_0^t e^{\frac{N^+}{\alpha}(t-\tau)^\alpha} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2^T e^{\frac{N^{+T}}{\alpha}(t-\tau)^\alpha} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \quad (2.37)$$

Lemme 2.1. $W_{1\alpha}$ et $W_{2\alpha}$ sont des matrices symétriques définies positives.

Théorème 2.2. Le système (2.32) est contrôlable si et seulement si $W_{1\alpha}$ est inversible.

Démonstration. Tout d'abord on considère le contrôle $U_{1\alpha}(t)$ qui transfère $X_{1,0}$ vers X_{1f} comme suit,

$$U_{1\alpha}(t) = B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t-\tau)^\alpha} \tau^{\alpha-1} W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \quad (2.38)$$

En remplaçant (2.38) dans la solution du système (2.32) on trouve alors,

$$\begin{aligned}
 X_{1f} &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + \\
 &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] \tau^{\alpha-1} d\tau \\
 &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + \\
 &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] d\tau \\
 &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + \\
 &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] d\tau \\
 &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + \\
 &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] d\tau \\
 &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + W_{1\alpha} W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] \\
 &= e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} + \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha}t^\alpha} X_{1.0} \right] \\
 &= X_{1f}
 \end{aligned}$$

d'où le système (2.32) est contrôlable.

Inversement, On suppose que (2.32) est contrôlable et montrons que $W_{1\alpha}$ est inversible.

Pour cela on démontre que $W_{1\alpha}$ est symétrique définie positive.

$$\begin{aligned}
 W_{1\alpha}^T &= \left(\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \right)^T \\
 &= \int_0^t \left(e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \right)^T \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \\
 &= \int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \\
 &= W_{1\alpha}
 \end{aligned}$$

donc $W_{1\alpha}$ est symétrique.

$W_{1\alpha}$ est définie positive?

On suppose qu'il existe $y \neq 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
 \langle y, W_{1\alpha} y \rangle &= \int_0^t y e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} B_1 B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} y d\tau \\
 \langle y, W_{1\alpha} y \rangle &= \int_0^t \| y B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha-\tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} \|^2 d\tau \\
 \langle y, W_{1\alpha} y \rangle &\geq 0
 \end{aligned}$$

Ici nous avons démontré que $W_{1\alpha}$ est semi-définie positive, il nous reste à prouver qu'il est

non nul.

Par l'absurde : Si $W_{1\alpha}$ n'est pas définie positive alors $\exists y \neq 0$ telle que :

$$y^T W_{1\alpha} y = 0$$

donc :

$$y B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} = 0$$

On choisit $X_{1,0} = (e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha})^{-1} y$, comme (2.32) est contrôlable donc il existe un contrôle qui transfère X_{1f} vers l'origine 0,

$$\begin{aligned} 0 &= X_{1f} = e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} (e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha})^{-1} y + \int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 U_{1\alpha}(\tau) \tau^{\alpha-1} y d\tau \\ 0 &= y + \int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 U_{1\alpha}(\tau) \tau^{\alpha-1} y d\tau \end{aligned}$$

En multipliant par y^T :

$$\begin{aligned} 0 &= y^T y + \int_0^t y^T e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 U_{1\alpha}(\tau) \tau^{\alpha-1} y d\tau \\ 0 &= y^T y \end{aligned}$$

ie : $y = 0$ contradiction avec $y \neq 0$, donc $W_{1\alpha}$ est définie positive par conséquent il est inversible. \square

Théorème 2.3. *Le système (2.33) est contrôlable si et seulement si $W_{2\alpha}$ est inversible.*

Démonstration. Tout d'abord on considère le contrôle $U_{2\alpha}(t)$ qui transfère $X_{2,0}$ vers X_{2f} ,

$$U_{2\alpha}(t) = \tilde{B}_2^T e^{\frac{N^+ T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_{2\alpha}^{-1} \left[X_{2f} - e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \quad (2.39)$$

et on suit les mêmes étapes de la preuve du théorème 2.2 pour démontrer ce résultat. \square

Ces deux théorèmes et la décomposition de Weierstrass permettent cependant d'énoncer le théorème suivant,

Théorème 2.4. *Le système (2.31) est contrôlable si et seulement si la matrice suivante est inversible,*

$$W_\alpha = \begin{bmatrix} W_{1\alpha} & 0 \\ 0 & W_{2\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

autrement dit le système (2.31) est contrôlable si et seulement si les deux matrices $W_{1\alpha}$ et $W_{2\alpha}$ sont inversibles.

2.3 Contrôle à énergie minimale

Nous nous intéressons dans cette section au calcul de l'énergie minimale pour un système fractionnaire conformable. Dans notre étude, nous allons regarder le cas où la matrice E est non inversible ie. nous considérons le système suivant ;

$$ET^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.41)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$, où $T^\alpha X(t)$ désigne la dérivée conformable de $X(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

La décomposition de Weierstrass est cependant utilisée pour décomposer (2.41) en deux sous systèmes simples à étudier.

1. Un sous système lent,

$$T^\alpha X_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t) \quad (2.42)$$

2. Un sous système rapide,

$$NT^\alpha X_2(t) = X_2(t) + B_2 U_2(t) \quad (2.43)$$

où N est une matrice nilpotente d'indice μ .

L'énergie minimale du système (2.41) sera donc la somme d'énergie minimale de (2.42) et (2.43).

L'énergie minimale du système lent (2.42)

Pour le système (2.42) s'il est contrôlable, la formulation du problème d'énergie minimale se fait comme suit : On considère ce système fractionnaire avec A et B deux matrices de dimensions n .

Si le système est contrôlable alors il existe plusieurs contrôles $u(t)$ qui minimisent l'indice de performance noté,

$$I(u) = \int_0^{t_f} u(\tau)^T Q u(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

telle que, la matrice Q est symétrique définie positive.

Le problème d'énergie minimale peut cependant s'exprimer comme suit,

Étant donné $A, B, Q \in M_n$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_f \in \mathbb{R}_+^n$. Trouvons $u(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ qui transfère X_0 vers $X_f \in \mathbb{R}_+^n$ et qui minimise l'indice de performance $I(u)$.

La solution du système (2.42) est donnée par :

$$X_1(t) = e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_1(0) + \int_a^t e^{\frac{A_1}{\alpha} (t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 U_1(\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (2.45)$$

Pour la résolution du problème on définit la matrice suivante :

$$W_1 = \int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \quad (2.46)$$

avec Q_1 est symétrique définie positive. Dans ce cas,

$$\hat{u}(t) = Q^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \quad (2.47)$$

Théorème 2.5. *Si le système (2.42) est contrôlable par un contrôle $\bar{u}(t)$ qui transfère le système de X_{10} vers X_{1f} alors (2.47) l'est aussi et il minimise l'indice de performance telle que cette valeur minimale est donnée par :*

$$I(\hat{u}) = (X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0})^T W_1^{-1} (X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0})$$

Démonstration. Tout d'abord on doit vérifier que $\hat{u}(t)$ est bien le contrôle associé à (2.42) :

$$\begin{aligned} X_{1f} &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + \\ &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \tau^{\alpha-1} d\tau \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + \\ &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] d\tau \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + \\ &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] d\tau \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + \\ &\int_0^t e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] d\tau \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + W_{1\alpha} W_{1\alpha}^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} + \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \\ &= X_{1f} \end{aligned}$$

comme $\hat{u}(t)$ et $\bar{u}(t)$ sont deux contrôles qui transfèrent (2.42) de \tilde{X}_{10} vers \tilde{X}_{1f} alors :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(t_f) &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_1(0) + \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1(\tau) \bar{u} \tau^{1-\alpha} d\tau \\ &= e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_1(0) + \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1(\tau) \hat{u} \tau^{1-\alpha} d\tau \end{aligned}$$

ceci veut dire,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)) \tau^{1-\alpha} d\tau &= 0 \\ \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{1-\alpha} d\tau &= 0 \end{aligned}$$

la multiplication par $W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right]$ donne alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \tau^{\alpha-1} d\tau &= 0 \\ \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \right] \tau^{\alpha-1} d\tau &= 0 \end{aligned}$$

autrement dit,

$$\int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 \hat{u}(\tau) d\tau = 0$$

maintenant on calcule,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} ((\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))) d\tau &= \int_0^{t_f} ((\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 \bar{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 \hat{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 \bar{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau))^T Q_1 \bar{u}(\tau) d\tau - \int_0^{t_f} (\hat{u}(\tau))^T Q_1 \bar{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

On obtient donc,

$$I(\bar{u}) = I(\hat{u}) + \int_0^{t_f} (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau))^T Q_1 (\bar{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)) d\tau$$

ainsi

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u}). \tag{2.48}$$

D'où la valeur minimale de $I(u)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 I(\hat{u}) &= \int_0^{t_f} (\hat{u}(\tau))^T Q_1 \hat{u}(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{t_f} \left[Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_1^{-1} \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right) \right]^T Q_1 \\
 &\quad \left[Q_1^{-1} B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right] \right] d\tau \\
 &= \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right)^T W_1^{-1} \int_0^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} B_1 Q_1^{-1} \\
 &\quad B_1^T e^{\frac{A_1^T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau W_1^{-1} \left[X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right] \\
 &= \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right)^T W_1^{-1} W_1 W_1^{-1} \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right) \\
 &= \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right)^T W_1^{-1} \left(X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1.0} \right)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

□

L'énergie minimale du système rapide (2.43)

Dans le cas où le système (2.43) est contrôlable, la formulation du problème d'énergie minimale se fait comme pour le cas du système (2.42). La solution de (2.43) est donnée par :

$$X_2(t) = e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_2(0) + \int_0^t e^{\frac{N^+}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tilde{B}_2 U_2(\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau$$

tel que N^+ représente l'inverse généralisé de Moore-Penrose de la matrice N .

Pour la résolution du problème on définit la matrice suivante :

$$W_2 = \int_0^t e^{\frac{N^+}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tilde{B}_2 Q_2^{-1} \tilde{B}_2^T e^{\frac{N^+ T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \tag{2.50}$$

avec Q_2 est symétrique définie positive.

et dans ce cas :

$$\hat{u}(t) = Q_2^{-1} \tilde{B}_2^T e^{\frac{N^+ T}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_2^{-1} \left[X_{2f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{2.0} \right] \tag{2.51}$$

Théorème 2.6. *Si le système (2.43) est contrôlable par un contrôle $\bar{u}(t)$ qui transfère le système de X_{20} vers X_{2f} alors (2.51) l'est aussi et il minimise l'indice de performance telle que cette valeur minimale est donnée par :*

$$I(\hat{u}) = \left(X_{2f} - e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_{2.0} \right)^T W_2^{-1} \left(X_{2f} - e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_{2.0} \right) \tag{2.52}$$

Démonstration. Pour la démonstration on s'est basé sur le théorème d'énergie minimale pour le système lent (précédent). □

il nous reste maintenant juste à donner l'expression de l'énergie minimale totale du système initiale (2.41) :

$$I(\hat{u}) = \begin{bmatrix} X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} & X_{2f} - e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_{2,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{1f} - e^{\frac{A_1}{\alpha} t^\alpha} X_{1,0} \\ X_{2f} - e^{\frac{N^+}{\alpha} t^\alpha} X_{2,0} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.4 Fonction de transfert

On considère dans ce qui suit la classe des systèmes fractionnaires conformables linéaires à temps continu,

$$T^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.54)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \quad (2.55)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$, $X(t)$ représente le vecteur d'état, $Y(t)$ la sortie du système et A, B, C, D sont des matrices de dimensions appropriées.

Formulation du problème : Notre problème est basé sur les deux questions suivantes,

1. Peut on avoir une fonction qui représente le système (2.54) ?
2. Si on a cette représentation, est ce qu'on peut passer de cette fonction vers le système associé ? c'est ce qu'on appelle réalisation.

La réponse est oui, on peut trouver une fonction qui représente notre système et on peut décrire une réalisation de type (2.54) et (2.55).

Solution du problème

En utilisant la transformée de Laplace conformable pour les équations (2.54) et (2.55),

$$L_\alpha [T^\alpha X(t)] = L_\alpha [AX(t) + BU(t)] \quad (2.56)$$

$$L_\alpha [Y(t)] = L_\alpha [CX(t) + DU(t)] \quad (2.57)$$

\Rightarrow

$$sX_\alpha(s) + x(o) = L_\alpha [AX(t)] + L_\alpha [BU(t)] \quad (2.58)$$

$$Y_\alpha(t) = L_\alpha [CX(t)] + L_\alpha [DU(t)] \quad (2.59)$$

⇒

$$sX_\alpha(s) + x(o) = AX_\alpha(s) + BU_\alpha(s) \quad (2.60)$$

$$Y_\alpha(t) = CX_\alpha(s) + DU_\alpha(s) \quad (2.61)$$

⇒

$$sX_\alpha(s) + AX_\alpha(s) = x(o) + BU_\alpha(s) \quad (2.62)$$

$$Y_\alpha(t) = CX_\alpha(s) + DU_\alpha(s) \quad (2.63)$$

sans perdre de généralité, on choisira $x(0) = 0$ pour simplifier notre calcul donc,

$$(sI - A)X_\alpha(s) = BU_\alpha(s) \quad (2.64)$$

$$Y_\alpha(t) = CX_\alpha(s) + DU_\alpha(s) \quad (2.65)$$

On suppose que le faisceau associé au système (2.54) est régulier pour certaines valeurs de s et dans ce cas,

$$X_\alpha(s) = (sI - A)^{-1}BU_\alpha(s) \quad (2.66)$$

$$Y_\alpha(s) = CX_\alpha(s) + DU_\alpha(s) \quad (2.67)$$

Une substitution de (2.66) dans (2.67) donne,

$$Y_\alpha(s) = C [(sI - A)^{-1}BU_\alpha(s)] + DU_\alpha(s) \quad (2.68)$$

Ce qui implique,

$$Y_\alpha(s) = C [(sI - A)^{-1}B + D] U_\alpha(s) \quad (2.69)$$

Notons cependant,

$$H_\alpha(s) = C [(sI - A)^{-1}B + D] \quad (2.70)$$

$H_\alpha(s)$ est appelée la fonction de transfert du système traité. On peut écrire donc,

$$Y_\alpha(s) = H_\alpha(s)U_\alpha(s) \quad (2.71)$$

d'où,

$$H_\alpha(s) = \frac{Y_\alpha(s)}{U_\alpha(s)} \quad (2.72)$$

Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état

Dans cette partie, nous allons répondre à la question posée suivante : Comment peut-on passer de la fonction de transfert vers le système dynamique défini par les équations (2.54) et (2.55), ou vers la réalisation représentant le système décrit par les équations (2.54) et (2.55) ?

Définition 2.8. *Toute représentation d'état correspondante à la fonction de transfert $H(s)$ est appelée réalisation, donc la représentation d'état est caractérisée par les matrices (A, B, C, D) .*

Définition 2.9. *Une réalisation (A, B, C, D) avec $\dim A = n$ est dite minimale s'il n'existe pas d'autres réalisations de $H(s)$ de dimension $< n$.*

Un problème de réalisation est un problème de détermination de la représentation d'état à partir de $H(s)$, pour cela on essaye de voir l'expression générale de la fonction de transfert sous forme de fraction, on rappelle qu'étant donné un système linéaire à dérivée entière de type,

$$X'(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.73)$$

la fonction de transfert est décrite par,

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.74)$$

Prenons maintenant le cas non entier et sachant que,

$$L_\alpha(f(t)) = F_\alpha(s) = L \left[f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right] (s) \quad (2.75)$$

$$Y_\alpha(s) = L \left[y(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right] (s) \quad (2.76)$$

et

$$U_\alpha(s) = L \left[u(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right] (s) \quad (2.77)$$

ainsi de (2.72), (2.74), (2.75), (2.76) et (2.77) on en déduit la fonction de transfert dans le cas générale pour la dérivée conformable avec $0 < \alpha \leq 1$,

$$H_\alpha(s) = \frac{b_m s^{\alpha m} + b_{m-1} s^{\alpha(m-1)} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{a_n s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0} \quad (2.78)$$

remarquons qu'on peut encore simplifier la relation ,

$$H_\alpha(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{i\alpha}}{\sum_{j=0}^n a_j s^{j\alpha}} \quad (2.79)$$

Cas 1 : $m = 0$ et $a_n = 1$

On considère dans ce qui suit que $m = 0$ et $b_0 = 1$, $H_\alpha(s)$ devient,

$$H_\alpha(s) = \frac{1}{s^{\alpha n} + a_{n-1}s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1s^\alpha + a_0} \quad (2.80)$$

Sachant que,

$$H_\alpha(s) = \frac{Y_\alpha(s)}{U_\alpha(s)} \quad (2.81)$$

de (2.80) et (2.81) il s'ensuit,

$$\frac{1}{s^{\alpha n} + a_{n-1}s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1s^\alpha + a_0} = \frac{Y_\alpha(s)}{U_\alpha(s)} \quad (2.82)$$

ce qui mène à,

$$U_\alpha(s) = Y_\alpha(s) [s^{\alpha n} + a_{n-1}s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1s^\alpha + a_0] \quad (2.83)$$

qui implique

$$U_\alpha(s) = s^{\alpha n}Y_\alpha(s) + a_{n-1}s^{\alpha(n-1)}Y_\alpha(s) + \dots + a_1s^\alpha Y_\alpha(s) + a_0Y_\alpha(s) \quad (2.84)$$

passant à la transformation de Laplace inverse,

$$L^{-1} [U_\alpha(s)] = L^{-1} [s^{\alpha n}Y_\alpha(s) + s^{\alpha(n-1)}Y_\alpha(s) + \dots + a_1s^\alpha Y_\alpha(s) + a_0Y_\alpha(s)] \quad (2.85)$$

soit alors

$$U(t) = L^{-1} [s^{\alpha n}Y_\alpha(s)] + a_{n-1}L^{-1} [s^{\alpha(n-1)}Y_\alpha(s)] + \dots + a_1L^{-1} [s^\alpha Y_\alpha(s)] + a_0L^{-1} [Y_\alpha(s)] \quad (2.86)$$

ou encore,

$$U(t) = Y^{n\alpha}(t) + a_{n-1}\alpha^{1-n}Y^{\alpha(n-1)}(t) + \dots + a_1\alpha^{-1}Y^\alpha(t) + a_0Y(t) \quad (2.87)$$

Notons que $Y^\alpha(t) = T^\alpha Y(t)$, et utilisons la méthode de la réduction de l'ordre,

$$X_1 = Y \quad (2.88)$$

$$X_2 = Y^\alpha \quad (2.89)$$

....

$$X_n = Y^{(n-1)\alpha} \quad (2.90)$$

ceci implique

$$X_1^\alpha = (Y)^\alpha = Y^\alpha = X_2 \quad (2.91)$$

$$X_2^\alpha = (Y^\alpha)^\alpha = Y^{2\alpha} = X_3 \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ X_{n-1}^\alpha &= \dots \dots = Y^{(n-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2.93)$$

de (2.87) il vient,

$$Y^{n\alpha}(t) = U_\alpha(t) - a_{n-1}Y^{\alpha(n-1)}(t) - \dots - a_1Y^\alpha(t) - a_0Y(t) \quad (2.94)$$

par suite, les deux formules (2.93) et (2.94) nous permettent de conclure que,

$$X_n^\alpha = U(t) - a_{n-1}X_{n-1}(t) - \dots - a_1X_2(t) - a_0X_1(t) \quad (2.95)$$

Finalement on peut obtenir le système suivant,

$$T^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.96)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (2.97)$$

où,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & & 0 \\ & & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

qui n'est d'autre pour la réalisation dérivée qui est dite forme compacte contrôlable.

Cas 2 : $m < n$ et $b_m \neq 0$

La fonction de transfert s'écrit sous la forme,

$$H_\alpha(s) = \frac{b_m s^{\alpha m} + b_{m-1} s^{\alpha(m-1)} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{a_n s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0} \quad (2.101)$$

où $a_n \neq 0$.

On divise le numérateur et le dénominateur de $H_\alpha(s)$ par a_n ,

$$H_\alpha(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} s^{\alpha m} + \frac{b_{m-1}}{a_n} s^{\alpha(m-1)} + \dots + \frac{b_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} b_0}{s^{\alpha n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{\alpha(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} a_0} \quad (2.102)$$

Pour une fonction $V(s)$ intermédiaire la fonction $H_\alpha(s)$ s'écrit,

$$H_\alpha(s) = \frac{Y_\alpha(s)}{U_\alpha(s)} = \frac{Y_\alpha(s) \cdot V_\alpha(s)}{U_\alpha(s) \cdot V_\alpha(s)} \quad (2.103)$$

Dans ce cas,

$$\frac{\frac{b_m}{a_n} s^{\alpha m} + \frac{b_{m-1}}{a_n} s^{\alpha(m-1)} + \dots + \frac{b_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} b_0}{s^{\alpha n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{\alpha(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} a_0} = \frac{Y_\alpha(s) \cdot V_\alpha(s)}{U_\alpha(s) \cdot V_\alpha(s)} \quad (2.104)$$

Pour répondre à la question de la recherche d'une réalisation, on pose,

$$\frac{1}{s^{\alpha n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{\alpha(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} a_0} = \frac{V_\alpha(s)}{U_\alpha(s)} \quad (2.105)$$

et,

$$\frac{Y_\alpha(s)}{V_\alpha(s)} = \frac{b_m}{a_n} s^{\alpha m} + \frac{b_{m-1}}{a_n} s^{\alpha(m-1)} + \dots + \frac{b_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} b_0 \quad (2.106)$$

A partir de (2.105) qui ressemble à l'approche précédente on peut donc avoir l'équation suivante,

$$U_\alpha(s) = V_\alpha(s) \left[s^{\alpha n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{\alpha(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^\alpha + \frac{1}{a_n} a_0 \right] \quad (2.107)$$

Passant ensuite à la transformation de Laplace inverse,

$$U(t) = V^{\alpha n}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} V^{\alpha(n-1)}(t) + \dots + \frac{a_1}{a_n} V^\alpha(t) + \frac{1}{a_n} a_0 V(t) \quad (2.108)$$

et on posera ensuite,

$$X_1 = V \quad (2.109)$$

$$X_2 = V^\alpha \quad (2.110)$$

....

$$X_n = V^{(n-1)\alpha} \quad (2.111)$$

**CHAPITRE 2. ANALYSE DES MODÈLES LINÉAIRES À DÉRIVÉES NON
ENTIÈRES UNI ET MULTIDIMENSIONNELS**

2. ANALYSE DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES UNIDIMENSIONNELS

puis on dérive (l'ordre est α),

$$X_1^\alpha = (V)^\alpha = V^\alpha = X_2 \quad (2.112)$$

$$X_2^\alpha = (V^\alpha)^\alpha = V^{2\alpha} = X_3 \quad (2.113)$$

....

$$X_{n-1}^\alpha = \dots \dots = V^{(n-1)\alpha} \quad (2.114)$$

tel que,

$$\begin{aligned} V^{\alpha n}(t) &= U(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} V^{\alpha(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} V^\alpha(t) - \frac{1}{a_n} a_0 V(t) \\ X_n^\alpha &= U(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} X_{n-1}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} X_2(t) - \frac{1}{a_n} a_0 X_1(t) \end{aligned} \quad (2.115)$$

De l'équation (2.106), il vient,

$$Y_\alpha(s) = \frac{b_m}{a_n} s^{\alpha m} V_\alpha(s) + \frac{b_{m-1}}{a_n} s^{\alpha(m-1)} V_\alpha(s) + \dots \quad (2.116)$$

$$+ \frac{b_1}{a_n} s V(s) + \frac{1}{a_n} b_0 V(s) \quad (2.117)$$

Par application de la transformée inverse de Laplace,

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{b_m}{a_n} V^{\alpha m}(t) + \frac{b_{m-1}}{a_n} V^{\alpha(m-1)}(t) + \dots \\ &+ \frac{b_1}{a_n} V(t) + \frac{1}{a_n} b_0 V(t) \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{b_m}{a_n} X_{m+1}(t) + \frac{b_{m-1}}{a_n} X_m(t) + \dots \\ &+ \frac{b_1}{a_n} X_2(t) + \frac{1}{a_n} b_0 X_1(t) \end{aligned} \quad (2.119)$$

On peut écrire donc,

$$\begin{aligned} Y(t) &= 0.X_n + \dots + \frac{b_m}{a_n} X_{m+1}(t) + \frac{b_{m-1}}{a_n} X_m(t) + \\ &\dots + \frac{b_1}{a_n} X_2(t) + \frac{1}{a_n} b_0 X_1(t) \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \frac{b_m}{a_n} & \frac{b_{m-1}}{a_n} & \dots & \frac{b_1}{a_n} & \frac{1}{a_n} b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m+1} \\ X_m \\ \dots \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

d'après (2.109), (2.115) et (2.121) on aura le système suivant,

$$T^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.122)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (2.123)$$

tel que,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & & 0 \\ & & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a_n}a_0 & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

$$C = \left[\frac{1}{a_n}b_0 \quad \frac{b_1}{a_n} \quad \dots \quad \frac{b_{m-1}}{a_n} \quad \frac{b_m}{a_n} \right] \quad (2.126)$$

cette réalisation est dite compagne contrôlable.

3 Exemples

Dans cette partie, nous présentons quelques exemples d'applications et la résolution des systèmes fractionnaires conformables tout en regardant le passage entre la représentation d'état vers la fonction de transfert et réciproquement.

Exemple 3.1. *On considère l'exemple de circuit électrique suivant,*

3. EXEMPLES

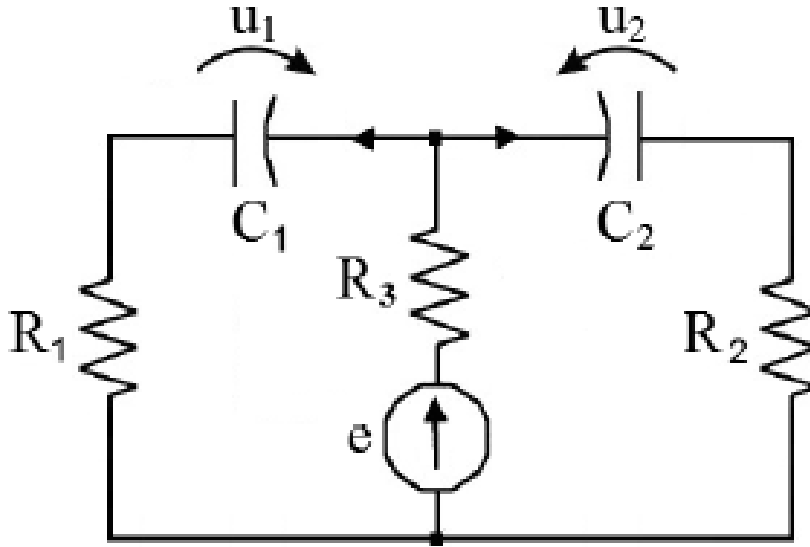


FIGURE 2.1

En utilisant les lois de Kirchhoff, on déduit le système suivant,

$$T^\alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be \quad (2.127)$$

avec,

$$A = \frac{1}{[R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3]C_1C_2} \begin{bmatrix} -(R_2 + R_3)C_2 & R_3C_2 \\ R_3C_1 & -(R_1 + R_3)C_1 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$B = \frac{1}{[R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3]C_1C_2} \begin{bmatrix} R_2C_2 \\ R_1C_1 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

pour analyser ce système on va supposer : $\alpha = 0.5$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $C_1 = C_2 = 100mf$ et $e = 1V$ aussi $[u_1(0) \ u_2(0)]^T = 0$.

Utilisons la formule (2.26), la solution du système est donc,

$$u(t) = e^{\frac{A}{\alpha}t^\alpha} u(0) + \int_0^t e^{\frac{1}{\alpha}A[t^\alpha - \tau]^\alpha} B e(\tau)^{1-\alpha} d\tau \quad (2.130)$$

$$u(t) = \int_0^t e^{\frac{1}{0.5} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.4 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} [t^\alpha - \tau]^\alpha} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} e(\tau)^{1-\alpha} d\tau \quad (2.131)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{e^{(\frac{2t^{0.5}}{5})}} \\ 1 - \frac{1}{e^{(\frac{2t^{0.5}}{5})}} \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

on remarque que $u_1(t) = u_2(t) = 1 - \frac{1}{e^{(\frac{2t^{0.5}}{5})}}$. la figure qui suit représente la solution $u(t)$ lorsque $t \in [0 : 30]$,

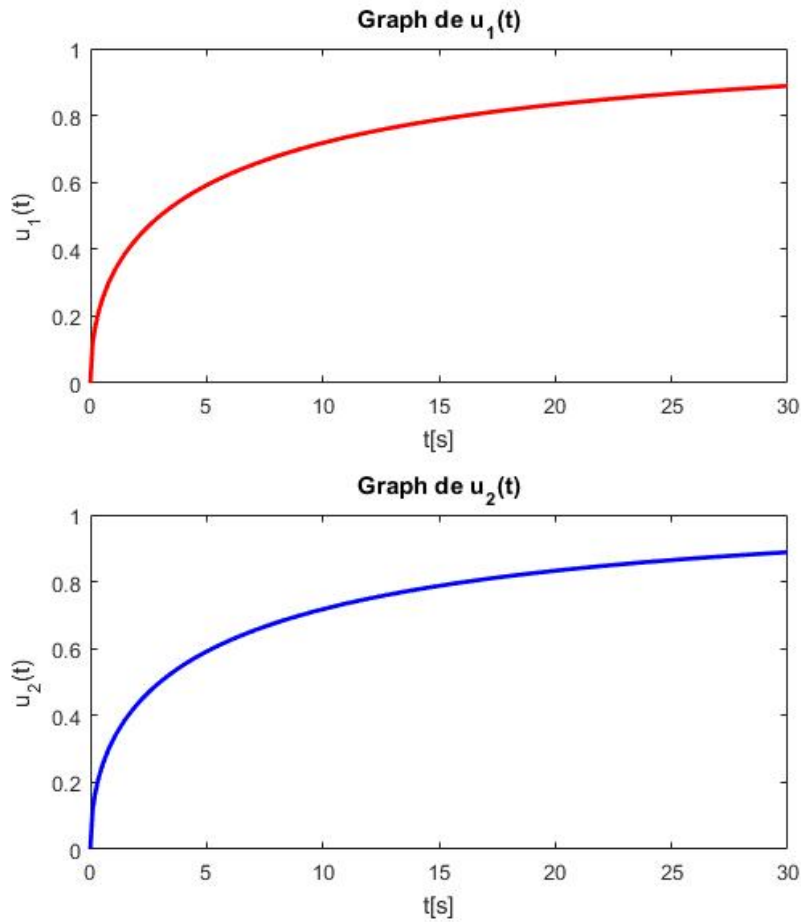


FIGURE 2.2 – La représentation graphique de $u_1(t)$ et $u_2(t)$

Exemple 3.2. Soit le système suivant,

$$T^\alpha \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Bu(t) \quad (2.133)$$

avec,

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.4 \\ 0.5 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \alpha = 0.8 \quad (2.134)$$

3. EXEMPLES

la solution sera donc,

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{11}{5041e^{(\frac{71t^{0.8}}{8})}} + \frac{28t^{0.8}}{71} - \frac{11}{5041} \\ \frac{2t^{0.8}}{71} - \frac{55}{5041e^{(\frac{71t^{0.8}}{8})}} + \frac{55}{5041} \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

cette solution est représentée par la figure,

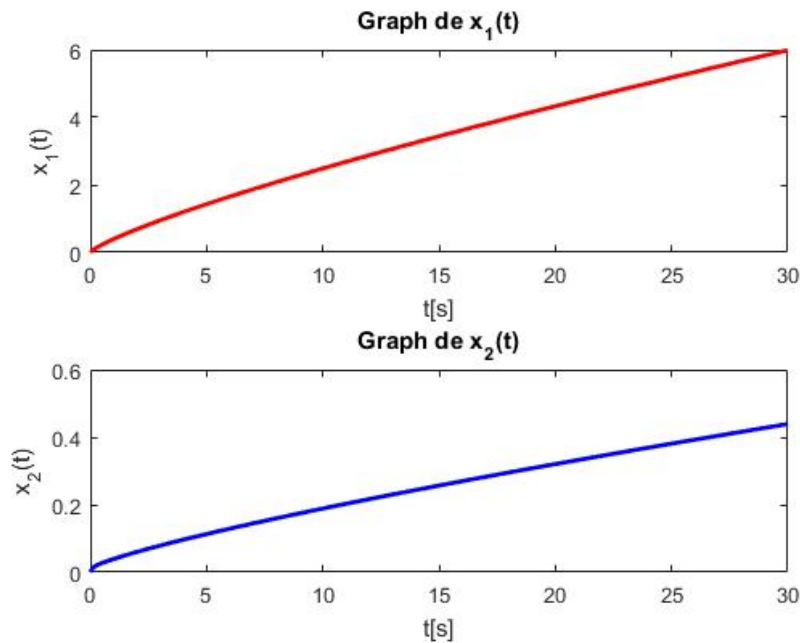


FIGURE 2.3 – La représentation graphique de $x_1(t)$ et $x_2(t)$

Exemple 3.3. Dans cet exemple la fonction de transfert est donnée par,

$$H_\alpha(s) = \frac{3 + 10s^{0.4}}{5 + 15s^{0.4} + 43.75s^{0.8}} \quad (2.136)$$

Ici $\alpha = 0.4$, $m = 1$ et $n = 2$. Pour trouver la réalisation qui représente (2.136) on doit déterminer les coefficients b_0 et b_1 puis a_0 , a_1 et a_2 .

De (2.136) et (2.79) on obtient $b_0 = 3$ et $b_1 = 10$, ensuite de (2.136) aussi $a_0 = 5$, $a_1 = 15$ et $a_2 = 43.75$.

Finalement d'après (2.124), (4.2) et (2.126) la fonction de transfert $H_\alpha(s)$ peut être représentée par le système suivant,

$$T^\alpha X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2.137)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (2.138)$$

tel que,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{a_2}a_0 & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2}b_0 & \frac{b_1}{a_2} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Soit alors,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{43.75} & -\frac{15}{43.75} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{43.75} & \frac{10}{43.75} \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

Le graphe de la fonction de transfert décrit par l'équation (2.136) est donné par la figure (2.4).

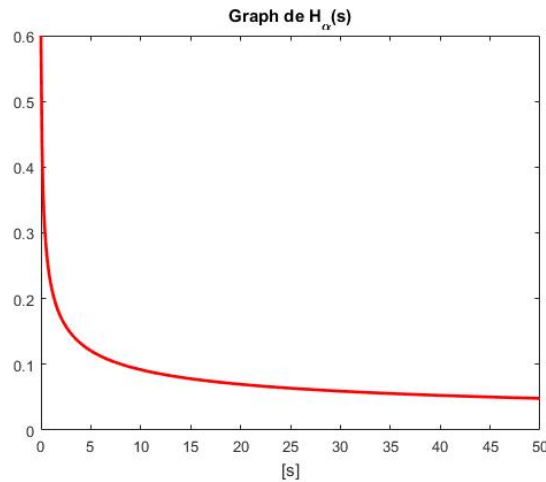


FIGURE 2.4 – La représentation graphique de $H_\alpha(s)$

4 Solvabilité et analyse des systèmes bidimensionnels

Dans cette section certaines classes de systèmes fractionnaires dans le cas à deux dimension singuliers et non singuliers seront étudiées, les cas continus et le cas continu-discret seront considérés.

4.1 Les systèmes bidimensionnels à temps continu-discret

On considère le système $2D$ continu-discret suivant,

$$ET^\alpha X(t, i) = AX(t, i) + BU(t, i) \quad (2.146)$$

La décomposition de Weierstrass pour ce système nous donne,

$$T^\alpha X_1(t, i) = A_1 X_1(t, i) + B_1 U_1(t, i) \quad (2.147)$$

et,

$$NT^\alpha X_2(t, i) = X_2(t, i) + B_2 U_2(t, i) \quad (2.148)$$

En se basant sur la solution du système (2.24) pour calculer la solution de (2.147). on aura,

$$X_1(t, i) = e^{\frac{A_1}{\alpha}(t-a)^\alpha} X_1(a, i) + \int_a^t e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_1(\tau, i) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.149)$$

Si dans (2.149) on substitue t par t_f et pour un cas particulier,

$$X_1(a, i) = 0 \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, q_1 \quad (2.150)$$

il s'ensuit,

$$X_{1f} = X_{1f}(t_f, 0) + X_{1f}(t_f, 1) + \dots + X_{1f}(t_f, q_1) \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} X_{1f} &= \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_1(\tau, 0) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \\ &+ \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_1(\tau, 1) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \\ &+ \dots \\ &+ \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_1 U_1(\tau, q_1) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \end{aligned}$$

Donc,

$$X_{1f} = \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \underbrace{[B_1 \ B_1 \ \dots \ B_1]}_{(q_1+1) \text{ fois}} \begin{bmatrix} U_1(\tau, 0) \\ U_1(\tau, 1) \\ \dots \\ U_1(\tau, q_1) \end{bmatrix} (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.152)$$

pour simplifier l'écriture de la solution X_{1f} posons,

$$\overline{B}_1 = \underbrace{[B_1 \ B_1 \ \dots \ B_1]}_{(q_1+1)\text{ fois}} \in R^{n_1 \cdot \overline{m}_1} \quad (2.153)$$

$$\overline{U}_1 = \begin{bmatrix} U_1(\tau, 0) \\ U_1(\tau, 1) \\ \dots \\ U_1(\tau, q_1) \end{bmatrix} \in R^{\overline{m}_1}, \quad \overline{m}_1 = n_1 \cdot (q_1 + 1) \quad (2.154)$$

ce qui nous donne la solution suivante,

$$X_{1f} = \int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \overline{B}_1 \overline{U}_1(\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.155)$$

pour le système (2.148) la solution est donnée par,

$$X_2(t, i) = e^{\frac{N^+}{\alpha}(t-a)^\alpha} X_1(a, i) + \int_a^t e^{\frac{N^+}{\alpha}[(t-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} B_2 U_2(\tau, i) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.156)$$

Par l'utilisation des mêmes étapes de calcul X_{1f} (cas particulier) pour $X_2(t, i)$ on obtient,

$$X_2(t, i) = \int_a^{t_f} e^{\frac{N^+}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \overline{B}_2 \overline{U}_2(\tau, i) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.157)$$

avec,

$$\overline{B}_2 = \underbrace{[B_2 \ B_2 \ \dots \ B_2]}_{(q_1+1)\text{ fois}} \in R^{n_2 \cdot \overline{m}_2} \quad (2.158)$$

$$\overline{U}_2 = \begin{bmatrix} U_2(\tau, 0) \\ U_2(\tau, 1) \\ \dots \\ U_2(\tau, q_2) \end{bmatrix} \in R^{\overline{m}_2}, \quad \overline{m}_2 = n_2 \cdot (q_2 + 1) \quad (2.159)$$

donc la solution générale du système (2.146) est donnée par,

$$X(t, i) = Q \begin{bmatrix} X_1(t, i) \\ X_2(t, i) \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

$$= Q \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \left(\int_a^{t_f} e^{\frac{A_1}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \overline{B}_1 \overline{U}_1(\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \right) \quad (2.161)$$

$$+ Q \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix} \left(\int_a^{t_f} e^{\frac{N^+}{\alpha}[(t_f-a)^\alpha - (\tau-a)^\alpha]} \overline{B}_2 \overline{U}_2(\tau, i) (\tau - a)^{\alpha-1} d\tau \right)$$

4.2 Solution du modèle de Fornasini-Marchesini de première forme par l'utilisation de la double transformée de Laplace conformable

Dans cette partie, nous exposons notre premier résultat principal comme approche de calcul de la solution du premier Modèle de Fornasini-Marchesini par l'utilisation de la double transformée conformable de Laplace.

Nous introduisons dans ce cadre les définitions de la dérivée et de l'intégrale conformable d'une fonction continue à deux dimensions $x(t_1, t_2)$ et à deux variables indépendantes $t_1, t_2 \geq 0$.

Définition 4.1. Pour $i, j \geq 0$ des nombres naturels, nous énonçons la double intégrale fractionnaire conformable de la fonction $x(t_1, t_2)$ par,

$$J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} x(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{\left(\frac{t_1 - \tau_1}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2 - \tau_2}{\beta}\right)^j}{i!j!} x(t_1, t_2) d^\alpha \tau_1 d^\beta \tau_2 \quad (2.162)$$

Définition 4.2. La dérivée fractionnaire conformable partielle d'ordre α par rapport à la variable t_1 de la fonction $x(t_1, t_2)$ est définie par

$$T_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \varepsilon_1 t_1^{1-\alpha}, t_2) - x(t_1, t_2)}{\varepsilon_1} \quad (2.163)$$

Définition 4.3. La dérivée fractionnaire conformable partielle d'ordre β par rapport à la variable t_2 de la fonction $x(t_1, t_2)$ est définie par

$$T_{t_2}^\beta x(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{x(t_1, t_2 + \varepsilon_2 t_2^{1-\beta}) - x(t_1, t_2)}{\varepsilon_2} \quad (2.164)$$

Définition 4.4. La dérivée fractionnaire conformable d'ordre (α, β) de la fonction $x(t_1, t_2)$ est donnée par

$$T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \varepsilon_1 t_1^{1-\alpha}, t_2 + \varepsilon_2 t_2^{1-\beta}) - x(t_1, t_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (2.165)$$

Considérons le modèle continu de Fornasini-Marchesini fractionnaire à dérivées conformables d'ordre (α, β) décrit par l'équation suivante,

$$\begin{aligned} T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) &= A_0 x(t_1, t_2) + A_1 T_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2) + A_2 T_{t_2}^\beta x(t_1, t_2) \\ &+ Bu(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.166)$$

où $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, 2$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, les conditions initiales $x(0, t_2)$ et $x(t_1, 0)$ sont données.

Définition 4.5. [14], La double transformée conformable de Laplace $f(t_1, t_2)$ notée $L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}$ est définie par,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta}} f(t_1, t_2) d^\alpha t_1 d^\beta t_2. \quad (2.167)$$

qui peut être également simplifié comme suit,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta}} t_1^{\alpha-1} t_2^{\beta-1} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.168)$$

Notez que cette transformation existe si et seulement si $\text{Re}(p) > 0, \text{Re}(s) > 0$ de plus la fonction $f(t_1, t_2)$ doit être continue.

Lemme 4.1. [14] La double transformée de Laplace conformable de la fonction $T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2)$ est donnée par,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left[T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) \right] = psX(p, s) - pX(p, 0) - sX(0, s) - X(0, 0). \quad (2.169)$$

respectivement, celle de la fonction : $\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m$ est,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m \right] = \frac{n!m!}{p^{n+1}s^{m+1}}. \quad (2.170)$$

Théorème 4.1. [15] (Théorème de convolution pour la double transformation de Laplace conformable) Si $F(p, s) = L_{t_1}^\alpha L_{t_2}^\beta [f(t_1, t_2, t_2)]$ et $H(p, s) = L_{t_1}^\alpha L_{t_2}^\beta [h(t_1, t_2)]$ existent pour $s > 0$ et $p > 0$, alors

$$L_t^\alpha L_x^\beta [f(t_1, t_2) * h(t_1, t_2)] = F(p, s)H(p, s)$$

où $f(t_1, t_2) * h(t_1, t_2)$ désigne la convolution des fonctions $f(t_1, t_2)$ et $h(t_1, t_2)$.

En se basant sur [15] et [16, 17], le produit de convolution de f et h est donné par la formule

$$f(t_1, t_2) * h(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f((t_1^\alpha - \tau_1^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, (t_2^\beta - \tau_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}}) f(t_1, t_2) dt_1^\alpha dt_2^\beta \quad (2.171)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} [T_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2)] &= L_{t_2}^\beta [L_{t_1}^\alpha T_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2)] \\ &= L_{t_2}^\beta [pX(p, t_2) - X(0, t_2)] \\ &= pX(p, s) - X(0, s) \end{aligned} \quad (2.172)$$

et

$$\begin{aligned} L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} [T_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2)] &= L_{t_1}^{\alpha} [L_{t_2}^{\beta} T_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2)] \\ &= L_{t_1}^{\alpha} [sX(t_1, s) - X(t_1, 0)] \\ &= sX(p, s) - X(p, 0) \end{aligned} \quad (2.173)$$

et en appliquant la transformée de Laplace $2D$ à l'équation d'espace d'états (2.166) et en prenant en compte les équations (2.169), (2.172) et (2.173) on obtient,

$$\begin{aligned} psX(p, s) - pX(p, 0) - sX(0, s) + x(0, 0) &= A_0X(p, s) + BU(p, s) \\ &+ A_1 [pX(p, s) - X(0, s)] \\ &+ A_2 [sX(p, s) - X(p, 0)] \end{aligned} \quad (2.174)$$

avec

$$X(p, 0) = L_{t_1}^{\alpha} [x(t_1, 0)]$$

et

$$X(0, s) = L_{t_2}^{\beta} [x(0, t_2)]$$

Si on multiplie les deux côtés de l'égalité (2.174) par $p^{-1}s^{-1}$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} X(p, s) &= p^{-1}s^{-1}A_0X(p, s) + p^{-1}s^{-1}BU(p, s) \\ &+ p^{-1}s^{-1}A_1 [pX(p, s) - X(0, s)] \\ &+ p^{-1}s^{-1}A_2 [sX(p, s) - X(p, 0)] \\ &+ s^{-1}X(p, 0) + p^{-1}X(0, s) - p^{-1}s^{-1}x(0, 0) \end{aligned} \quad (2.175)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} [I_n - p^{-1}s^{-1}A_0 - s^{-1}A_1 - p^{-1}A_2] X(p, s) &= [s^{-1}(I_n - p^{-1}A_2)] X(p, 0) \\ &+ [p^{-1}(I_n - s^{-1}A_1)] X(0, s) + p^{-1}s^{-1}BU(p, s) - p^{-1}s^{-1}x(0, 0) \end{aligned} \quad (2.176)$$

Soit

$$G(p, s) = [I_n - p^{-1}s^{-1}A_0 - s^{-1}A_1 - p^{-1}A_2] \quad (2.177)$$

L'inverse de la fonction $G(p, s)$ est donnée par

$$G^{-1}(p, s) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i} s^{-j} \quad (2.178)$$

Sachant que dans [8]

$$G(p, s)G^{-1}(p, s) = G^{-1}(p, s)G(p, s) = I_n \quad (2.179)$$

De (2.177), (2.178) et (2.179) il vient,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} [\Phi_{ij} - A_0\Phi_{i-1,j-1} - A_1\Phi_{i,j-1} - A_2\Phi_{i-1,j}] p^{-i} s^{-j} = I_n \quad (2.180)$$

et en comparant les coefficients aux mêmes puissances de p et s il s'ensuit,

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} I_n & \text{if } i = 0, j = 0 \\ A_0\Phi_{i-1,j-1} + A_1\Phi_{i,j-1} + A_2\Phi_{i-1,j} & \text{if } i + j > 0, i, j \in Z_+ \\ 0 & \text{if } i < 0 \text{ et /ou } j < 0 \end{cases} \quad (2.181)$$

pour plus de propriétés de $G(p, s)$ et Φ_{ij} on se réfère à [8] et [18].

De (2.176), (2.177) et (2.178) on aura

$$\begin{aligned} X(p, s) &= G^{-1}(p, s) [s^{-1}(I_n - p^{-1}A_2)] X(p, 0) - G^{-1}(p, s)p^{-1}s^{-1}x(0, 0) \\ &+ G^{-1}(p, s) [p^{-1}(I_n - s^{-1}A_1)] X(0, s) + G^{-1}(p, s)p^{-1}s^{-1}BU(p, s) \end{aligned} \quad (2.182)$$

avant d'appliquer $(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta})^{-1}$ on développe,

$$\begin{aligned} G^{-1}(p, s) [s^{-1}(I_n - p^{-1}A_2)] X(p, 0) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i} s^{-j} s^{-1} (I_n - p^{-1}A_2) X(p, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i} s^{-j-1} X(p, 0) \\ &- \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i-1} s^{-j-1} A_2 X(p, 0) \end{aligned} \quad (2.183)$$

Si nous appliquons $(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta})^{-1}$ au premier terme de l'équation (2.183),

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i} s^{-j-1} X(p, 0)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\Phi_{ij} (L_{t_1}^{\alpha})^{-1} p^{-i} X(p, 0) (L_{t_2}^{\beta})^{-1} (s^{-i-1})\right) \quad (2.184)$$

Sachant que dans, [20]

$$\left(L_{t_2}^{\beta}\right)^{-1} (s^{-i-1}) = \frac{\left(\frac{t_2^{\beta}}{\beta}\right)^j}{j!}$$

4. ANALYSE DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS

Avant de calculer $(L_{t_1}^\alpha)^{-1} p^{-i} X(p, 0)$, on propose le lemme suivant,

Lemme 4.2. *La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire $J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0)$ est de la forme suivante,*

$$L_{t_1}^\alpha [J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0)] = \frac{X(p, 0)}{p^{i+1}}$$

Démonstration. Si on utilise la définition de la transformée de Laplace pour la fonction $J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0)$, le théorème de convolution 4.1 et la formule (2.171), on obtient

$$\begin{aligned} L_{t_1}^\alpha (J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0)) &= L_{t_1}^\alpha \left(\int_0^{t_1} \frac{\left(\frac{t_1 - \tau_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} x(t_1, 0) d^\alpha t_1 \right) \\ &= \frac{1}{i!} L_{t_1}^\alpha \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i L_{t_1}^\alpha [x(t_1, 0)] \right] \\ &= \frac{1}{i!} \frac{i!}{p^{i+1}} X(p, 0) \\ &= \frac{X(p, 0)}{p^{i+1}} \end{aligned} \tag{2.185}$$

Par conséquent

$$(L_{t_1}^\alpha)^{-1} [p^{-(i+1)} X(p, 0)] = J^{i\alpha} x(t_1, 0) \tag{2.186}$$

□

En utilisant le lemme précédent on trouve,

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i} s^{-j-1} X(p, 0) \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{ij} (J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0)) \tag{2.187}$$

De plus, on obtient

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} p^{-i-1} s^{-j} A_2 X(p, 0) \right) = \left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{i-1, j} \times \right. \\ \left. p^{-i} s^{-j} A_2 X(p, 0) \right] \tag{2.188}$$

maintenant nous obtenons

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left(G^{-1}(p, s) \left[s^{-1}(I_n - p^{-1}A_2)\right] X(p, 0)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \times \right. \\ \left. [\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}A_2] J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) \right] \quad (2.189)$$

de la même manière, on en déduit que,

1.

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} \left(G^{-1}(p, s) \left[p^{-1}(I_n - s^{-1}A_1)\right] X(0, s)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \times \right. \\ \left. [\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}A_1] J_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right] \quad (2.190)$$

2.

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} G^{-1}(p, s) \left[p^{-1}s^{-1}x(0, 0)\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{i,j} x(0, 0) \quad (2.191)$$

3.

$$\left(L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}\right)^{-1} G^{-1}(p, s) \left[p^{-1}s^{-1}BU(p, s)\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{i-1,j-1} J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} u(t_1, t_2) \quad (2.192)$$

Les équations (2.188), (2.189), (2.190), (2.191) et (2.192) nous donnent le résultat suivant.

Théorème 4.2. *La solution de l'équation d'état (2.166) avec conditions aux limites est donnée par*

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[-\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{ij} x(0, 0) + \Phi_{i-1,j-1} B J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} u(t_1, t_2) \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} [\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}A_2] J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) + \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} [\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}A_1] J_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right] \quad (2.193)$$

4.3 Solution du modèle de Fornasini-Marchesini de deuxième forme par l'utilisation de la double transformée de Sumudu conforme

Dans cette partie, une nouvelle formulation et des propriétés de la double transformée de Sumudu sont introduites et utilisées pour résoudre le modèle suivant

$$\begin{aligned} T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) = & A_1 T_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2) + A_2 T_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2) \\ & + B_1 T_{t_1}^{\alpha} w(t_1, t_2) + B_2 T_{t_2}^{\beta} w(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.194)$$

où $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de contrôle et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, 2$, $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $j = 1, 2$, les conditions aux limites $x(0, t_2)$ et $x(t_1, 0)$ sont données.

Nous introduisons quelques définitions et résultats nécessaires pour apporter une solution à notre problème.

Définition 4.6. Sur l'ensemble des fonctions suivant :

$$A_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) : \exists M, \tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2 \succ 0, |f(x, y)| \prec M e^{\frac{|x^\alpha|}{\alpha \tau_1} + \frac{|y^\beta|}{\beta \sigma_2}} \quad \text{si} \\ x^\alpha \in (-1)^i \times [0; +\infty[\text{ et } y^\beta \in (-1)^j \times [0; +\infty[\text{ pour } i, j = 1, 2. \end{array} \right\} \quad (2.195)$$

La transformée de Sumudu fractionnaire conforme de la fonction $f(x; y)$ est définie par

$$S_{\alpha, \beta} f(x, y) = F_{\alpha, \beta}(u, v) = \frac{1}{uv} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^\alpha}{\alpha u} - \frac{y^\beta}{\beta v}} f(x, y) d^\alpha x d^\beta y \quad (2.196)$$

Remarque 4.1. Si $x = 0$ ou $y = 0$ on aura,

$$S_{\alpha, \beta} f(x, 0) = \frac{1}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^\alpha}{\alpha u}} f(x, 0) d^\alpha x \quad (2.197)$$

et

$$S_{\alpha, \beta} f(0, y) = \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^\beta}{\beta v}} f(0, y) d^\beta y \quad (2.198)$$

Nous proposons trois théorèmes et un lemme qui nous permettrons par la suite de résoudre le système (2.194).

Théorème 4.3. Soit f une fonction telle que $f : ([0, +\infty[\times [0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 \prec \alpha \preceq 1$, $0 \prec \beta \preceq 1$. alors

$$S_{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{F_{\alpha, \beta}(\frac{1}{u}, \frac{1}{v})}{uv} \quad (2.199)$$

Démonstration. Par définition nous avons

$$S_{\alpha, \beta} f(x, y) = F_{\alpha, \beta}(u, v) = \frac{1}{uv} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^\alpha}{\alpha u} - \frac{y^\beta}{\beta v}} f(x, y) d^\alpha x d^\beta y \quad (2.200)$$

On pose

$$t_1 = \frac{x^\alpha}{\alpha} \Rightarrow dt_1 = x^{\alpha-1} dx = d^\alpha x \quad (2.201)$$

et

$$t_2 = \frac{y^\beta}{\beta} \Rightarrow dt_2 = y^{\beta-1} dy = d^\beta y \quad (2.202)$$

Si on remplace (2.201) et (2.202) dans (2.200) nous aurons

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} f(x, y) &= \frac{1}{uv} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t_1}{u} - \frac{t_2}{v}} f((\alpha t_1)^{\frac{1}{\alpha}}, (\beta t_2)^{\frac{1}{\beta}}) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{uv} \left\{ L_{t_1, t_2} f((\alpha t_1)^{\frac{1}{\alpha}}, (\beta t_2)^{\frac{1}{\beta}}) \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{v}}^{p \rightarrow \frac{1}{u}} \\ &= \frac{F_{\alpha,\beta}(\frac{1}{u}, \frac{1}{v})}{uv} \end{aligned} \quad (2.203)$$

□

Lemme 4.3. La transformée de Sumudu fractionnaire conformable de la fonction $f(x, y) = \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m$ est donnée par

$$S_{\alpha,\beta} \left[\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m \right] = n!m!u^n v^m, \quad u > 0, v > 0 \quad (2.204)$$

Démonstration. : Sachant que

$$S_{\alpha,\beta} \left[\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m \right] = \frac{L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left\{ \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{v}}^{p \rightarrow \frac{1}{u}}}{uv} \quad (2.205)$$

par conséquent

$$S_{\alpha,\beta} \left[\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m \right] = \frac{n!u^{n+1}m!v^{m+1}}{uv} \quad (2.206)$$

$$S_{\alpha,\beta} \left[\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{y^\beta}{\beta}\right)^m \right] = n!m!u^n v^m$$

□

Théorème 4.4. Soit f une fonction telle que $f : ([0, +\infty[\times [0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ alors

$$S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(x, y) \right) = \frac{F_{\alpha,\beta}(u, v) - F_{\alpha,\beta}(u, 0) - F_{\alpha,\beta}(0, v) + f(0, 0)}{uv} \quad (2.207)$$

Démonstration. : Pour $f : ([0, +\infty[\times [0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
 S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(x, y) \right) &= \frac{L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left\{ T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(x, y) \right\}_{s \rightarrow \frac{1}{v}}^{p \rightarrow \frac{1}{u}}}{uv} \\
 &= \frac{\{psF(p, s) - pF(p, 0) - sF(0, s) + f(0, 0)\}_{s \rightarrow \frac{1}{v}}^{p \rightarrow \frac{1}{u}}}{uv} \\
 &= \frac{\frac{1}{uv} F_{\alpha, \beta}(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}) - \frac{1}{u} F_{\alpha, \beta}(\frac{1}{u}, 0) - \frac{1}{v} F_{\alpha, \beta}(0, \frac{1}{v}) + f(0, 0)}{uv} \\
 &= \frac{F_{\alpha, \beta}(\frac{1}{u}, \frac{1}{v})}{u^2 v^2} - \frac{F_{\alpha, \beta}(\frac{1}{u}, 0)}{u^2 v} - \frac{F_{\alpha, \beta}(0, \frac{1}{v})}{uv^2} + \frac{f(0, 0)}{uv} \\
 &= uv \frac{F_{\alpha, \beta}(u, v)}{u^2 v^2} - u \frac{F_{\alpha, \beta}(u, 0)}{u^2 v} - v \frac{F_{\alpha, \beta}(0, v)}{uv^2} + \frac{f(0, 0)}{uv} \\
 &= \frac{F_{\alpha, \beta}(u, v)}{uv} - \frac{F_{\alpha, \beta}(u, 0)}{uv} - \frac{F_{\alpha, \beta}(0, v)}{uv} + \frac{f(0, 0)}{uv} \\
 &= \frac{F_{\alpha, \beta}(u, v) - F_{\alpha, \beta}(u, 0) - F_{\alpha, \beta}(0, v) + f(0, 0)}{uv}
 \end{aligned} \tag{2.208}$$

□

Les résultats suivants sont nécessaires pour prouver notre résultat principal.

Théorème 4.5. *La transformée de Sumudu de l'intégrale fractionnaire $J_{t_1}^{\alpha} x(t_1, 0)$ possède la forme*

$$S_{t_1}^{\alpha} [J_{t_1}^{\alpha} x(t_1, 0)] = u^{i+1} X(u, 0)$$

Démonstration. Nous utilisons la définition de la transformée de Sumudu, la propriété de dualité entre la transformée de Laplace et la transformée de Sumudu en [7], [20] et les mêmes étapes pour la preuve du lemme 4.2 nous obtenons le théorème.

□

Nous développons également d'autres résultats

1.

$$\begin{aligned}
 S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} (T_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2)) &= S_{t_2}^{\beta} (S_{t_1}^{\alpha} T_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2)) \\
 &= S_{t_2}^{\beta} \left(\frac{X(u, t_2) - X(0, t_2)}{u} \right) \\
 &= \frac{X(u, v) - X(0, v)}{u}
 \end{aligned} \tag{2.209}$$

2.

$$\begin{aligned} S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(T_t^\beta x(t_1, t_2) \right) &= S_{t_1}^\alpha \left(S_{t_2}^\beta T_{t_2}^\beta x(t_1, t_2) \right) \\ &= S_{t_1}^\alpha \left(\frac{X(t_1, v) - X(t_1, 0)}{v} \right) \\ &= \frac{X(u, v) - X(u, 0)}{v} \end{aligned} \quad (2.210)$$

De la même manière nous trouvons,

3.

$$S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(T_{t_1}^\alpha w(t_1, t_2) \right) = \frac{W(u, v) - W(0, v)}{u} \quad (2.211)$$

4.

$$S_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left(T_{t_2}^\beta w(t_1, t_2) \right) = \frac{W(u, v) - W(u, 0)}{v} \quad (2.212)$$

Si nous appliquons la formule (2.207) à notre système (2.194) et nous utilisons (2.209), (2.210), (2.211), (2.212) nous aurons,

$$\begin{aligned} \frac{X(u, v) - X(0, v) - X(u, 0) + x(0, 0)}{uv} &= A_1 \left[\frac{X(u, v) - X(0, v)}{u} \right] \\ &+ A_2 \left[\frac{X(u, v) - X(u, 0)}{v} \right] \\ &+ B_1 \left[\frac{W(u, v) - W(0, v)}{u} \right] \\ &+ B_2 \left[\frac{W(u, v) - W(u, 0)}{v} \right] \end{aligned} \quad (2.213)$$

Si nous multiplions l'équation (2.213) par uv ,

$$\begin{aligned} X(u, v) - X(0, v) - X(u, 0) + x(0, 0) &= A_1 v [X(u, v) - X(0, v)] \\ &+ A_2 u [X(u, v) - X(u, 0)] \\ &+ B_1 v [W(u, v) - W(0, v)] \\ &+ B_2 u [W(u, v) - W(u, 0)] \end{aligned} \quad (2.214)$$

il s'ensuit,

$$\begin{aligned} [I_n - vA_1 - uA_2] X(u, v) &= [I_n - vA_1] X(0, v) + [I_n - uA_2] X(u, 0) \\ &- x(0, 0) + B_1 v [W(u, v) - W(0, v)] \\ &+ B_2 u [W(u, v) - W(u, 0)] \end{aligned} \quad (2.215)$$

On pose maintenant,

$$G(u, v) = (I_n - vA_1 - uA_2) \quad (2.216)$$

où l'inverse de cette matrice est

$$G^{-1}(u, v) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{ij} u^i v^j \quad (2.217)$$

Sachant que dans [12]

$$G(u, v)G^{-1}(u, v) = G^{-1}(u, v)G(u, v) = I_n \quad (2.218)$$

De l'équation (2.216), (2.217) et (2.218) on aura

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} [\Phi_{ij} - A_1 \Phi_{i,j-1} - A_2 \Phi_{i-1,j}] u^i v^j = I_n \quad (2.219)$$

En comparant les coefficients aux mêmes puissances de u et v on obtient

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} I_n & \text{Si } i = 0, j = 0 \\ A_1 \Phi_{i,j-1} + A_2 \Phi_{i-1,j} & \text{Si } i + j > 0, i, j \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{Si } i < 0 \text{ et /ou } j < 0 \end{cases} \quad (2.220)$$

Par multiplication de l'équation (2.215) par $G^{-1}(u, v)$ et en remplaçant (2.217) en tenant compte de l'expression de Φ_{ij} dans la dernière équation il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} [-\Phi_{ij} u^{i+1} v^{j+1} x(0, 0) + \Phi_{i,j-1} u^i v^{j+1} A_1 X(u, 0) \\ &+ \Phi_{i-1,j} u^{i+1} v^j A_2 X(0, v) - \Phi_{i,j} u^{i+1} v^{j+1} B_1 W(0, v) \\ &- \Phi_{i,j} u^{i+1} v^{j+1} B_2 W(u, 0) + [\Phi_{i,j-1} B_1 + \Phi_{i-1,j} B_2] u^i v^j W(u, v)] \end{aligned} \quad (2.221)$$

de l'utilisation de la transformée de Sumudu inverse $2D$ de (2.221) et le théorème (4.5) nous en déduisons le résultat suivant,

Théorème 4.6. *La solution de la seconde forme du système fractionnaire conformable de Fornasini-Marchesini avec conditions aux limites est donnée par*

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[-\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{ij} x(0, 0) + \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{i,j-1} A_1 J_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \Phi_{i-1,j} A_2 J_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) - \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \Phi_{i,j} B_1 J_{t_2}^{(j+1)\beta} w(0, t_2) \\ & - \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} \Phi_{i,j} B_2 J_{t_1}^{(i+1)\alpha} w(t_1, 0) + [\Phi_{i,j-1} B_1 + \Phi_{i-1,j} B_2] J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} w(t_1, t_2) \end{aligned} \right] \quad (2.222)$$

Remarque 4.2. : Si $\alpha = \beta = 1$, La solution de la seconde forme du système fractionnaire conformable de Fornasini-Marchesini avec conditions aux limites est donnée par

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[-\frac{t_1^i t_2^j}{i! j!} \Phi_{ij} x(0, 0) + \frac{t_2^j}{j!} \Phi_{i,j-1} A_1 J_{t_1}^i x(t_1, 0) \right. \\ & + \frac{t_1^i}{i!} \Phi_{i-1,j} A_2 J_{t_2}^j x(0, t_2) - \frac{t_1^i}{i!} \Phi_{i,j} B_1 J_{t_2}^{(j+1)} w(0, t_2) \\ & \left. - \frac{t_2^j}{j!} \Phi_{i,j} B_2 J_{t_1}^{(i+1)} w(t_1, 0) + [\Phi_{i,j-1} B_1 + \Phi_{i-1,j} B_2] J_{t_1, t_2}^{i,j} w(t_1, t_2) \right] \end{aligned} \quad (2.223)$$

Exemple 4.1. Considérons le système linéaire 2D fractionnaire (2.166) avec $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.8$ et

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où l'entrée du système est considérée comme suit,

$$u(t_1, t_2) = H(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_1 < 0 \text{ Si/et } t_2 < 0 \\ 1 & \text{Si } t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution des équations d'état pour les conditions aux limites nulles est donnée par

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{i-1,j-1} B J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} H(t_1, t_2)$$

Nous remarquons que A_0 est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 2, donc si i et/ou $j \geq 2$, la matrice $\Phi_{i-1,j-1} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, de plus on a $\Phi_{1,1} = A_0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) & = A_0 B \frac{t_1^{2\alpha}}{2\alpha^2} \frac{t_2^{2\beta}}{2\beta^2} \\ x(t_1, t_2) & = \begin{bmatrix} \frac{t_1^{1.4}}{2 \times 0.7^2} & \frac{t_2^{1.6}}{2 \times 0.8^2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.224)$$

ie : $x_1(t_1, t_2) = \frac{t_1^{1.4}}{2 \times 0.7^2} \frac{t_2^{1.6}}{2 \times 0.8^2}$ et $x_2(t_1, t_2) = 0$. Les graphes de la variable d'état $x_1(t_1, t_2)$ sont

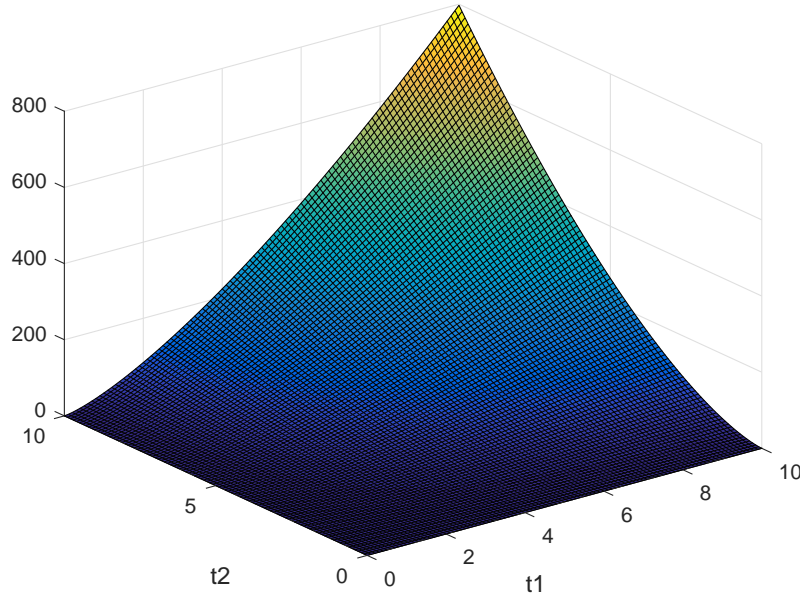


FIGURE 2.5 – La variable d'état $x_1(t_1, t_2)$

Exemple 4.2. *Considérons le système linéaire 2D d'ordre fractionnaire (2.166) avec $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.8$ et*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

où l'entrée du système est prise telle que,

$$u(t_1, t_2) = H(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_1 < 0 \text{ if/and } t_2 < 0 \\ 1 & \text{si } t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Par utilisation de l'équation (2.181) nous calculons la matrice de transition

$$\Phi_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

et

$$\Phi_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ for } i > 1, j > 1. \quad (2.226)$$

La solution des équations d'état pour les conditions aux limites nulles est donnée par

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Phi_{i-1, j-1} B J_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} H(t_1, t_2)$$

Par conséquent

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \frac{t_1^{3\alpha} t_2^{2\beta}}{4\alpha^3 \beta^2} + \frac{t_1^{3\alpha} t_2^{3\beta}}{6\alpha^3 \beta^3} \\ \frac{t_1^{2\alpha} t_2^{3\beta}}{4\alpha^2 \beta^3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.227)$$

Les graphes de la variable d'état $x_1(t_1, t_2)$, $x_2(t_1, t_2)$ sont données par,

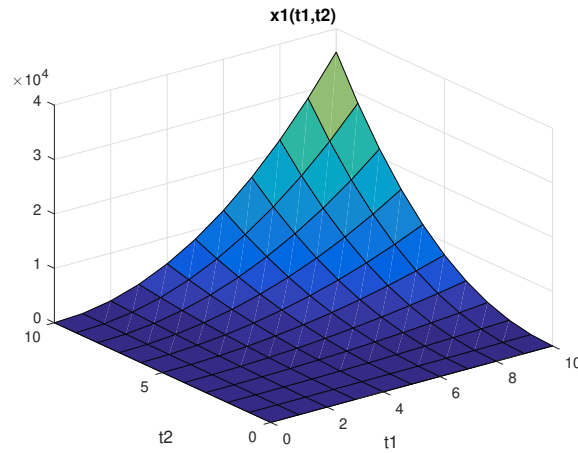


FIGURE 2.6 – La variable d'état $x_1(t_1, t_2)$

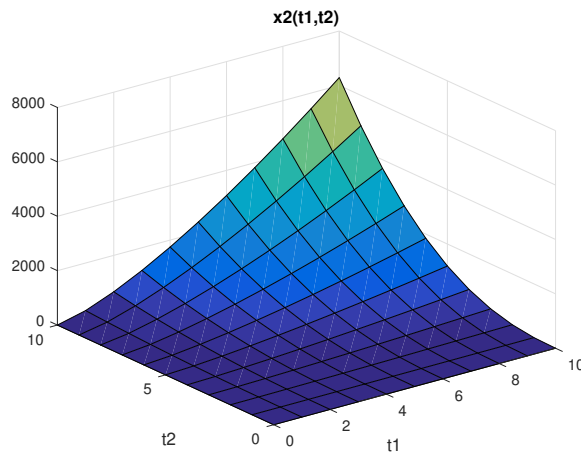


FIGURE 2.7 – La variable d'état $x_2(t_1, t_2)$

4.4 Solution des modèles fractionnaires 2D singuliers

Cette section du chapitre introduit une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires singuliers en temps continu. Nous verrons dans cette partie, les notions de base d'une dérivée fonction de Dirac ainsi que ces propriétés de la transformé de Laplace pour le cas d'un système singulier unidimensionnel. Une vue d'ensemble de la théorie des systèmes singuliers fractionnaires est donnée dans les travaux [19, 35, 40, 42, 45]. Nous nous basons dans notre travail sur ces différentes références pour présenter les caractéristiques des systèmes fractionnaires. Une nouvelle approche est établi pour calculer la solution d'un système fractionnaire 2D singulier en utilisant les matrices des transitions.

Nous rappelons quelques définitions et résultats afin de pouvoir donner la solution d'une nouvelle classe de système fractionnaire singulier. Notons que la drivée fractionnaire dans cette partie est au sens de Caputo.

Définition 4.7. [8] *La double intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville notée $I_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(t_1, t_2)$ est donnée par*

$$I_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (t_1 - \tau_1)^{\alpha-1} (t_2 - \tau_2)^{\beta-1} f(\tau_1, \tau_2) d\tau \quad (2.228)$$

Théorème 4.7. [8] *La transformée de Laplace de la fonction $t_1^\alpha t_2^\beta$ est sous la forme,*

$$\mathcal{L} \left[t_1^\alpha t_2^\beta \right] = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)}{p^{\alpha+1} s^{\beta+1}}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1, \beta \in \mathbb{R}, \beta > -1$.

Théorème 4.8. [19] *La transformée de Laplace inverse de la fonction définie par $p^{-\alpha}$ est décrite par*

$$\mathcal{L}^{-1} [p^{-\alpha}] = \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ for } \alpha > 0 \quad (2.229)$$

Théorème 4.9. [42]

La transformée de Laplace inverse de l'expression $p^{i\alpha}$ est telle que

$$\mathcal{L}^{-1} [p^{i\alpha}] = \delta^{(i\alpha)}(t) \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}_+$$

où $\delta^{(i\alpha)}(t)$ est le dérivée fractionnaire d'ordre ($i\alpha$) au sens des distributions de la fonction de Dirac.

Théorème 4.10. [42] *La transformée de Laplace inverse de la fonction $p^{i\alpha} f(p)$ est,*

$$\mathcal{L}^{-1}(p^{i\alpha} f(p)) = f^{(i\alpha)}(t) \quad (2.230)$$

où $f^{(i\alpha)}(t)$ est la dérivée fractionnaire d'une fonction $f(t)$.

Nous désignons $F(p, t_2)$, $F(t_1, s)$ la transformée de Laplace unidimensionnel d'une fonction continue $f(t_1, t_2)$ par rapport à t_1, t_2 respectivement définie dans [19] par

$$\begin{aligned} F(p, t_2) &= \mathcal{L}_{t_1} [f(t_1, t_2)] = \int_0^\infty f(t_1, t_2) e^{-pt_1} dt_1 \\ F(t_1, s) &= \mathcal{L}_{t_2} [f(t_1, t_2)] = \int_0^\infty f(t_1, t_2) e^{-st_2} dt_2 \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la fonction $f(t_1, t_2)$ est,

$$F(p, s) = \mathcal{L}_{t_1, t_2} [f(t_1, t_2)] = \mathcal{L}_{t_1} \{ \mathcal{L}_{t_2} [f(t_1, t_2)] \} = \mathcal{L}_{t_2} \{ \mathcal{L}_{t_1} [f(t_1, t_2)] \}$$

Théorème 4.11. [8] La transformée de Laplace de la fonction $D_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} f(t_1, t_2)$ où $0 < \alpha \leq 1$ et $0 < \beta \leq 1$ est présentée par,

$$p^\alpha s^\beta F(p, s) - p^\alpha s^{\beta-1} F(p, 0) - p^{\alpha-1} s^\beta F(0, s) + p^{\alpha-1} s^{\beta-1} f(0, 0)$$

On considère le modèle singulier fractionnaire $2D$ à temps continu décrit par l'équation suivante

$$\begin{aligned} ED_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) &= A_0 x(t_1, t_2) + A_1 D_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2) + A_2 D_{t_2}^\beta x(t_1, t_2) \\ &+ Bu(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.231)$$

où $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, 2$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les conditions aux limites $x(0, t_2)$ et $x(t_1, 0)$ sont données.

Nous proposons d'abord une nouvelle extension du théorème 4.9 et 4.10 .

Théorème 4.12. La transformée de Laplace inverse de l'expression $p^{i\alpha} s^{j\beta}$ est décrite par

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} [p^{i\alpha} s^{j\beta}] = \delta^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2) \quad \text{for } i, j \in \mathbb{Z}_+$$

où $\delta^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2)$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $(i\alpha, j\beta)$ au sens des distributions pour la fonction de Dirac.

Démonstration. L'idée de la preuve de ce théorème est basée sur le fait que les deux variables t_1 et t_2 sont indépendantes et en utilisant le résultat dans le théorème 4.9.

Sachant que,

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} [f(p, s)] = \mathcal{L}_{t_1}^{-1} [\mathcal{L}_{t_2}^{-1} f(p, s)] = \mathcal{L}_{t_2}^{-1} [\mathcal{L}_{t_1}^{-1} f(p, s)] \quad (2.232)$$

En appliquant le théorème 4.9 à la fonction $f(p, s) = p^{i\alpha} s^{j\beta}$ for $i, j \in \mathbb{Z}_+$ on a,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} [p^{i\alpha} s^{j\beta}] &= \mathcal{L}_{t_2}^{-1} [\mathcal{L}_{t_1}^{-1} p^{i\alpha} s^{j\beta}] \\
 &= \mathcal{L}_{t_2}^{-1} [\delta^{(i\alpha)}(t_1, t_2) s^{j\beta}] \\
 &= \delta^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2)
 \end{aligned} \tag{2.233}$$

□

Théorème 4.13. *La transformée de Laplace inverse de l'expression $p^{i\alpha} s^{j\beta} f(p, s)$ est donc égale à,*

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} (p^{i\alpha} s^{j\beta} f(p, s)) = f^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2) \tag{2.234}$$

où $f^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2)$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $(i\alpha, j\beta)$ de la fonction $f(t_1, t_2)$.

Démonstration. Du théorème 4.10 et de l'équation (2.233) il résulte que,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} [p^{i\alpha} s^{j\beta} f(p, s)] &= \mathcal{L}_{t_2}^{-1} [\mathcal{L}_{t_1}^{-1} p^{i\alpha} s^{j\beta} f(p, s)] \\
 &= \mathcal{L}_{t_2}^{-1} [f^{(i\alpha)}(t_1, t_2) s^{j\beta}] \\
 &= f^{(i\alpha, j\beta)}(t_1, t_2)
 \end{aligned} \tag{2.235}$$

□

En appliquant la transformée de Laplace 2D à l'équation (2.231) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &E(p^\alpha s^\beta X(p, s) - p^\alpha s^{\beta-1} X(p, 0) - p^{\alpha-1} s^\beta X(0, s) + p^{\alpha-1} s^{\beta-1} x(0, 0)) \\
 &= A_0 X(p, s) + BU(p, s) + A_1 [p^\alpha X(p, s) - p^{\alpha-1} X(0, s)] \\
 &\quad + A_2 [s^\beta X(p, s) - s^{\beta-1} X(p, 0)]
 \end{aligned} \tag{2.236}$$

Par multiplication des deux côtés de l'égalité (2.236) par $p^{-\alpha} s^{-\beta}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 &E(X(p, s) - s^{-1} X(p, 0) - p^{-1} X(0, s) + p^{-1} s^{-1} x(0, 0)) \\
 &= p^{-\alpha} s^{-\beta} A_0 X(p, s) + p^{-\alpha} s^{-\beta} BU(p, s) + A_1 [s^{-\beta} X(p, s) - p^{-1} s^{-\beta} X(0, s)] \\
 &\quad + A_2 [p^{-\alpha} X(p, s) - p^{-\alpha} s^{-1} X(p, 0)]
 \end{aligned} \tag{2.237}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 &(E - p^{-\alpha} s^{-\beta} A_0 - s^{-\beta} A_1 - p^{-\alpha} A_2) X(p, s) \\
 &= + p^{-\alpha} s^{-\beta} BU(p, s) + [p^{-1} E - p^{-1} s^{-\beta} A_1] X(0, s) \\
 &\quad + [s^{-1} E - s^{-1} p^{-\alpha} A_2] X(p, 0) - p^{-1} s^{-1} E x(0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.238}$$

On note que,

$$G(p, s) = (E - p^{-\alpha} s^{-\beta} A_0 - s^{-\beta} A_1 - p^{-\alpha} A_2) \quad (2.239)$$

Si nous utilisons la définition de la série de Laurent comme dans [63], nous pouvons donner l'inverse de $G(p, s)$ qui est,

$$G^{-1}(p, s) = \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{j=-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha} s^{-j\beta} \quad (2.240)$$

et sachant que,

$$G^{-1}(p, s)G(p, s) = G(p, s)G^{-1}(p, s) = I_n \quad (2.241)$$

Par l'utilisation des résultats obtenus dans [63] pour des systèmes discrets bidimensionnels, et en supposant que μ_1 et μ_2 sont finis, L'inverse de $G(p, s)$ est présenté sous la forme

$$(G(p_1, s_1))^{-1} = \frac{1}{\Delta(p_1, s_1)} R(p_1, s_1)$$

où $p_1 = p^\alpha$, $s_1 = s^\beta$, $\Delta(p_1, s_1) = \det G(p_1, s_1)$ et $R(p_1, s_1) = \text{adj}(G(p_1, s_1))$.

Pour un polynôme à deux variables $K(p_1, s_1)$ on définit $\deg_{p_1}(K(p_1, s_1))$ comme le degré de $K(p_1, s_1)$ suivant p_1 , et de la même manière pour $\deg_{s_1}(K(p_1, s_1))$; on note $\deg_{s_1}(K(p_1, s_1))$ le degré de $K(p_1, s_1)$ suivant s_1 ; puis on introduit les entiers qui précèdent comme suit :

$$r_1 = \deg_{p_1}(\Delta(p_1, s_1))$$

$$r_2 = \deg_{s_1}(\Delta(p_1, s_1))$$

$$r = \deg(\Delta(p_1, s_1))$$

$$f_1 = \deg_{p_1}(R(p_1, s_1))$$

$$f_2 = \deg_{s_1}(R(p_1, s_1))$$

Théorème 4.14. [63] *On suppose que $r = r_1 + r_2$, alors les coefficients $\Phi_{i,j}$ sont uniques pour une valeur minimale de (μ_1, μ_2) définie par*

$$\begin{aligned} \mu_1 &= f_1 - r_1 + 1 \\ \mu_2 &= f_2 - r_2 + 1 \end{aligned} \quad (2.242)$$

En comparant les coefficients aux mêmes puissances de p et s on obtient la nouvelle définition

de matrice de transition

$$E\Phi_{ij} = \begin{cases} A_0\Phi_{00} + \Phi_1\Phi_{10} + A_2\Phi_{01} + I & \text{if } i = 1, j = 1 \\ A_0\Phi_{i-1,j-1} + A_1\Phi_{i,j-1} + A_2\Phi_{i-1,j} & \text{if } i \neq 1 \text{ and/or } j \neq 1 \\ 0 & \text{if } i < -\mu_1 \text{ and /or } j < -\mu_2 \end{cases} \quad (2.243)$$

pour plus de détails sur le calcul de la matrice de transition et leurs propriétés on se réfère à [35, 63, 64] .

En multipliant l'équation (2.238) par $G^{-1}(p, s)$ exprimée en (2.240) on obtient

$$\begin{aligned} X(p, s) &= \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha} s^{-j\beta} \times p^{-\alpha} s^{-\beta} BU(p, s) \\ &\quad - \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha} s^{-j\beta} \times p^{-1} s^{-1} Ex(0, 0) \\ &\quad + \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha} s^{-j\beta} \times [p^{-1}E - p^{-1}s^{-\beta}A_1] X(0, s) \\ &\quad + \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha} s^{-j\beta} \times [s^{-1}E - s^{-1}p^{-\alpha}A_2] X(p, 0) \end{aligned} \quad (2.244)$$

Si nous simplifions la dernière équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} X(p, s) &= \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \\ &\quad - \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \\ &\quad + \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\ &\quad + \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha} s^{-j\beta-1} E - p^{-(i+1)\alpha} s^{-j\beta-1} A_2] X(p, 0) \end{aligned} \quad (2.245)$$

Par application de la transformation de Laplace inverse

$$\begin{aligned}
 x(t_1, t_2) = & \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \right) \\
 & - \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \right) \\
 & + \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \right) \\
 & + \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha} s^{-j\beta-1} E - p^{-(i+1)\alpha} s^{-j\beta-1} A_2] X(p, 0) \right)
 \end{aligned} \tag{2.246}$$

Avant de calculer la transformée de Laplace inverse 2D, nous divisons toute la double somme :

1. Premièrement

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) = & \sum_{-\mu_1}^{-1} \sum_{-\mu_2}^{-1} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_{-\mu_1}^{-1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{-1} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.247}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) = & \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} p^{i\alpha-1} s^{j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} p^{i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} p^{-i\alpha-1} s^{j\beta-1} Ex(0, 0) \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta-1} Ex(0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.248}$$

En utilisant la propriété de δ de notre théorème 4.12 et la transformée de Laplace

inverse 2D nous trouvons le résultat suivant,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha-1} s^{-(j+1)\beta-1} Ex(0,0) \right) &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(i\alpha-1, j\beta-1)}(t_1, t_2) Ex(0,0) \\
 &+ \left[\sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} Ex(0,0) \right] \\
 &+ \left[\sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} \delta^{(j\alpha-1)}(t_1, t_2) \frac{t_1^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)} Ex(0,0) \right] \\
 &+ \left[\sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_1^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} Ex(0,0) \right]
 \end{aligned} \tag{2.249}$$

2. Pour la deuxième somme

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) &= \sum_{-\mu_1}^{-1} \sum_{-\mu_2}^{-1} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_{-\mu_1}^{-1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{-1} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s)
 \end{aligned} \tag{2.250}$$

Comme dans la première somme,

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} p^{(i-1)\alpha} s^{(j-1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} p^{(i-1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} p^{-(i+1)\alpha} s^{(j-1)\beta} BU(p, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s)
 \end{aligned} \tag{2.251}$$

En utilisant la propriété de $\delta(t_1, t_2)$ de notre théorème 4.12 et la transformée de Laplace

inverse $2D$, le résultat suivant est donc établi,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} p^{-(i+1)\alpha} s^{-(j+1)\beta} BU(p, s) \right) &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} Bu^{(i-1)\alpha, (j-1)\beta}(t_1, t_2) \\
 &+ \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau_2)^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} Bu^{(i-1)\alpha}(t_1, t_2) d\tau_2 \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_1^{+\mu_2} \Phi_{i,-j} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau_1)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} Bu^{(j-1)\beta}(t_1, t_2) d\tau_1 \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau_2)^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} \frac{(t_1 - \tau_1)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} Bu(t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{2.252}$$

3. Pour la troisième somme

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &= \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s)
 \end{aligned} \tag{2.253}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} [p^{i\alpha-1} s^{j\beta} E - p^{i\alpha-1} s^{(j-1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} [p^{i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} [p^{-i\alpha-1} s^{j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{(j-1)\beta} A_1] X(0, s) \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s)
 \end{aligned} \tag{2.254}$$

De manière similaire, la propriété $\delta(t_1, t_2)$ du théorème 4.12 et la transformée de Laplace

inverse 2D nous donne,

$$\begin{aligned}
 & L_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{\infty} \sum_{-\mu_2}^{\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha-1} s^{-j\beta} E - p^{-i\alpha-1} s^{-(j+1)\beta} A_1] X(0, s) \right) \\
 &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) [Ex^{(j\beta)}(0, t_2) - A_1 x^{(j-1)\beta}(0, t_2)] \\
 &+ \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) [EI_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) - A_1 I_{t_2}^{(j+1)\beta} x(0, t_2)] \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} [Ex^{(j\beta)}(0, t_2) - A_1 x^{(j-1)\beta}(0, t_2)] \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} [EI_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) - A_1 I_{t_2}^{(j+1)\beta} x(0, t_2)]
 \end{aligned} \tag{2.255}$$

4. De même pour la 3ème somme on obtient

$$\begin{aligned}
 & L_{t_1, t_2}^{-1} \left(\sum_{-\mu_1}^{+\infty} \sum_{-\mu_2}^{+\infty} \Phi_{i,j} [p^{-i\alpha} s^{-j\beta-1} E - p^{-(i+1)\alpha} s^{-j\beta-1} A_2] X(p, 0) \right) \\
 &= \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(j\beta-1)}(t_1, t_2) [Ex^{(i\alpha)}(t_1, 0) - A_1 x^{(i-1)\alpha}(t_1, 0)] \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,j} \delta^{(j\beta-1)}(t_1, t_2) [EI_{t_2}^{i\alpha} x(t_1, 0) - A_1 I_{t_2}^{(i+1)\alpha} x(t_1, 0)] \\
 &+ \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,-j} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} [Ex^{(i\alpha)}(t_1, 0) - A_1 x^{(i-1)\alpha}(t_1, 0)] \\
 &+ \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} [EI_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) - A_1 I_{t_2}^{(i+1)\alpha} x(t_1, 0)]
 \end{aligned} \tag{2.256}$$

Par l'utilisation des équations (2.249), (2.252), (2.253) et (2.256), nous établissons la solution générale du système 2D singulier (2.231).

Théorème 4.15. *La solution générale du système (2.231) est de la forme,*

$$\begin{aligned}
 x(t_1, t_2) = & \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(i\alpha-1, j\beta-1)}(t_1, t_2) Ex(0, 0) + \left[\sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) \times \right. \\
 & \left. \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} Ex(0, 0) \right] + \left[\sum_0^{+\infty} \sum_1^{+\mu_2} \Phi_{i,-j} \delta^{(j\alpha-1)}(t_1, t_2) \times \frac{t_1^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)} Ex(0, 0) \right] \\
 & + \left[\sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_1^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} Ex(0, 0) \right] \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} Bu^{(i-1)\alpha, (j-1)\beta}(t_1, t_2) \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau_2)^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} Bu^{(i-1)\alpha}(t_1, t_2) d\tau_2 \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_1^{+\mu_2} \Phi_{i,-j} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau_1)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} Bu^{(j-1)\beta}(t_1, t_2) d\tau_1 \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau_2)^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} \frac{(t_1 - \tau_1)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} Bu(t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) [Ex^{(j\beta)}(0, t_2) - A_1 x^{(j-1)\beta}(0, t_2)] \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{-i,j} \delta^{(i\alpha-1)}(t_1, t_2) [EI_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) - A_1 I_{t_2}^{(j+1)\beta} x(0, t_2)] \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{i,-j} \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} [Ex^{(j\beta)}(0, t_2) - A_1 x^{(j-1)\beta}(0, t_2)] \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} [EI_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) - A_1 I_{t_2}^{(j+1)\beta} x(0, t_2)] \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,-j} \delta^{(j\beta-1)}(t_1, t_2) [Ex^{(i\alpha)}(t_1, 0) - A_1 x^{(i-1)\alpha}(t_1, 0)] \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_1^{\mu_2} \Phi_{-i,j} \delta^{(j\beta-1)}(t_1, t_2) [EI_{t_2}^{i\alpha} x(t_1, 0) - A_1 I_{t_2}^{(i+1)\alpha} x(t_1, 0)] \\
 & + \sum_1^{\mu_1} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,-j} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} [Ex^{(i\alpha)}(t_1, 0) - A_1 x^{(i-1)\alpha}(t_1, 0)] \\
 & + \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} [EI_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) - A_1 I_{t_2}^{(i+1)\alpha} x(t_1, 0)]
 \end{aligned} \tag{2.257}$$

Remarque 4.3. 1. Si on considère le système standard avec $E = I_n$ on obtient la même solution pour le modèle de Fornasini-Marchesini obtenue dans [8].

4. ANALYSE DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS

2. Ce résultat est une extension de [42].

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ -\frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} T_{ij} x(0, 0) + T_{i-1, j-1} B I_{t_1, t_2}^{i\alpha, j\beta} u(t_1, t_2) \right. \\ \left. + \frac{t_2^{j\beta}}{\Gamma(j\beta + 1)} [T_{ij} - T_{i-1, j} A_2] I_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) + \frac{t_1^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} [T_{ij} - T_{i, j-1} A_1] I_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right\} \quad (2.258)$$

Nous allons par la suite, présentés quelques exemples illustratifs pour valider nos résultats.

Exemple 4.3. *Considérons le système linéaire 2D d'ordre fractionnaire (2.231) avec $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.5$ et*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour calculer la matrice de transition il faut faire le calcul suivant

$$[E p_1 s_1 - A_0 - A_1 p_1 - A_2 s_1]^{-1} = \begin{bmatrix} -p_1 & p_1 s_1 \\ 0 & -s_1 \end{bmatrix}^{-1} \\ = \Phi_{00} + \Phi_{10} p_1^{-1} + \Phi_{01} s_1^{-1}$$

où

$$\Phi_{00} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Le vecteur qui représente le contrôle du système est considéré sous la forme,

$$u(t_1, t_2) = H(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t_1 < 0 \text{ et/ou } t_2 < 0 \\ 1 & \text{Si } t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution des équations d'état pour les conditions aux limites nulles est donnée par

$$x(t_1, t_2) = \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - \tau_2)^{(j+1)\beta-1}}{\Gamma((j+1)\beta)} \frac{(t_1 - \tau_1)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} B u(t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.259)$$

$$x(t_1, t_2) = \sum_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \Phi_{i,j} B \frac{t_1^{(i+1)\alpha} t_2^{(j+1)\beta}}{\Gamma((i+1)\alpha + 1) \Gamma((j+1)\beta + 1)} \quad (2.260)$$

Nous obtenons alors la solution de notre système

$$x(t_1, t_2) = \frac{t_1^\alpha t_2^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \Phi_{0,0} B + \frac{t_1^\alpha t_2^{2\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\beta + 1)} \Phi_{0,1} B + \frac{t_1^{2\alpha} t_2^\beta}{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \Phi_{1,0} B \quad (2.261)$$

Finalemment

$$x(t_1, t_2) = \left(\begin{array}{c} \frac{t_1^{0.8} t_2^{0.5}}{\Gamma(0.8+1)\Gamma(0.5+1)} - \frac{t_1^{2 \times 0.8} t_2^{0.5}}{\Gamma(0.5+1)\Gamma(2 \times 0.8+1)} \\ \frac{t_1^{0.8} t_2^{2 \times 0.5}}{\Gamma(0.8+1)\Gamma(2 \times 0.5+1)} \end{array} \right) \quad (2.262)$$

Les graphes suivants représentent la trajectoire d'état de notre exemple

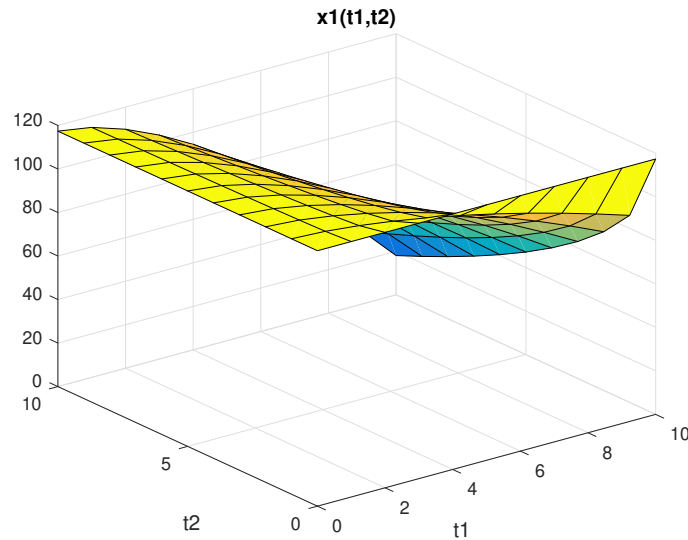


FIGURE 2.8 – La variable d'état $x_1(t_1; t_2)$

et

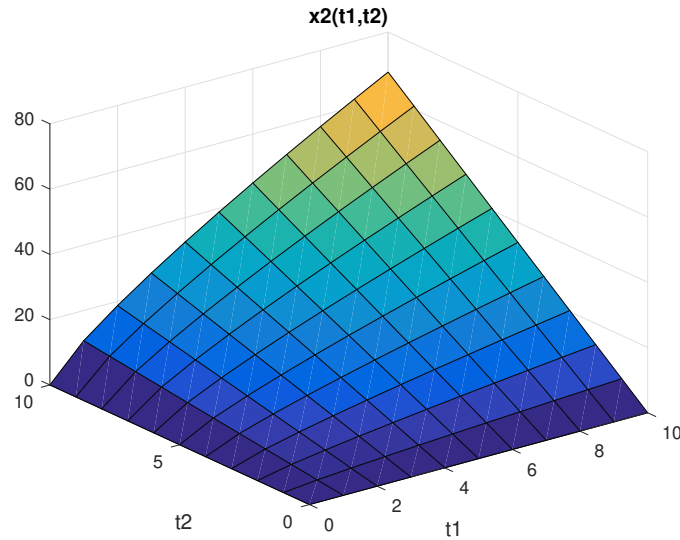


FIGURE 2.9 – La variable d'état $x_2(t_1; t_2)$

Conclusion et remarques :

1. Pour les trois premières sections de ce chapitre nous avons introduit la notion de la dérivée fractionnaire conformable et puis une étude sur le problème de solvabilité, contrôlabilité et de l'énergie minimale pour un système fractionnaire unidimensionnel a été réalisée.
2. La quatrième section de ce chapitre a été faite en deux parties, la première traite de l'efficacité et la solvabilité des modèles bidimensionnels ($2D$). Cette étude explore les nouvelles dérivées fractionnaires et les transformations étendues pour une classe de modèles. Une transformation de Sumudu $2D$ et une transformation de Laplace $2D$ ont été utilisées pour établir la solution des modèles continus de Fornasini-Marchesini par l'utilisation des dérivés conformables. Une nouvelle définition et des propriétés de Sumudu dans le cas bi-dimensionnel ont été données. Ensuite et en deuxième partie le but est de calculer la solution des modèles bidimensionnels singuliers décrits par le modèle de Fornasini-Marchesini sachant que la dérivée dans cette partie est au sens de Caputo ; cette approche est basée sur l'importance et l'utilisation de la matrice fondamentale et le delta Kronecker pour résoudre cette classe de système.

Contrôle à énergie minimale, Discrétisation et influence sur la positivité des systèmes fractionnaires

Dans ce chapitre, nous procéderons à l'étude en deux parties. Nous introduisant dans la première partie la notion de discrétisation pour un système fractionnaire linéaire conformable à une dimension en temps continu d'ordre α où $0 < \alpha \leq 1$ et l'influence du pas de discrétisation sur la positivité de cette classe de systèmes, puis en deuxième partie nous traiterons le problème de solvabilité et les conditions nécessaires et suffisantes sur la positivité d'un système bidimensionnel à temps continu-discret (hybride) qui généralise le modèle de Fornasini-Marchesini pour pouvoir étudier le problème de contrôlabilité et d'énergie minimale pour cette classe de systèmes.

1 Positivité des systèmes conformable unidimensionnels

Cette partie traite la classe des systèmes linéaires fractionnaires conformables. Pour cela, nous considérons le système linéaire fractionnaire en temps continu qui est défini pour $0 < \alpha \leq 1$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$T^\alpha X(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$Y(t) = CX(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

$X(t)$ représente le vecteur d'état et $Y(t)$ la sortie du système. Notons que la dérivée fractionnaire de l'équation (3.1) est la dérivée conformable.

Définition 1.1. [34] *Le système (3.1) est dit positif si et seulement si toutes les états et toutes les sorties sont positifs ie : $X(t) \in \mathbb{R}_+^n, Y(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour toutes $X_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^n$.*

Théorème 1.1. [34] *Le système décrit par les équations (3.1),(3.2) est positif si et seulement si,*

$$A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \quad (3.3)$$

1.1 Processus de discrétisation

En se basant sur les résultats de [33], la discrétisation du système (3.1) est comme suit.

On considère le système fractionnaire suivant

$$T^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad 0 < t \leq T, x(0) = x_0 \quad (3.4)$$

La discrétisation de la dérivée conformable donne alors

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h^\alpha}{\alpha} f(x_n) \quad (3.5)$$

Par l'application du théorème ?? au système (3.1), (3.2) on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soit $h > 0$, les systèmes à temps continus (3.1) et (3.2) sont discrétisées en deux systèmes discrets*

$$x_{n+1} = \tilde{A}x_n + \tilde{B}u_n \quad (3.6)$$

$$y_n = Cx_n + Du_n \quad (3.7)$$

avec

$$\tilde{A} = \left[\frac{h^\alpha}{\alpha} A + I \right] \text{ and } \tilde{B} = \frac{h^\alpha}{\alpha} B \quad (3.8)$$

Démonstration.

Dans l'équation (2.3) on choisit $f(x(t)) = Ax(t) + Bu(t)$ donc on obtient,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h^\alpha}{\alpha} [Ax_n + Bu_n] \\ x_{n+1} &= \left[\frac{h^\alpha}{\alpha} A + I \right] x_n + \frac{h^\alpha}{\alpha} Bu_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si nous mettons

$$\tilde{A} = \left[\frac{h^\alpha}{\alpha} A + I \right] \text{ and } \tilde{B} = \frac{h^\alpha}{\alpha} B \quad (3.10)$$

Par conséquent

$$x_{n+1} = \tilde{A}x_n + \tilde{B}x_n \quad (3.11)$$

$$y_n = Cx_n + Du_n \quad (3.12)$$

ce qui complète la preuve du théorème. \square

La solution du système discret obtenu par discrétisation est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.3. [45] *La solution du système (3.6) est*

$$x_n = \tilde{A}^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{A}^{n-1-i} \tilde{B}u_i \quad (3.13)$$

et sa sortie

$$y_n = Cx_n + Du_n \quad (3.14)$$

1.2 Influence de la discrétisation sur la positivité

Notre étude dans cette partie est basée sur la question suivante : Si le système défini par les équations (3.1) et (3.2) est positif, est ce que (3.6) et (3.7) restent aussi positifs ? Si oui sous qu'elles conditions ? Nous énonçons dans ce qui suit un théorème permettant de nous aider à répondre à la question posée.

Théorème 1.4. [18] *Le système (3.6) et (3.7) est positif si et seulement si,*

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \tilde{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \quad (3.15)$$

Démonstration.

1. Condition nécessaire,

Si $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ et $u_i \in \mathbb{R}^+$ avec toutes les conditions initiales sont positives, alors $\tilde{A}^n x_0$ est positive, de même pour $\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{A}^{n-1-i} \tilde{B}u_i$ par conséquent x_n est positif.

2. Condition suffisante :

On suppose que $x_0 = e_i$ (la i^{me} colonne de la matrice identité) et $u_n = 0$ de l'équation (3.13) on trouve,

$$X_1 = \tilde{A}x_0 = \tilde{A}e_i = \tilde{A}_i \quad (3.16)$$

CHAPITRE 3. **CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES**
 1. POSITIVITÉ DES SYSTÈMES CONFORMABLE UNIDIMENSIONNELS

tel que \tilde{A}_i est la i^{me} colonne de la matrice \tilde{A} , donc $\tilde{A}_i = x_1 \in \mathbb{R}_+^n$. En continuant notre raisonnement tout au long des autres colonnes, nous déduisons que \tilde{A} est positive.

De la même manière pour $x_0 = 0$, on trouve $\tilde{B}u_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ce qui implique que $\tilde{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ puisque $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$ est arbitraire.

Pour la sortie y_n , si $u_n = 0$ alors : $y_0 = Cx_0 \in \mathbb{R}_+^p$ et $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ puisque x_0 est quelconque. et si $x_0 = 0$ alors : $y_0 = Du_0 \in \mathbb{R}_+^p$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ du fait que u_0 est quelconque. □

Le théorème suivant va nous montrer qu'elle condition vas influencer sur la positivité du système discrétisé.

Théorème 1.5. *Soit $h > 0$ le pas de discrétisation du système (3.1), alors si les conditions (3.3) sont vérifiées nous avons l'un des deux cas suivants,*

- 1) *Si A est une matrice de Metzler positive (i.e une matrice de Metzler où les éléments diagonaux sont positives), alors le système défini par (3.6) et (3.7) reste positif pour toute valeur de $h > 0$.*
- 2) *Si A est une matrice de Metzler non positive (i.e une matrice de Metzler où au moins un des éléments diagonaux est strictement négatif), alors le système défini par (3.6) et (3.7) restera positif si et seulement si,*

$$0 < h \leq \left(\frac{\alpha}{\max |a_{ii}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.17)$$

Démonstration. Soit $h > 0$ et supposons que le système (3.1) et (3.2) est positif si et seulement si,

$$A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$$

avec A est une matrice de Metzler.

Puisque $h > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ et suite à la discrétisation faite au théorème (1.2) nous avons,

$$\tilde{A} = \left[\frac{h^\alpha}{\alpha} A + I \right] \text{ et } \tilde{B} = \frac{h^\alpha}{\alpha} B \quad (3.18)$$

On distingue deux cas possibles,

1. Si A est de Metzler positive, $\tilde{A} = \frac{h^\alpha}{\alpha} A + I$ est positive d'où la 1^{ère} relation du théorème est évidente.
2. Si A est de Metzler non positive i.e : s'il existe au moins une entrée diagonale de la matrice A qui soit strictement négative, \tilde{A} n'est pas nécessairement positive.

CHAPITRE 3. CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES
1. POSITIVITÉ DES SYSTÈMES CONFORMABLE UNIDIMENSIONNELS

— La condition nécessaire : puisque toutes les entrées hors diagonale de la matrice A sont positives et de la matrice $\frac{-\alpha}{h^\alpha}I_n$ sont nulles alors on doit comparer les éléments diagonaux de A et la valeur de $\frac{-\alpha}{h^\alpha}I_n$.

* Pour un premier cas : $a_{ii} \geq 0 \Rightarrow a_{ii} \geq 0 \geq \frac{-\alpha}{h^\alpha}$

** Pour un deuxième cas : $0 \geq a_{ii} \geq \frac{-\alpha}{h^\alpha}$, et comme les éléments diagonaux de \tilde{A} sont positifs,

$$\frac{h^\alpha}{\alpha}a_{ii} + 1 \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{h^\alpha}{\alpha}a_{ii} \geq -1 \quad (3.20)$$

$$\frac{h^\alpha}{\alpha}(-a_{ii}) \leq 1 \quad (3.21)$$

$$\frac{h^\alpha}{\alpha}| - a_{ii} | \leq 1 \quad (3.22)$$

cette inégalité est vraie pour n'importe qu'elle valeur de i , donc elle reste aussi vraie pour $\max|a_{ii}|$ doù,

$$\frac{h^\alpha}{\alpha}\max|a_{ii}| \leq 1 \quad (3.23)$$

$$h^\alpha \leq \frac{\alpha}{\max|a_{ii}|} \quad (3.24)$$

$$h \leq \left(\frac{\alpha}{\max|a_{ii}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.25)$$

— La condition suffisante : Supposons que A est de Metzler avec au moins une entrée diagonale strictement négative et on démontre que \tilde{A} est positive ie : si $a_{ii} \geq 0$ pour $i \neq j$ et on montre que les éléments hors diagonaux de $\tilde{A} = \frac{h^\alpha}{\alpha}A + I$ sont positifs.

Si $a_{ii} \geq 0$ les éléments hors diagonaux de \tilde{A} sont positifs. et pour les entrées négatives de A qui vérifient,

$$h \leq \left(\frac{1}{\max|a_{ii}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

nous avons dans ce cas,

$$h^\alpha \leq \frac{\alpha}{\max|a_{ii}|} \quad (3.26)$$

Par suite

$$\max|a_{ii}| \frac{h^\alpha}{\alpha} \leq 1 \quad (3.27)$$

Ce qui nous donne,

$$|a_{ii}| \frac{h^\alpha}{\alpha} \leq \max |a_{ii}| \frac{h^\alpha}{\alpha} \leq 1 \quad (3.28)$$

Par conséquent

$$\frac{h^\alpha}{\alpha} |a_{ii}| \leq 1 \quad (3.29)$$

et puisque $a_{ii} < 0$

$$-\frac{h^\alpha}{\alpha} a_{ii} \geq 1 \quad (3.30)$$

On obtient

$$\frac{h^\alpha}{\alpha} a_{ii} \geq -1 \quad (3.31)$$

Donc

$$\frac{h^\alpha}{\alpha} a_{ii} + 1 \geq 0 \quad (3.32)$$

On en déduit que tous les coefficients diagonaux de la matrice \tilde{A} sont positifs.

□

Exemple 1.1. *Considérons les systèmes (3.1) et (3.2) pour $\alpha = 0.5$ et les matrices*

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1$$

En appliquant le théorème 1.1 de positivité, on trouve que notre système est positif; et puisque A est une matrice de Metzler non positive, alors pour garantir la positivité du système obtenu par discrétisation, on doit prendre le pas h qui vérifie,

$$h \leq \left(\frac{0.5}{\max |a_{ii}|} \right)^{\frac{1}{0.5}} \quad (3.33)$$

alors

$$0 < h \leq 0.0039 \quad (3.34)$$

1. Soit $\epsilon_1 = 0.03$, $h_1 = 0.0039 + \epsilon_1 = 0.0339$. le système obtenu par la discrétisation avec ce pas h_1 n'est pas positif car

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.9462 & 0.7365 \\ 0.3683 & -1.5779 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 3. **CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES**
 1. POSITIVITÉ DES SYSTÈMES CONFORMABLE UNIDIMENSIONNELS

de plus la figure suivante nous montre que la solution n'est pas positive. (voir Figure 3.1)

2. Soit $\epsilon_2 = 0.001$, $h_2 = 0.0039 - \epsilon_2 = 0.0029$. Le système obtenu par la discrétisation avec ce pas h_2 est positif car

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1374 & 0.2156 \\ 0.1078 & 0.2453 \end{bmatrix}$$

de plus la figure suivante nous montre que la solution est positive. (voir Figure 3.2)

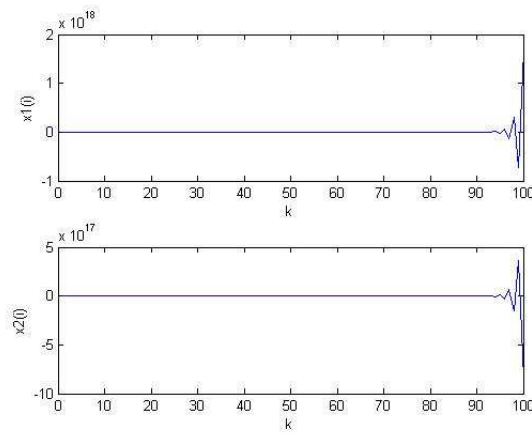


FIGURE 3.1 – Vecteur d'état du système de l'exemple (1.1) avec $h = 0.0339$.

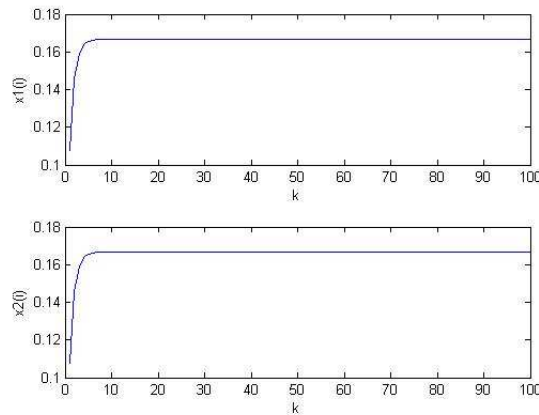


FIGURE 3.2 – Vecteur d'état du système de l'exemple (1.1) avec $h = 0.0029$.

Exemple 1.2. Soit le système (3.1) , (3.2) pour $\alpha = 0.5$ et

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 0 \\ 2 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1$$

CHAPITRE 3. **CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES**
 1. POSITIVITÉ DES SYSTÈMES CONFORMABLE UNIDIMENSIONNELS

En appliquant le théorème 1.1 de positivité donc on trouve que notre système est positive. et puisque A est une matrice de Metzler non positif, alors pour garantir la positivité du système obtenu par la discrétisation on doit prendre le pas h qui vérifie,

$$h \leq \left(\frac{0.5}{\max |a_{ii}|} \right)^{\frac{1}{0.5}} \quad (3.35)$$

soit,

$$0 < h \leq 0.0015 \quad (3.36)$$

1. Pour $\epsilon_1 = 0.01$, $h_1 = 0.0015 + \epsilon_1 = 0.0115$. le système obtenu par la discrétisation avec ce pas h_1 n'est pas positif car

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.1428 & 0 & 0 \\ 0.2143 & -1.7857 & 0 \\ 0.4286 & 0 & -1.5714 \end{bmatrix}$$

, de plus la figure suivante nous montre que la solution n'est pas positive (voir Figure 3.3).

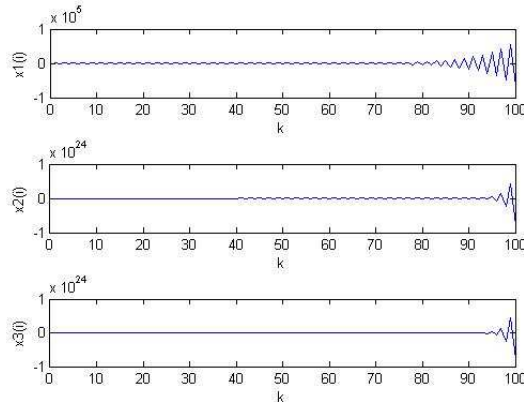


FIGURE 3.3 – Vecteur d'état du système de l'exemple (1.2) avec $h = 0.0115$.

2. Soit $\epsilon_2 = 0.001$, $h_2 = 0.0015 - \epsilon_2 = 0.0005$. le système obtenu par la discrétisation avec ce pas h_1 est positif car

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.5621 & 0 & 0 \\ 0.0438 & 0.4308 & 0 \\ 0.0876 & 0 & 0.4746 \end{bmatrix}$$

de plus la figure suivante nous montre que la solution est positive. (voir 3.4)

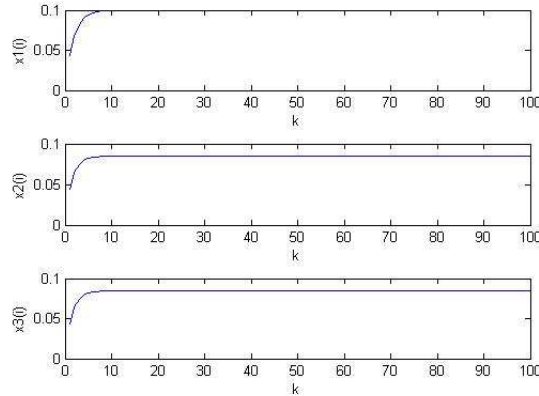


FIGURE 3.4 – Vecteur d'état du système de l'exemple (1.2) avec $h = 0.0005$.

Remarque 1.1. Dans cette partie, l'étude de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité d'un système linéaire en temps discret unidimensionnel obtenu par discrétisation à partir d'un système linéaire fractionnaire conformable est étudiée. Des conditions nécessaires et suffisantes sont proposées et deux exemples numériques qui illustrent l'applicabilité des résultats sont proposés.

2 Solvabilité et positivité des systèmes à temps continue-discret

2.1 Solvabilité et positivité des systèmes 2D

Dans cette partie nous nous intéressons au calcul de la solution et en établissant les conditions de positivité d'un système fractionnaire conformable 2D continu-discret décrit par l'équation suivante,

$$\begin{aligned} T^\alpha x(t, k+1) &= A_0 x(t, k) + A_1 T^\alpha x(t, k) + A_2 x(t, k+1) \\ &+ B_0 u(t, k) + B_1 T^\alpha u(t, k) + B_2 u(t, k+1) \end{aligned} \quad (3.37)$$

tel que $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$ représente la trajectoire d'état, $u(t, k) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrés du système (le contrôle), et $T^\alpha x(t, k)$, $T^\alpha u(t, k)$ sont les dérivées conformables fractionnaires par rapport à la variable t des deux vecteurs d'état et de contrôle $x(t, k)$, $u(t, k)$ respectivement.

Définition 2.1. le système (3.37) est dit positif si pour toutes conditions aux limites

$$x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, T^\alpha x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, t \in \mathbb{R}_+, x(0, k) \in \mathbb{R}_+^n \text{ pour } k \geq 1, k \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.38)$$

**CHAPITRE 3. CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET
INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES**
2. SOLVABILITÉ ET POSITIVITÉ DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINUE-DISCRET

et pour n'importe qu'elle commande $u(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, T^\alpha u(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, t \in \mathbb{R}_+, u(0, k) \in \mathbb{R}_+^n, k \in \mathbb{Z}_+$, nous aurons le vecteur d'état $x(t, k) \in \mathbb{R}_+^n$.

Remarque 2.1. Pour simplifier les notations par la suite on note

$$T^\alpha x(t, k) = x^{(\alpha)}(t, k) \text{ et } T^\alpha u(t, k) = u^{(\alpha)}(t, k) \quad (3.39)$$

Théorème 2.1. Le système (3.37) est positif si et seulement si

1. A_2 est de Metzler.
2. $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A = A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, i = 0, 1, 2$.

Démonstration. La preuve sera réalisée par induction par rapport à k .

L'équation (3.37) peut être reformulée de la manière suivante,

$$x^{(\alpha)}(t, k + 1) = A_2 x(t, k + 1) + F(t, k) \quad (3.40)$$

où,

$$F(t, k) = A_0 x(t, k) + A_1 x^{(\alpha)}(t, k) + B_0 u(t, k) + B_1 u^{(\alpha)}(t, k) + B_2 u(t, k + 1) \quad (3.41)$$

— Pour $k = 0$ l'équation (3.40) sera sous la forme,

$$x^{(\alpha)}(t, 1) = A_2 x(t, 1) + F(t, 0) \quad (3.42)$$

où,

$$F(t, k) = A_0 x(t, 0) + A_1 x^{(\alpha)}(t, 0) + B_0 u(t, k) + B_1 u^{(\alpha)}(t, 0) + B_2 u(t, 1) \quad (3.43)$$

Par l'utilisation des conditions (3.38) et $F(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, t \in \mathbb{R}_+$, l'hypothèse (2) de ce théorème est satisfaite.

La solution de l'équation (3.40) est de la forme,

$$x(t, 1) = e^{\frac{A_2}{\alpha} t^\alpha} x(0, 1) + \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha} (t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, 0) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (3.44)$$

Cette équation vérifie la condition $x(t, 1) \in \mathbb{R}_+$, puisque par hypothèse (1) A_2 est une matrice de Metzler et $e^{\frac{A_2}{\alpha} t^\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

CHAPITRE 3. **CONTRÔLE À ÉNERGIE MINIMALE, DISCRÉTISATION ET INFLUENCE SUR LA POSITIVITÉ DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES**
 2. SOLVABILITÉ ET POSITIVITÉ DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINUE-DISCRET

Pour $k = 1$ dans l'équation (3.41) et (3.44) on obtient,

$$\begin{aligned}
 F(t, 1) &= A_0x(t, 1) + A_1x^{(\alpha)}(t, 1) + B_0u(t, 1) + B_1u^{(\alpha)}(t, 1) + B_2u(t, 2) \quad (3.45) \\
 &= A_0 \left(e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, 1) + \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(t, 0) \tau^{\alpha-1} d\tau \right) + \\
 &\quad A_1 \left(A_2 \left(e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, 1) + \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, 0) \tau^{\alpha-1} d\tau \right) + F(\tau, 0) \right) + \\
 &\quad + B_0u(t, 1) + B_1u^{(\alpha)}(t, 1) + B_2u(t, 2)
 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
 F(t, 1) &= (A_0 + A_1A_2) e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, 1) + (A_0 + A_1A_2) \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, 0) \tau^{\alpha-1} d\tau \\
 &\quad + A_1F(\tau, 0) + B_0u(t, 1) + B_1u^{(\alpha)}(t, 1) + B_2u(t, 2) \\
 &= Ae^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, 1) + A \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, 0) \tau^{\alpha-1} d\tau \\
 &\quad + A_1F(\tau, 0) + B_0u(t, 1) + B_1u^{(\alpha)}(t, 1) + B_2u(t, 2)
 \end{aligned}$$

$F(t, 1) \in \mathbb{R}_+^n$ puisque $A \in R_+^{n \times n}$, $e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $F(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $u(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $k = 1, 2$ et $u^{(\alpha)}(t, 1) \in \mathbb{R}_+^m$.

On suppose que $x(t, i) \in R_+^n$, $F(t, i - 1) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \in R_+^n$, $i \geq 1$, et nous montrons que $x(t, i + 1) \in R_+^n$ pour $t \geq 0$ et $i \geq 1$, si les hypothèses sont satisfaites.

De l'équation (3.40) et (3.41), pour $k = i$ on obtient,

$$x^{(\alpha)}(t, i + 1) = A_2x(t, i + 1) + F(t, i) \quad (3.47)$$

où,

$$F(t, i) = A_0x(t, i) + A_1x^{(\alpha)}(t, i) + B_0u(t, i) + B_1u^{(\alpha)}(t, i) + B_2u(t, i + 1) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
 &= Ae^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, i) + A \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, i - 1) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (3.49) \\
 &\quad + A_1F(\tau, i - 1) + B_0u(t, i) + B_1u^{(\alpha)}(t, i) + B_2u(t, i + 1)
 \end{aligned}$$

$F(t, i) \in R_+^n$ lorsque les hypothèses sont vérifiées.

La solution de l'équation (3.47),

$$x(t, i + 1) = e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} x(0, i + 1) + A \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, i) \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (3.50)$$

satisfait la condition $x(t, i + 1) \in R_+^n$ puisque $e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $F(\tau, i) \in \mathbb{R}_+^n$. \square

Remarque 2.2. On note que $e^{\frac{A_2}{\alpha}t^\alpha} \in R_+^{n \times n}$ que si $\frac{A_2}{\alpha}$ est une matrice de Metzler, par conséquent

l'équation (3.37) est positif si et seulement si A_2 est une matrice de Metzler.

Théorème 2.2. *La solution $x(t, k)$ de l'équation (3.37) satisfaisant les conditions aux limites est sous la forme,*

$$x(t, k) = e^{\frac{A_2}{\alpha} t^\alpha} x(0, k) + A \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha} (t-\tau)^\alpha} F(\tau, k-1) \tau^{\alpha-1} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.51)$$

où

$$F(t, k) = P_t^k [A_0 x(t, 0) + A_1 x^{(\alpha)}(t, 0) + B_0 u(t, 0) + B_1 u^{(\alpha)}(t, 0) + B_2 u(t, 1)] \quad (3.52)$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P_t^{k-1-i} \left[A e^{\frac{A_2}{\alpha} t^\alpha} x(0, i+1) + B_0 u(t, i+1) + B_1 u^{(\alpha)}(t, i+1) + B_2 u(t, i+2) \right]$$

et P_t est un opérateur défini par,

$$P_t F(t) = A \int_0^t e^{\frac{A_2}{\alpha} (t-\tau)^\alpha} \tau^{\alpha-1} d\tau + A_1 F(t) \quad (3.53)$$

Démonstration. La solution dans l'équation (3.51) peut être obtenue à partir de l'équation (3.50) en substituant $i+1 = k$. En utilisant l'opérateur P_t nous pouvons écrire l'équation (3.49) sous la forme,

$$F(t, i) = P_t F(t, i-1) + A e^{\frac{A_2}{\alpha} t^\alpha} x(0, i) + B_0 u(t, i) + B_1 u^{(\alpha)}(t, i) + B_2 u(t, i+1) \quad (3.54)$$

□

3 Énergie minimale

3.1 Atteignabilité

Nous considérons dans cette section, le modèle $2D$ continu-discret général positif décrit par l'équation (3.37).

Définition 3.1. *Le système positif (3.37) est atteignable pour les conditions aux limites nulles au point $(h, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ si pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}_+^n$ il existe une entrée $u(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $0 \leq t \leq h, 0 \leq k \leq r$ tel que $x(h, r) = x_f$.*

Remarque 3.1. [18] *Nous rappelons que les propriétés d'une matrice monomiale sont,*

1. *Une matrice monomiale M s'écrit $M = D.P$, où P est une matrice de permutation et D une matrice diagonale strictement positive.*
2. *Les matrices monomiales sont les seules matrices positives à inverses positives.*

Théorème 3.1. *Le modèle (3.37) est atteignable pour les conditions aux limites nulles au point (h, r) si l'une des conditions suivantes est satisfaite,*

1. $Im_+R_{hr} = R_+^n$.
2. *La matrice R_{hr} contient n colonnes linéairement indépendantes de telle sorte que la matrice R_n est une matrice monomiale, où*

$$R_{hr} = [R_0 \ R_1 \ R_2 \ \dots \ R_{r-1}] \quad (3.55)$$

$$R_i = \int_0^h e^{\frac{A_2}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} F(\tau, r-1) \tau^{\alpha-1} d\tau$$

et $F(t, k)$ est défini par (3.52) pour des conditions aux limites nulles.

Démonstration. Nous recherchons une commande $u(t, k)$,

$$u(t, k) = u_k \text{ pour } 0 \leq t \leq h, 0 \leq k \leq r \quad (3.56)$$

tel que u_k est indépendant de t .

Si dans les équations (3.51) et (3.52) on remplace : $t = h, k = r$. Les conditions initiales sont proposées égale 0, donc on peut obtenir,

$$x_f = x(h, r) = R_{hr}u_0^r \quad (3.57)$$

avec,

$$u_0^r = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{r-1} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

D'après l'équation (3.57) et la définition de l'image positive il s'ensuit que pour chaque $x_f = R_+^n$, il existe une séquence d'entrées u_i pour $i = 0, 1, \dots, r-1$ si et seulement si l'image positive de R_{hr} est vecteur de R_+^n positive ie : $Im_+R_{hr} = R_+^n$.

L'équivalence entre la première et la deuxième proposition du théorème s'obtient par surjection de Im_+R_{hr} autrement dit, si $Im_+R_{hr} = R_+^n \Rightarrow \dim(Im_+R_{hr}) = \dim(R_+^n) = n$ d'où $\text{rang}(R_{hr}) = n$ (est plein). donc on conclue que R_{hr} contient n colonnes linéairement indépendantes. \square

3.2 Contrôle à énergie minimale

Considérons le modèle générale positif dans l'équation (3.37) avec les conditions aux limites nulles. Si le modèle est atteignable au point (h, r) , alors il existe généralement de nombreuses entrées (commande ou contrôle) différentes $u(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $0 \leq t \leq h, 0 \leq k \leq r$ qui transfèrent l'état initiale du modèle vers l'état final $x_f = x(h, r) \in \mathbb{R}_+^n$. Nous cherchons une entrée qui minimise l'indice de performance,

$$I(u) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k^T Q u_k \quad (3.59)$$

où $Q \in R_+^{m \times m}$ est une matrice définie positive symétrique telle que $Q^{-1} \in R_+^{m \times m}$, u_k sont définies par (3.56).

La formulation du problème d'énergie minimale peut s'exprimer de la manière suivante : étant donné les matrices A_k et B_k , $k = 0, 1, 2$, Q une matrice symétrique définie positive, un point (h, k) et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^n$: trouvons une séquence de contrôles $u(., .) \in \mathbb{R}_+^m$; pour $i = 0, 1, \dots, r - 1$ qui transfère l'état initiale du système au point x_f et minimise l'indice de performance décrit par l'équation (3.59).

Pour résoudre ce problème, on définit la matrice,

$$W_Q(h, r) = R_{hr} Q R_{hr}^T \quad (3.60)$$

où R_{hr} est défini par (3.55), $Q_d = \text{diag}(Q^{-1}, Q^{-1}, \dots, Q^{-1}) \in R_+^{rm \times rm}$.

La matrice $W_Q(h, r)$ est inversible si et seulement si R_{hr} est de rang plein, dan ce cas on définit le contrôle qui minimise (3.59) par,

$$\hat{u}_0^r = Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \quad (3.61)$$

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses suivantes ;*

1. *Le système (3.37) est atteignable en un point (h, r) .*
2. *$W_Q(h, r)$ est inversible avec Q une matrice définie positive.*
3. *La suite des commandes \bar{u}_k , $k = 0, 1, \dots, r$ transférant le système de l'état initiale vers l'état final x_f au point (h, r) , $x(h, r) = x_f$.*

alors les suites des contrôles définies dans (3.61) transfèrent aussi le système de l'état initial vers l'état final x_f au point (h, r) , $x(h, r) = x_f$. et minimisent l'indice de performance de plus,

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u}) \quad (3.62)$$

La valeur minimale de l'indice de performance dans l'équation (3.59) est donnée par,

$$I(\hat{u}) = x_f^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \quad (3.63)$$

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que (3.61) transfère le système de l'état initiale vers l'état final x_f au point (h, r) , $x(h, r) = x_f$ pour cela on substitue (3.61) dans (3.57), on obtient donc,

$$\begin{aligned} x_f &= R_{hr} \hat{u}_0^r \\ &= R_{hr} Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \\ &= W_Q(h, r) W_Q^{-1}(h, r) x_f \\ &= x_f \end{aligned}$$

Supposons que les deux suites de contrôles \hat{u}_0^r et \bar{u}_0^r transfèrent le système de l'état initiale vers l'état final x_f , par conséquent

$$R_{hr} \hat{u}_0^r = R_{hr} \bar{u}_0^r$$

donc,

$$R_{hr} [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r] = 0 \quad (3.64)$$

Si on le fait le transposé de (3.64) puis on multiplie par $W_Q^{-1}(h, r) x_f$,

$$[\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f = 0 \quad (3.65)$$

$$[\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f = 0 \quad (3.66)$$

$$[\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} \hat{u}_0^r = 0 \quad (3.67)$$

il s'ensuit,

$$[\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r] = [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} \bar{u}_0^r - [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} \hat{u}_0^r \quad (3.68)$$

De (3.67) et (3.68) nous pouvons conclure que,

$$\bar{u}_0^{rT} Q_d^{-1} \bar{u}_0^r = \hat{u}_0^{rT} Q_d^{-1} \hat{u}_0^r + [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r]^T Q_d^{-1} [\bar{u}_0^r - \hat{u}_0^r] \quad (3.69)$$

d'où,

$$\sum_{i=0}^{r-1} \bar{u}_i^T Q_d^{-1} \bar{u}_i = \sum_{i=0}^{r-1} \hat{u}_i^T Q_d^{-1} \hat{u}_i + \sum_{i=0}^{r-1} [\bar{u}_i - \hat{u}_i]^T Q_d^{-1} [\bar{u}_i - \hat{u}_i] \quad (3.70)$$

Finalement on trouve,

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u})$$

parce que

$$\sum_{i=0}^{r-1} [\bar{u}_i - \hat{u}_0]^T Q_d^{-1} [\bar{u}_i - \hat{u}_0]$$

est positive. Pour trouver la valeur minimale de l'indice de performance on remplace (3.61) dans (3.59) on aura,

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) &= I(\hat{u}_0^r) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (\hat{u}_i^r)^T Q_d^{-1} \hat{u}_i^r \\ &= (\hat{u}_0^r)^T Q_d^{-1} \hat{u}_0^r \\ &= [Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f]^T Q_d^{-1} Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \\ &= x_f^T W_Q^{-1}(h, r) R_{hr} Q_d Q_d^{-1} Q_d R_{hr}^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \\ &= x_f^T W_Q^{-1}(h, r) W_Q(h, r) W_Q^{-1}(h, r) W_Q^{-1}(h, r) x_f \\ &= x_f^T W_Q^{-1}(h, r) x_f \end{aligned}$$

□

3.3 Cas particulier

Pour un cas particulier des systèmes de type (3.37) lorsque $B_1 = B_2 = 0$, nous simplifions les deux résultats obtenus d'atteignabilité et l'énergie minimale.

Théorème 3.3. *Si $B_1 = B_2 = 0$ et la matrice Gramienne d'atteignabilité*

$$W_h = \int_0^h e^{\frac{A_2}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} B B^T e^{\frac{A_2^T}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \in R^{n \times n} \quad (3.71)$$

est monomiale alors le système est atteignable en un point $(h, 1)$ et dans ce cas le contrôle sera donnée par ,

$$u(t, 0) = B_0^T e^{\frac{A_2^T}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_h^{-1} x_f \text{ pour } 0 \leq t \leq h \quad (3.72)$$

Pour la formulation du problème d'énergie minimale en un point $(h, 1)$ l'indice de performance sera comme suit,

$$I(u) = u_0^T Q u_0 \quad (3.73)$$

où Q est matrice symétrique définie positive, et dans ce cas nous proposons la formulation de la matrice suivante,

$$W_Q(h, 1) = \int_0^h e^{\frac{A_2}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} B Q^{-1} B^T e^{\frac{A_2^T}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{2(\alpha-1)} d\tau \in R^{n \times n} \quad (3.74)$$

avec Q_1 est symétrique définie positive.

et dans ce cas :

$$\hat{u}(t, 0) = Q^{-1} B_0^T e^{\frac{A^T}{\alpha}(h^\alpha - \tau^\alpha)} \tau^{\alpha-1} W_Q^{-1}(h, 1) x_f \quad (3.75)$$

Théorème 3.4. *Si le système (3.37) est atteignable par un contrôle $\bar{u}(t, 0)$ qui transfère le système de x_0 vers x_f alors (3.75) l'est aussi et il minimise l'indice de performance telle que cette valeur minimale est donnée par :*

$$I(\hat{u}) = x_f^T W_Q^{-1}(h, 1) x_f \quad (3.76)$$

Conclusion et remarques : Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'atteignabilité des systèmes fractionnaires conformables bidimensionnels continu-discret ont été établis (Théorème 3.1). Le problème de contrôle de l'énergie minimale pour les systèmes positifs a temps continu-discret est formulé avec la méthode de la résolution. Une procédure de calcul d'entrée (contrôle) optimale satisfaisant la condition qui minimise la valeur minimale de l'indice de performance a été développé et proposée.

Admissibilité et stabilité des systèmes multidimensionnels fractionnaires

L'analyse et la conception des systèmes multidimensionnels (dD) où ($d \geq 2$) a fait l'objet de nombreuses recherches au cours des dernières décennies. Les systèmes multidimensionnels propagent l'état dans plusieurs directions spatiales indépendantes et ont des applications en théorie des systèmes et dans le domaine d'ingénierie tels que la théorie des circuits, le filtrage numérique et le traitement d'images [82, 84, 90, 91, 97]. Notons que le passage du cas 1D au cas multidimensionnel se fait naturellement en étudiant les modèles bidimensionnels.

Récemment, la stabilité des systèmes multidimensionnels a été considérée dans de nombreuses recherches. Cela a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs et praticiens de la théorie du contrôle [35, 37, 39, 43, 45, 83, 83, 87, 92]. Pour étudier les problèmes de stabilité, les systèmes à une et deux dimensions doivent être mis en oeuvre; les modèles 1D dans les systèmes dynamiques sont introduits et analysés dans [19, 45] par l'utilisation de notions fondamentales sur les valeurs propres de la matrice dynamique. Dans [43] Marir et al. ont exprimé et développé des conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité en terme de \mathcal{LMJ} strict pour un système unidimensionnel singulier fractionnaire à temps continu d'ordre α avec $1 \leq \alpha < 2$. Kaczorek dans [92] a étudié le problème de la stabilité des systèmes multidimensionnels avec ses diverses applications, et dans [82, 83, 91, 93, 95, 97], les auteurs ont étudié les conditions de stabilité en utilisant de nouveaux \mathcal{LMJ} développé avec différentes approches pour les systèmes à temps continus et discrets. De plus, dans [94] Tofighi et al. a développé des résultats pour l'analyse de la stabilité des systèmes ($3D$) tridimensionnels à l'aide d'un modèle d'onde avancé. Des conditions de stabilisation robustes des systèmes hybrides multidimensionnels décrites par les modèles de Roesser ont été développées par Ghamgui et al. dans [84], et récemment Aissa et al. se sont concentré sur le problème de \mathcal{LMJ} basé sur des conditions de stabilité pour la classe des systèmes multidimensionnels singuliers en temps continu et discret décrits par les modèles

de Fornasini-Marchesini.

Dans ce dernier chapitre, nous analyserons le problème d'admissibilité du modèle fractionnaire singulier multidimensionnel de Roesser, où l'approche des inégalités linéaires matricielles \mathcal{LMJs} est appliquée pour étudier de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique et l'admissibilité. Ce travail a fait l'extension des travaux de Marir et al. [43] pour la classe dD .

L'approche des \mathcal{LMJs} est utilisée pour développer de nouveaux résultats hautement significatifs sur l'analyse de la stabilité asymptotique et de l'admissibilité de ces processus et pour concevoir correctement les schémas de stabilité de contrôle de ces systèmes.

1 Conditions de stabilité et d'admissibilité

Nous introduisons et discutons dans cette partie l'analyse de stabilité des systèmes multidimensionnels en temps continu en utilisant des définitions et des résultats essentiels similaires dans le cas où on a un système uni et bidimensionnel pour des dérivées entières et des dérivées fractionnaires tout en se basant sur les travaux [10, 18, 39, 43, 62].

Dans ce qui suit, nous introduisons une formulation générale des systèmes à temps continu fractionnaires multidimensionnels dD décrits par le modèle de Roesser

$$E_d \begin{bmatrix} D_{t_1}^{\alpha_1} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ D_{t_d}^{\alpha_d} x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} u(t_1, t_2, \dots, t_d) \quad (4.1)$$

Où

$$E_d = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1d} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{d1} & E_{d2} & \cdots & E_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.2)$$

E_d peut être supposée inversible.

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{est la matrice d'état} \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{est la matrice de contrôle} \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{représente le vecteur d'état} \quad (4.5)$$

$$u(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^m \quad \text{le contrôle du système} \quad (4.6)$$

$$0 < \alpha_i \leq 1 \quad \forall i = \overline{1..d} \quad (4.7)$$

Le système non forcé associé à (4.1) est comme suit

$$E_d \begin{bmatrix} D_{t_1}^{\alpha_1} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ D_{t_d}^{\alpha_d} x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Pour notre besoin, nous définissons une nouvelle définition du spectre de notre système considéré (4.8) par

$$\gamma_d(E_d, A_d) = \max_{\forall (s_1^{\alpha_1}, s_2^{\alpha_2}, \dots, s_d^{\alpha_d}) \in \Gamma_d} [\operatorname{Re}(s_1)^{\alpha_1} \operatorname{Re}(s_2)^{\alpha_2}, \dots, \operatorname{Re}(s_d)^{\alpha_d}] \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) signifie que les abscisses spectrales contiennent d valeurs, c'est-à-dire :

CHAPITRE 4. **ADMISSIBILITÉ ET STABILITÉ DES SYSTÈMES
MULTIDIMENSIONNELS FRACTIONNAIRES**

1. **CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ**

$\gamma_d(E_d, A_d)$ représente un vecteur de d dimensions dont les entrées sont $\text{Re}(s_i)^{\alpha_i}$ avec $i = \overline{1, d}$, et

$$\Gamma_d = \{(s_1^{\alpha_1}; s_2^{\alpha_2}, \dots, s_d^{\alpha_d}) \mid \det(K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} E_d - A_d) = 0\} \quad (4.10)$$

$$K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} = \begin{bmatrix} s_1^{\alpha_1} I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & s_d^{\alpha_d} I_{n_d} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

avec,

$$\sum_{i=1}^d n_i = n \quad (4.12)$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.8) est donné par

$$D(t_1, t_2, \dots, t_d) = E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d \quad (4.13)$$

Nous proposons dans ce qui suit une nouvelle définition des dérivées partielles dans le cas des systèmes multidimensionnels fractionnaires.

$$\begin{aligned} D_{t_i}^{\alpha_i} x(t_1, t_2, \dots, t_d) &= \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial t_i^{\alpha_i}} x(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ &= \frac{1}{\Gamma(N_i - \alpha_i)} \int_0^{t_i} \frac{x_{t_i}^{(N_i)}(\tau)}{(t_i - \tau)^{\alpha_i + 1 - N_i}} d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$, $N_i \in \mathbb{N}$, pour tout $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1, d}$. sont l'ordre de la dérivée partielle fractionnaire, $\Gamma(x)$ est la fonction gamma d'Euler.

$$x_{t_i}^{(N_i)}(\tau) = \begin{cases} \frac{\partial^{N_1} x(\tau, t_2, \dots, t_d)}{\partial \tau^{N_1}} & \text{pour } i = 1 \\ \frac{\partial^{N_2} x(t_1, \tau, \dots, t_d)}{\partial \tau^{N_2}} & \text{pour } i = 2 \\ \vdots \\ \frac{\partial^{N_d} x(t_1, t_2, \dots, t_{d-1}, \tau)}{\partial \tau^{N_d}} & \text{pour } i = d \end{cases}$$

Définition 1.1. *Le système définie par l'équation (4.8) est dit régulier s'il existe une unique*

1. CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ

solution $\begin{pmatrix} x_1(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ x_2(t_1, t_2, \dots, t_d) \\ \vdots \\ x_d(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{pmatrix}$ pour une condition initiale donnée.

Définition 1.2. Le système définie par l'équation (4.8) est régulier si et seulement si :

$$\det(E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d) \neq 0 \quad (4.15)$$

pour certaines valeurs $s_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, d}$.

Définition 1.3. Le système (4.8) est dit sans impulsion si et seulement s'il est régulier et

$$\deg(\det(E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d)) = \text{rank } E_d \quad (4.16)$$

Définition 1.4. Le système multidimensionnel fractionnaire à temps continu (4.8), est asymptotiquement stable si et seulement si l'état $x_i(t_1, t_2, \dots, t_d)$ converge vers zéro pour une entrée nulle et toutes les conditions initiales bornées,

$$\lim_{t_1, t_2, \dots, t_d \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x_i(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (4.17)$$

Où $i = \overline{1, d}$ et

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2, \dots, t_d) &= 0 \text{ for } t_i \in \mathbb{R}_+ \\ \sup_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \|x_1(t_1, 0, \dots, 0)\| &< \infty \\ \sup_{t_2 \in \mathbb{R}_+} \|x_2(0, t_2, \dots, 0)\| &< \infty \\ &\vdots \\ \sup_{t_d \in \mathbb{R}_+} \|x_d(0, 0, \dots, t_d)\| &< \infty \end{aligned} \quad (4.18)$$

Définition 1.5. Le système (4.8) est dit admissible si et seulement si,

La paire (E_d, A_d) est régulière sans impulsion et asymptotiquement stable.

En se basant sur les résultats obtenus [10, 36–39, 43, 55, 57] dans les systèmes multidimensionnels et le fait que les modèles considérés sont stables si la stabilité est garanti pour tout t_i où $i = \overline{1, d}$ puisque toutes les variables sont supposées indépendantes, nous pouvons donc établir les résultats suivants.

Lemme 1.1. Le modèle décrit par l'équation (4.8) est stable si

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_d)^T > \left[\alpha_1 \frac{\pi}{2} \quad \alpha_2 \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad \alpha_d \frac{\pi}{2} \right]^T \quad (4.19)$$

CHAPITRE 4. **ADMISSIBILITÉ ET STABILITÉ DES SYSTÈMES
MULTIDIMENSIONNELS FRACTIONNAIRES**

1. **CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ**

Ce qui implique :

$$\lambda_i > \alpha_i \frac{\pi}{2}$$

pour tous $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1, d}$.

$$\begin{aligned} \text{où } \text{spec}(E_d, A_d) = \{ (s_1^{\alpha_1}; s_2^{\alpha_2}, \dots, s_d^{\alpha_d}) / (s_1^{\alpha_1}; s_2^{\alpha_2}, \dots, s_d^{\alpha_d}) \in \mathbb{C}^d, \\ \det(E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d) = 0 \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

désigne l'ensemble des modes finis pour la paire (E_d, A_d) .

En utilisant de la décomposition en valeurs singulières de la matrice E_d et des opérations élémentaires, nous pouvons voir que

$$ME_d N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } MA_d N = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où M et N sont des matrices inversibles.

Lemme 1.2. *Si la pair (E_d, A_d) est régulière. Alors nous avons les propositions suivantes,*

1. *Il existe deux matrices non singulières M et N satisfaisant*

$$ME_d N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad MA_d N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $F \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ est nilpotent.

2. *La paire (E_d, A_d) est sans impulsion si et seulement si $F = 0$.*

Remarque 1.1. *Dans les calculs suivants, nous désignerons l'expression $A + A^T = \text{par } \text{sym}(A)$.*

Encore une fois, nous utilisons les résultats dans [43, 55, 56, 58] et le concept de stabilité par rapport tous à les axes pour assurer le corollaire suivant dans le cas d'un système multidimensionnel à temps continu .

Corollaire 1.1. *Le système multidimensionnel (4.8) avec $0 < \alpha_i \leq 1$ pour tout $i = \overline{1, d}$ est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *Il existe une matrice $P_d = P_d^T$ telle que*

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes (A_d P_d) \} \prec 0 \quad (4.23)$$

**CHAPITRE 4. ADMISSIBILITÉ ET STABILITÉ DES SYSTÈMES
MULTIDIMENSIONNELS FRACTIONNAIRES**

1. CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ

2. Il existe une matrice $Q_d = Q_d^T$ telle que

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes (A_d^T Q_d) \} \prec 0 \quad (4.24)$$

avec

$$\Theta_d = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \Theta_{dd} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

où

$$\Theta_{ii} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ -\cos \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad \theta_i = \pi - \alpha_i \frac{\pi}{2} \quad \text{for all } i = \overline{1, d} \quad (4.26)$$

Nous proposons dans ce qui suit de nouvelles conditions suffisantes et nécessaires pour que le système (4.8) soit admissible par l'utilisation des \mathcal{LMJ} .

Lemme 1.3. *La paire (E_d, A_d) est admissible si et seulement si la paire (E_d^T, A_d^T) est admissible*

Démonstration. Pour confirmer que la paire (E_d, A_d) est admissible si et seulement si (E_d^T, A_d^T) est admissible nous présentons la preuve comme suit

$$\begin{aligned} \det (E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d) &= \det (E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d)^T \\ &= \det (E_d^T K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d^T) \end{aligned} \quad (4.27)$$

et

$$\begin{aligned} \deg (\det (E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d)) &= \deg (\det (E_d K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d)^T) \\ &= \deg (\det (E_d^T K_d^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} - A_d^T)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

ce qui signifie que la paire (E_d, A_d) est régulière et sans impulsion si et seulement si (E_d^T, A_d^T) est régulière et sans impulsion. Par l'utilisation du lemme 1.2 et du corollaire 1.1 on obtient que la stabilité de la paire (E_d, A_d) dépend de \tilde{A}_1 ou \tilde{A}_1^T .

Par conséquent, nous avons prouvé l'équivalence de la stabilité entre ces deux paires, ce qui complète la preuve du lemme. \square

Théorème 1.1. *Le système fractionnaire multidimensionnel (4.8) est admissible si et seule-*

CHAPITRE 4. **ADMISSIBILITÉ ET STABILITÉ DES SYSTÈMES
MULTIDIMENSIONNELS FRACTIONNAIRES**

1. **CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ**

ment s'il existe des matrices

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1d} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{d1} & X_{d2} & \cdots & X_{dd} \end{bmatrix} \succ 0 \text{ et } Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{d1} \end{bmatrix} \text{ qui vérifient} \quad (4.29)$$

1.

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes A_d^T (X_d E + E_{0d} Y_d^T) \} \prec 0 \quad (4.30)$$

2.

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes A_d (X_d E_d^T + E_{0d} Y_d^T) \} \prec 0 \quad (4.31)$$

3. Il existe une matrice $P_d = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1d} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{d1} & P_{d2} & \cdots & P_{dd} \end{bmatrix}$ satisfaisant

$$E_d^T P_d = P_d E_d^T \succeq 0, \quad (4.32)$$

et

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes A_d^T P_d \} \prec 0 \quad (4.33)$$

où E_{0d} est une matrice arbitraire de rang plein, et qui satisfait la condition $E_d^T E_{0d} = 0$,
avec

$$\Theta_d = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \Theta_{dd} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

où

$$\Theta_{ii} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ -\cos \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad \theta_i = \pi - \alpha_i \frac{\pi}{2} \text{ pour tous } i = \overline{1, d} \quad (4.35)$$

Démonstration. Il s'agit de prouver que l'admissibilité et la condition (4.30) du théorème précédent sont équivalentes.

1. Condition suffisante : D'abord partitionnons les matrices X_d , Y_d et A_d en matrice bloc

comme suit. Supposons que l'inégalité (4.30) soit satisfaite pour certaines matrices

$$X_d = \begin{bmatrix} X & X_{12} & \cdots & X_{1d} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{d1} & X_{d2} & \cdots & X_{dd} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} X_I & X_{II} \\ \hline X_{III} & X_{IV} \end{array} \right] \succ 0$$

et

$$Y_d = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{d1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} Y_I \\ Y_{II} \end{array} \right]$$

$$A = A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_I & A_{II} \\ \hline A_{III} & A_{IV} \end{array} \right]$$

Par l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières de la matrice E_d , nous assurons l'existence de deux matrices non singulières M et N telles que

$$ME_dN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MA_dN = \begin{bmatrix} \tilde{A}_I & \tilde{A}_{II} \\ \tilde{A}_{III} & \tilde{A}_{IV} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E_0 = M^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

avec $r = \text{rank } E_d$.

De la non-singularité de la matrice M , E_{0d} est une matrice de rang complet qui satisfait l'équation $E^T E_0 = 0$. Posons les équations suivantes

$$X = M^T \begin{bmatrix} \hat{X}_I & \hat{X}_{II} \\ \hat{X}_{III} & \hat{X}_{IV} \end{bmatrix} M, \quad Y = N^{-T} \begin{bmatrix} \hat{Y}_I \\ \hat{Y}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Les équations (4.36) et (4.37) donnent

$$A_d^T (X_d E_d + E_{0d} Y^T) = N^{-T} \hat{A}_d N^{-1} \quad (4.38)$$

avec

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} \tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \tilde{A}_{II}^T \hat{Y}_I^T & \tilde{A}_{III}^T \hat{Y}_{II} \\ \tilde{A}_{II}^T \hat{X}_I + \tilde{A}_{IV}^T \hat{X}_{II}^T + \tilde{A}_{IV}^T \hat{Y}_I^T & \tilde{A}_{IV}^T \hat{Y}_{II}^T \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

et en utilisant certaines propriétés du produit de Kronecker, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Theta_d \otimes (A_d^T (X_d E_d + E_{0d} Y_d^T)) &= (I_{2d} \cdot \Theta_d) \otimes (N^{-T} \cdot (\widehat{A}_d N^{-1})) \\ &= \begin{bmatrix} N^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-T} \end{bmatrix} (\Theta_d \otimes \widehat{A}) \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec

$$\Theta_d \otimes \widehat{A}_d = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{A}_{d1} & \widehat{A}_{d2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{A}_{d2} & \widehat{A}_{d1} \end{bmatrix}$$

et pour tous $i = \overline{1, d}$

$$\widehat{A}_{i1} = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_I^T \widehat{X}_I + \tilde{A}_{III}^T \widehat{Y}_I^T) \sin(\theta_i) & \tilde{A}_{III}^T \widehat{Y}_{II} \sin(\theta_i) \\ (\tilde{A}_{II}^T \widehat{X}_I + \tilde{A}_{IV}^T \widehat{X}_I^T + \tilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_I^T) \sin(\theta_i) & \tilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_{II}^T \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\widehat{A}_{i2} = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_I^T \widehat{X}_I + \tilde{A}_{III}^T \widehat{Y}_I^T) \cos(\theta_i) & \tilde{A}_{III}^T \widehat{Y}_{II} \cos(\theta_i) \\ (\tilde{A}_{II}^T \widehat{X}_{1d} + \tilde{A}_{IV}^T \widehat{X}_I^T + \tilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_I^T) \cos(\theta_i) & \tilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_{II}^T \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{sym} \{ \Theta_d \otimes A_d^T (X_d E_d + E_{0d} Y_d^T) \} &= \\ &= \begin{bmatrix} N^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{H}_d \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

où

$$\mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{i1} + \widehat{A}_{i1}^T & \widehat{A}_{i2} - \widehat{A}_{i2}^T \\ \widehat{A}_{i2}^T - \widehat{A}_{i2} & \widehat{A}_{i1} + \widehat{A}_{i1}^T \end{bmatrix}$$

On en déduit finalement que

$$\text{sym} \{ \Theta_d \otimes A_d^T (X_d E_d + E_{0d} Y_d^T) \} \prec 0 \quad (4.44)$$

ce qui implique que $\widehat{A}_{i1} + \widehat{A}_{i1}^T \prec 0$ pour tous $i = \overline{1, d}$.

Où

$$\widehat{A}_{i1} + \widehat{A}_{i1}^T = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & (\widetilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_{II}^T + \widehat{Y}_{II} \widetilde{A}_{IV}) \sin(\theta_i) \end{bmatrix}$$

On en déduit que pour chaque $i = \overline{1, d}$, on a

$$(\widetilde{A}_{IV}^T \widehat{Y}_{II}^T + \widehat{Y}_{II} \widetilde{A}_{IV}) \sin(\theta_i) \prec 0$$

puisque $\sin(\theta_i) \prec 0$, .

Par conséquent \widetilde{A}_{IV} est une matrice non singulière ce qui signifie que le système (4.8) est régulier et sans impulsion.

Le système (4.8) étant régulier et sans impulsion, il existe des matrices inversibles L , R

$$L E_d R = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L A_d R = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_I & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Notez que

$$X_d = L^T \left[\begin{array}{c|c} \widehat{X}_I & \widehat{X}_{II} \\ \widehat{X}_{III} & \widehat{X}_{IV} \end{array} \right] L, \quad Y = R^{-T} \left[\begin{array}{c} \widehat{Y}_I \\ \widehat{Y}_{II} \end{array} \right], \quad E_{0d} = L^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

à partir des équations (4.45), (4.46) et l'inégalité (4.31) on en déduit le résultat suivant

$$\begin{bmatrix} N^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.47)$$

avec

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i1} & \Phi_{i2} \\ \Phi_{i2}^T & \Phi_{i1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i1} &= \begin{bmatrix} (\tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \hat{X}_I^T \tilde{A}_I) \sin(\theta_i) & (\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I) \sin(\theta_i) \\ (\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T) \sin(\theta_i) & (\hat{Y}_{II}^T + \hat{Y}_{II}) \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \\ \Phi_{i2} &= \begin{bmatrix} (\tilde{A}_I^T \hat{X}_I - \hat{X}_I^T \tilde{A}_I) \cos(\theta_i) & -(\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I) \cos(\theta_i) \\ (\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T) \cos(\theta_i) & (\hat{Y}_{II}^T - \hat{Y}_{II}) \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

pour tous $i = \overline{1, d}$.

L'inégalité (4.47) implique que l'on a

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_d \end{bmatrix} \prec 0$$

Autrement dit $\Psi_i \prec 0, \forall i = \overline{1, d}$.

Cela équivaut à

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{W}_d \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.49)$$

avec

$$\mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \sin \theta_i & \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I - \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \sin \theta_i \\ \left(\hat{X}_I^T \tilde{A}_I - \tilde{A}_I^T \hat{X}_I \right) \cos \theta_i & \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \sin \theta_i \\ \left(\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T \right) \sin \theta_i & \left(\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T \right) \cos \theta_i \\ - \left(\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T \right) \cos \theta_i & \left(\hat{X}_{II}^T + \hat{Y}_I^T \right) \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I \right) \sin \theta_i & - \left(\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I \right) \cos \theta_i \\ \left(\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I \right) \cos \theta_i & \left(\hat{X}_{II} + \hat{Y}_I \right) \sin \theta_i \\ \left(\hat{Y}_{II}^T + \hat{Y}_I \right) \sin \theta_i & \left(\hat{Y}_{II}^T - \hat{Y}_I \right) \cos \theta_i \\ \left(\hat{Y}_{II} - \hat{Y}_I^T \right) \cos \theta_i & \left(\hat{Y}_{II}^T + Y_{II} \right) \sin \theta_i \end{bmatrix} \prec 0$$

En utilisant l'inégalité (4.50) on en déduit que pour tout $i = \overline{1, d}$,

$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \sin \theta_i & \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I - \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \cos \theta_i \\ \left(\hat{X}_I^T \tilde{A}_I - \tilde{A}_I^T \hat{X}_I \right) \cos \theta_i & \left(\tilde{A}_I^T \hat{X}_I + \hat{X}_I^T \tilde{A}_I \right) \sin \theta_i \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.51)$$

Enfin, les relations (4.49), (4.50) et (4.51) confirme la stabilité asymptotique du système (4.8) puisque $\hat{X}_I \succ 0$. En conséquence, le système (4.8) est admissible (régulier, sans impulsion et stable).

2. Condition nécessaire : supposons que le système (4.8) est admissible, puis appliquons l'équation (4.45) et le lemme (1.1), ce qui nous donne $\text{spec}(E_d, A_d) = \text{spec}(\tilde{A}_{1d})$ et

$$\arg(\text{spec}(\tilde{A}_{1d})) > \left[\alpha_1 \frac{\pi}{2} \quad \alpha_2 \frac{\pi}{2} \quad \cdots \quad \alpha_d \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.52)$$

D'après le corollaire (1.1), il existe une matrice $\tilde{X}_I \succ 0$ telle que

$$\text{sym} \left\{ \Theta_d \otimes \left(\tilde{A}_1^T \tilde{X}_1 \right) \right\} \prec 0 \quad (4.53)$$

et

$$E_{0d} = L^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad Y_d = R^{-T} \begin{bmatrix} \tilde{Y}_I \\ \tilde{Y}_{II} \end{bmatrix}, \quad X_d = L^T \begin{bmatrix} \tilde{X}_{1d} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} L \quad (4.54)$$

A partir des équations (4.45) et (4.54) on obtient

$$\begin{aligned} & \text{sym} \{ \Theta_d \otimes (A_d^T (X_d E_d + E_{0d} Y_d^T)) \} \\ &= \begin{bmatrix} R^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{-T} \end{bmatrix} \times [\text{diag} (\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T)] \times \\ & \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

où les matrices \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont définies comme suit

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} \sin \theta_i & 0 & \tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} \cos \theta_i & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \sin \theta_i & 0 & -I_{n-r} \cos \theta_i \\ -\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} \cos \theta_i & 0 & \tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} \sin \theta_i & 0 \\ 0 & I_{n-r} \cos \theta_i & 0 & -I_{n-r} \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Notons que

$$\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i1} \\ \Lambda_{i1}^T & \Lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

avec

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} + \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d}) \sin \theta_i & 0 \\ 0 & -2I_{n-r} \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\Lambda_{i1} = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} - \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d}) \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Pour prouver l'inégalité (4.31) du théorème 1.1, il faut prouver les deux conditions suivantes

$$\Lambda_i \prec 0$$

et

$$\Lambda_i - \Lambda_{i1}\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i1}^T \prec 0$$

Nous allons prouver une des conditions précédentes pour tout $i = \overline{1, d}$ à cause de la similarité. De l'inégalité (4.53) on a directement $\Lambda_i \prec 0 \forall i = \overline{1, d}$ et aussi

$$\begin{aligned} \Lambda_i - \Lambda_{i1}\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i1}^T &= \\ & \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} + \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right) \sin \theta_i & 0 \\ 0 & -2I_{n-r} \sin \theta_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} - \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right) \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} + \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right)^{-1} \frac{1}{\sin \theta_i} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2 \sin \theta_i} I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} - \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right) \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \Omega_i & 0 \\ 0 & -2I_{n-r} \sin \theta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.60}$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} + \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right) \sin \theta_i - \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} - \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right) \left(\tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} + \tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} \right)^{-1} \times \\ & \quad \left(\tilde{X}_{1d} \tilde{A}_{1d} - \tilde{A}_{1d}^T \tilde{X}_{1d} \right) \frac{\cos^2 \theta_i}{\sin \theta_i} \end{aligned} \tag{4.61}$$

De (4.53) nous avons $\Omega_i \prec 0 \forall i = \overline{1, d}$, ce qui implique que $\Lambda_i - \Lambda_{i1}\Lambda_i^{-1}\Lambda_{i1}^T \prec 0$ et garantit la relation (4.30).

Enfin nous avons prouvé l'équivalence entre la l'admissibilité et la condition (4.30).

3. Pour assurer la relation entre la condition d'admissibilité (4.30) et (4.31), le lemme 1.3 est utilisé pour obtenir cette condition.

Remarque 1.2. *L'équivalence entre la première et la troisième proposition de ce théorème s'obtient directement de l'égalité de deux ensembles :*

$$\begin{aligned} \Upsilon_{d1} &= \left\{ X_d \in \mathbb{R}^{n \times n} : E_d^T X_d = X_d^T E_d, \right. \\ & \quad \left. E^T X_d \geq 0, \text{rank } E_d^T X_d = r \right\} \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\Upsilon_{d2} = \{X_d = P_d E_d + E_{0d} Q_d, \quad (4.63)$$

$$P_d \succ 0, P_d \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}\}$$

Cette équivalence achève la démonstration de notre théorème principal.

□

Exemple 1.1. On considère un exemple de circuit RLC traité dans [19] et [52] qui représente la longue ligne de transmission avec l'élément distribué, comme indiqué dans la figure suivante,

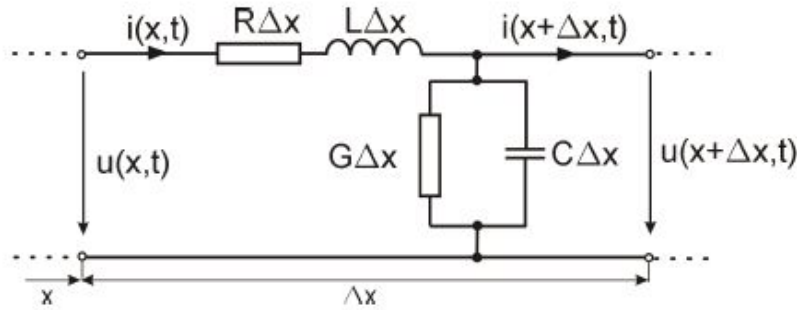


FIGURE 4.1 – Un circuit RLC de longue ligne de transmission

Nous considérons que le circuit est formé par des sections infinies de longueur infiniment petite Δx en successive. Les quatre paramètres linéaires sont les suivants :

1. Résistance R : qui est la résistance des conducteurs, en général elle est très faible (Ω/m).
2. Inductance linéaire L : chaque section de ligne est soumise à un champ variable créé par le courant circulant dans les sections voisines. C'est donc le siège de phénomènes d'induction caractérisé par une inductance par unité de longueur (H/m).
3. Conductance G : c'est l'opposé de la résistance entre les deux conducteurs constituant la ligne.
4. Capacité C : c'est la capacité qui existe entre deux conducteurs $\frac{F}{m}$.

Dans ce cas, les lois de modélisation et moyennement les lois de Kirchhoff sont utilisées, le modèle (4.65) est obtenu

$$\begin{aligned} -D_x^\alpha u(x, t) &= R i(x, t) + L D_t^\beta i(x, t) \\ -D_x^\alpha i(x, t) &= G i(x, t) + C D_t^\beta u(x, t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

1. CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'ADMISSIBILITÉ

Un système matriciel équivalent qui décrit la figure précédente est donné par,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t_1}^\alpha x_h(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^\beta x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_h \\ B_v \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \quad (4.65)$$

avec :

$$x_h(t_1, t_2) = x_v(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} u(t_1, t_2) \\ i(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

On remarque bien qu'il s'agit d'un système singulier de Roesser.

Les variables qui représente le vecteur d'état sont : $u(t_1, t_2)$ est la tension et $i(t_1, t_2)$ est le courant au point t_1 du début de la ligne pour un instant t_2 .

où $t_1 = x$ est la variable spatiale qui décrit une distance depuis le début de la ligne, $t_2 = t$ est une variable qui représente le temps.

1. Cas 01 : Pour $C = 0.00007F/m$, $R = 0.009\Omega/m$, $G = 0.08\Omega^{-1}/m$, $L = 0.02H/m$ et $\alpha = \beta = 1$. Pour tester l'admissibilité du système non forcé (4.65), nous obtenons que nous avons une solution non-réalisable (le modèle n'est donc pas admissible).
2. Cas 02 : pour les mêmes valeurs de R , L et C dans le cas 1 avec $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, Le système considéré (4.65) avec

$$u(t_1, t_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 44.2614 & -24.6661 & 16.8733 & 0.0189 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

K est appelé la matrice de gain de retour d'état (Feedback).

Dans ce cas, le système (4.65) se réduit à,

$$E \begin{bmatrix} D_{t_1}^\alpha x_h(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^\beta x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0.00007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\tilde{A} = A + BK = \begin{bmatrix} 0.1328 & -0.0740 & 0.0506 & -0.0899 \\ -0.0800 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5409 & -1.9733 & 0.3499 & 0.0015 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Les conditions imposées par notre théorème principal 1.1 assure l'admissibilité, et la solution faisable proposée est

$$X = \begin{bmatrix} 2.4796 & -0.9125 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.9125 & 2.9756 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

et

$$Y = \begin{bmatrix} -0.2645 & -0.2675 \\ 0.1883 & -0.0639 \\ -0.0328 & -0.0135 \\ 0.0470 & 0.3015 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Exemple 1.2. L'exemple suivant illustre l'exactitude de l'approche proposée. Considérons le système non forcé (4.8) avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$ et les matrices

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.4165 & 1.5350 & -0.8697 & 0.8682 & -1.0616 \\ 0.0784 & -0.9935 & 0.8470 & -0.8316 & 1.0094 \\ 0.3563 & 6.8170 & -3.0333 & 4.8156 & -6.6059 \\ -0.6517 & 0.1915 & -0.1348 & 1.2781 & -1.2468 \\ 0.6636 & 2.1505 & -0.5888 & 1.7413 & -1.6655 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

En utilisant notre méthode, nous trouvons que les LMJs dans le théorème 1.1 sont réalisables, et une solution réalisable est la suivante

$$X = \begin{bmatrix} 0.5487 & 0.5573 & -0.0070 & 0.3705 & 0.0020 \\ 0.5573 & 0.5661 & -0.0071 & 0.3764 & 0.0020 \\ -0.0070 & -0.0071 & 1.0000 & -0.0047 & -0.0000 \\ 0.3705 & 0.3764 & -0.0047 & 0.2502 & 0.0013 \\ 0.0020 & 0.0020 & -0.0000 & 0.0013 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.2616 & -1.1737 \\ 0.0691 & -0.6465 \\ 0.1465 & -0.4543 \\ 0.1644 & -0.8708 \\ 0.1216 & -0.2672 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Conclusion et remarques :

Dans ce chapitre, nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité et l'admissibilité des systèmes multidimensionnels fractionnaires singuliers de Roesser dD , avec $d \geq 2$. Une nouvelle approche basée sur le produit de Kronecker, polynôme caractéristique et inégalité matricielle linéaire \mathcal{LMJs} est proposée. Tous les résultats obtenus sont simulés et illustrés numériquement pour une application de circuit électrique afin de montrer l'efficacité et l'applicabilité de notre méthode.

Conclusion générale

Les résultats que nous avons obtenu sont organisés en trois grandes parties, la première consiste à développer et d'étendre les résultats des travaux existants sur la dérivée conformable pour différentes classes de systèmes : uni et multidimensionnels, singuliers et standards, les conditions de positivité sont examinées pour cette nouvelle classe de systèmes afin de résoudre le problème d'énergie minimale ainsi que la représentation d'état, nous avons également étudié un problème très intéressant, il s'agit de la solvabilité du modèle de Fornasini-Marchesini fractionnaire décrit par la dérivée conformable.

Ensuite, le problème de contrôle de l'énergie minimale pour les systèmes linéaires continus-discrets positifs $2D$ a été formulé et résolu. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'atteignabilité des systèmes sont dérivées. Une méthode est proposée dans cette partie pour traiter la relation entre la valeur du pas de discrétisation sur la positivité d'une certaine classe de systèmes fractionnaires linéaires en temps continu.

La deuxième partie traite du problème de solvabilité pour une classe de systèmes linéaires continus fractionnaires singuliers $2D$, décrits par les modèles de Fornasini-Marchesini avec la dérivée fractionnaire de Caputo. Une nouvelle approche pour calculer la solution de la classe de systèmes considérées est développée. L'idée principale est basée sur la matrice fondamentale et le delta Kronecker et la double transformée de Laplace.

La classe de modèles multidirectionnels de Roesser a également pris une grande place ; nous avons cependant analysé cette classe tout en se penchant vers deux problèmes importants qui sont la stabilité et l'admissibilité en utilisant l'outil inégalité matricielle linéaire.

Plusieurs perspectives peuvent être proposés dans le même axe de recherche.

Résumé

Titre : Analyse de la Stabilité et Contrôle des Modèles Uni et Multidimensionnels Fractionnaires et Applications

Résumé :

Dans ce travail, nous introduisons la classe des systèmes conformables fractionnaires à une et deux dimensions, le problème de solvabilité de cette classe de systèmes a été résolu en utilisant les transformées de Laplace et de Sumudu, de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes sur la contrôlabilité, l'atteignabilité, l'influence du pas de discrétisation sur la positivité sont proposées pour résoudre le problème d'énergie minimale. Nous avons également traité la stabilité des modèles multidimensionnels de Roesser fractionnaires singuliers en développant la technique des inégalités matricielles linéaires et le polynôme caractéristique pour pouvoir établir des conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité pour cette classe de systèmes.

Mots clés : Modèles fractionnaires, Systèmes bidimensionnels, Système multidimensionnels, Stabilité et admissibilité, Positivité et contrôle à énergie minimale.

Title : Stability Analysis and Control of Uni and Multidimensional Fractional Models and Applications

Abstract :

In this work, we introduce the class of one- and two-dimensional fractional conformable systems, the solvency problem of this class of models has been solved using Laplace and Sumudu transforms, new necessary and sufficient conditions on the controllability, the reachability, the influence of discretization step on the positivity are proposed to solve the minimum energy

control problem. We have also consider the problem of stability for the singular multidimensional fractional Roesser model by developing the technique of linear matrix inequalities and the characteristic polynomial to be able to establish necessary and sufficient conditions of admissibility for this class of models.

Keywords : Fractional models, Two-dimensional systems, Multi-dimensional systems, Stability and admissibility, Positivity and minimum energy control.

عنوان الأطروحة:

في هذا العمل ، نقدم فئة الأنظمة القابلة للتوافق الجزئي أحادي وثنائي الأبعاد ، وقد تم حل مشكلة عبارة الحل العام لهذه الفئة من النماذج باستخدام تحويلات لابلاس و سومودو ، شروط جديدة ضرورية وكافية حول إمكانية التحكم وإمكانية الوصول والتأثير خطوة تقديرية بشأن الإيجابية تم معالجتها لحل أدنى مشكلة للتحكم في الطاقة. لقد درسنا أيضاً مشكلة الاستقرار لنموذج Roesser الكسري متعدد الأبعاد المفرد من خلال تطوير تقنية المتباينات في المصفوفة الخطية متعددة الحدود المميزة لتكون قادرة على إنشاء شروط ضرورية وكافية لقبول هذه الفئة من النماذج.

الكلمات المفتاحية :

النماذج الكسرية ، الأنظمة ثنائية الأبعاد ، الأنظمة متعددة الأبعاد ، الاستقرار والمقبولية ، الإيجابية والحد الأدنى من التحكم في الطاقة.

Thèse préparé à : Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem , ACSY
Team-Laboratory of Pure and Applied Mathematics, P.O.Box 227/118 , 27000
Mostaganem, Algeria

Bibliographie

- [1] H. Eltayeb and A. Kiliçman. On Double Sumudu Transform and Double Laplace Transform, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences* 4(1) : 17-30 (2010).
- [2] O. zkan and A. Kurt. On conformable double Laplace transform, *Opt Quant Electron* 50 :103, (2018).
- [3] I. Bachar and A. Kiliçman. On Conformable Double Laplace Transform and One Dimensional Fractional Coupled Burgers' Equation, *Symmetry* (2019), 11, 417; doi :10.3390/sym11010417.
- [4] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994, ISBN : ISBN 0 – 89871 – 334 – X.
- [5] D. Idczak, R. Kamocki and M. Majewski. On a fractional continuous counterpart of Fornasini–Marchesini model ,8th Int. Workshop on Multidimensional Systems (nDS'13), Erlangen, Germany, Sep 9–11 (2013).
- [6] D. Idczak, R. Kamocki and M. Majewski. On a fractional continuous counterpart of Fornasini–Marchesini model, " nDS '13 ; Proceedings of the 8th International Workshop on Multidimensional Systems, Erlangen, 1-5, (2013).
- [7] F. B. M. Belgacem, A. A. Karaballi and S. Kalla. analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations, *Mathematical Problems in Engineering*, 3, 103-118 (2003).
- [8] F. Cacace, L. Farina, R. Setola, A. Germani (eds.) *Positive Systems, Theory and Applications* (POSTA 2016) Rome Italy , 1st edition. Springer International Publishing Switzerland, (2017).
- [9] H. Eltayeb, I. Bachar and Adem K, Conformable Double Laplace Transform and One Dimensional Fractional Coupled Burgers Equation, *Symmetry*, 11(3), 417 (2019).

- [10] J.E. Kurek. The general state-space model for a two-dimensional linear digital system, *IEEE Trans. Autom. Control* 30(2), 600–602 (1985).
- [11] K. Rogowski. *Solution to the Fractional-Order 2D Continuous Systems Described by the Second Fornasini-Marchesini Model* IFAC Papers OnLine, 50(1), 9748–9752 (2017).
- [12] K. Rogowski, General Response Formula for Fractional 2D Continuous-Time Linear Systems Described by the Roesser Model, *Acta mechanica et automatica*, 5(2), 112–116 (2011).
- [13] J. L. Matheus and F. M. Torres, Variational Calculus with Conformable Fractional Derivatives, *IEEE/CAA Journal OF Automatica Sinica*, 4(2), 340–352 (2017).
- [14] O. Ozkan, A. Kurt. On conformable double Laplace transform. *Opt Quant Electron* 50, 103 (2018).
- [15] O. Ozkan, A. Kurt. conformable fractional double laplace transform and its applications to fractional partial integro-differential equations, *Journal of Fractional Calculus and Applications* 11(1), 70-81 (2020).
- [16] R. Khalil , M. Al Horani , A. Yousef a, M. Sababhehb, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 265, 65–70 (2014),
- [17] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 279, 57–66 (2015).
- [18] T.Kaczorek. *Positive 1 D and 2D Systems*, 1st Edition, Springer-Verlag London (2002).
- [19] T. Kaczorek, K. Rogowski. *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, 1st Edition, Springer International Publishing Switzerland (2015).
- [20] Z. AL-Zhour and al.. New results on the conformable fractional sumudu transform : theories and applications, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(6), 1019–1033 (2019).
- [21] S. Abbas, M. Banerjee, and S. Momani. Dynamical analysis of fractional-order modified logistic model, *Comput. Math. Appl.* 62 , pp. 1098-1104 (2011).
- [22] A.A.M. Arafa, S.Z.Rida, and M. Khalil. The effect of anti-viral drug treatment of human immunodeficiency virus type 1 (HIV-1) described by a fractional order model, *Appl. Math. Model.* 37 , pp. 2189-2196, (2013).
- [23] M. El-Shahed, and A. Salem. On the generalized Navier-stokes equations, *Appl. Math. Comput.* 156 , pp. 287-293 (2004).
- [24] M.S. Hashemi. Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives, *Chaos Solutions Fractals* 107, pp. 161-169 (2018).

- [25] M.S. Hashemi, Some new exact solutions of (2+1)-dimensional nonlinear Heisenberg ferromagnetic spin chain with the conformable time fractional derivative, *Opt. Quant. Electron.* 107, 50–79 (2018).
- [26] G.G. Parra, A.J. Arenas, and B.M. Chen-Charpentier. A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1), *Math. Method. Appl. Sci.* 37 , pp. 2218-2226 (2014).
- [27] H.H. Sherief, and A.M. Abd El-Latief. Application of fractional order theory of thermo elasticity to a 2D problem for a half-space, *Appl. Math. Comput.* 248 , pp. 584-592, (2014).
- [28] Y. Yan, and C. Kou. Stability analysis for a fractional differential model of HIV infection of CD4+ T-cells with time delay, *Math. Comput. Simulat.*, 82 , 1572-1585, (2012).
- [29] T.M. Atanackovic, and B. Stankovic, An expansion formula for fractional derivatives and its application, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 7, 365-378 (2004).
- [30] V.D. Djordjevic, J. Jaric, B. Fabry, J.J. Fredberg, and D. Stamenovi. Fractional derivatives embody essential features of cell rheological behavior, *Ann. Biomed. Eng.* 31, 692-699, (2003).
- [31] C.A. Monje, Y. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu-Batlle, *Fractional-order systems and controls. Fundamentals and applications*, Springer, London, (2010).
- [32] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, (1999).
- [33] X. Baogui, W. Peng, Y. Kwon and Y. Liu. Modeling, discretization, and hyperchaos detection of conformable derivative approach to a financial system with market confidence and ethics risk, *Adv. Difference Equ.* 138, (2019).
- [34] T. Kaczorek. *Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative*, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 28(2), 35–340, (2018).
- [35] T. Kaczorek. General Response Formula and Minimum Energy Control for the General Singular Model of 2-D Systems, *IEEE transaction on automatic control* , 35(4), 433-436, (1999).
- [36] D. D Siljak. *Stability criteria for two-variable polynomials. IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-22, 185-189, (1975).
- [37] E. I. Jury. *Inners and Stability of Dynamic Systems. John Wiley sons : New York. London. Sydney. Toronto*, (1973).
- [38] D. Bouagada & P. Van Dooren. *LMI Conditions for The Stability of 2D State-Space Models. K. Proc. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, (2010).

- [39] D. Bouagada & P. Van Dooren. *LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models, Numerical Linear Algebra with Applications*, 2013, Vol 20(2), 198–207, (2013).
- [40] D. Bouagada. Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, Université d'es-sénia Oran , 19 décembre 2007, <https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/ThesisBouagada.pdf>.
- [41] D. Bouagada *Influence of The Value of Discretization Step on Positivity of 2D Linear Continuous-Discrete Systems. Far East Journal of Mathematical Sciences*, 15(1), 107-112, (2004).
- [42] D. Bouagada & P. Van Dooren. State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems, *Fractional calculus and applied analysis*, 15(3), 356-361, (2012).
- [43] S. Marir , M. Chadli, D. Bouagada. Admissibility conditions for singular linear continuous-time fractional-order systems, *Journal of the Franklin Institute*, 352(2), (2017).
- [44] S. Marir, M. Chadli, and M. Basin. Necessary and Sufficient Admissibility Conditions of Dynamic Output Feedback for Singular Linear Fractional-Order Systems, *Asian J Control* (2022), 1 ?12.
- [45] T. Kaczorek. *Selected Problems of Fractional Systems Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, (2011).
- [46] T. Kaczorek. *Comparison of Approximation Methods of Positive Stable Continuous-Time Linear Systems by Positive Stable Discrete-Time Systems. Archives of Electrical Engineering*, 62(2), pp.345-355, (2013).
- [47] T. Kaczorek. Kamil Borawski, Minimum energy control of descriptor discrete-time linear systems by the use of Weierstrass-Kronecker decomposition, *Archives of Control Sciences*, Volume 26(LXII) , No. 2, pages 177–187, (2016).
- [48] Y. ZOU, Y. , HU, H. & WANG, W. (2008) *Stability for Two-Dimensional Singular Discrete Systems Described by General Model. Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol 19, pp. 219-229, (2008).
- [49] K. Galkowski. *State-Space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD case. Springer, London* (2001).
- [50] T. Kaczorek. *Asymptotic Stability of Positive 2D Linear Systems. Proc. 13th Scientific Conf. on Computer Applications in Electrical Engineering,, Poznan, Poland*, (2008).
- [51] G. M. Amine. analyse et synthèse de certaines classes de systèmes bidimensionnels fractionnaires et/ou singuliers, thèse de doctorat en science université mostaganem (2017). <http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/2679?show=full>

- [52] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia. Admissibility and stabilization of singular continuous 2D systems described by Roesser model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 31, p 673-687, (2020).
- [53] L. Dami, A. Benzaouia. Stabilization of Positive 2D Fractional-Order Continuous-Time Systems with Delays. *Circuits Systems and Signal Processing*, 38(5), (2018).
- [54] L. Dai. *singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, (1989).
- [55] J. Yude, Q. Jiqing. Stabilization of fractional-order singular uncertain systems, *ISA Transactions*, 56, 53-64, (2015).
- [56] I. N'Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, N. Radhy. Stabilization of singular fractional-order systems : an LMI approach, in : 18 th Mediterranean Conference on Control & Automation. Marrakech, Morocco, (2010).
- [57] Y. Ji, J. Qiu, Stabilization of fractional-order singular uncertain systems, *ISA Transactions*, 56, p 53-64, (2015).
- [58] X. Song. L. Liu, Z. Wang, Stabilization of singular fractional-order systems : a linear matrix inequality approach, in : The IEEE International Conference on Automation and Logistics, Thengrhough, China, August (2012).
- [59] Y. Yao, Z. Jiao, C.- Y. Sun. Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional-order singular system, *Acta Automatica sinica*, 39(12), p 2160-2164, (2013).
- [60] A. Graham. Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications, *Ellis Howood Limited. P019. 1EB*. E(1981).
- [61] H. D. Decell. A Special Form of A Generalized Inverse of An Arbitrary Matrix. *Manned Spacecraft Center Houston, Texas*. April, (1965).
- [62] S.F. Chen. Stability analysis and stabilization of 2-D singular Roesser models, *Applied Mathematics and Computation* 250, p 779-791, (2015).
- [63] F.L Lewis, B.G Mertzios. On the analysis of two-dimensional discrete singular systems, *circuits systems signal process* , 11(3), 399–419, (1992).
- [64] B.G Mertzios. Computation of the fundamental matrix sequence and the Cayley- Hamilton theorem in singular 2 – D systems, *Progress in Systems and Control Theory*, 3, (1990), https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3462-3_36.
- [65] J. Laskar, Le Système solaire est-il stable ? , Séminaire Poincaré XIV (2010) 221–246.
- [66] I. Podlubny, R. Magin, I. Trymorush. Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20(5), pp. 1068-1075, (2017), <https://doi.org/10.1515/fca-2017-0057>.

- [67] A. M. Kareem. Conformable Fractional Derivatives and It Is Applications for Solving Fractional Differential Equations, IOSR Jour nal of Mathematics, Volume 13, Issue 2, (2017).
- [68] O. Heaviside. The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Mathematica*. 4(1), 75-89, (1977) doi:10.1016/0315-0860(77)90039-8.
- [69] V. Duarte, M. José, K. Virginia. Some pioneers of the applications of fractional calculus, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17 (2), (2014), doi :10.2478/s13540-014-0185-1.
- [70] J.W Bruce, M. Bologna, P. Grigolini. *Physics of Fractal Operators*, Institute for Nonlinear Science, Springer-Verlag New York, (2003).
- [71] E Donald Kirk. *Théorie du contrôle optimal* . Falaises d'Englewood : Prentice-Hall, p. 19-20 (1970). ISBN 0 – 13 – 638098 – 0.
- [72] A. I. Lur'e. Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control. H. M. Stationery O., London, 1957. In Russian, (1951).
- [73] V. A. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Math. Dokl.*, (3), 620-623, (1961).
- [74] V. A. Yakubovich. Solution of certain matrix inequalities encountered in non- linear control theory. *Soviet Math. Dokl.*, 5 :652-656, 1964.
- [75] V. A. Yakubovich. The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, I, II, III. *Automation and Remote Control*, 25- 26(4), April (1967).
- [76] S., L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1994).
- [77] V. Perrier, R. Mohr. La Décomposition en Valeurs Singulières Analyse numérique et Application à la Vision, Mai (2011), https://ensimag.grenoble-inp.fr/medias/fichier/liesseensimaganalysenumrique_1309510187921.pdf.
- [78] H. Khan, R. Shah, Poom Kumam, and M. Arif. Analytical Solutions of Fractional-Order Heat and Wave Equations by the Natural Transform Decomposition Method, *Entropy*, 21, p 597, (2019), doi:10.3390/e21060597.
- [79] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, (1822), <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v/f16.item>.
- [80] J. Dhombres et J. B Robert, *J. Fourier (1768-1830) : créateur de la physique-mathématique*, Paris, Belin, coll. " Un savant, une époque", p. 767, (1998), (ISBN 978-2-7011-1213-8, OCLC 537928024).
- [81] P. Agathoklis, L.T Bruton : Practical-BIBO stability of n-dimensional discrete systems. *IEE Proceedings G (Electronic Circuits and System)*, **130**(6), (1983), 236-242.

- [82] B.D.O. Anderson and E.I Jury : Stability and the matrix Lyapunov equation for discrete 2-dimensional systems. *IEEE Trans. Circ. Syst*, **33(3)**, (1986), 261-266.
- [83] N.K Bose : *Multidimensional Systems Theory and Applications*, 2nd edition, Springer verlag, 2003.
- [84] M. Ghamgui, D.Mehdi , O. Bachelier, M. Chaabane : On the Robust state feedback stabilization of nD hybrid Roesser models with implicit LFR uncertainty. *International Journal of Control*, (12), (2018), 1-20.
- [85] T. Chu, C. Zhang, C. Zhang, L. Xie and Y.C Soh : Stability Analysis of a Class of Multidimensional Systems. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, **6**, (2004), 6454-6457.
- [86] D.L Davis : A Correct proof of Huang's theorem on stability. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **24(5)**, (1976), 425-426.
- [87] O. A Elosmani, D. Bouagada, P. Van Dooren, K. Benyettou : LMI Stability Test for Multidimensional Linear State-Space Models, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **390**, (2021), 113363.
- [88] E. Fornasini and G. Marchesini : State-space realization theory of two-dimensional filters, *IEEE Trans. Autom. Contr*, **21(4)**, (1976), 487-491.
- [89] K. Galkowski and J. Wood : *Multi Dimensional signals, circuit and systems*, Taylor and Francis, 2001. <https://doi.org/10.1201/b12585>.
- [90] D.D Givone, R.P Rosser : Multidimensional linear iterative circuits general properties. *IEEE Trans. On Computers*, **C-21(10)**, (1972), 1067-1073.
- [91] T. Huang : Stability of two dimensional recursive filters, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, **AU-20(2)**, (2002), 158-163.
- [92] T. Kaczorek : *Two Dimensional Linear Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1985. DOI : <https://doi.org/10.1007/BFb0005617>.
- [93] T. Kaczorek : Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state-feedbacks, LMI approach. *Archives of Control Sciences*, **19(2)**, (2009), 165-177.
- [94] S. Tofighi, M. Shafiee, S.M Alavinia : Stability analysis of three-dimensional : 3D systems using a wave advanced model (WAM), *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **39(6)**, (2015), 896-906.
- [95] S. Xu, J. Lam, Z. Lin, K. Galkowski, W. Paszke, E. Rogers and D.H. Owens : Positive real control of two-dimensional systems : Roesser models and linear repetitive processes. *international Journal of Control*, **76(11)**, (2003).

- [96] F.R. Gantmacher, The Teory of Matrices, Chelsea Pub. Comp. London, 1998.
- [97] Y. Zou, H. Xu, W. Wang : Stability for two-dimensional singular discrete systems described by general model, Multidimensional Systems and Signal Processing, **2**, (2008), 219-229.