

Faculty of Sciences and Technology

كلية العلوم والتكنولوجيا

Department of Mechanical Engineering

N° d'ordre : M...../GM/2023

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Analyse de flambement des plaques FGM en utilisant la théorie simple et raffinée de déformation par cisaillement

Présenté par :

- ❖ Benkredda Abdelkader
- ❖ FOUJIL Mohamed Yacine

Soutenu le 25 / 06 / 2023 devant le jury composé de :

Président	Mme. ZAOUI F. Z.	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Mme. BELHACHEMI A.	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Mr. OUINAS D.	Université de Mostaganem UMAB
Co-encadreur	Mr. RACHID A.	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2022 / 2023

Remerciements

En cette journée spéciale, je tiens à exprimer mes sincères remerciements, empreints de fierté et d'admiration à mes parentes et mon frère Hocine, qui a été ma source inépuisable d'amour, d'encouragement et de soutien tout au long de ce parcours.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Pr. D. Guinas pour sa patience, son enthousiasme et sa volonté de partager ses connaissances.

Je souhaite remercier l'université Abdelhamid Ibn Badis et le département de génie mécanique, qui m'a offert une plateforme d'apprentissage exceptionnelle et des ressources sans égales.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes chers collègues, qui ont partagé ce voyage passionnant avec moi, m'inspirant et me motivant chaque jour.

Enfin, mes sincères remerciements aux membres de jury, Mme. F. Zaoui et Mme. A. Belhachemi pour leur temps, leur expertise et leur précieuse contribution à mon travail de recherche
Benkredda Abdelkader

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah pour m'avoir accordé la force et le courage nécessaires pour mener à bien ce projet. Sa guidance et sa bénédiction ont été essentielles tout au long de ce parcours.

Je suis reconnaissant(e) envers mes frères, Sofiane et Habbib, pour leur soutien constant et leur amitié précieuse. Mes remerciements sincères à Monsieur Djamel Guinas et Madame Zaoui Fatima Zohra pour leur influence positive et leurs conseils éclairés.

Mes remerciements vont également à mes meilleurs amis, Benkredda Abdelkader, Reziga Miloud et Mechai Email, qui ont toujours été là pour moi, me soutenant et m'encourageant dans tous les aspects de ma vie. Votre amitié précieuse a été un moteur dans ma poursuite de l'excellence.

Enfin, Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers tous mes amis d'enfance, ainsi que ceux qui ont partagé avec moi le long parcours scolaire et universitaire. Votre soutien indéfectible et votre amitié sincère ont joué un rôle essentiel dans ma croissance personnelle et académique.

FBU DJF Mohamed Yacine

RÉSUMÉ

Dans cet article, une théorie raffinée, efficace et simple est présentée pour l'analyse du flambage des plaques à gradient fonctionnel. Cette théorie, qui présente de nombreuses similitudes avec la théorie classique des plaques, prend en compte une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés mécaniques du matériau à gradient fonctionnel sont supposées variables selon une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations gouvernantes sont dérivées du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Les solutions analytiques des plaques rectangulaires sont obtenues. Des études comparatives sont réalisées pour vérifier la validité des résultats présentés. Les effets des conditions de chargement et des variations de la puissance du matériau à gradient fonctionnel, du rapport de module d'élasticité, du rapport d'aspect et du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambage des plaques à gradient fonctionnel sont étudiées et discutées.

Mots clés : Solution analytique, Théorie raffinée de la plaque, Analyse du flambage Plaque à gradient fonctionnel FGM.

Abstract

In this paper, an efficient and simple refined theory is presented for buckling analysis of functionally graded plates. The theory, which has strong similarity with classical plate theory in many aspects, accounts for a quadratic variation of the transverse shear strains across the thickness and satisfies the zero traction boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction factors. The mechanical properties of functionally graded material are assumed to vary according to a power law distribution of the volume fraction of the constituents. Governing equations are derived from the principle of minimum total potential energy. The closed-form solutions of rectangular plates are obtained. Comparison studies are performed to verify the validity of present results. The effects of loading conditions and variations of power of functionally graded material, elasticity modulus ratio, aspect ratio, and thickness ratio on the critical buckling load of functionally graded plates are investigated and discussed.

Keywords: Closed-form solution, Refined plate theory, Buckling analysis, Functionally graded plate.

ملخص

في هذا الورقة، يتم تقديم نظرية مكرّسة فعّالة وبسيطة لتحليل الانحناء للوحات ذات التركيب الوظيفي المتدرج. تُعتبر هذه النظرية، التي تتشابه بشكل كبير مع نظرية الوحة الكلاسيكية في العديد من الجوانب، بتأخذ في الاعتبار تغييرًا تربيعيًا في الشدات القصية العرضية عبر السماكة وتلبي شروط الاحتكاك الصفري على الأسطح العلوية والسفلية للوحة دون استخدام عوامل تصحيح القص. يفترض أن تتغير الخواص الميكانيكية للمادة ذات التركيب الوظيفي وفقًا لتوزيع قوة قوة قانون الكتلة الحجمية للعناصر المكوّنة. تتم استنتاج المعادلات الحاكمة من مبدأ الطاقة الكامنة الإجمالية الدنيا. يتم الحصول على الحلول المتكاملة للوحات المستطيلة. يتم إجراء دراسات مقارنة للتحقق من صحة النتائج الحالية. يتم استكشاف ومناقشة تأثير ظروف التحميل وتغيرات قوة المادة ذات التركيب الوظيفي، ونسبة الموديول، ونسبة الجانب، ونسبة السمك على الحمل الحرج للوحات ذات التركيب الوظيفي

الكلمات المفتاحية: حل متكامل التحليل المتدرج الوظيفي التركيب ذات لوحة الانحناء تحليل للوحة مكرّسة نظرية

Table des matières

Remerciements	ii
RÉSUMÉ	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Symboles et abréviations	x
Introduction générale	1
Chapitre I. Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués et les différentes théories des plaques	3
I. 1. Introduction	3
I. 2. Définition des plaques FGM	3
I. 3. Conception des plaques FGM	4
I. 4. Types des matériaux FGM	5
I. 4. 1. Matériaux à gradient de composition chimique	6
I. 4. 2. Matériaux à gradient de porosité	6
I. 4. 3. Matériaux à gradient microstructural	7
I. 5. Propriétés des FGM	7
I. 5. 1. Métaux	8
I. 5. 2. Céramiques	8
I. 6. Processus et technique de fabrication des FGM	8
I. 6. 1. Techniques de fabrication additive	9
I. 7. Domaines d'applications des matériaux à gradient fonctionnel	10
I. 8. Avantages et inconvénients des FGM.....	11
I. 8. 1. Avantages des FGM.....	11
I. 8. 2. Inconvénients des FGM.....	11
I. 9. Différentes théories des plaques	12
I. 9. 1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT).....	12
I. 10. Conclusion	14
Chapitre II..... Analyse du flambage des plaques à gradation fonctionnelle via une théorie efficace et simple	16
II. 2. Théorie raffinée pour l'analyse de flambage des plaques fonctionnellement gradués.....	17

II. 2. 1. Hypothèses de base.....	17
II. 2. 2. Cinématique.....	18
II. 2. 3. Relations constitutives	19
II. 2. 4. Équations gouvernantes	19
II. 2. 5. Solution analytique pour une plaque rectangulaire	22
II. 3. Résultats et discussions.....	23
II. 3. 1. Etude paramétrique.....	26
Conclusion générale.....	33

Liste des figures

Figure I-1. FGM avec les fractions volumiques de phases constitutives gradées dans une direction (verticale) [4].....	4
Figure I-2. a) Matériaux composites combinant le matériau A et le matériau B : la propriété matérielle $F(x)$ est une fonction échelon qui change brusquement à l'interface, (b) Matériaux à gradient fonctionnel (FGM) varient progressivement du matériau A au matériau B : la propriété matérielle varie en douceur le long de la dimension [5].	5
Figure I-3. La différence entre une structure à gradient échelonné et une structure à gradient continu [5].	5
Figure I-4. Illustration d'un matériau à gradient de composition chimique [6].....	6
Figure I-5. Schéma d'un matériau à gradient de porosité [6].....	6
Figure I-6. Schéma d'une microstructure graduée [9].....	7
Figure I-7. Schéma de Processus et technique de fabrication des FGM [4].....	10
Figure II-1. Géométrie d'une plaque rectangulaire en matériau fonctionnellement graduées.....	18
Figure II-2. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambage non dimensionnelle N d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b = 10h$) sous différentes conditions de chargement.	26
Figure II-3. Effet du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambage non dimensionnelle N d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b$) soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).....	27
Figure II-4. Effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambage non dimensionnelle N d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe y ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1$).....	28
Figure II-5. Effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambage non dimensionnelle N d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) soumise à une compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$).....	28

Liste des tableaux

Tableau II-1. Comparaison de la charge critique de flambage (MN/m) d'une plaque Al/SiC simplement supportée.	24
Tableau II-2. Comparaison de la charge critique de flambage non dimensionnel N d'une plaque carrée Al/SiC simplement appuyée ($a = b = 10h$).	25
Tableau II-3. Charge critique de flambage non dimensionnel N d'une plaque Al/Al_2O_3 simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale sur l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).	29
Tableau II-4. Charge critique de flambage non dimensionnel N d'une plaque Al/Al_2O_3 simplement appuyée soumise à une compression biaxiale. ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$).	30

Symboles et abréviations

x	Coordonnées axiale dans le plan horizontal de la plaque.
y	Coordonnées axiale dans le plan horizontal de la plaque.
z	Coordonnée axiale dans le plan transversale et verticale de la plaque.
t	Temps.
a	Longueur de la plaque.
b	Largeur de la plaque.
h	Épaisseur de la plaque.
u, v, w	Les déplacements selon les directions x,y et z, respectivement.
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes x,y et z.
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z ».
∂	Dérivée partielle.
φ	Une composante supplémentaire de déplacement transversal.
σ_x, σ_y	Contraintes axiale dans le plan horizontal de la plaque.
σ_z	Contrainte normale transversale.
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x,y et z.
γ_{xy}	Déformations dans le plan.
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion.
δ	Champ virtuel.
δU	Travail virtuel intérieur = L'énergie de déformation.
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel.
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel.
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux = les résultantes de contraintes.
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion = les résultantes de contraintes.
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse = les résultantes de contraintes.
δV	Travail effectué par des charges externes.

Introduction générale

À la fin du XIXe siècle, une nouvelle technologie concernant les matériaux composites a été découverte au Japon. Cette technologie implique l'utilisation de plaques fonctionnellement graduées (FGM) pour des applications aéronautiques et spatiales, qui requièrent une résistance très élevée aux températures. Les progrès réalisés dans le domaine des matériaux composites ont permis de combiner des propriétés spécifiques de différents matériaux en une seule pièce, telles que la résistance et la rigidité par rapport au poids, pour qu'ils puissent s'adapter aux environnements à haute température [1].

Généralement, deux types de matériaux sont utilisés ensemble pour compléter l'un l'autre. Le métal se distingue par sa résistance mécanique et sa dureté, mais il devient faible dans des conditions à haute température, contrairement à la céramique qui est caractérisée par sa grande résistance thermique et sa faible ductilité. Les FGM, ou matériaux fonctionnellement gradués, sont élaborés avec une distribution graduelle et continue des propriétés matérielles à travers leur épaisseur, selon une loi de puissance proportionnelle à la fraction volumique des différents constituants. Cette spécifique fonctionnalité permet de supprimer l'échec des matériaux composites traditionnels, qui est dû à l'interface distincte ou bien définie qui existe entre les couches de matériaux composites. Cette interface provoque une forte concentration de contraintes qui favorise l'amorçage des fissures et leur propagation éventuelle, conduisant à la rupture ultime du composite. Ce processus est connu sous le nom de "délaminage". Cette interface est systématiquement éliminée dans les FGM grâce à l'évolution progressive des fractions volumiques de leurs composants, et par conséquent, de leurs propriétés dans une direction spécifique [1,2].

À l'origine, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont été développés pour une application de barrière thermique. Depuis, ce matériau de pointe a été largement utilisé pour résoudre un grand nombre de problèmes en ingénierie. Les applications aérospatiales, automobiles et biomédicales font partie des nombreux domaines qui bénéficient de cette innovation.

L'objectif de ce travail consiste à analyser le flambage des plaques en matériaux fonctionnellement gradués en utilisant une théorie raffinée à quatre variables seulement.

Pour atteindre notre objectif, ce mémoire est composé de deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons étudier en détail les plaques FGM, en commençant par leur définition. Nous examinerons également leur conception, leur domaine d'application et les différentes techniques et processus de fabrication qui sont utilisés pour les produire. Cette analyse complète nous permettra de mieux comprendre les caractéristiques et les avantages des plaques FGM, ainsi que leurs limites et leurs défis associés ainsi que les différentes théories et approches des plaques sont présentées dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du modèle mathématique utilisé pour étudier le flambement des plaques fonctionnellement gradués en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé ainsi que les résultats trouvés sont présentés sous forme de tableaux et de figures.

Et à la fin, ce mémoire est achevé par une conclusion générale.

Chapitre I

*Généralités sur les matériaux
fonctionnellement gradués et les
différentes théories des plaques*

Chapitre I. Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués et les différentes théories des plaques

I. 1. Introduction

L'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) a connu une croissance significative au fil des années, en raison de leur capacité à offrir des propriétés améliorées pour une large gamme d'applications. Les plaques FGM sont un exemple commun de cette technologie. Cette introduction de chapitre se concentrera sur les différentes facettes des plaques FGM, notamment leur définition, leur conception, les types de matériaux utilisés, les propriétés des métaux et des céramiques, les processus de fabrication, les domaines d'application ainsi que les avantages et les inconvénients de cette technologie. En outre, nous explorerons les méthodes conventionnelles et les techniques de fabrication additive pour la production de FGM, ainsi que les matériaux à gradient de composition chimique, de porosité et microstructuraux. Cette introduction offrira une vue d'ensemble complète de la technologie des plaques FGM et permettra aux lecteurs de mieux comprendre les avantages et les inconvénients de cette technologie émergente.

I. 2. Définition des plaques FGM

Une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel (FGM), est un composite inhomogène composé de différentes phases de constituants de matériaux (généralement des céramiques et des métaux. Un exemple de tel matériau est présenté dans la Figure I.1 où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Au sein des FGM, les différentes phases microstructurelles ont des fonctions différentes, et les FGM globaux atteignent le statut multistructurel de leur gradation de propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles présentent un changement doux et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et atténuant les concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que les constituants céramiques des FGM sont capables de résister à des environnements à haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une performance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de fracture catastrophique [3].

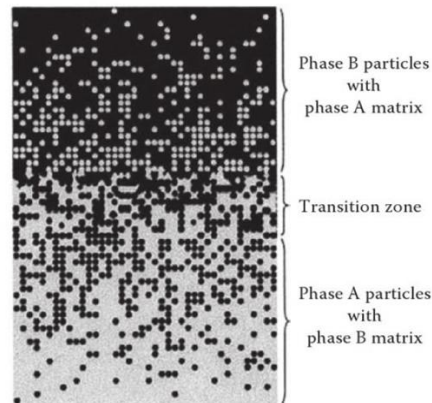


Figure I-1. FGM avec les fractions volumiques de phases constitutives gradées dans une direction (verticale) [4].

I. 3. Conception des plaque FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des matériaux avancés caractérisés par un changement progressif de leurs propriétés par rapport à leur position spatiale. L'idée des FGM a été initialement développée pour les matériaux composites, qui combinent deux ou plusieurs constituants différents et présentent de bonnes propriétés mécaniques. Cependant, des transitions abruptes entre des constituants différents existent souvent dans les matériaux composites, qui sont des concentrateurs de contraintes pouvant entraîner une délamination. Pour éviter cet inconvénient et éliminer les transitions abruptes, le concept de FGM a été suggéré pour introduire une zone de gradient entre les constituants différents. La figure I-2 illustre la différence entre les matériaux composites et les FGM. Comme le montre la figure I.2(a), dans les matériaux composites, en raison du changement abrupt de matériel A à matériel B, la fonction de propriété matérielle $F(x)$ subit une transition abrupte en escalier. Les transitions abruptes dans les propriétés des matériaux à l'interface entraînent des réponses très différentes à l'environnement à l'interface et provoquent des dommages. Au lieu de cela, si nous passons du matériau A au matériau B avec un gradient de composition au milieu comme le montre la figure I.2(b), alors $F(x)$ peut être une fonction continue, soulageant ainsi la différence significative. Les FGM ont été inventées par des scientifiques japonais dans les années 1980 pour concevoir une barrière thermique avec une différence de température allant jusqu'à 1000^0K . Par la suite, les FGM ont été conçus pour être utilisés dans de nombreux autres domaines tels que l'automobile, les moteurs aérospatiaux, les implants, etc [5].

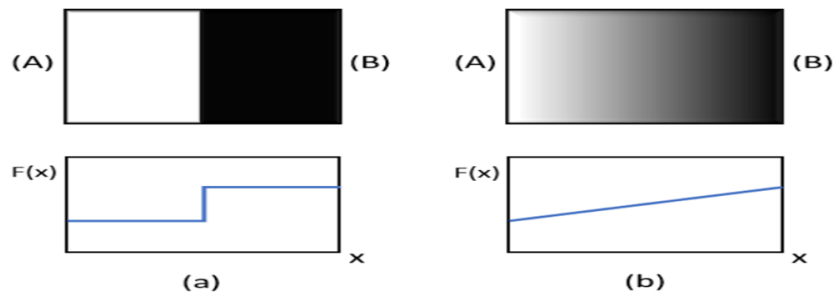


Figure I-2. a) Matériaux composites combinant le matériau A et le matériau B : la propriété matérielle $F(x)$ est une fonction échelon qui change brusquement à l'interface, (b) Matériaux à gradient fonctionnel (FGM) varient progressivement du matériau A au matériau B : la propriété matérielle varie en douceur le long de la dimension [5].

- ❖ Les propriétés des matériaux dans les FGM ne sont pas uniformes dans l'ensemble du matériau, et les propriétés dépendent de la position spatiale du matériau dans la structure globale du matériau.
- ❖ Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont conçus avec des propriétés variables qui comprennent des changements de propriétés chimiques, mécaniques, magnétiques, thermiques et électriques.
- ❖ Il existe des FGM conçus comme des structures à gradient échelonné, et d'autres conçus pour être des structures à gradient continu, en fonction des domaines d'application comme la montre la figure I-3.



Figure I-3. La différence entre une structure à gradient échelonné et une structure à gradient continu [5].

I. 4. Types des matériaux FGM

Au commencement de la création des matériaux fonctionnellement gradués, l'idée était de remplacer l'interface existante dans les matériaux composites traditionnels par une interface progressivement graduelle. En raison de l'intérêt croissant pour ce type de matériau, divers types de FGM ont été développés pour répondre aux différents besoins d'application. Le choix du type de FGM dépend généralement de l'application prévue. Les types de FGM produits actuellement comprennent le FGM de gradient de composition chimique, le FGM de gradient

de porosité et le FGM de gradient microstructural. Les sections suivantes examinent chacun de ces types de FGM.

I. 4. 1. Matériaux à gradient de composition chimique

Les matériaux à gradient de composition chimique (Chemical Composition Gradient Materials - CCGMs) sont un type de matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) qui présentent une variation graduelle de leur composition chimique sur une certaine distance. Cette variation de composition est réalisée en utilisant différents types de matériaux avec des propriétés chimiques différentes, qui sont mélangés ensemble pour créer une transition en douceur entre les différentes zones. Une illustration d'un matériau de ce type est montrée sur la figure I.4 [6].

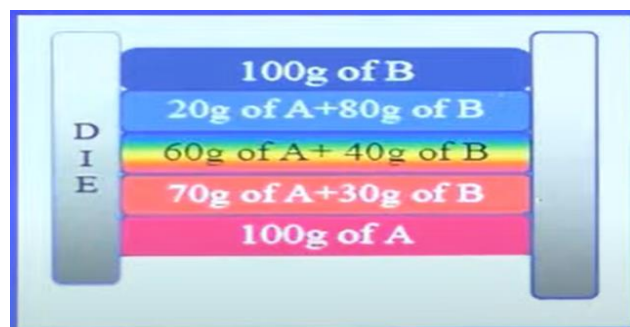


Figure I-4. Illustration d'un matériau à gradient de composition chimique [6].

I. 4. 2. Matériaux à gradient de porosité

Les matériaux à gradient de porosité (Porosity Gradient Materials - PGMs) sont une classe de matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) dont la porosité varie graduellement dans une direction donnée. Contrairement aux matériaux conventionnels qui ont une structure poreuse uniforme, les PGMs présentent une distribution continue de la taille et de la forme des pores. Cette variabilité de la porosité peut être réalisée de différentes manières, telles que l'ajout de particules poreuses ou l'utilisation de techniques de fabrication avancées telles que la stéréolithographie.

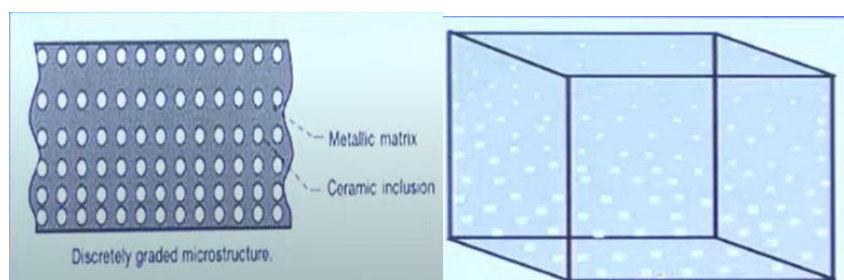


Figure I-5. Schéma d'un matériau à gradient de porosité [6].

Les PGMs présentent une combinaison unique de propriétés, telles que la légèreté, la résistance mécanique, la capacité d'absorption d'énergie et la conductivité thermique comme la montre la figure I.5 [7].

I. 4. 3. Matériaux à gradient microstructural

Les matériaux à gradient microstructural (Microstructural Gradient Materials - MGMs) sont des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) dont la microstructure varie graduellement dans une ou plusieurs directions. Cette variation de microstructure peut être obtenue en utilisant différents types de matériaux, tels que des céramiques, des métaux, des polymères ou des composites, qui présentent des propriétés microstructurales différentes [8].

Les MGMs peuvent être classés en deux catégories principales : les MGMs unidirectionnels et les MGMs multidirectionnels. Les MGMs unidirectionnels ont une microstructure qui varie graduellement dans une seule direction, tandis que les MGMs multidirectionnels ont une microstructure qui varie graduellement dans plusieurs directions [9].

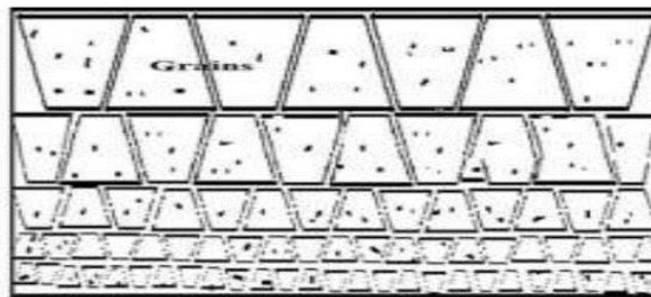


Figure I-6. Schéma d'une microstructure graduée [9].

Les propriétés des MGMs dépendent de leur microstructure, qui peut inclure des variations de taille de grains, de porosité, de texture, de composition chimique, de distribution de phase et d'orientation cristalline. Les propriétés des MGMs peuvent être ajustées pour répondre aux exigences spécifiques de chaque application en contrôlant la microstructure de la transition [10].

I. 5. Propriétés des FGM

Les FGM peuvent inclure des propriétés incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, la facilité d'usinage et la capacité de liaison des métaux, sans subir de contraintes thermiques internes sévères [11].

Généralement, les FGM sont composés de deux matériaux de base, la céramique et le métal, qui sont sélectionnés en fonction de leurs propriétés physiques respectives [12].

I. 5. 1. Métaux

Lorsque la plupart des éléments du tableau de Mendeleïev sont des métaux, cela présente plusieurs avantages [13] :

- Très bons conducteurs de chaleur,
- Très bons conducteurs d'électricité,
- Plus souvent durs et rigides,
- Déformables plastiquement,
- Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [14].

I. 5. 2. Céramiques

La plupart des céramiques sont des matériaux très durs qui résultent de la combinaison d'éléments métalliques tels que l'aluminium, le nickel, le titane, le zirconium, etc avec des éléments non-métalliques, principalement l'oxygène. Ils sont largement utilisés comme abrasifs et sont particulièrement adaptés aux environnements extrêmes tels que les hautes températures, en raison de leur comportement réfractaire qui se caractérise par une résistance mécanique et thermique très élevée [12]. Cependant, en général, ils ont tendance à être fragiles, ce qui limite leur utilisation dans des applications soumises à des chocs mécaniques et thermiques importants. Les céramiques sont sélectionnées pour leurs caractéristiques exceptionnelles, qui comprennent les propriétés suivantes [11,13] :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Faible coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.
-

I. 6. Processus et technique de fabrication des FGM

Les technologies de fabrication jouent un rôle important dans l'obtention de gradients de composition de microstructure prescrits. En général, le processus de développement de

nouveaux matériaux est étroitement lié à l'existence d'une méthode de fabrication appropriée. Cette dépendance est plus forte dans le cas des FGM car, dans la plupart des cas, les méthodes de fabrication conventionnelles ne répondent pas à toutes les exigences de gradation complexe. L'intégration de ces matériaux dans des applications réelles n'a pas été totalement réussie dans le passé en raison des limitations des méthodes de fabrication disponibles. Parallèlement aux améliorations des technologies de fabrication, l'intérêt pour les FGM et le nombre de publications sur les technologies de traitement a augmenté de manière exponentielle entre 1998 et 2019 [14].

I. 6. 1. Techniques de fabrication additive

Les techniques de fabrication additive offrent des possibilités intéressantes en termes de flexibilité pour concevoir la composition des matériaux, des formes complexes et de la complexité fonctionnelle. Les avancées technologiques actuelles permettent la production de FGM. Bien que de nombreuses marques existent pour les techniques de fabrication additive, elles peuvent être classées en sept catégories principales : Fusion de lit de poudre (PBF), Dépôt d'énergie dirigée (DED), Extrusion de matériau (ME), Stratification de feuilles (SL), Jet de matériau (MJ), Jet de liant (BJ), Photopolymérisation en cuve (VP). Certaines de ces catégories ont fait l'objet d'études mesurant les performances et les capacités de certaines modifications pour la fabrication de FGM. La VP est une méthode indirecte de fabrication additive qui permet de déposer des matériaux avec une finition de surface élevée, un contrôle précis des propriétés et à faible coût. Dans la technique VP, une zone sélectionnée sur une cuve de résine photopolymère liquide est solidifiée à l'aide d'une source lumineuse ou d'un laser. Selon la direction de mouvement de la plateforme de construction après le durcissement de chaque couche, la méthode peut utiliser des approches de haut en bas (la plateforme se déplace vers le bas) ou de bas en haut (la plateforme se déplace vers le haut). Les méthodes VP peuvent être utilisées avec presque tous les types de poudres disponibles sur le marché, ce qui offre un grand potentiel pour augmenter leur utilisation à l'avenir. Ainsi, les méthodes VP peuvent être l'une des meilleures méthodes de fabrication additive pour la fabrication de FGM à base de matériaux simples ou multiples [15].

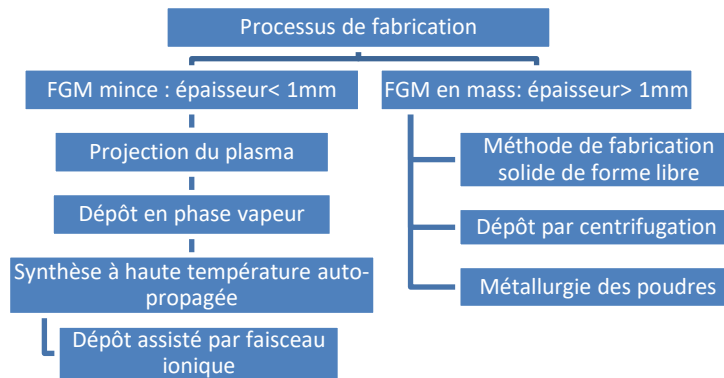


Figure I-7. Schéma de Processus et technique de fabrication des FGM [4].

I. 7. Domaines d’applications des matériaux à gradient fonctionnel

En raison de leurs propriétés importantes, les FGM sont de plus en plus utilisées dans de nombreux domaines de l’ingénierie et de l’industrie, notamment dans l’aérospatiale, l’automobile, le biomédical, l’électrique, l’énergie et le maritime, biomédical, l’électrique, l’énergie et le maritime.

Tableau I-1. Principaux domaines d'application de FGM [15].

Domaines d’ applications des matériaux à gradient fonctionnel	Matières biologiques	Implants, Peau artificielle.
	optiques	Fibres optiques, Lentilles.
	produits	Matériaux de constructions, Corps de voiture, Verres de fenêtre.
	Conversion d’énergie	Générateur thermoélectrique, Convertisseur thermoïonique, Pile à combustible.
	L’énergie nucléaire	Composants des réacteurs nucléaires , pastilles de combustible.
	Electronique	Semi-conducteur à bande graduée.
	Ingénierie	Outils de coupe éléments de moteur.
	Chimique	L’échangeur de chaleur, Tube de chaleur, Récipient de réaction.
	Aérospatial	Composants de moteur-fusée Corps de avions spatiaux.

I. 8. Avantages et inconvénients des FGM

Le fait que les matériaux soient gradués fonctionnellement comporte des avantages et des inconvénients, cités ci-après :

I. 8. 1. Avantages des FGM

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGMs) offrent plusieurs avantages grâce à leur composition unique. Un avantage est leur capacité à réduire le poids tout en conservant la résistance, ce qui les rend idéaux pour les applications où le poids est un facteur à prendre en compte. Ils ont également une faible dilatation thermique, ce qui les rend utiles dans des environnements à haute température. Un autre avantage des FGM est leur haute résistance et rigidité spécifiques, ce qui signifie qu'ils peuvent supporter des charges plus élevées sans se plier ou se casser.

Les FGM offrent également une solution pour les combinaisons de matériaux incompatibles, car ils peuvent être conçus pour faire une transition graduelle d'un matériau à un autre, éliminant ainsi les points de concentration de contraintes. Enfin, la capacité de personnaliser un matériau pour une application spécifique est un avantage significatif des FGM. En variant la composition du matériau, il est possible d'obtenir des propriétés spécifiques, telles que la conductivité thermique ou la résistance à l'usure, qui sont requises pour une application particulière.

I. 8. 2. Inconvénients des FGM

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) offrent de nombreux avantages, mais ils présentent également quelques inconvénients. L'un des principaux inconvénients est que le processus de production des FGM est coûteux et nécessite des techniques avancées. Il peut être difficile de contrôler le processus, ce qui peut entraîner des variations dans la composition et les propriétés du matériau.

De plus, pendant le processus de production, des phénomènes complexes peuvent survenir, tels que la contraction, les distorsions et la dilution. Ces problèmes peuvent affecter la qualité et la cohérence des FGM, les rendant moins fiables pour certaines applications.

De plus, la complexité des FGM rend également difficile la modélisation et l'analyse de leur comportement dans différentes conditions, ce qui rend difficile l'optimisation de leur performance.

I. 9. Différentes théories des plaques

La modélisation d'une structure ou d'un élément de structure implique la transcription de son comportement et des lois qui le régissent. Il existe plusieurs options de modélisation, qu'elle soit analytique ou numérique. Récemment, de nombreuses recherches ont été menées pour résoudre les problèmes liés à la modélisation de structures anisotropes. On présente une revue de la littérature sur les différents types de modèles ou d'approches utilisés ainsi que les théories associées. En général, ces hypothèses permettent de réduire un problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel.

I. 9. 1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) repose sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, qui supposent que la normale à la plaque reste perpendiculaire après déformation, négligeant ainsi les déformations en cisaillement transverse. Cette théorie est définie par l'équation (I.1) qui décrit le champ de déplacement. La figure I.8 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec ce modèle, où la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, et les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Bien que cette formulation tende à sous-estimer les flèches et surestimer les charges critiques de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, elle est adaptée pour décrire le comportement de plaques simples ayant une forte élévation ou une faible épaisseur par rapport à la longueur d'onde de flexion. Ainsi, ce modèle est souvent appelé "modèle de plaques minces". Cependant, pour les stratifiés fortement anisotropes, cette erreur est encore plus grande. Des références pour ce modèle de plaque sont Timoshenko et Woinowsky-Krieger [17] ainsi que Reddy [18].

En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{I-1}$$

Avec u_0 et v_0 sont les composantes du champ de développement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

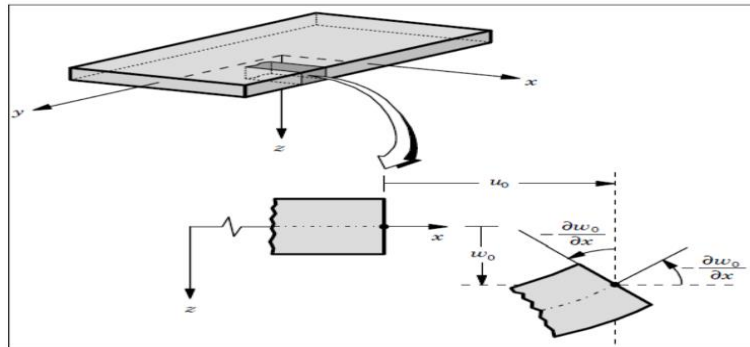


Figure I-8. Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [18].

I. 9. 2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre est une extension de la théorie classique des plaques, qui prend en compte les effets de cisaillement transverse. Dans ce cas, les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction du facteur de correction de cisaillement. Les travaux sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ont été effectués par Reissner en 1945 et Mindlin en 1951 [19].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{I-2}$$

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}
 \tag{I-3}$$

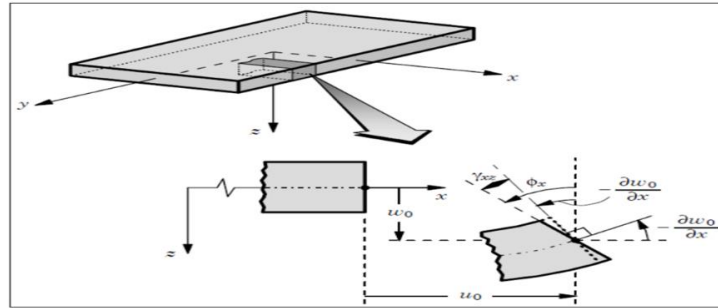


Figure I-9. Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT) [16].

I. 9. 3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Contrairement à la théorie classique des plaques (CPT) et à la théorie du premier ordre (FSDT), qui supposent une distribution linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé prend en compte une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur, incluant les effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale, sans nécessiter de facteurs de correction.

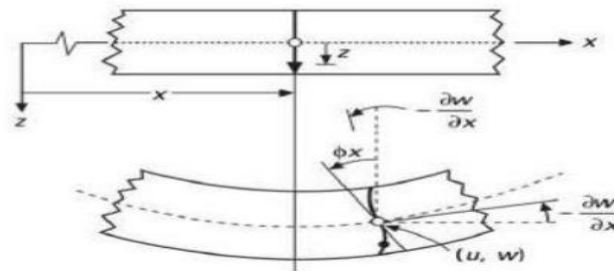


Figure I-10. Cinématique de la plaque d'ordre élevé (HSDT) [16].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= U_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_x(x, y) \\
 V(x, y, z) &= V_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_y(x, y) \\
 W(x, y, z) &= W_0(x, y) + z\phi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{I-4}$$

Avec : (U_0, V_0, W_0) sont les déplacements en membrane, ϕ_x et ϕ_y sont les rotations autour des axes x et y, ψ_x et ψ_y sont les fonctions de cisaillement transverse.

I. 10. Conclusion

En conclusion, les plaques FGM offrent des avantages significatifs dans de nombreux domaines d'application en ingénierie et en science des matériaux. Leur conception unique permet de combiner les propriétés de différents matériaux pour répondre à des exigences spécifiques.

Cependant, la production de ces matériaux reste coûteuse et complexe, ce qui limite leur utilisation dans certaines applications. Malgré cela, les FGM continuent d'être une voie prometteuse pour de nombreux défis en ingénierie. Les recherches futures devraient se concentrer sur l'amélioration des processus de fabrication et la recherche de nouveaux matériaux FGM pour répondre aux besoins émergents dans des domaines tels que l'aérospatiale, la médecine et l'énergie.

Ensuite dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des différents modèles analytiques pour le calcul des plaques épaisses en FGM, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine. Ces modèles comprennent la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Cependant, notre lecture de la littérature révèle que bien que ces théories soient intéressantes en termes de précision, elles deviennent assez complexes en termes de formulations.

Chapitre II

*Analyse du flambage des plaques à
gradation fonctionnelle par une
théorie efficace et simple*

Chapitre II. Analyse du flambage des plaques à gradation fonctionnelle via une théorie efficace et simple

II. 1. Introduction

De nombreuses études sur l'analyse de flambage des plaques FG ont été menées en utilisant la théorie de la flexion paroi mince (FSDT) [20-21]. Puisque la FSDT viole les conditions d'équilibre aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, des facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires pour corriger la variation irréaliste des contraintes et déformations de cisaillement transverses à travers l'épaisseur. Ces facteurs de correction de cisaillement sont sensibles non seulement aux paramètres géométriques de la plaque, mais aussi aux conditions aux limites et aux conditions de chargement. Pour éviter l'utilisation de ces facteurs de correction, plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), qui impliquent des termes d'ordre supérieur dans les développements de Taylor des déplacements dans la coordonnée d'épaisseur, ont été proposées. Bien que les HSDT aient été adoptées pour l'analyse de flambage des plaques FG [22, 23], elles ne sont pas pratiques à utiliser en raison des termes d'ordre supérieur introduits dans la théorie. Par conséquent, Shimpi [24] a développé une nouvelle théorie de plaque raffinée qui est simple à utiliser.

Bien que plusieurs études sur le flambement de plaques FG aient été menées sur la base de différentes théories de plaques, aucune étude ne peut être trouvée pour le flambement de plaques FG basé sur la théorie raffinée proposée par Shimpi. Par conséquent, l'objectif de cette étude est d'étendre la théorie raffinée de Shimpi à l'analyse du flambement de plaques FG soumises à une charge en plan. Les propriétés des matériaux des plaques FG, telles que le module de Young, sont supposées variables à travers l'épaisseur de la plaque avec une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des constituants, tandis que le coefficient de Poisson est constant. Les équations de gouvernance sont déduites du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Des solutions analytiques de plaques rectangulaires sont obtenues. Des études de comparaison sont effectuées pour vérifier la validité des résultats présentés. Les effets des conditions de chargement et des variations de la puissance du matériau à gradient fonctionnel, du rapport de module, du rapport d'aspect et du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement des plaques FG sont étudiées et discutées.

II. 2. Théorie raffinée pour l'analyse de flambage des plaques fonctionnellement gradients

La théorie raffinée proposée par Shimpi [24] repose sur l'hypothèse que les déplacements dans le plan et transversaux se composent de composantes de flexion et de cisaillement, dans lesquelles les composantes de flexion ne contribuent pas aux forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas aux moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle prend en compte une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, et satisfait les conditions de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. De plus, elle présente de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques dans certains aspects tels que les équations gouvernantes, les conditions aux limites et les expressions de moments. Récemment, cette théorie a été étendue avec succès à des plaques orthotropes [25,26], des plaques composites stratifiées [27,28], et des plaques FGM [29].

II. 2. 1. Hypothèses de base

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur totale h comme indiqué dans la figure II.1. La plaque est composée d'un matériau isotrope dont les propriétés varient régulièrement dans la direction de l'épaisseur. Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- I. Les déplacements sont petits en comparaison de l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les contraintes impliquées sont infinitésimales.
- II. La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales dans le plan σ_x et σ_y .
- III. Le déplacement transversal W comprend deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces deux composantes sont des fonctions des coordonnées x et y .

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II-1})$$

- IV. Les déplacements dans le plan U et V comprennent des composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s \quad \text{Et} \quad V = v + v_b + v_s \quad (\text{II-2})$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires, respectivement, aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression pour u_b et v_b peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \text{Et} \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}. \quad (\text{II-3})$$

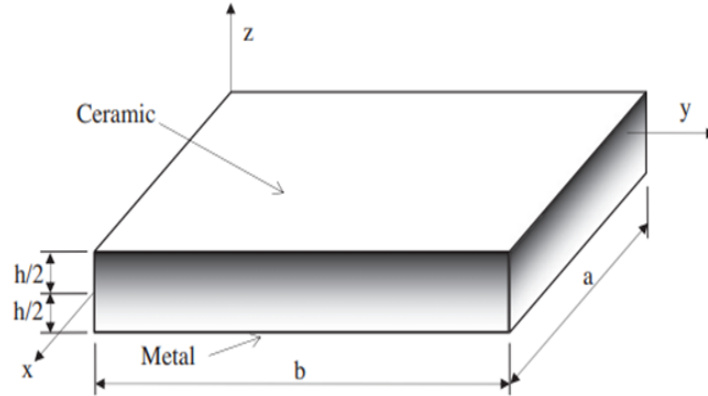


Figure II-1. Géométrie d'une plaque rectangulaire en matériau fonctionnellement gradués.

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en conjonction avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc aux contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} soient nulles aux faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s peut être donnée comme suit :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II-4})$$

II. 2. 2. Cinématique

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement de la théorie présentée peut être obtenu en utilisant les équations (II-1) à (II-3) comme suit

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{Bmatrix} + f \begin{Bmatrix} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

Où

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad \begin{cases} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{cases}, \quad (II-6)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{cases}, \quad g(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z),$$

$$f(z) = \frac{1}{h^4 + \pi^4} \cdot \left(e^{\frac{h \cdot z}{\pi}} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(h^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) + \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) \right) \right) - \frac{\pi \cdot h^3}{h^4 + \pi^4}$$

II. 2. 3. Relations constitutives

Considérons une plaque FG faite de céramique et de métal, les propriétés des matériaux FGM tels que le module d'Young E sont supposées variables dans l'épaisseur de la plaque avec une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des deux matériaux comme suit

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (II-7)$$

E_m et E_c sont les propriétés du métal et de la céramique, respectivement, et p est l'exposant de la fraction volumique. La valeur de p égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, tandis que p infini indique une plaque entièrement métallique. La variation de Poisson ratio m est généralement petite et est supposée être constante pour plus de praticité. Les relations constitutives linéaires d'une plaque FG peuvent être écrites par :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} \quad (II-8)$$

Où

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (II-9)$$

II. 2. 4. Équations gouvernantes

L'énergie de déformation de la plaque peut être exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (II-10)$$

En substituant les équations (II-5) et (II-8) dans l'équation (II-10) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme suit

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b \kappa_x^b + M_y^b \kappa_y^b \\ + M_{xy}^b \kappa_{xy}^b + M_x^s \kappa_x^s + M_y^s \kappa_y^s + M_{xy}^s \kappa_{xy}^s + Q_{yz} \gamma_{yz}^s + Q_{xz} \gamma_{xz}^s \end{array} \right\} dx dy \quad (\text{II-11})$$

Où N_i, M_i, Q_j ($i = x, y, xy, j = xz, yz$) sont les forces résultantes, moments et forces de cisaillement, respectivement, qui sont tous définis par les expressions suivantes

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \sigma_i dz, (i = x, y, xy)$$

Et

$$Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g \sigma_i dz, (i = xz, yz) \quad (\text{II-12})$$

En substituant l'équation (II-8) dans l'équation (II-12) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contraintes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{array} \right\}, \quad (\text{II-13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{array} \right\},$$

Où A_{ij}, B_{ij} , etc. sont les coefficients de rigidité de la plaque, définis par :

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) Q_{ij} dz, (i, j = 1, 2, 6) \\ B_{ij}^s &= -\frac{1}{4} B_{ij} + \frac{5}{3h^2} E_{ij}, (i, j = 1, 2, 6) \\ D_{ij}^s &= -\frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}, (i, j = 1, 2, 6) \\ H_{ij}^s &= \frac{1}{16} D_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^4} H_{ij}, (i, j = 1, 2, 6) \\ (A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z^2, z^4) Q_{ij} dz, (i, j = 4, 5) \\ A_{ij}^s &= \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{2h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}, (i, j = 4, 5). \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Le travail effectué par les forces appliquées peut-être écrit comme :

$$V = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial x} \frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial y} \right] dx dy \quad (\text{II-15})$$

Où N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 sont les forces de pré flambage dans le plan

Le principe de l'énergie potentielle totale minimale est utilisé ici pour dériver l'équation principale. Le principe peut être formulé sous forme analytique comme suit [30]

$$\delta(U + V) = 0 \quad (\text{II-16})$$

Où δ représente une variation par rapport à x et y . En substituant les équations (II-11) et (II-15) dans l'équation (II-16) et en intégrant l'équation par parties, en rassemblant les coefficients $\delta u, \delta v, \delta w_b$ et δw_s , les équations gouvernantes peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + P(w) &= 0 \\ \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + P(w) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

$$\text{Où} \quad P(w) = N_x^0 \frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x \partial y} \quad (\text{II-18})$$

L'équation (II-17) peut être exprimée en termes de déplacements (u, v, w_b, w_s) en remplaçant les résultantes de contraintes par l'équation (II-13). Pour une plaque FG, les équations gouvernantes de l'équation (II-17) prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} &= 0, \\ A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + P(w) &= 0 \\ B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + P(w) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

Clairement, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transversal est négligé ($w_s = 0$), l'équation gouvernante Eq. (II-19) donne l'équation gouvernante de la plaque FG basée sur la théorie classique de la plaque.

II. 2. 5. Solution analytique pour une plaque rectangulaire

Considérons une plaque rectangulaire simplement supportée avec une longueur a et une largeur b qui est soumise à une charge dans deux directions ($N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, N_{xy}^0 = 0$). Les conditions aux limites simplement supportées sont données comme suit :

$$\begin{aligned} v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ sur les bords } x = 0, a, \\ u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ sur les bords } y = 0, b. \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

En se basant sur la méthode de Navier, les expansions suivantes de déplacements (u, v, w_b, w_s) sont choisies de manière à satisfaire automatiquement les conditions aux limites de l'équation (II-20) :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y, \\ v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y, \\ w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y, \\ w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y, \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

Où $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$, et ($U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$) sont des fonctions inconnues à déterminer. En substituant l'équation (II-21) dans l'équation (II-19), la solution analytique fermée de la charge critique de flambage N_{cr} peut être obtenue à partir de :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} + k & s_{34} + k \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} + k & s_{44} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{II-22})$$

Où

$$\begin{aligned} s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ s_{13} &= -\alpha[B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2], \quad s_{14} = -\alpha[B_{11}^s\alpha^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\beta^2] \\ s_{23} &= -\beta[(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 + B_{22}\beta^2], \quad s_{24} = -\beta[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2 + B_{22}^s\beta^2] \\ s_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\ s_{34} &= D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 \\ s_{44} &= H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

En appliquant l'approche de condensation pour éliminer les déplacements dans le plan U_{mn} et V_{mn} , l'équation (II-22) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_{33} + k & \bar{s}_{34} + k \\ \bar{s}_{43} + k & \bar{s}_{44} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

Où

$$\bar{s}_{33} = s_{33} - s_{13} \frac{b_1}{b_0} - s_{23} \frac{b_2}{b_0}, \bar{s}_{34} = s_{34} - s_{14} \frac{b_1}{b_0} - s_{24} \frac{b_2}{b_0}, \bar{s}_{43} = s_{34} - s_{13} \frac{b_3}{b_0} - s_{23} \frac{b_4}{b_0}, \bar{s}_{44} = s_{44} - s_{14} \frac{b_3}{b_0} - s_{24} \frac{b_4}{b_0},$$

$$b_0 = s_{11}s_{22} - s_{12}^2, b_1 = s_{13}s_{22} - s_{12}s_{23}, b_2 = s_{11}s_{23} - s_{12}s_{13}, b_3 = s_{14}s_{22} - s_{12}s_{24}, b_4 = s_{11}s_{24} - s_{12}s_{14}$$

$$k = N_{cr}(\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2). \quad (\text{II-25})$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients dans l'équation (II-24) doit être nul. Cela donne l'expression suivante pour la charge critique de flambage :

$$N_{cr}(m, n) = \frac{-1}{\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2} \frac{\bar{s}_{33}\bar{s}_{44} - \bar{s}_{34}\bar{s}_{43}}{\bar{s}_{33} + \bar{s}_{44} - \bar{s}_{34} - \bar{s}_{43}}. \quad (\text{II-26})$$

Dans le cas du CPT, l'expression de la charge critique de flambage N_{cr} peut-être simplifiée en fixant la composante de cisaillement du déplacement transversal à zéro ($w_s = 0$) comme suit :

$$N_{cr}(m, n) = -\frac{\bar{s}_{33}}{\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2} \quad (\text{II-27})$$

Pour chaque choix de m et n , il existe une valeur unique correspondante de N_{cr} . La charge critique de flambage est la plus petite valeur de $N_{cr}(m, n)$.

II. 3. Résultats et discussions

Dans cette section, différents exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie dans la prédiction de la charge critique de flambage des plaques composites à gradients de propriétés soumises à une charge plane. Dans le but de vérification, les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à ceux trouvés dans la littérature en utilisant la méthode CPT, FSDT et HSDT. Les propriétés matérielles suivantes sont utilisées :

Matériaux 1 (Al/Al₂O₃): $E_c = 380\text{GPa}$, $E_m = 70\text{GPa}$, $\nu = 0.3$

Matériaux 2 (Al/SiC): $E_c =$, $E_m = 70\text{GPa}$, $\nu = 0.3$

Exemple 1

La première comparaison est effectuée pour des plaques simplement supportées soumises à différentes conditions de charge. La plaque est composée d'un mélange d'aluminium (Al) et de carbure de silicium (SiC). Les charges critiques de flambage de la plaque simplement supportée pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur b/h , du rapport d'aspect a/b et de l'indice de loi de puissance p sont indiquées dans le Tableau II-1.

Tableau II-1. Comparaison de la charge critique de flambage (MN/m) d'une plaque Al/SiC simplement supportée.

(γ_1, γ_2)	a/b	b/h	Ref	P		
				0	1	2
(-1, 0)	0.5	10	M. Bodaghi [23]	2079.721	1028.412	780.097
			Présent	2116.068	1043.749	796.496
		5	M. Bodaghi [23]	12162.119	6270.298	4692.542
			Présent	12768.580	6550.290	4964.064
	1	10	M. Bodaghi [23]	1437.361	702.304	534.441
			Présent	1448.629	706.864	539.774
		5	M. Bodaghi [23]	9915.620	4955.431	3746.054
			Présent	10100.42	5035.904	3836.37
	1.5	10	M. Bodaghi [23]	1527.903 ^a	748.920 ^a	569.751 ^a
			Présent	1543.742 ^a	755.502 ^a	576.814 ^a
		5	M. Bodaghi [23]	10044.721 ^a	5067.219 ^a	3819.109 ^a
			Présent	10271.938 ^a	5169.666 ^a	3932.246 ^a
(-1, -1)	0.5	10	M. Bodaghi [23]	1663.777	822.738	624.158
			Présent	1692.855	834.999	637.196
		5	M. Bodaghi [23]	9729.999	5016.384	3754.274
			Présent	10214.864	5240.552	3971.248
	1	10	M. Bodaghi [23]	718.692	351.124	267.416
			Présent	724.314	353.432	269.887
		5	M. Bodaghi [23]	4957.888	2477.589	1873.190
			Présent	5050.21	2517.952	1918.184
	1.5	10	M. Bodaghi [23]	526.861	256.776	195.714
			Présent	530.041	258.073	197.094
		5	M. Bodaghi [23]	3772.877	1871.038	1418.120
			Présent	3839.288	1899.336	1448.694
(-1, 1)	0.5	10	M. Bodaghi [23]	2772.980	1371.653	1040.519
			Présent	2821.425	1391.666	1061.994
		5	M. Bodaghi [23]	16216.712	8360.541	6257.811
			Présent	17024.774	8734.254	6618.748
	1	10	M. Bodaghi [23]	2772.980 ^a	1371.653 ^a	1040.519 ^a
			Présent	2821.425 ^a	1391.666 ^a	1061.994 ^a
		5	M. Bodaghi [23]	16216.712 ^a	8360.541 ^a	6257.811 ^a
			Présent	17024.774 ^a	8734.254 ^a	6618.748 ^a
	1.5	10	M. Bodaghi [23]	2772.980 ^b	1371.653 ^b	1040.519 ^b
			Présent	2821.425 ^b	1391.666 ^b	1061.994 ^b
		5	M. Bodaghi [23]	16216.712 ^b	8360.541 ^b	6257.811 ^b
			Présent	17024.774 ^b	8734.254 ^b	6618.748 ^b

a le mode pour la plaque est: $(m, n) = (2, 1)$.

b le mode pour la plaque est: $(m, n) = (3, 1)$.

On peut constater que les charges critiques de flambage de la présente théorie sont presque identiques à celles rapportées par Bodaghi et Saidi [25] basées sur la HSDT (Théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur), et le changement du mode critique de flambage de la plaque à gradient de propriétés prédit par la présente théorie et la HSDT est identique

Exemple 2

Tableau II-2. Comparaison de la charge critique de flambage non dimensionnel \hat{N} d'une plaque carrée Al/SiC simplement appuyée ($a = b = 10h$).

(γ_1, γ_2)	p	Ref	Conditions aux limites
			SS
(-1, 0)	0	M. Mohammadi [40]	37.3708
		M. Bodaghi [23]	37.3714
		Present	37.6643
	1	M. Mohammadi [40]	37.7132
		M. Bodaghi [23]	37.7172
		Present	37.9621
	2	M. Mohammadi [40]	37.7089
		M. Bodaghi [23]	37.5765
		Present	37.9514
(-1, -1)	0	M. Mohammadi [40]	18.6854
		M. Bodaghi [23]	18.6860
		Present	18.8321
	1	M. Mohammadi [40]	18.8566
		M. Bodaghi [23]	18.8571
		Present	18.9810
	2	M. Mohammadi [40]	18.8545
		M. Bodaghi [23]	18.8020
		Present	18.9757
(-1,1)	0	M. Mohammadi [40]	72.0834
		M. Bodaghi [23]	72.2275
		Present	73.3570
	1	M. Mohammadi [40]	73.6307
		M. Bodaghi [23]	73.6645
		Present	74.7393
	2	M. Mohammadi [40]	73.6112
		M. Bodaghi [23]	73.1587
		Present	74.6687

Cette comparaison est réalisée pour des plaques carrées Al/SiC simplement appuyées soumises à différents types de chargement. Le rapport d'épaisseur a/h est supposé être de 10. Les charges

critiques de flambage adimensionnelles \hat{N} des plaques carrées pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p sont répertoriées dans le Tableau II-2. Toutes les charges critiques de flambage non dimensionnelle présentées dans le Tableau II-2 sont définies comme $\hat{N} = N_{cr}a^2/(D_{11} - B_{11}^2/A_{11})$. Les résultats de la présente théorie sont comparés à ceux donnés par Mohammadi et al. [29] basés sur la FSDT (Théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre) et Bodaghi et Saidi [21] basés sur la HSDT (Théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur). Pour toutes les conditions de chargement et les conditions aux limites, on observe une concordance étroite entre les résultats.

II. 3. 1. Etudes paramétrique

Des études paramétriques sont réalisées pour étudier les effets des conditions de charge et des variations de puissance faible p , rapport d'épaisseur a/h , et rapport d'aspect b/a sur la charge critique de flambement non dimensionnelle, $\bar{N} = N_{cr}a^2/E_mh^3$ de plaque Al/Al₂O₃.

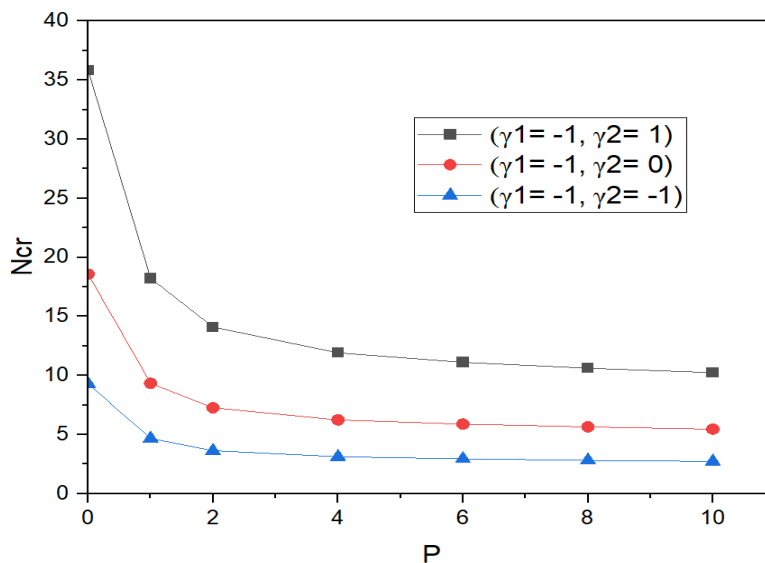


Figure II-2. Effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b = 10h$) sous différentes conditions de chargement.

La figure II-2 montre que la charge de flambage critique non dimensionnelle de la plaque sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$) est supérieure à celle sous compression biaxiale ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1$) et inférieure à celle sous compression et tension biaxiales ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$).

La variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle des plaques en fonction du rapport d'épaisseur a/h est présentée dans la figure II-3 en utilisant la présente théorie. Étant donné que les effets de déformation par cisaillement transversal de la plaque ne sont pas pris en compte dans la CPT, les valeurs de la charge critique de flambage non dimensionnelle prédites par la CPT sont indépendantes du rapport d'épaisseur. En revanche, les valeurs de la charge critique de flambage non dimensionnelle prédites par la présente théorie, qui tient compte des effets de déformation par cisaillement transversal, dépendent du rapport d'épaisseur. On observe que la charge critique de flambage adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h , tandis que la CPT surestime la charge critique de flambage non dimensionnelle de la plaque FG. La différence entre les deux théories est considérable pour les plaques épaisses ($a/h < 10$), et négligeable pour les plaques minces.

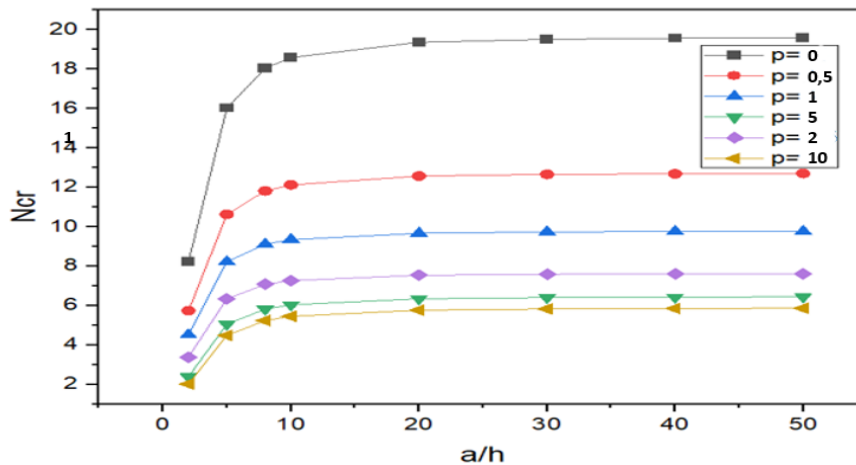


Figure II-3. Effet du rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b$) soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).

Les effets du rapport d'aspect b/a sur la charge critique de flambage non dimensionnel d'une plaque simplement supportée sous compression uniaxiale et compression biaxiale sont montrés dans les figures II.4 et II.5, respectivement. Le rapport d'épaisseur a/h est supposé être de 10. On peut observer que la charge critique de flambage non dimensionnel diminue généralement avec l'augmentation du rapport d'aspect b/a .

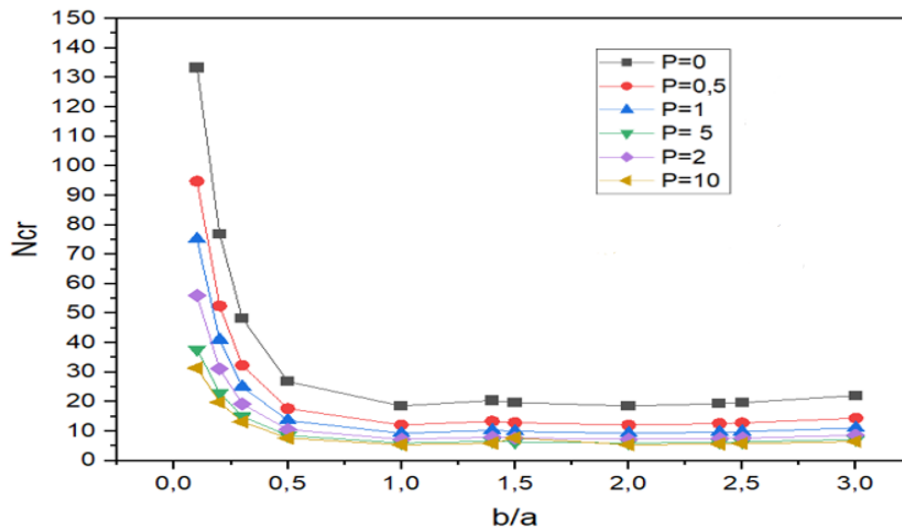


Figure II-4. Effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe y ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1$).

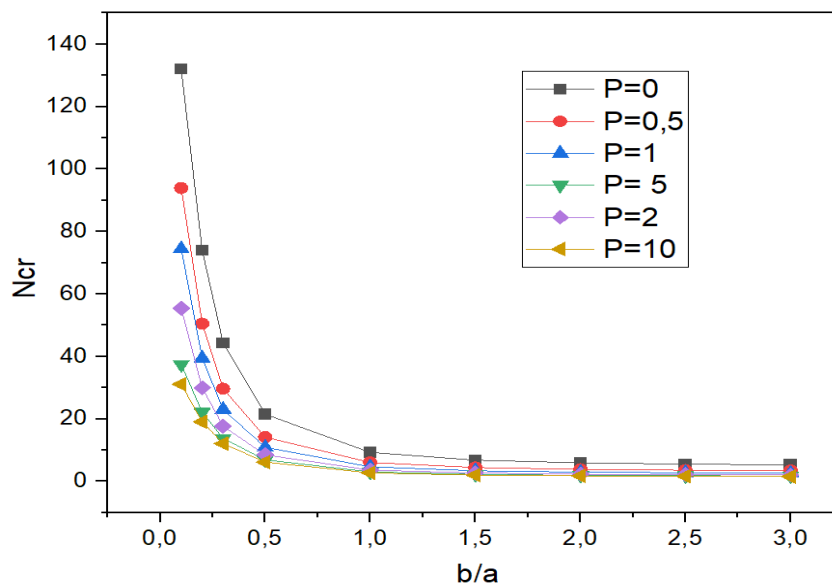


Figure II-5. Effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) soumise à une compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$).

Dans le cas de la compression uniaxiale, comme le montre la figure II-4, le graphique n'est pas régulier en raison du changement du mode de flambage critique lorsque le rapport d'aspect augmente. En revanche, le graphique dans le cas de la compression biaxiale, comme le montre

la figure II-5, est régulier en raison de l'existence d'un seul mode de flambage critique indépendamment du rapport d'aspect b/a .

Tableau II-3. Charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque Al/O_3 simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale sur l'axe x ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$).

a/b	a/h	Ref	p						
			0	0.5	1	2	5	10	20
0.5	5	Thai et choi [41]	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	1.7115
		Modèle Présent	6.8376	4.4870	3.4678	2.7008	2.2368	2.0075	1.7696
	10	Thai et choi [41]	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	1.9387
		Modèle Présent	7.4453	4.8417	3.7280	2.9080	2.4465	2.2199	1.9594
	20	Thai et choi [41]	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690	2.0054
		Modèle Présent	7.6102	4.9372	3.7976	2.9631	2.5026	2.2773	2.0111
	50	Thai et choi [41]	7.6555	4.9634	3.8166	2.9779	2.5172	2.2923	2.0250
		Modèle Présent	7.6572	4.9643	3.8173	2.9787	2.5185	2.2936	2.0259
100	Thai et choi [41]	7.6635	4.9680	3.8200	2.9808	2.5205	2.2957	2.0278	
	Modèle Présent	7.6639	4.9682	3.8202	2.9809	2.5208	2.2959	2.0280	
1.0	5	Thai et choi [41]	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	4.0070
		Modèle Présent	16.3187	10.7880	8.3595	6.4961	5.2992	4.7128	4.1563
	10	Thai et choi [41]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	4.8346
		Modèle Présent	18.7237	12.1999	9.4013	7.3309	6.1468	5.5641	4.9098
	20	Thai et choi [41]	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	5.0988
		Modèle Présent	19.3961	12.5896	9.6857	7.5569	6.3774	5.7998	5.1214
	50	Thai et choi [41]	19.5814	12.6970	9.7636	7.6177	6.4373	5.8614	5.1782
		Modèle Présent	19.5887	12.7008	9.7667	7.6209	6.4427	5.8669	5.1819
100	Thai et choi [41]	19.6145	12.7158	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1897	
	Modèle Présent	19.6163	12.7168	9.7783	7.6301	6.4520	5.8765	5.1906	
1.5	5	Thai et choi [41]	28.1996 ^a	19.2510 ^a	15.0344 ^a	11.4234 ^a	8.4727 ^a	7.2952 ^a	6.6106 ^a
		Modèle Présent	28.9602 ^a	19.7069 ^a	15.4191 ^a	11.8464 ^a	9.0585 ^a	7.7876 ^a	6.9117 ^a
	10	Thai et choi [41]	40.7476 ^a	26.9091 ^a	20.8024 ^a	16.0793 ^a	12.9501 ^a	11.5379 ^a	10.2958 ^a
		Modèle Présent	41.4681 ^a	27.3004 ^a	21.1235 ^a	16.4354 ^a	13.5211 ^a	2.0863 ^a	10.6563 ^a
	20	Thai et choi [41]	45.8930 ^a	29.9050 ^a	23.0286 ^a	17.9221 ^a	14.9472 ^a	13.5273 ^a	11.9843 ^a
		Modèle Présent	46.1874 ^a	30.0608 ^a	23.1540 ^a	18.0585 ^a	15.1712 ^a	13.7519 ^a	12.1367 ^a
	50	Thai et choi [41]	47.5786 ^a	30.8691 ^a	23.7414 ^a	18.5177 ^a	15.6238 ^a	14.2156 ^a	12.5629 ^a
		Modèle Présent	47.6333 ^a	30.8977 ^a	23.7644 ^a	18.5425 ^a	15.6647 ^a	14.2572 ^a	12.5913 ^a
100	Thai et choi [41]	47.8297 ^a	31.0119 ^a	23.8469 ^a	18.6061 ^a	15.7256 ^a	14.3198 ^a	12.6502 ^a	
	Modèle Présent	47.8437 ^a	31.0192 ^a	23.8527 ^a	18.6124 ^a	15.7360 ^a	14.3304 ^a	12.6574 ^a	
2.0	5	Thai et choi [41]	37.7404 ^b	26.3645 ^b	20.7491 ^b	15.5819 ^b	10.9554 ^c	9.1505 ^c	8.3988 ^c
		Modèle Présent	40.2436 ^b	27.9620 ^b	22.0193 ^b	16.7241 ^b	12.1270 ^c	12.3498 ^c	11.0921 ^c
	10	Thai et choi [41]	64.0842 ^a	42.5015 ^a	32.8980 ^a	25.3727 ^a	20.2123 ^a	17.9227 ^a	16.0280 ^a
		Modèle Présent	65.2748 ^a	43.1520 ^a	33.4383 ^a	25.9847 ^a	21.1970 ^a	18.8512 ^a	16.6252 ^a
20	Thai et choi [41]	74.3140 ^a	48.4917 ^a	37.3564 ^a	29.0523 ^a	24.1413 ^a	21.8114 ^a	19.3385 ^a	

50	Modèle Présent	74.8951 ^a	48.7999 ^a	37.6052 ^a	29.3239 ^a	24.5873 ^a	22.2565 ^a	19.6392 ^a
	Thai et choi [41]	77.8004 ^a	50.4890 ^a	38.8338 ^a	30.2858 ^a	25.5363 ^a	23.2278 ^a	20.5301 ^a
	Modèle Présent	77.9139 ^a	50.5487 ^a	38.8816 ^a	30.3374 ^a	25.6215 ^a	23.3143 ^a	20.5893 ^a

a le mode pour la plaque est: $(m, n) = (2, 1)$.

b le mode pour la plaque est: $(m, n) = (3, 1)$.

c le mode pour la plaque est: $(m, n) = (4, 1)$.

Tableau II-4. Charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque Al/O_3 simplement appuyée soumise à une compression biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$).

a/b	a/h	Ref	p						
			0	0.5	1	2	5	10	20
0.5	5	Thai et choi [41]	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370	1.3692
		Modèle Présent	5.4701	3.5896	2.7742	2.1607	1.7894	1.6060	1.4157
	10	Thai et choi [41]	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517	1.5510
		Modèle Présent	5.9562	3.8734	2.9824	2.3264	1.9572	1.7759	1.5675
	20	Thai et choi [41]	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	1.6044
		Modèle Présent	6.0881	3.9497	3.0381	2.3704	2.0020	1.8218	1.6089
	50	Thai et choi [41]	6.1244	3.9708	3.0533	2.3823	2.0137	1.8338	1.6200
		Modèle Présent	6.1257	3.9715	3.0539	2.3829	2.0148	1.8349	1.6207
	100	Thai et choi [41]	6.1308	3.9744	3.0560	2.3846	2.0164	1.8365	1.6222
		Modèle Présent	6.1311	3.9746	3.0561	2.3847	2.0166	1.8367	1.6224
1.0	5	Thai et choi [41]	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	2.0035
		Modèle Présent	8.1593	5.3940	4.1797	3.2480	2.6496	2.3564	2.0781
	10	Thai et choi [41]	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	2.4173
		Modèle Présent	9.3618	6.0999	4.7006	3.6654	3.0734	2.7820	2.4549
	20	Thai et choi [41]	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	2.5494
		Modèle Présent	9.6980	6.2948	4.8428	3.7784	3.1887	2.8999	2.5607
	50	Thai et choi [41]	9.7907	6.3485	4.8818	3.8088	3.2186	2.9307	2.5891
		Modèle Présent	9.7943	6.3504	4.8833	3.8104	3.2213	2.9334	2.5909
	100	Thai et choi [41]	9.8073	6.3579	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376	2.5948
		Modèle Présent	9.8081	6.3584	4.8891	3.8150	3.2260	2.9382	2.5953
1.5	5	Thai et choi [41]	11.6820	7.8299	6.0799	4.6637	3.6176	3.1718	2.8510
		Modèle Présent	11.9919	8.0056	6.2253	4.8227	3.8559	3.3896	2.9916
	10	Thai et choi [41]	14.6084	9.5685	7.3793	5.7279	4.7124	4.2384	3.7657
		Modèle Présent	14.7810	9.6607	7.4540	5.8095	4.8451	4.3694	3.8538
	20	Thai et choi [41]	15.5887	10.1332	7.7977	6.0761	5.1006	4.6300	4.0961
		Modèle Présent	15.6444	10.1625	7.8212	6.1016	5.1425	4.6723	4.1250
	50	Thai et choi [41]	15.8876	10.3036	7.9236	6.1815	5.2212	4.7531	4.1995
		Modèle Présent	15.8971	10.3086	7.9276	6.1858	5.2284	4.7604	4.2044
	100	Thai et choi [41]	15.9312	10.3284	7.9419	6.1969	5.2389	4.7712	4.2147
		Modèle Présent	15.9336	10.3296	7.9429	6.1979	5.2407	4.7730	4.2159

2.0	5	Thai et choi [41]	15.7235	10.6622	8.3092	6.3353	4.7754	4.1382	3.7392
		Modèle Présent	16.5036	11.1268	8.6817	6.7018	5.2493	4.5639	4.0331
	10	Thai et choi [41]	21.5050	14.1552	10.9323	8.4644	6.8750	6.1481	5.4769
		Modèle Présent	21.8804	14.3584	11.0970	8.6428	7.1577	6.4240	5.6628
	20	Thai et choi [41]	23.6970	15.4260	11.8755	9.2469	7.7327	7.0067	6.2040
		Modèle Présent	23.8251	15.4937	11.9298	9.3057	7.8290	7.1037	6.2701
	50	Thai et choi [41]	24.3944	15.8244	12.1700	9.4931	8.0132	7.2926	6.4440
		Modèle Présent	24.4170	15.8362	12.1794	9.5033	8.0301	7.3097	6.4558
	100	Thai et choi [41]	24.4974	15.8830	12.2132	9.5294	8.0550	7.3353	6.4799
		Modèle Présent	24.5031	15.8860	12.2156	9.5319	8.0592	7.3396	6.4828

Les charges critiques de flambage non dimensionnel ont été répertoriées dans les Tableau II-3 à Tableau II-5 pour les plaques simplement supportées soumises à une compression uniaxiale, une compression biaxiale et une compression biaxiale avec tension, respectivement. Dans chaque tableau, quatre rapports d'aspect a/b différents sont pris en compte, et cinq valeurs différentes du rapport d'épaisseur a/h sont examinées. De plus, huit valeurs arbitraires de l'indice de loi de puissance p sont prises en considération. Il est observé à partir des Tableaux 3 à 5 que la charge critique de flambage non dimensionnel augmente avec la diminution de l'indice de loi de puissance et l'augmentation du rapport d'épaisseur. De plus, l'augmentation du rapport d'épaisseur non seulement augmente les valeurs de la charge critique de flambage non dimensionnel, mais entraîne également des changements dans le mode de flambage critique. Par exemple, pour la plaque soumise à une compression uniaxiale le long de l'axe x avec $a/b = 2$, le mode de flambage critique varie de 3 à 2 lorsque la valeur du rapport d'épaisseur augmente de 5 à 10. Dans le cas de la plaque soumise à une compression biaxiale (voir Tableau 4 et Figure 7), un seul mode de flambage critique existe indépendamment du rapport d'aspect, du rapport d'épaisseur et de l'indice de loi de puissance.

Tableau II-5. d'une plaque Al/Al_2O_3 simplement appuyée soumise à une compression et traction biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$).

a/b	a/h	Ref	p						
			0	0.5	1	2	5	10	20
0.5	5	Thai et choi [41]	8.9604	5.8980	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617	2.2820
		Modèle Présent	9.1168	5.9826	4.6237	3.6011	2.9824	2.6766	2.3595
	10	Thai et choi [41]	9.8738	6.4275	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195	2.5850
		Modèle Présent	9.9271	6.4557	4.9707	3.8773	3.2620	2.9598	2.6125
	20	Thai et choi [41]	10.1324	6.5753	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253	2.6739
		Modèle Présent	10.1469	6.5829	5.0635	3.9508	3.3368	3.0364	2.6815
	50	Thai et choi [41]	10.2073	6.6179	5.0888	3.9706	3.3562	3.0564	2.7000

	100	Modèle Présent	10.2096	6.6191	5.0898	3.9716	3.3580	3.0582	2.7012	
		Thai et choi [41]	10.2181	6.6241	5.0934	3.9744	3.3606	3.0609	2.7037	
		Modèle Présent	10.2186	6.6243	5.0936	3.9746	3.3610	3.0613	2.7040	
1.0	5	Thai et choi [41]	26.2058 ^a	17.7704 ^a	13.8486 ^a	10.5589 ^a	7.9590 ^a	6.8970 ^a	6.2320 ^a	
		Modèle Présent	27.5060 ^a	18.5447 ^a	14.4695 ^a	11.1697 ^a	8.7488 ^a	7.6064 ^a	6.7218 ^a	
	10	Thai et choi [41]	35.8416 ^a	23.5920 ^b	18.2206 ^a	14.1073 ^a	11.4583 ^a	10.2468 ^a	9.1281 ^a	
		Modèle Présent	36.4673 ^a	23.9306 ^a	18.4951 ^a	14.4047 ^a	11.9296 ^a	10.7067 ^a	9.4381 ^a	
	20	Thai et choi [41]	39.4951 ^a	25.7100 ^a	19.7925 ^a	15.4115 ^a	12.8878 ^a	11.6779 ^a	10.3400 ^a	
		Modèle Présent	39.7085 ^a	25.8228 ^a	19.8831 ^a	15.5095 ^a	13.0483 ^a	11.8395 ^a	10.4502 ^a	
	50	Thai et choi [41]	40.6574 ^a	26.3740 ^a	20.2833 ^a	15.8219 ^a	13.3554 ^a	12.1543 ^a	10.7401 ^a	
		Modèle Présent	40.6950 ^a	26.3938 ^a	20.2991 ^a	15.8389 ^a	13.3835 ^a	12.1829 ^a	10.7597 ^a	
	100	Thai et choi [41]	40.8291 ^a	26.4717 ^a	20.3554 ^a	15.8823 ^a	13.4250 ^a	12.2256 ^a	10.7998 ^a	
		Modèle Présent	40.8386 ^a	26.4767 ^a	20.3594 ^a	15.8866 ^a	13.4321 ^a	12.2328 ^a	10.8048 ^a	
	1.5	5	Thai et choi [41]	29.0249 ^b	20.1105 ^b	15.7823 ^b	11.9009 ^b	8.5250 ^b	7.2422 ^b	6.6008 ^b
			Modèle Présent	33.9169 ^b	23.1865 ^b	18.1657 ^b	13.9284 ^b	10.5862 ^b	9.0828 ^b	8.0534 ^b
10		Thai et choi [41]	37.9819	24.8781	19.1863	14.8925	12.2523	11.0199	9.7909	
		Modèle Présent	38.4308	25.1180	19.3806	15.1049	12.5973	11.3606	10.0200	
20		Thai et choi [41]	40.5307	26.3463	20.2740	15.7980	13.2616	12.0379	10.6500	
		Modèle Présent	40.6754	26.4226	20.3351	15.8642	13.3706	12.1480	10.7252	
50		Thai et choi [41]	41.3076	26.7894	20.6013	16.0719	13.5752	12.3580	10.9186	
		Modèle Présent	41.3325	26.8024	20.6117	16.0832	13.5938	12.3770	10.9316	
100		Thai et choi [41]	41.4211	26.8539	20.6489	16.1118	13.6212	12.4052	10.9581	
		Modèle Présent	41.4274	26.8572	20.6515	16.1146	13.6259	12.4099	10.9614	
2.0		5	Thai et choi [41]	26.2058	17.7704	13.8486	10.5589	7.9590	6.8970	6.2320
			Modèle Présent	27.5060	18.5447	14.4695	11.1697	8.7488	7.6062	6.7218
	10	Thai et choi [41]	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468	9.1281	
		Modèle Présent	36.4673	23.9306	18.4951	14.4047	11.9296	10.7067	9.4381	
	20	Thai et choi [41]	39.4951	25.7100	19.7925	15.4115	12.8878	11.6779	10.3400	
		Modèle Présent	39.7085	25.8228	19.8831	15.5095	13.0483	11.8395	10.4502	
	50	Thai et choi [41]	40.6574	26.3740	20.2833	15.8219	13.3554	12.1543	10.7401	
		Modèle Présent	40.6950	26.3938	20.2991	15.8389	13.3835	12.1829	10.7597	
	100	Thai et choi [41]	40.8291	26.4717	20.3554	15.8823	13.4250	12.2256	10.7998	
		Modèle Présent	40.8386	26.4767	20.3594	15.8866	13.4321	12.2328	10.8048	

a le mode pour la plaque est: $(m, n) = (2, 1)$.

b le mode pour la plaque est: $(m, n) = (1, 2)$.

Conclusion générale

Une théorie des plaques raffinée, simple et efficace, a été développée avec succès pour l'analyse du flambage des plaques FG. La théorie, qui présente de nombreuses similitudes avec la théorie classique des plaques, tient compte d'une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversal dans l'épaisseur et satisfait aux conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans introduire les facteurs de correction du cisaillement. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour l'analyse du flambement des plaques FG simplement appuyées. On peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi efficace pour prédire les charges critiques de flambage des plaques FG par rapport à d'autres théories de plaques à déformation par cisaillement telles que la FSDT et la HSDT. En raison des caractéristiques intéressantes de la présente théorie, les présents résultats constitueront un point de référence utile pour évaluer la fiabilité d'autres théories futures sur les plaques. Les résultats obtenus par la nouvelle théorie raffinée sont presque identiques avec ceux calculés à partir des théories de FSDT et HSDT.

Références bibliographiques

- [1] Bensalah, N., & Khorchef, A. (2021/2022). Vibration libre des plaques FGM en utilisant une simple Théorie de déformation d'ordre élevée (nthHSDT). Mémoire de Master, Université Ibn Khaldoun de Tiaret. Faculté des sciences appliquées.
- [2] Jha, D. K.; Kant, Tarun; Singh, R. K. (2013) A critical review of recent research on functionally graded plates. In : Composite Structures, vol. 96, p. 833–849. DOI:10.1016/j.compstruct.2012.09.001.
- [3] Zhang, Z. (2016). Functionally Graded Materials: An Overview. *International Materials Reviews*, 61(6), 683-702.
- [4] Yin, H.M., Sun, L.Z., and Paulino, G.H., (2004), *Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*, *Acta Mater.*, 52(13), 3535-3543.
- [5] Yitao Chen and Frank W. Liou Additive Manufacturing of Metal Functionally Graded Materials: A Review, *Solid Freeform Fabrication 2018: Proceedings of the 29th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium – An Additive Manufacturing Conference*.
- [6] R. Ebrahimi, M. Ataie, M. Miri, "A review on gradient chemical composition in functionally graded materials (FGMs)," *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 9, no. 2, pp. 2681-2695. 2020.
- [7] L. Yang., Design and fabrication of porous gradient biomaterials," *Materials Science and Engineering: C*, vol. 51, pp. 315-322, 2015.
- [8] Suresh, S. (1998). Functionally graded materials: challenges and opportunities. *Materials Science and Engineering: A*, 238(2), 137-148.
- [9] Wang, X., & Niu, X. (2019). Microstructure Design and Characterization of Functionally Graded Materials. In *Functionally Graded Materials* (pp. 47-73). Springer, Singapore.
- [10] Miyamoto, Y. (2001). *Functionally graded materials: design, production, and applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [11] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. (1999) *Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series*. Springer New York, NY. ISBN: 978-0-412-60760-8, Ed°1, 330pp.
- [12] Ait Sidhoum I, Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué. Thèse de doctorat en sciences, Universités Mohamed-Boudiaf. Oran. Faculté des sciences et de la technologie. 2019.
- [13] Sahi, A., Babouri, F., & Arab, S. (2021-2022). Modélisation du comportement thermomécanique d'un réservoir sphérique FGM sous pression. Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa.
- [14] Nohut, Serkan; Schwentenwein, Martin (2022) *Vat Photopolymerization Additive Manufacturing of Functionally Graded Materials: A Review*. Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [15] Yan, Lei; Chen, Yitao; Liou, Frank (2020) Additive manufacturing of functionally graded metallic materials using laser metal deposition. In: *Additive Manufacturing*, vol. 31, p. 100901. DOI: 10.1016/j.addma.2019.100901.
- [16] Guerroudj, W. (2019/2020). Étude de comportement thermo-mécanique des plaques FGM pour les applications enveloppe de bâtiment à énergie solaire. Mémoire de Master, Université Saad Dahleb Blida.
- [17] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- [18] Reddy, J.N. (1997), " *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*". CRC Press, Boca Raton.

- [19] Mindlin R. D. 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1951, Vol. 18, pp. 31–38
- [20] B.A.S. Shariat, M.R. Eslami. Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading based on the first order plate theory, in: *Proceeding of the Fifth International Conference on Composite Science and Technology 2005*, American University of Sharjah, United Arab Emirates.
- [21] M. Mohammadi, A.R. Saidi, E. Jomehzadeh, A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges, *Proc. Inst. Mech. Engrs. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 224 (9) (2010) 1831–1841.
- [22] B.A. Shariat, M.R. Eslami. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Compos. Struct.* 78 (3) (2007) 433–439.
- [23] M. Bodaghi, A.R. Saidi, Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Appl. Math. Model.* 34 (11) (2010) 3659–3673.
- [24] R.P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, *AIAA J.* 40 (1) (2002) 137–146.
- [25] R.P. Shimpi, H.G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, *Int. J. Solids Struct.* 43 (22-23) (2006) 6783–6799
- [26] H.T. Thai, S.E. Kim, Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory, *Compos. Struct.* 93 (7) (2011) 1738–1746.
- [27] S.E. Kim, H.T. Thai, J. Lee, A two variable refined plate theory for laminated composite plates, *Compos. Struct.* 89 (2) (2009) 197–205
- [28] H.T. Thai, S.E. Kim, Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory, *Int. J. Mech. Sci.* 52 (4) (2010) 626–633.
- [29] I. Mechab, H.A. Atmane, A. Tounsi, H.A. Belhadj, E.A.A. Bedia, A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates, *Acta Mech. Sinica* 26 (6) (2010) 941–949.
- [30] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Tounsi, A.; Viña Olay, J.A.; Achour, B.; Touahmia, M. Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Plates with Temperature-Dependent Properties Based on Improved Exponential-Trigonometric Two-Dimensional Higher Shear Deformation Theory. *Arch. Appl. Mech.* 2021, 91, 859–881.
- [31] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Tounsi, A. New 2D and Quasi-3D Shear Deformation Theories for Free Vibration of Functionally Graded Plates on Elastic Foundations. *Compos. Part B Eng.* 2019, 159, 231–247
- [32] Rachid, A.; Ouinas, D.; Lousdad, A.; Zaoui, F.Z.; Achour, B.; Gasmi, H.; Butt, T.A.; Tounsi, A. Mechanical Behavior and Free Vibration Analysis of FG Doubly Curved Shells on Elastic Foundation via a New Modified Displacements Field Model of 2D and Quasi-3D HSDTs. *Thin-Walled Struct.* 2022, 172, 108783
- [33] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Achour, B.; Touahmia, M.; Boukendakdji, M.; Latifee, E.R.; Al-Naghi, A.A.A.; Viña Olay, J.A. Mathematical Approach for Mechanical Behaviour Analysis of FGM Plates on Elastic Foundation. *Mathematics* 2022,
- [34] Zaoui, F.Z.; Hanifi, H.A.L.; Younsi, A.; Meradjah, M.; Tounsi, A.; Ouinas, D. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams Using a Higher-Order Shear Deformation Theory. *Math. Model. Eng. Probl.* 2017, 4, 7–12
- [35] Zaoui, F.Z.; Tounsi, A.; Ouinas, D.; Viña Olay, J.A. A Refined HSDT for Bending and Dynamic Analysis of FGM Plates. *Struct. Eng. Mech. Int'l J.* 2020, 74, 105–119
- [36] Zaoui, F.Z.; Tounsi, A.; Ouinas, D. Free Vibration of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations Based on Quasi-3D Hybrid-Type Higher Order Shear Deformation Theory. *Smart Struct. Syst.* 2017, 20, 509–524.

- [37] J.N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc., 2002.
- [38] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Achour, B.; Tounsi, A.; Latifee, E.R.; Al-Naghi, A.A.A. A Hyperbolic Shear Deformation Theory for Natural Frequencies Study of Functionally Graded Plates on Elastic Supports. *J. Compos. Sci.* 2022, 6, 285.
- [39] Fatima Z. Zaoui, Djamel Ouinas, Abdelouahed Tounsi, Belkacem Achour, Jaime A. Vina Olay and Tayyab A. Butt, 2023, Mechanical behaviour analysis of FGM plates on elastic foundation using a new exponential-trigonometric HSDT. *Steel and Composite Structures*, 47(5), 551-568.
- [40] M. Mohammadi, A.R. Saidi, E. Jomehzadeh, A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges, *Proc. Inst. Mech. Engrs. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 224 (9) (2010) 1831–1841.
- [41] Thai, Huu-Tai; Choi, Dong-Ho (2012) An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. In : *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, n°3, p. 1008–1022. DOI: 10.1016/j.apm.2011.07.062.