

Faculty of Sciences and Technology
Department of Mechanical Engineering

كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم المهندسة الميكانيكية

N° d'ordre : M...../GM/2023

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction

Thème

**Utilisation D'une Nouvelle Théorie De
Déformation Par Cisaillement Sinusoïdal Pour La
Flexion, Le Flambement, Et La Vibration Des
Plaques En FGM**

Présenté par :

❖ REZIGA MILOUD HABIB

❖ MECHAI ISMAIL

Soutenu le 25 / 06 / 2023 devant le jury composé de :

Président	Pr OUIAS DJAMEL	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr CHENINE HALIMA	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Mme BELHACHEMI AMINA	Université de Mostaganem UMAB
Co-Encadreur	Mr ABDERRAHMEN RACHID	Doctorant, Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2022 / 2023

Dédicace

Je dédie ce projet

A mes parents et spécialement à ma chère mère,

Qui ne m'ont jamais cessé de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères : Djilali, Belkacem, Hamza

A mes sœurs : N et H

A mon ami : Abde Rahim

Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études, puisse Allah vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite.

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mon cursus.

"Alhamdulillah, God gave me everything"

Mechai Ismail

Dédicace

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU de m 'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à dédier cet humble travail à

A ma tendre mère et mon très cher père

A mes sœurs

A mes frères

A mon binôme : Mechai-Ismail

A mes amis proches : Ismaïl ; Bendhiba ; Touati

A Tous mes amis d'enfance et du long parcours scolaire et universitaire

A tout ceux qui m 'aiment et que j 'aime

Reziga Miloud Habib

Remerciement

Ce projet de fin d'étude a été une étape importante de notre vie, nous souhaitons prendre un moment pour exprimer notre profonde gratitude envers nos familles et nos professeurs, et spécialement envers Mme A.Belhachemi, grâce à qui nous avons pu accomplir ce travail.

Merci à nos familles, nous sommes infiniment reconnaissants pour votre amour inconditionnel et votre soutien constant. Votre présence nous a donné la force et la confiance nécessaires pour mener à bien ce projet.

Nos remerciements s'adressent également au Professeur D.Ouinas d'avoir accepté de présider le jury et à Dr H.Chenine pour avoir expertiser notre mémoire.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de ce mémoire

Enfin, je n'oserais oublier de remercier tout le corps professoral du département de génie mécanique pour le travail énorme qu'il effectue pour nous créer les conditions les plus favorables pour le déroulement de nos études.

ملخص

تم تطوير نظرية جديدة لتشوه القص الجيبي لتحليل الانحناء والاهتزاز لألواح التدرج الوظيفية. وهو يدمج التوزيع الجيبي لإجهاد القص المستعرض ويلبي ظروف الإجهاد الحر على الأسطح العلوية والسفلية للصفحة، دون الحاجة إلى عامل تصحيح. هذه النظرية، مع أربعة مجهول فقط، لها أوجه تشابه قوية مع نظرية اللوحة الكلاسيكية من حيث معادلات الحركة وظروف الحدود وتعبيرات الإجهاد. تختلف الخصائص المادية للصفحة وفقاً لقانون القوة لكسر الكثافة من المكونات. يتم استنتاج معادلات الحركة من مبدأ هاميلتون، مما يسمح بالحصول على حلول مغلقة للألواح المدعومة ببساطة. من خلال مقارنة النتائج بنظريات تشوه القص من الدرجة الأولى والأعلى، يتم استنتاج أن هذه النظرية الجديدة دقيقة وفعالة في التنبؤ بتفاعلات الانحناء والاهتزاز لألواح التدرج الوظيفية.

كلمات مفتاحية: لوحات المواد المتدرجة وظيفياً، التوازن، نظرية الرفيعة المستوى للتشوه قص للوحة، تحليل الالتواء

Résumé

Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal est développée pour la flexion, le flambage et la vibration des plaques à gradation fonctionnelle. La théorie tient compte de la distribution sinusoïdale de la contrainte de cisaillement transversale et satisfait aux conditions de contrainte de cisaillement transversale libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser le facteur de correction du cisaillement. Contrairement à la théorie classique de la déformation par cisaillement sinusoïdal, la théorie proposée de la déformation par cisaillement sinusoïdal ne contient que quatre inconnues et présente de fortes similitudes avec la théorie classique de la plaque sous de nombreux aspects tels que les équations du mouvement, les conditions limites et les expressions résultantes des contraintes. Les propriétés matérielles de la plaque sont supposées varier en fonction de la distribution de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Les solutions sont obtenues et les résultats sont comparés à ceux de la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre et de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. On peut conclure que la théorie proposée peut prédire les réactions de flexion, de flambage et de vibration des plaques à gradation fonctionnelle.

Mots clés : FGM, Statique, Théorie HSĐT de plaque, Analyse du flambage.

Abstract

A new theory of sinusoidal shear deformation has been developed to analyse the bending, buckling and vibration of functional gradation plates. It integrates the sinusoidal distribution of the transverse shear stress and satisfies the free stress conditions on the upper and lower surfaces of the plate, without the need for a correction factor. This theory, with only four unknowns, has strong similarities with classical plate theory in terms of motion equations, boundary conditions and stress expressions. The material properties of the plate vary according to the power law of the density fraction of the constituents. The equations of motion are deduced from the Hamilton principle, allowing the obtaining of closed solutions for simply supported plates. By comparing the results with first and higher order shear deformation theories, it is concluded that this new theory is accurate and effective in predicting bending, buckling and vibration reactions of functional gradation plates.

Keywords: FGM, Static, Plate HSDT theory, Buckling analysis.

Sommaire

Dédicace.....	I
Dédicace.....	II
Remerciement	III
ملخص.....	IV
Résumé	V
Abstract	VI
Sommaire	VII
Liste Des Figures	IX
Liste des tableaux	X
Nomenclature.....	XI
Introduction Générale.....	1
Chapitre 1 : Généralité sur les matériaux FGM	3
1.1 Introduction :	3
1.2 Caractéristiques matérielles des FGMs :	4
1.3 Domaine d'application :	5
1.4 Avantages et inconvénient des FGMs :	6
1.4.1 Avantage des matériaux FGM :	6
1.4.2 Inconvénients des matériaux FGM :	6
1.5 Les Modèles de FGM :	7
1.5.1 Modèle Voigt :	7
1.5.2 Modèle Reuss :	7
1.5.3 Modèle Tamura :	7
1.5.4 Modèle Mori-Tanaka :	8
1.6 Les FGMs minces ou massifs :	8
1.7 Les méthodes de réalisation des matériaux fonctionnellement gradués :	9
1.7.1 La centrifugation pour réaliser des FGMs :	9
1.7.2 Le coulage sous pression :	10

1.8 Les différents schémas d'homogénéisation :	10
1.8.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	11
1.8.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	12
1.8.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	13
1.9 Les théories des plaques FGM :	13
1.9.1 Théorie classique des plaques (CPT) :	14
1.9.2 Théorie de premier ordre des plaques (FSDT) :	15
1.9.3 Théorie d'ordre supérieur (HSDT) :	17
1.10 Conclusion :	19
Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussion	20
2.1 Introduction :	20
2.2 Formulations théoriques :	20
2.2.1 Hypothèses de base :	20
2.2.2 Cinématique :	21
2.2.2 Les équations constitutives :	22
2.2.3 Équations du mouvement :	23
2.2.4 Solutions analytiques pour une plaque rectangulaire simplement soutenue :	25
2.3 Résultats et discussions :	27
2.3.1 Problème de flexion :	28
2.3.2 Problème de flambement	34
2.3.3 Problème de vibration libre :	36
2.4 Conclusion :	41
Conclusion Générale	42
Références	43

Liste Des Figures

Fig.1.1 Matériaux à gradation fonctionnelle - acier 316L acier ferrique - fabrication additive.	3
Fig.1.2 (a) Matériaux composites classiques, (b) Matériaux à gradation fonctionnelle.	4
Fig.1.3 Principaux domaines d'application des FGM.	5
Fig.1.4 Les deux grandes familles de FGM (minces et massifs)	9
Fig.1.5 La fonderie par centrifugation	10
Fig.1.6 Procédé de coulage sous pression	10
Fig.1.7 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	11
Fig.1.8 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	12
Fig.1.9 Variation de module de Young dans une plaque E-FGM.	13
Fig.1.10 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff	14
Fig.1.11 Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin	16
Fig.2.1 Géométrie d'une plaque FGM rectangulaire	22
Fig.2.2 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie sinusoïdale par rapport à l'indice de puissance p.	32
Fig.2.3 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie sinusoïdale par rapport d'épaisseur a/h	32
Fig.2.4 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie uniforme par rapport à l'indice de puissance p.	33
Fig.2.5 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie uniforme par rapport au rapport d'épaisseur a/h	33
Fig.2.6 Comparaison de la variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle \hat{N} de plaque rectangulaire sous compression biaxiale par rapport au rapport d'épaisseur a/h.	36
Fig.2.7 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ω de la plaque carrée par rapport à l'indice de puissance p.	39
Fig.2.8 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ω de la plaque carrée par rapport au rapport d'épaisseur a/h.	40
Fig.2.9 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ω de la plaque rectangulaire par rapport à l'indice de puissance p pour différent mode(m,n).	40

Liste des tableaux

Tableau 2.1: Propriétés des matériaux-----	27
Tableau 2.2 : Comparaison des déformations non dimensionnelles et des contraintes de la plaque carrée sous charge uniformément répartie ($m= n = 100$ séries de termes).-----	28
Tableau 2.3 : Comparaison de la flèche non dimensionnelles et des contraintes de la plaque carrée sous charge répartie sinusoidale. -----	30
Tableau 2.4 Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \hat{N} de plaques isotropes sous différents types de chargement. ($p=0$). -----	34
Tableau 2.5 : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de la plaque carrée -----	37
Tableau 2.6 : Comparaison des quatre premières fréquences non dimensionnelles ω de plaque rectangulaire ($b = 2a$).-----	37

Nomenclature

Dans tout ce rapport, on adoptera les notations suivantes :

$E(z)$	Module de Young locale
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de la céramique
$V(z)$	Fraction Volumique locale
L	Propriété matérielle
$\nu(z)$	Coefficient de poisson locale
ν_m	Coefficient de Poisson du métal
ν_c	Coefficient de Poisson de la céramique
O	Paramètre d'ajustement empirique
σ	Tenseurs de contrainte
ε	Tenseur de déformation
$G(z)$	Modules de cisaillement effectif
$K(z)$	Modules de compressibilité effectif
h	Epaisseur de la plaque
$f(z)$	La Fonction de cisaillement
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement
x, y, z	Les axes de coordonnées cartésiennes
a, b	Dimensions de la plaque
p	L'indice de la variation matériel
u, v, w	Composantes de déplacement
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	Composantes des dérivées de déplacement par rapport au temps
w_b	Composante de déplacement de flexion
w_s	Composante de déplacement de cisaillement
q	Charge répartie
t	Temps
C_{ij}	Matrice élastique de Hooke
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux dans la plaque
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion dans la plaque

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments supplémentaires dus au cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Efforts tranchants dans la plaque
S_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
m_{ij}	Coefficients de la matrice masse
$\rho(z)$	La masse volumique locale
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement en plan
∂	Dérivée partielle
δ	Quantité virtuelle

Introduction Générale

Depuis peu, l'attention des chercheurs s'est portée sur une classe de matériaux composites appelés matériaux à gradation fonctionnelle « FGM ». Ces composites non homogènes, composés de différentes phases de matériaux (généralement céramique et métal), intègrent des particules sphériques ou presque sphériques dans une matrice isotrope. Les FGM présentent un fort effet de couplage flexion-étirement et leurs microstructures se caractérisent par des fonctions différentes pour chaque phase, créant des variations continues des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et qui éliminent ainsi la concentration de contraintes que l'on trouve dans les composites stratifiés. Cette variation permet de résoudre les problèmes d'interface et l'élimination des concentrations de contraintes se fait grâce aux caractéristiques de résistance thermique des constituants céramiques et aux performances mécaniques accrues des constituants métalliques, réduisant ainsi le risque de rupture catastrophique. [1]

Les FGMs sont largement utilisées dans de nombreuses applications structurelles telles que la mécanique, le génie civil, l'aérospatiale, le nucléaire et l'automobile. L'augmentation de leurs applications, a conduit au développement de nombreux modèles de calculs pour prédire la réponse des plaques en FGM. Ces modèles peuvent être développés en utilisant des théories basées sur le déplacement (lorsque le principe du travail virtuel est utilisé) ou des théories basées sur les contraintes de déplacement (lorsque le théorème variationnel mixte de Reissner est utilisé). En général, ces théories peuvent être classées en trois catégories principales : théorie classique des plaques (CPT); théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT); et théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Le CPT, qui néglige les effets de déformation par cisaillement transversal, fournit des résultats précis pour les plaques minces [2-5]. Pour les plaques moyennement épaisses, il sous-estime les déformations et surestime les charges de flambage et les vibrations naturelles. Le FSDT tient compte de l'effet de déformation par cisaillement transversal, mais exige un facteur de correction du cisaillement pour satisfaire aux conditions de contrainte de cisaillement transversale libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque [6-12]. Bien que le FSDT fournisse une description suffisamment précise de la réponse pour les plaques minces à moyennement épaisses, il n'est pas pratique à utiliser en raison de la difficulté à déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement. Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction du cisaillement, de nombreuses théories HSDT ont été mises au point en se basant

Introduction Générale

sur l'hypothèse de variations quadratiques, cubiques ou d'ordre supérieur des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur de la plaque, notamment Reddy [13], Karama et al. [14], Zenkour [15], [16], [17], Xiao et al. [18], Matsunaga [19], Pradyumna et Bandyopadhyay [20], Fares et al. [21], Talha et Singh [22], [23], Benyoucef et al. [24], Atmane et al. [25], Meiche et al. [26], Mantari et al. [27] et Xiang et al. [28]

Bien que les théories HSDT comportant cinq inconnues soient suffisamment précises pour prédire la réponse des tôles minces à épaisses, leurs équations de mouvement sont beaucoup plus compliquées que celles de FSDT et CPT. Par conséquent, la théorie HSDT établie par Thai et al [29] est facile à utiliser.

Ce mémoire aura par conséquent comme ambition de développer l'hypothèse de Tai et Vo [29] qui est basée sur la déformation par cisaillement sinusoïdal pour la flexion et la vibration naturelle des plaques en FGM et aussi l'analyse par flambement de ces plaques avec seulement quatre inconnues en utilisant une fonction de cisaillement établi par Zaoui et al [30].

Le plan du présent mémoire est organisé en deux chapitres répartis comme suit :

Dans le chapitre 1, une première partie rappellera des généralités sur les matériaux FGM, une seconde partie s'attachera à recenser les différentes lois d'homogénéisation des propriétés matérielles de la plaque FGM, enfin une troisième partie s'intéressera plus particulièrement aux théories des plaques FGM.

Le second chapitre est consacré à la modélisation mathématique afin de pouvoir analyser le comportement des plaques FGM sous flexion, flambement et vibration. Par la suite des résultats sont obtenus en utilisant la programmation sur le logiciel Maple, ils sont présentés sous forme de tableaux et de graphes, en fin ces résultats seront discutés.

Le présent travail s'achève par une conclusion générale qui englobe tous les résultats obtenus ainsi que des perspectives envisagées dans le domaine d'étude des matériaux FGM.

Chapitre 1 : Généralité sur les matériaux FGM

1.1 Introduction :

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont une famille de matériaux qui présentent des compositions et des microstructures évolutives de manière continue à travers leur épaisseur, leur conférant ainsi des propriétés remarquables. Initialement inventé par un scientifique japonais en 1984 dans le but de développer un matériau capable de résister à des températures élevées pour des applications spatiales, le concept de FGM a depuis été largement adopté dans le monde entier, suscitant un intérêt croissant tant dans le domaine académique que dans l'industrie, notamment pour des applications à haute valeur ajoutée. Les FGM se distinguent des matériaux composites classiques par leur transition progressive entre différentes phases constitutives, ce qui réduit les risques de fissuration et de rupture, et permet de bénéficier des meilleures propriétés de chaque matériau. [31]

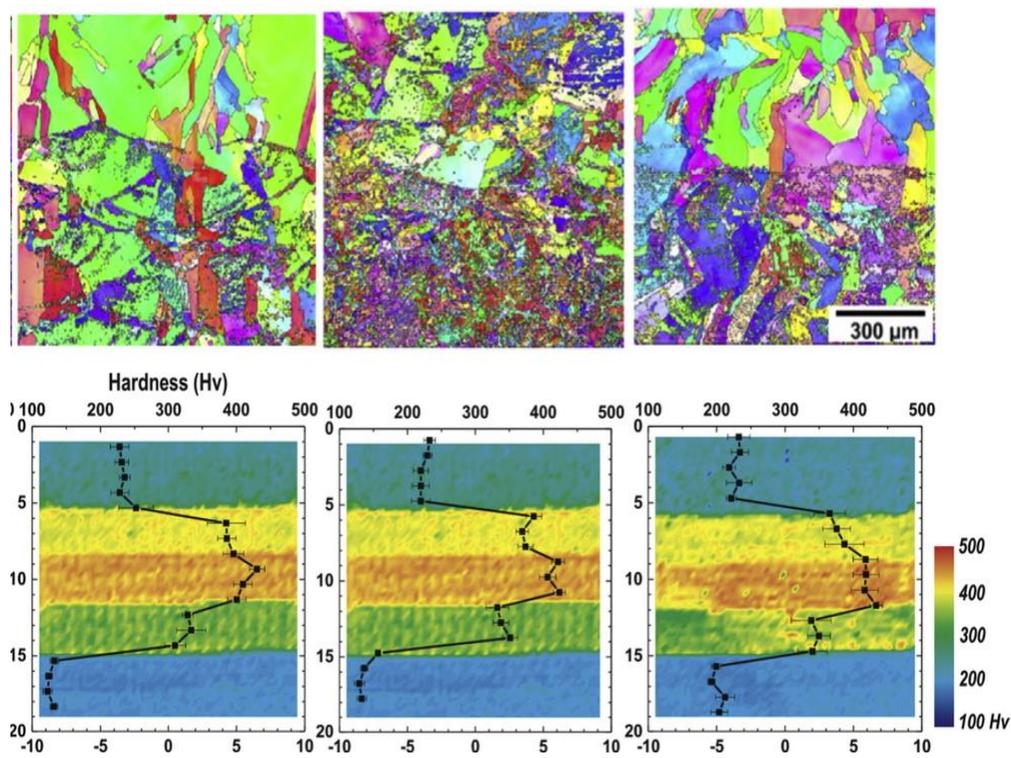


Fig.1.1 Matériaux à gradation fonctionnelle - acier 316L acier ferrique - fabrication additive.

[31]

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

1.2 Caractéristiques matérielles des FGMs :

Dans la conception des matériaux à gradation fonctionnelle, le choix des composants de base est adapté en fonction des propriétés physiques de chaque constituant. Les FGM sont couramment composés de deux types de matériaux fondamentaux : les céramiques et les métaux.

Les métaux offrent plusieurs avantages. Ils sont généralement d'excellents conducteurs de chaleur et d'électricité, rigides, durs et plastiquement déformables. De plus, de nombreux métaux ont des températures de fusion élevées. Parmi les métaux les plus couramment utilisés dans les FGM, on trouve le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Quant aux céramiques, elles résultent de la combinaison d'éléments métalliques tels que l'aluminium, le nickel, le titane, le zirconium, avec des éléments non métalliques, principalement l'oxygène. Elles sont utilisées notamment dans des environnements extrêmes, caractérisés par des températures élevées, par exemple. Les céramiques se distinguent par leur résistance mécanique et thermique très élevée, ce qui en fait des matériaux réfractaires. Elles sont généralement très dures et sont couramment utilisées comme abrasifs. Cependant, les céramiques ont tendance à présenter un comportement fragile, ce qui limite leur utilisation dans des applications soumises à des chocs mécaniques et thermiques importants. [32]

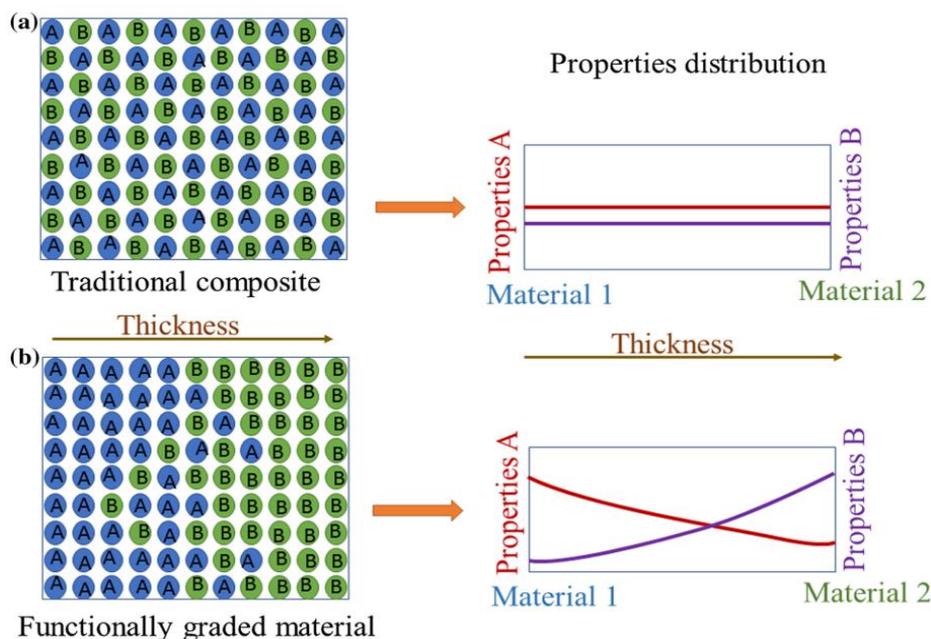


Fig.1.2 (a) Matériaux composites classiques, (b) Matériaux à gradation fonctionnelle. [32]

1.3 Domaine d'application :

Les FGM sont largement privilégiés dans de nombreux domaines en raison de leurs caractéristiques essentielles. Ils sont légers, résistants et durables, offrant un énorme potentiel d'application dans diverses industries. Les domaines d'application actuels comprennent l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité/électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique. Les FGM sont prometteurs pour des conditions de fonctionnement difficiles, tels que les revêtements résistant à l'usure dans l'industrie minière ou les boucliers thermiques de fusées. Ils sont également idéaux pour réduire les incompatibilités thermomécaniques dans les liaisons métal-céramique et prévenir le décollement. Les futurs domaines d'application des FGM incluent des applications nécessitant des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques exceptionnelles dans des environnements de travail sévères. Ces matériaux seront également utilisés lorsque des combinaisons de fonctions incompatibles, comme la dureté et la ténacité, seront nécessaires. La réduction des coûts de production ouvrira de nouvelles perspectives pour les applications futures des matériaux à gradation fonctionnelle.[33]

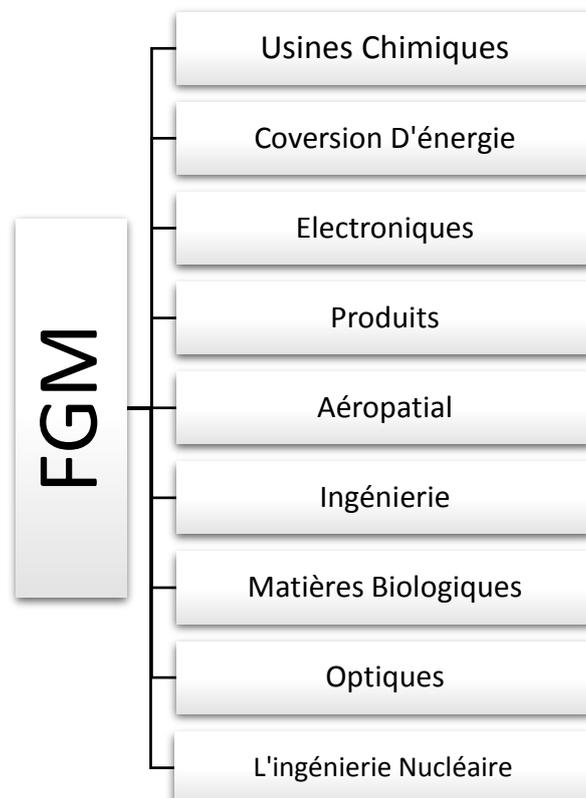


Fig.1.3 Principaux domaines d'application des FGM

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

1.4 Avantages et inconvénient des FGMs :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans différents domaines en raison de leurs caractéristiques uniques. Ces matériaux présentent à la fois des avantages et des inconvénients. [34]

1.4.1 Avantage des matériaux FGM :

L'utilisation croissante des matériaux fonctionnellement gradués dans divers domaines est indéniable. Ces matériaux offrent de multiples avantages :

- Leur capacité à assurer une excellente adhérence entre différents matériaux, tels que la combinaison de céramique et de métal.
- La possibilité de créer des structures complexes, ce qui réduit les coûts d'assemblage.
- La capacité de fabriquer des matériaux aux propriétés particulières, comme un coefficient de Poisson négatif ou une dilatation quasi-nulle.
- La possibilité de dimensionner les structures avec des propriétés spécifiques uniquement dans les axes de chargement.
- Un meilleur contrôle des contraintes grâce à l'absence d'interfaces nettes.
- Une faible sensibilité à la fatigue.
- Une faible sensibilité à la corrosion.
- Une ténacité élevée en cas de rupture.[34]

1.4.2 Inconvénients des matériaux FGM :

- La fabrication des matériaux fonctionnellement gradués pose des défis en raison de l'inadéquation entre leurs différentes propriétés. Des contraintes telles que la taille, la morphologie et la température peuvent influencer leur fabrication.
- Les matériaux fonctionnellement gradués présentent une porosité élevée et une faible adhérence entre leurs différents composants. En effet, la composition d'un matériau FG est souvent déterminée par des températures incompatibles entre elles, comme la température des céramiques et celle des métaux. Cela résulte d'une application difficile du matériau FG.
- Les procédés de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués sont coûteux, car ils nécessitent des conditions de production en atmosphère protectrice ou sous basse pression.[34]

1.5 Les Modèles de FGM :

1.5.1 Modèle Voigt :

Le modèle Voigt, initialement proposé par Voigt, est largement utilisé dans l'homogénéisation pour prédire les propriétés élastiques effectives des différents types de matériaux composites. Ce modèle, connu pour sa simplicité, est couramment utilisé pour estimer les propriétés effectives des composites biphasés. Il suppose que la déformation ne subit aucune modification lors du chargement des coordonnées du matériau. En se basant sur cette hypothèse, le module de Young effectif E et le coefficient de Poisson des composites ν biphasés peuvent être prédits par [35] :

$$E(z) = E_c V(z) + E_m (1 - V(z)) \quad 1.1$$

$$\nu(z) = V(z)(\nu_c - \nu_m) + \nu_m \quad 1.2$$

1.5.2 Modèle Reuss :

L'hypothèse de base pour les propriétés effectives dérivées selon Reuss postule que la contrainte moyenne totale à l'échelle macroscopique est considérée comme identique dans chaque phase sous une contrainte uniforme équivalente. En d'autres termes, ce modèle est connu sous le nom de règle inverse du modèle de Voigt. Ainsi, les expressions du module de Young effectif et du coefficient de Poisson sont les suivantes [36] :

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_c (1 - V(z)) + E_m V(z)} \quad 1.3$$

$$\nu(z) = \frac{\nu_c \nu_m}{\nu_c (1 - V(z)) + \nu_m V(z)} \quad 1.4$$

1.5.3 Modèle Tamura :

Le modèle Tamura utilise en réalité une règle linéaire de mélange, introduisant un paramètre d'ajustement empirique noté O .

$$O = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad 1.5$$

Les estimations pour $O = 0$ correspondent à la règle de Reuss, tandis que $O = \infty$ correspond à la règle de Voigt. Ce modèle se soucie peu de savoir quelle phase est la matrice et laquelle est particulière.

Dans l'analyse numérique du comportement statique des plaques FGM, il convient de noter que la méthode Tamura dépend fortement des valeurs de O , et il est important de prendre en compte

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

le fait que les FGMs ont généralement une plage de valeurs possibles pour O , qui varie en fonction de l'épaisseur du matériau. Même lorsque l'on considère un composite homogène (non gradué), les valeurs de O varient en fonction du degré de déformation plastique. L'expression du module de Young effectif est la suivante [35] :

$$E(z) = \frac{(1 - V(z))E_m(O - E_c) + V(z)E_c(O - E_m)}{(1 - V(z))(O - E_c) + V(z)(O - E_m)} \quad 1.6$$

1.5.4 Modèle Mori-Tanaka :

Le schéma de Mori-Tanaka est un modèle d'homogénéisation largement utilisé et bien connu pour prédire les propriétés élastiques effectives des différents types de matériaux FGM. Selon ce modèle, les modules de cisaillement effectif (G) et le module de compressibilité (K) peuvent être exprimés de la manière suivante. Cette méthode repose sur l'hypothèse qu'un matériau composite biphasé est constitué d'une matrice renforcée par des particules sphériques, réparties de manière aléatoire dans la structure. Selon le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, le module de compressibilité effectif $K(z)$ et le module de cisaillement effectif $G(z)$ sont donnés par.[35]

$$\begin{aligned} K(z) &= K_m + \frac{V(z)(K_c - K_m)}{1 + (1 - V(z))3(K_c - K_m)/(3K_m + 4K_c)} \\ G(z) &= G_m + \frac{V(z)(G_c - G_m)}{1 + (1 - V(z))(G_c - G_m)/(G_m + f_1)} \\ f_1 &= \frac{G_m(9k_m + 8G_m)}{6(k_m + 2G_m)} \end{aligned} \quad 1.7$$

En utilisant les modules de cisaillement et de volume, on peut exprimer le module de Young effectif et le coefficient de Poisson de la manière suivante [35] :

$$E(z) = \frac{9k_z G_z}{3k_z + G_z} \quad 1.8$$

$$\nu(z) = \frac{3k_z - 2G_z}{2G_z + 3K_z} \quad 1.9$$

1.6 Les FGMs minces ou massifs :

Il existe essentiellement deux grandes familles de FGM ; les FGMs minces (FGM coating) et les FGM massifs (FGM bulk). Les FGMs minces sont réalisés par des procédés comme le PVD, le PACVD, le CVD, la projection à froid ou la projection plasma et impactent uniquement la

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

surface de la pièce tandis que les FGM massifs concernent l'intégralité de la pièce (ou une grande partie) et sont réalisés par des procédés comme la métallurgie des poudres, la fabrication additive (laser cladding, ...) et la fonderie. [31]

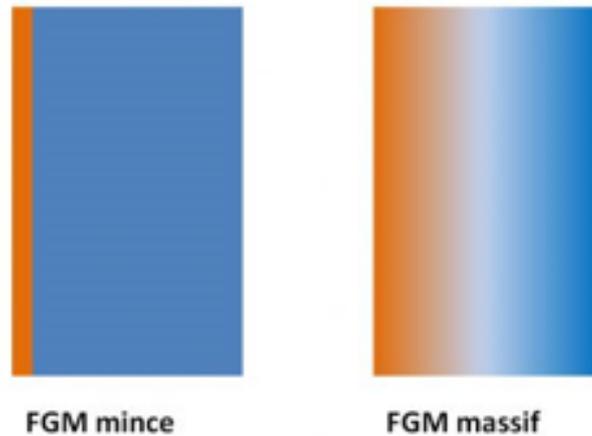


Fig.1.4 Les deux grandes familles de FGM (minces et massifs) [31]

1.7 Les méthodes de réalisation des matériaux fonctionnellement gradués :

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser des matériaux à gradient de fonction, voici les plus connues :

1.7.1 La centrifugation pour réaliser des FGMs :

La fonderie par centrifugation, qu'elle soit verticale ou horizontale, offre une solution pratique et économique pour créer un gradient de microstructure dans l'épaisseur des matériaux. C'est la méthode privilégiée pour la production de FGM à base d'aluminium, de cuivre ou d'autres matériaux ferreux. [37]

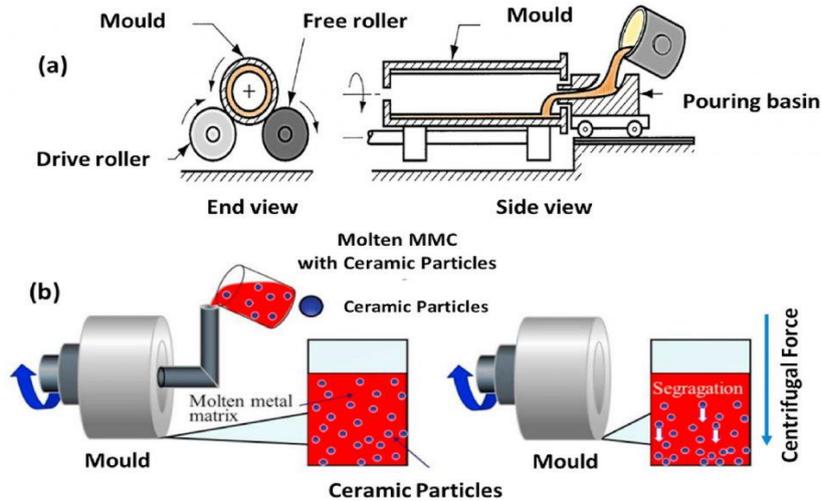


Fig.1.5 La fonderie par centrifugation [37]

1.7.2 Le coulage sous pression :

Une autre approche pour créer des gradients de fonction est l'utilisation du procédé de squeeze casting direct, qui implique l'infiltration d'une préforme en céramique préalablement disposée dans le moule avec du métal liquide. Cette méthode est particulièrement adaptée à la fabrication de composites à base d'aluminium tels que SiC (carbure de silicium) et Al₂O₃ (alumine). Une autre option est la fonderie sous pression, où la préforme est maintenue en position verticale lors de la fermeture du moule. Tout comme avec le squeeze casting, l'application d'une pression permettra au métal de s'infiltrer dans la préforme. [37]

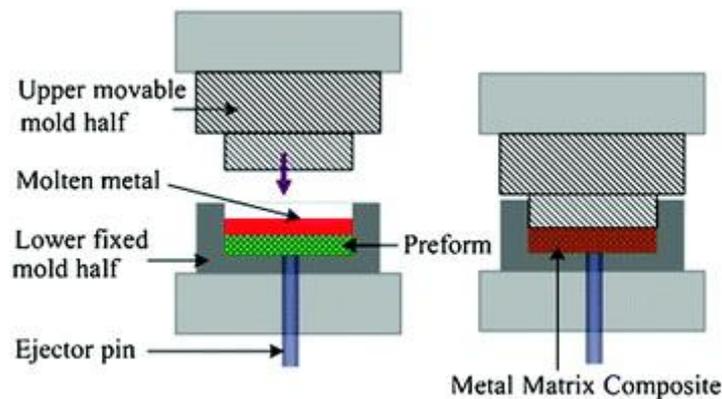


Fig.1.6 Procédé de coulage sous pression [37]

1.8 Les différents schémas d'homogénéisation :

La fraction volumique des matériaux FGMs varie de façon continue, dans le sens de l'épaisseur de la plaque (l'axe z) et elle peut être donnée par trois lois différentes qui sont les suivantes :

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

- Modèle de loi de puissance (P-FGM)
- Modèle sigmoïde (S-FGM)
- Modèle exponentiel (E-FGM). [35]

1.8.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La proportion volumique de la classe P-FGM suit une fonction exponentielle, exprimée de la manière suivante :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^P \quad 1.10$$

En utilisant un paramètre matériel n et l'épaisseur de la plaque h , on peut définir la fraction volumique locale $V(z)$. Une fois cette fraction déterminée, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM composée de céramique et de métal peuvent être calculées en utilisant la loi suivante :

$$E(Z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \quad 1.11$$

Le diagramme suivant illustre la variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM. Il est évident que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure lorsque $P < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure lorsque $P > 1$. [36]

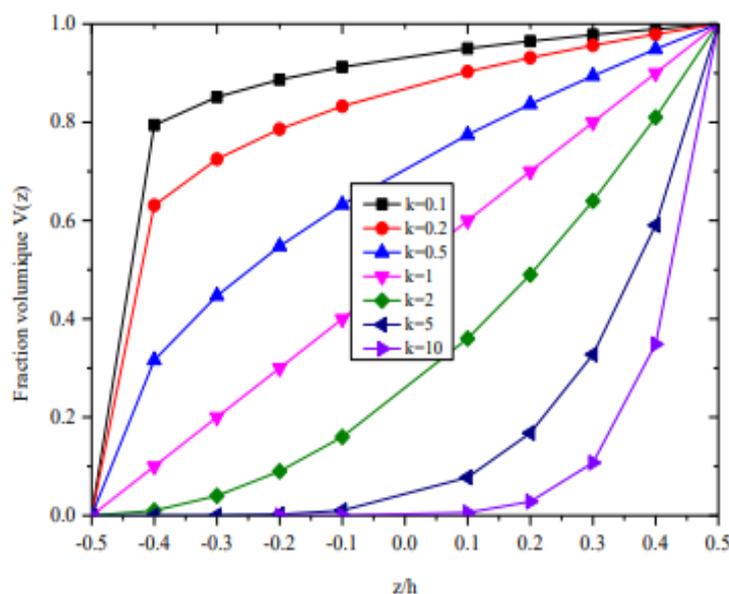


Fig.1.7 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [36]

1.8.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Pour assurer une répartition optimale des contraintes entre toutes les interfaces, deux fonctions de loi de puissance sont employées pour déterminer la fraction volumique de la plaque. Ces deux fonctions sont définies comme suit :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + Z}{\frac{h}{2}} \right)^P, \quad -\frac{h}{2} \leq Z \leq 0 \quad 1.12$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - Z}{\frac{h}{2}} \right)^P, \quad 0 \leq Z \leq \frac{h}{2} \quad 1.13$$

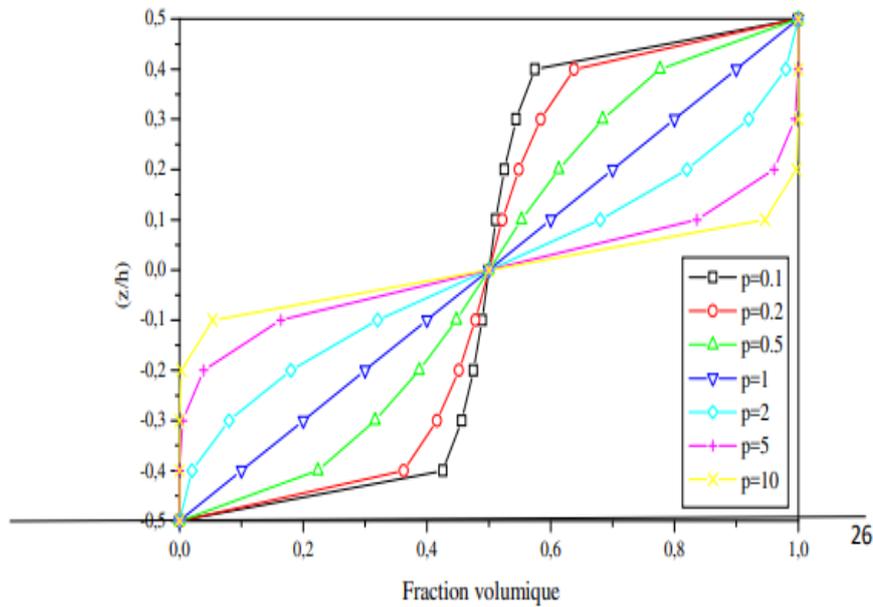


Fig.1.8 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [36]

En peut calculer le module de Young de la plaque S-FGM par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 + V_1(z)] * E_m, \quad -\frac{h}{2} \leq Z \leq 0 \quad 1.14$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 + V_2(z)] * E_m, \quad 0 \leq Z \leq \frac{h}{2} \quad 1.15$$

La figure 1.8 expliquée que la variation de la fraction volumique définie par les deux équations mentionnées ci-dessus représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque appelée plaque S-FGM. [36]

1.8.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

La plupart des chercheurs utilisent une fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM. Cette fonction est généralement formulée de la manière suivante :

$$E(z) = E_m e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad 1.16$$

Tell que

$$B = \frac{1}{h} * \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad 1.17$$

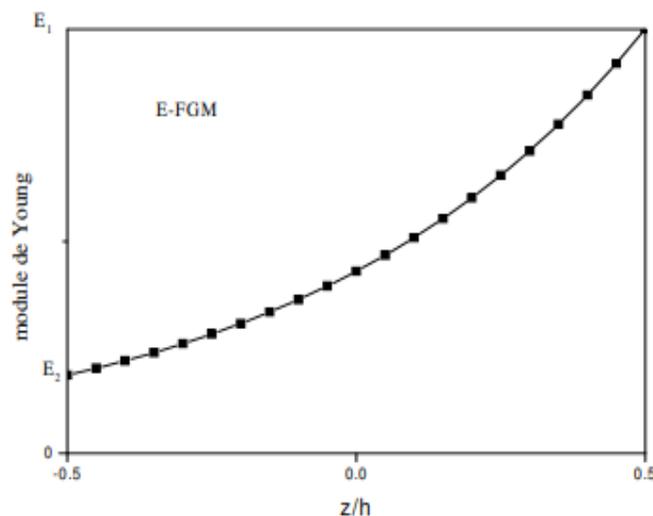


Fig.1.9 Variation de module de Young dans une plaque E-FGM [36]

1.9 Les théories des plaques FGM :

Cette revue se concentre sur l'étude des plaques et présente trois hypothèses essentielles. La première hypothèse est la théorie classique de Love-Kirchhoff, qui s'applique aux couches minces. La deuxième hypothèse concerne la théorie de premier ordre pour les couches d'épaisseur moyenne, tandis que la troisième hypothèse concerne la théorie d'ordre supérieur pour les grandes épaisseurs. Pour entamer cette revue, nous nous appuyerons sur les travaux de Srinivas et Rao, qui ont développé une solution exacte pour les problèmes de flexion, de vibration et de flambage des plaques et stratifiés rectangulaires orthotropes épais. Il convient de noter que l'équilibre des plaques élastiques planes, ainsi que la formulation mathématique de ce problème, ont été abordés par de nombreux chercheurs, tels que Lagrange, Poisson, Kirchhoff, M. Boussinesq, M. Maurice Lévy, chacun utilisant des méthodes variées et aboutissant à des résultats parfois discordants. [38]

1.9.1 Théorie classique des plaques (CPT) :

Pour parvenir à une optimisation précise des structures composites, il est essentiel de développer des outils de modélisation du comportement mécanique qui soient de plus en plus sophistiqués et qui prennent en compte les spécificités de ces matériaux-structures. Sur le plan pratique, l'utilisation de méthodes numériques, telles que les calculs par éléments finis, est indispensable pour dimensionner des structures composites complexes. Ces approches numériques offrent une solution efficace pour analyser et prédire le comportement des structures composites, en prenant en compte les interactions complexes entre les différentes phases du matériau et les charges appliquées. Grâce à ces outils, il devient possible d'optimiser la conception des structures composites en tenant compte de contraintes spécifiques telles que la résistance, la rigidité, la durabilité et la légèreté, permettant ainsi de répondre aux exigences des applications industrielles.

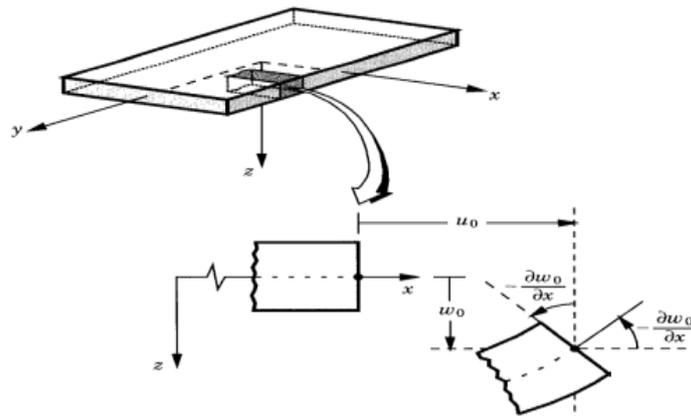


Fig1.10 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [38]

Il est largement reconnu que les théories classiques des plaques, qui se basent sur la théorie de Kirchhoff ou les théories de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses en négligeant les cisaillements transverses, ne sont appropriées que pour l'analyse des plaques composites minces avec de petites déformations. Ces théories ne prévoient pas de manière satisfaisante les réponses des structures multicouches modernes, épaisses et fortement anisotropes. En effet, dans les plaques anisotropes, le cisaillement transverse joue un rôle bien plus important que dans les plaques isotropes. Les résultats montrent une dépendance des propriétés du stratifié, qu'il soit

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

considéré comme mince ou épais, ainsi que de l'hypothèse de symétrie ou d'asymétrie du stratifié.

Dans le même ordre d'idées, Kulkarni et Pagano ont proposé une approche pour résoudre la dynamique des stratifiés composites en flexion cylindrique, en utilisant la théorie de Mindlin des plaques, qui s'avère bien plus précise. Dans leur formulation, un terme exponentiel dépendant du temps est introduit dans la série de Fourier pour les déplacements. Les résultats de dispersion analytique ont été discutés en utilisant des valeurs de fréquence et de vitesse de phase adimensionnées, pour des stratifiés symétriques et asymétriques. Cette approche proposée pour les stratifiés à faible anisotropie et symétriques a montré les meilleurs résultats obtenus jusqu'à présent.[38]

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{1.18}$$

u_0, v_0, w_0 , sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

1.9.2 Théorie de premier ordre des plaques (FSDT) :

Di Sciuva a développé un élément de plaque anisotrope monocouche équivalent basé sur la théorie Ambartsumian ZZ (Zig-Zag). Contrairement à une approche couche par couche, le nombre de degrés de liberté de l'élément ne dépend pas du nombre de couches. Cet élément rectangulaire à 4 nœuds (avec 8 degrés de liberté par nœud) prend en compte la flexion, l'extension et les contributions de cisaillement transversal. Les déformations de cisaillement sont traitées comme des paramètres nodaux, ce qui en fait une approche mixte avec huit variables par nœud (trois déplacements, trois rotations et deux déformations de cisaillement). Des polynômes hermitiens sont utilisés comme fonctions d'interpolation pour les champs de déplacement transverses, tandis que les autres variables sont interpolées linéairement. L'objectif était de maintenir la continuité C-1 pour le problème de flexion. Une théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre a été choisie pour estimer les champs de déplacement. Ce nouvel élément a été utilisé pour étudier le pliage cylindrique de stratifiés à plis croisés et à plis angulaires, ainsi que le pliage d'un stratifié croisé carré. Les résultats ont montré une bonne concordance, notamment pour les rapports portée/épaisseur élevés.

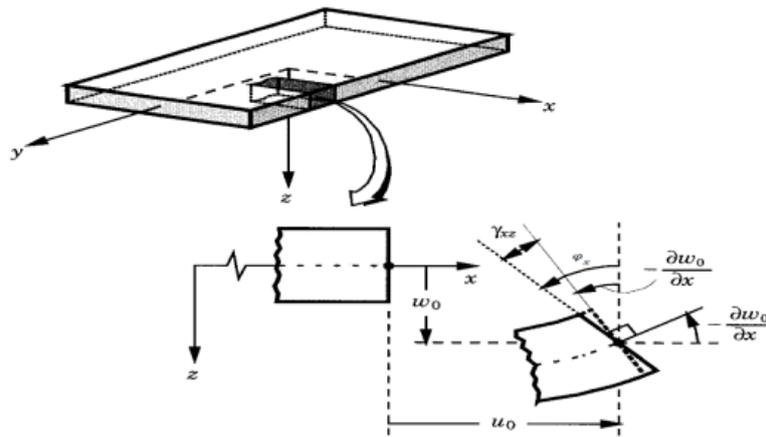


Fig.1.11 Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [38]

Toledano et Murakami ont dérivé une formulation améliorée des plaques basée sur l'approche variationnelle mixte de Reissner, en utilisant l'approche Zig-Zag et des polynômes de Legendre. Cependant, ils ont choisi des fonctions de déplacement d'ordre supérieur, en supposant les déplacements de Lo, Christensen et Wu. Cette formulation a été adaptée pour les plaques stratifiées dans le cadre de la théorie monocouche équivalente. Ils ont étudié la flexion cylindrique de stratifiés symétriques et de stratifiés croisés non symétriques. Les réponses macroscopiques, telles que la déflection centrale, ont été modélisées avec précision par rapport à une solution exacte de référence. Les résultats ont montré un haut niveau de précision, même pour de faibles rapports portée/épaisseur. Une comparaison entre la déformation par cisaillement de premier ordre de la théorie Zig-Zag de Murakami et la formulation d'ordre supérieur de Lo, Christensen et Wu a indiqué que la première était plus précise pour la modélisation des plaques stratifiées.

Owen et Li ont présenté un élément de plaque de déformation par cisaillement du premier ordre en trois dimensions dans deux articles associés. Ils ont utilisé une technique de sous-structuration pour augmenter le nombre réel de couches dans le stratifié. Cependant, le principal avantage de cette sous-structuration était qu'un seul ensemble d'équations de couche devait être résolu. Toutes les autres équations de couche pouvaient être résolues en utilisant les résultats de cet ensemble d'équations, ce qui réduisait considérablement la taille du problème. Cependant, cela entraînait une augmentation du temps de traitement total. Pour une meilleure comparaison avec les solutions d'élasticité, une technique de lissage a été utilisée pour interpoler les résultats des points d'intégration aux limites de l'élément. Cela s'est révélé particulièrement

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

intéressant pour les contraintes transversales avec une intégration sélective ou réduite. Ils ont étudié des problèmes de statique, de dynamique et de stabilité des plaques composites stratifiées minces et épaisses. Bien que cette formulation soit de type couche par couche, une bonne précision a été obtenue pour les déplacements et les contraintes à travers l'épaisseur du stratifié grâce à une approximation linéaire. Néanmoins, une comparaison a été effectuée en utilisant une variation du déplacement dans le plan avec grand nombre de nœuds pour un élément d'ordre supérieur, mais elle n'a pas montré d'amélioration significative des résultats justifiant l'augmentation des paramètres.[38]

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \Phi_x(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \Phi_y(x, y, t) \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{1.19}$$

Φ_x , Φ_y , sont les rotations normales au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

1.9.3 Théorie d'ordre supérieur (HSDT) :

Kant et Pandya ont présenté une théorie d'ordre supérieur qui satisfait la contrainte de cisaillement transversal nulle sur les couches supérieure et inférieure des plaques laminées. Ils ont dérivé un élément quadrilatéral iso-paramétrique à neuf nœuds. La théorie stratifiée était du type monocouche équivalente. Chaque nœud était déterminé par sept degrés de liberté, comprenant trois translations, deux rotations et deux rotations spéciales pour modéliser les déformations de cisaillement transversal. Étant donné que la continuité n'était pas garantie lors du calcul de la contrainte à l'intérieur de chaque couche via les relations constitutives, ils ont choisi l'intégration des équations d'équilibre comme technique plus précise. Cela nécessitait un post-traitement supplémentaire des résultats, mais offrait un niveau de précision plus élevé. Cependant, les résultats présentés n'étaient toujours pas exacts selon les références consultées dans l'étude. Le modèle fonctionnait bien à partir de la limite des plaques épaisses (longueur ou largeur par épaisseur ≥ 10) sans facteurs de correction de cisaillement. D'autres évaluations de cette formulation peuvent être trouvées dans l'étude de Pandya et Kant.

En 1990, le professeur J. N. Reddy a entrepris une révision exhaustive des différentes théories existantes du troisième ordre concernant les plaques. Il a souligné les différences et les similitudes entre ces théories afin d'identifier les contributions réelles de chacune. À partir de

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

cette compilation des théories du troisième ordre, Reddy a proposé une théorie générale cohérente des plaques déformables, à partir de laquelle des théories révisées peuvent être dérivées. Il a également pris en compte les déformations non linéaires en utilisant les hypothèses de Von Kármán.

Cependant, aucune validation ou comparaison n'a été effectuée pour vérifier la pertinence de ces théories. Par la suite, Noor, Burton et Peters ont développé une procédure en deux étapes pour déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques des plaques et des coques. Dans la première étape prédictive, une réponse globale de la plaque a été obtenue en utilisant une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre avec des facteurs de correction de cisaillement. Dans la deuxième étape, une correction des valeurs prédites a été réalisée en utilisant deux méthodes différentes. La première méthode a estimé les facteurs de correction de cisaillement pour calculer les contraintes, tandis que la deuxième méthode a exploité la dépendance des composantes de déplacement par rapport à la coordonnée d'épaisseur. Les résultats obtenus via cette procédure en deux étapes ont montré une sensibilité à la symétrie du stratifié ainsi qu'aux facteurs de correction de cisaillement.

L'un des principaux avantages de cette méthode est sa mise en œuvre simple et peu coûteuse de la phase de prédiction. Grâce au post-traitement (correction), de meilleurs résultats peuvent être obtenus sans avoir besoin de formulations d'éléments complexes. Cependant, il est important de noter que ces résultats doivent encore être validés et comparés à des solutions de référence pour évaluer leur précision.[38]

Le champ de déplacement de la méthode d'ordre élevé s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{1.20}$$

Avec : $\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \Phi_x(x, y, t)$, et $\varphi_y(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \Phi_y(x, y, t)$

Chapitre 1 : Généralité Sur Les Matériaux FGM

1.10 Conclusion :

En conclusion, les FGMs sont une famille de matériaux qui présentent des compositions et des microstructures évolutives à travers leur épaisseur, leur conférant ainsi des propriétés remarquables. Ils sont largement utilisés dans des domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense et l'énergie. Les FGM offrent des avantages tels qu'une excellente adhérence entre différents matériaux, la possibilité de créer des structures complexes et la capacité de fabriquer des matériaux aux propriétés particulières. Cependant, ils ont aussi des inconvénients liés à leur fabrication complexe et coûteuse. Différents modèles, tels que le modèle Voigt, le modèle Reuss, le modèle Tamura et le modèle Mori-Tanaka, sont utilisés pour prédire les propriétés des FGM. Il existe deux grandes catégories de FGM : les FGM minces et les FGM massifs, qui sont réalisés à l'aide de différentes méthodes. Les matériaux FGM continuent d'être étudiés et développés pour ouvrir de nouvelles perspectives d'application et répondre aux besoins des environnements de travail sévères

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussion

2.1 Introduction :

L'objectif de la présente étude est de développer une théorie simple de déformation par cisaillement sinusoïdal pour la flexion, le flambage et les vibrations de la plaque en FGM. Cette théorie est fondée sur l'hypothèse que les déplacements dans le plan et les transversaux comprennent la flexion et le cisaillement. L'étude proposée est celle de la déformation par cisaillement sinusoïdal en utilisant quatre inconnues et une fonction de cisaillement différente à celle déjà utilisée dans le même cadre d'étude. Les propriétés matérielles de la plaque de FG sont supposées varier selon la distribution de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants P-FGM. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Les solutions fermées sont obtenues pour les plaques simplement supportées. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie proposée dans la prédiction des réponses de flexion, de flambage et de vibration des plaques FGMs.

2.2 Formulations théoriques :

2.2.1 Hypothèses de base :

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les couches impliquées sont infinitésimales.
- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- Le déplacement transversal w comprend deux éléments de pliage w_b et w_s .
Ces composants sont des fonctions de coordonnées x , y , et le temps t .

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad 2.1$$

- Les déplacements dans le plan u_1 et u_2 consistent en des composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u_1 = u_0 + u_b + u_s \text{ et } u_2 = v_0 + v_b + v_s \quad 2.2$$

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

-Les composants de flexion u_b et v_b sont supposés être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions pour u_b et v_b sont

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \text{ et } v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad 2.3$$

-Les composantes de cisaillement u_s et v_s donner lieu, en liaison avec w_s , aux variations sinusoïdales des contraintes de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc aux contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} , par l'épaisseur h de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} sont à zéro sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s peut être donné comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \text{ et } v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad 2.4$$

2.2.2 Cinématique :

D'après les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations : 2.1... 2.4 comme suit :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ u_3(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t), \end{aligned} \quad 2.5$$

Où

$$f(z) = \frac{1}{(h^4 + \pi^4)} \left(e^{\frac{hz}{\pi}} \pi h \left(h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \right) \frac{\pi h^3}{(h^4 + \pi^4)} \quad 2.6$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad 2.7$$

$$\text{et } \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad 2.8$$

$$\text{Où } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad 2.9$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{\left(e^{\frac{hz}{\pi}} h^2 \left(h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \right) + \left(e^{\frac{hz}{\pi}} h \pi \left(-h \pi \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + \frac{\pi^3 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{h} \right) \right)}{(h^4 + \pi^4)} \quad 2.10$$

2.2.2 Les équations constitutives :

Les propriétés du matériau de la plaque FGM sont supposées varier en continu par l'épaisseur de la plaque conformément à une loi de puissance.

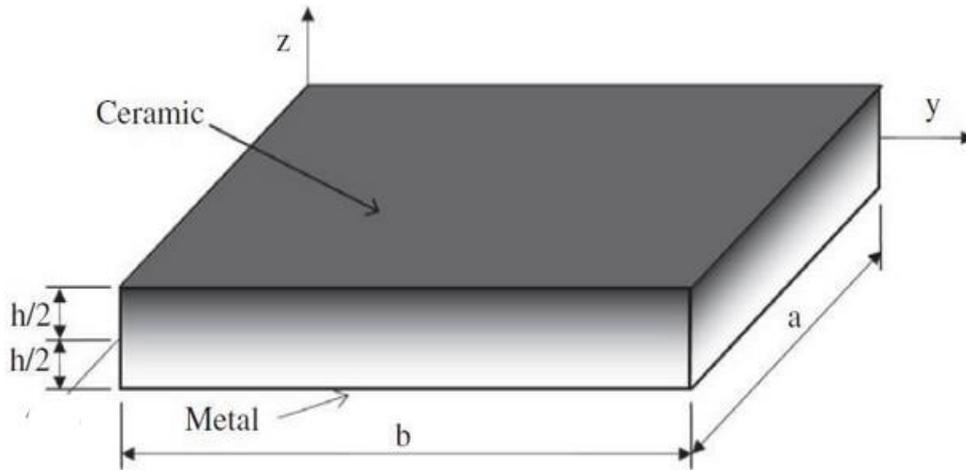


Fig.2.1 Géométrie d'une plaque FGM rectangulaire

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à la fonction :

$$v(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P \quad 2.11$$

Où P est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque, les propriétés matérielles d'une plaque sont déterminées par les lois des mélanges suivantes :

$$L(z) = L_m + (L_c - L_m)v(z) \quad 2.12$$

L représente la propriété matérielle effective telle que le module de Young E ou la densité de masse ρ , les indices m et c représentent les constituants métalliques et céramiques,

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

respectivement, P est l'exposant de la fraction volumique. La valeur de P égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, alors que l'infini de P indique une plaque entièrement métallique. Il est à noter que les effets de la variation du coefficient de Poisson ν sur la réponse des plaques FGMs sont très petits, le coefficient de Poisson ν est généralement considérée comme constante. Les relations linéaires constitutives d'une plaque FGM peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad 2.13$$

2.2.3 Équations du mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme suit : [39]

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad 2.14$$

Où δu est la variation de l'énergie de la déformation ; δv est la variation de l'énergie potentielle, δk est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ &= \int_A \left\{ \begin{aligned} &N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\ &+ N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \end{aligned} \right\} dA \end{aligned} \quad 2.15. a$$

Où N, M, et Q sont les résultants de contraintes définis comme suit :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad 2.15. b$$

$$Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g \sigma_i dz, \quad (i = xz, yz) \quad 2.15. c$$

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta u_3 dA + \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial \delta u_3}{\partial y} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) dA, \quad 2.16$$

Où q et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des charges appliquées transversales et dans le plan, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) \rho(z) dAdz \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)] - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v} \right) \right. \\ &\quad - J_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v} \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\ &\quad \left. + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA, \end{aligned} \quad 2.17$$

Où la convention point-exposant indique la dérivée par rapport au temps t , $\rho(z)$ est la masse volumique locale ; $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont des inerties de masse définies comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) dz \quad 2.18$$

Par remplacement des expressions δU , δV et δK dans l'équation 2.14 et intégration par parties, et collecte des coefficients de δu , δv , δw_b , et δw_s , les équations suivantes de mouvement de la plaque sont obtenues

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}, \quad 2.19. a$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}, \quad 2.19. b$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q + \tilde{N} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \quad 2.19. c$$

$$\begin{aligned} \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q + \tilde{N} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) \\ &\quad - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad 2.19. d$$

$$\text{où} \quad \tilde{N} = N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \quad 2.20$$

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

En remplaçant l'éq.2.7 par l'éq.2.13, et les résultats subséquents par l'éq.2.15 on obtient les résultantes des contraintes suivantes

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M^b\} \\ \{M^s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [B^s] \\ [B] & [D] & [D^s] \\ [B^s] & [D^s] & [H^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa^b\} \\ \{\kappa^s\} \end{Bmatrix} \text{ et } \{Q\} = [A^s]\{\gamma^s\}, \quad 2.21$$

Où

$$\begin{aligned} ([A], [B], [B^s], [D], [D^s], [H^s]) &= \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} (A, B, B^s, D, D^s, H^s), \\ (A, B, B^s, D, D^s, H^s) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz, \\ [A^s] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A^s, \quad A^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g^2 dz. \end{aligned} \quad 2.22$$

En remplaçant l'éq.2.22 par l'éq.2.19, Les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u, v, w_b, w_s) comme suit :

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial x} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}, \\ A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial y} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial y} &= I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}, \\ B \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - D \nabla^4 w_b - D^s \nabla^4 w_s + q + \tilde{N} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \\ B^s \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - D^s \nabla^4 w_b - H^s \nabla^4 w_s + A^s \nabla^2 w_s + q + \tilde{N} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s. \end{aligned} \quad 2.23$$

2.2.4 Solutions analytiques pour une plaque rectangulaire simplement soutenue :

Envisager une plaque rectangulaire simplement soutenue avec une longueur a et une largeur b sous charge transversale q et de forces dans le plan dans deux directions ($N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, N_{xy}^0 = 0$). Sur la base de l'approche de Navier, les expressions des déplacements sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites d'une plaque simplement soutenue.

- Les conditions aux limites d'une plaque simplement soutenue :

$$v = w_b = w_s = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ sur le bord de la plaque, } x=0, a$$

2.24

$$u = w_b = w_s = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ sur le bord de la plaque, } y=0, b$$

- Les expressions des déplacements :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y,$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y,$$

$$w_b(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y,$$

$$w_s(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y,$$

2.25

Où $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $(U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn})$ sont des coefficients, et ω est la fréquence des vibrations. La charge transversale q est également développée dans la série double de Fourier-sin et s'écrit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$

2.26

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{pour une charge répartie de façon sinusoïdale,} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour une répartition uniforme de la charge} \end{cases}$$

2.27

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

En remplaçant l'éq.2.25 par les éq.2.23, on peut obtenir les solutions partir de à :

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} + k & s_{34} + k \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} + k & s_{44} + k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{pmatrix}, \quad 2.28$$

Où

$$\begin{aligned} s_{11} &= A\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2}A\beta^2, \quad s_{12} = \frac{1+\nu}{2}A\alpha\beta, \quad s_{22} = \frac{1-\nu}{2}A\alpha^2 + A\beta^2 \\ s_{13} &= -B\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \quad s_{14} = -B^s\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \quad s_{23} = -B\beta(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{24} &= -B^s\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad s_{33} = D(\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad s_{34} = D^s(\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ s_{44} &= H^s(\alpha^2 + \beta^2)^2 + A^s(\alpha^2 + \beta^2), \quad k = N_{cr}(\gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2) \\ m_{11} &= m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = -\alpha J_1, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = -\beta J_1 \\ m_{33} &= I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad 2.29$$

2.3 Résultats et discussions :

Dans cette partie du deuxième chapitre, divers cas numériques sont étudiés ensuite présentés sous forme de tableaux et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion, du flambement et des réactions aux vibrations des plaques de FGM. Pour les résultats numériques, une plaque Al/Al₂O₃ composée d'aluminium (comme métal) et d'alumine (comme céramique) est considérée. Le module de Young et la densité d'aluminium sont $E_m = 70$ GPa et $\rho_m = 2702$ kg/m³, respectivement, et ceux de l'alumine sont $E_c = 380$ GPa et $\rho_c = 380$ kg/m³ respectivement. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux trouvés à l'aide de diverses théories des plaques. Le coefficient de poisson de la plaque est supposé être constant à travers l'épaisseur et égal à 0,3.

Les caractéristiques mécaniques de métal et de la céramique utilisé dans les plaques FGM sont répertoriés dans le tableau 2.1 :

Tableau 2.1: Propriétés des matériaux

Propriétés	Métal : Aluminium (Al)	Céramique : Alumina Al ₂ O ₃
E (GPa)	70	380
ν	0.3	0.3
ρ (kg/m ³)	2707	3800

Par souci de commodité, les non dimensionnalisations suivantes sont utilisées pour présenter les résultats numériques sous forme graphique et tabulaire :

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right), \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0 a} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right), D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right), \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), \bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6}\right),$$

$$\bar{N} = \frac{Na^2}{E_m h^3}, \hat{N} = \frac{N_{cr} b^2}{\pi^2 D}, \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c},$$

2.3.1 Problème de flexion :

Deux cas d'étude ont été effectués pour analyser la flexion. Le premier cas concerne les plaques carrées soumises à une charge uniformément répartie avec $a=10h$, le deuxième cas est consacré à l'étude d'une plaque carrée soumise à une charge répartie de façon sinusoïdale où le rapport géométrique est de $a = 10h$.

Tableau 2.2 : Comparaison des déformations non dimensionnelles et des contraintes de la plaque carrée sous charge uniformément répartie ($m= n = 100$ séries de termes).

p	Méthode	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
Céramique	SSDT [17]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Thai et Vo [29]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Present	0.4626	2.8733	1.9136	1.2474	0.3078	0.2946
1	SSDT [17]	0.9287	4.4745	2.1962	1.1143	0.5446	0.5114
	Thai et Vo [29]	0.9287	4.4745	2.1692	1.1143	0.5446	0.5114
	Present	0.9218	4.441	2.1746	1.0838	0.4551	0.4344
2	SSDT [17]	1.1940	5.2296	2.0338	0.9907	0.5734	0.4700
	Thai et Vo [29]	1.1940	5.2296	2.0338	0.9907	0.5734	0.4700
	Present	1.1881	5.1856	2.0419	0.9645	0.5238	0.4993
3	SSDT [17]	1.3200	5.6108	1.8593	1.0047	0.5629	0.4367
	Thai et Vo [29]	1.3200	5.6108	1.8593	1.0047	0.5629	0.4367
	Present	1.3019	5.5579	1.8696	0.9774	0.5483	0.5228
4	SSDT [17]	1.3890	5.8915	1.7197	1.0298	0.5346	0.4204
	Thai et Vo [29]	1.3890	5.8915	1.7197	1.0298	0.5346	0.4204
	Present	1.3656	5.8319	1.7315	1.0007	0.5477	0.5226
5	SSDT [17]	1.4356	6.1504	1.6104	1.0451	0.5031	0.4177
	Thai et Vo [29]	1.4356	6.1504	1.6104	1.0451	0.5031	0.4177
	Present	1.4084	6.0886	1.623	1.0145	0.5333	0.5094

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

6	SSDT [17]	1.4727	6.4043	1.5214	1.0536	0.4755	0.4227
	Thai et Vo [29]	1.4727	6.4043	1.5214	1.0536	0.4755	0.4227
	Present	1.4428	6.3368	1.5343	1.0218	0.5122	0.4894
7	SSDT [17]	1.5049	6.6547	1.4467	1.0589	0.4543	0.4310
	Thai et Vo [29]	1.5049	6.6547	1.4467	1.0589	0.4543	0.4310
	Present	1.4735	6.5851	1.4594	1.0262	0.4882	0.4667
8	SSDT [17]	1.5343	6.8999	1.3829	1.0628	0.4392	0.4399
	Thai et Vo [29]	1.5343	6.8999	1.3829	1.0628	0.4392	0.4399
	Present	1.5021	6.829	1.3953	1.0295	0.4637	0.4436
9	SSDT [17]	1.5617	7.1383	1.3283	1.0620	0.4291	0.4481
	Thai et Vo [29]	1.5617	7.1383	1.3283	1.0662	0.4291	0.4481
	Present	1.5292	7.0668	1.3403	1.0324	0.4402	0.4213
10	SSDT [17]	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
	Thai et Vo [29]	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
	Present	1.5552	7.2967	1.2935	1.0353	0.4184	0.4005
Métal	SSDT [17]	2.5327	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Thai et Vo [29]	2.5327	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Present	2.5119	2.8734	1.9139	1.2473	0.3083	0.2959

Le tableau 2.2 montre la comparaison de la flèche non dimensionnelle et des contraintes axiales ainsi que les contraintes de cisaillement obtenues par la théorie actuelle avec celles données par Thai et Vo [29] et par Zenkour [17] sur la base de la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDT). On peut voir que le nouveau modèle proposé donne des résultats très proches de la flèche ainsi que des contraintes axiales pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p , par contre nous remarquons une légère différence au niveau des contraintes de cisaillement.

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

Tableau 2.3 : Comparaison de la flèche non dimensionnelles et des contraintes de la plaque carrée sous charge répartie sinusoïdale.

p	Méthode	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
Céramique	HSDT [24]	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065	0.2132	0.2462
	Thai et Vo [29]	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065	0.2132	0.2462
	Present	0.2937	1.9769	1.3168	0.709	0.1583	0.1515
1	HSDT [24]	0.5889	3.0870	1.4894	0.6110	0.2622	0.2462
	Thai et Vo [29]	0.5889	3.0870	1.4894	0.6110	0.2622	0.2462
	Present	0.585	3.0556	1.4963	0.6124	0.2346	0.2246
2	HSDT [24]	0.7572	3.6094	1.3954	0.5441	0.2763	0.2265
	Thai et Vo [29]	0.7573	3.6094	1.3954	0.5441	0.2763	0.2265
	Present	0.7503	3.5681	1.405	0.5458	0.2702	0.2586
3	HSDT [24]	0.8372	3.8742	1.2748	0.5525	0.2715	0.2107
	Thai et Vo [29]	0.8377	3.8742	1.2748	0.5525	0.2715	0.2107
	Present	0.8268	3.8244	1.2865	0.5546	0.2827	0.2706
4	HSDT [24]	0.8810	4.0693	1.1783	0.5667	0.2580	0.2029
	Thai et Vo [29]	0.8819	4.0693	1.1783	0.5667	0.2580	0.2029
	Present	0.8675	4.0130	1.1915	0.5691	0.2822	0.2701
5	HSDT [24]	0.9108	4.2488	1.1029	0.5755	0.2429	0.2017
	Thai et Vo [29]	0.9118	4.2488	1.1029	0.5755	0.2429	0.2017
	Present	0.8948	4.1879	1.1168	0.5781	0.2747	0.2629
6	HSDT [24]	0.9345	4.4244	1.0417	0.5803	0.2296	0.2041
	Thai et Vo [29]	0.9356	4.4244	1.0417	0.5803	0.2296	0.2041
	Present	0.9168	4.3605	1.0558	0.5831	0.2636	0.2523
7	HSDT [24]	0.9552	4.5971	0.9903	0.5834	0.2194	0.2081
	Thai et Vo [29]	0.9562	4.5971	0.9903	0.5834	0.2194	0.2081
	Present	0.9364	4.5313	1.0042	0.5862	0.2512	0.2404
8	HSDT [24]	0.9741	4.7661	0.9466	0.5856	0.2121	0.2124
	Thai et Vo [29]	0.9750	4.7661	0.9466	0.5856	0.2121	0.2124
	Present	0.9554	4.6991	0.9601	0.5885	0.2385	0.2283

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

9	HSDT [24]	0.9917	4.9303	0.9092	0.5875	0.2072	0.2164
	Thai et Vo [29]	0.9925	4.9303	0.9092	0.5875	0.2072	0.2164
	Present	0.972	4.8626	0.9222	0.5905	0.2264	0.2167
10	HSDT [24]	1.0083	5.0890	0.8775	0.5894	0.2041	0.2198
	Thai et Vo [29]	1.0089	5.0890	0.8775	0.5894	0.2041	0.2198
	Present	0.9885	5.0285	0.8900	0.5923	0.2151	0.2059
Métal	HSDT [24]	1.6071	1.9955	1.3121	0.7065	0.2132	0.2462
	Thai et Vo [29]	1.6070	1.9955	1.3121	0.7065	0.2132	0.2462
	Present	1.5946	1.9769	1.3168	0.7090	0.1583	0.1515

Le tableau 2.3 montre la comparaison de la flèche non dimensionnelles et des contraintes de la plaque carrée en FGM soumise à une charge répartie de façon sinusoïdale. Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par Benyoucef et al. [24] sur la base de la théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique (HSDT) et avec celles de Thai et Vo [29]. Nous pouvons voir qu'un bon accord est obtenu pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p sauf pour les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} dans les quelles nous pouvons constater une différence qui peut être expliqué par l'influence de la fonction de cisaillement utilisée dans cette théorie et qui est différente à celles fournies par Benyoucef et al. [24] et Thai et Vo [29].

Pour mieux analyser la flexion de la plaque en FGM nous avons illustrer l'exactitude de la théorie actuelle pour un large éventail d'indice de puissance p et de rapport d'épaisseur, a/h .

Les variations de la flèche non dimensionnelle \bar{w} en fonction de l'indice de puissance p et du rapport d'épaisseur a/h sont illustrés dans les figures : Fig.2.2, Fig.2.3, Fig.2.4, et Fig.2.5.

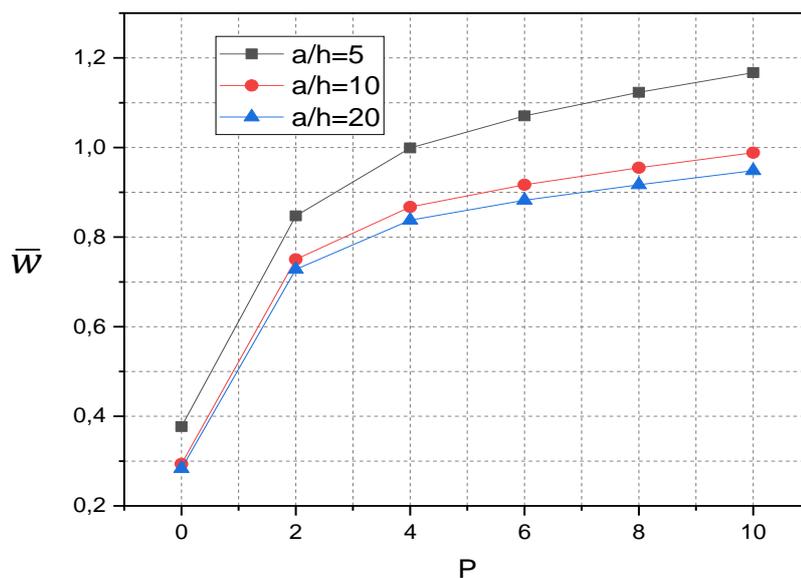


Fig.2.2 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie sinusoïdale par rapport à l'indice de puissance p .

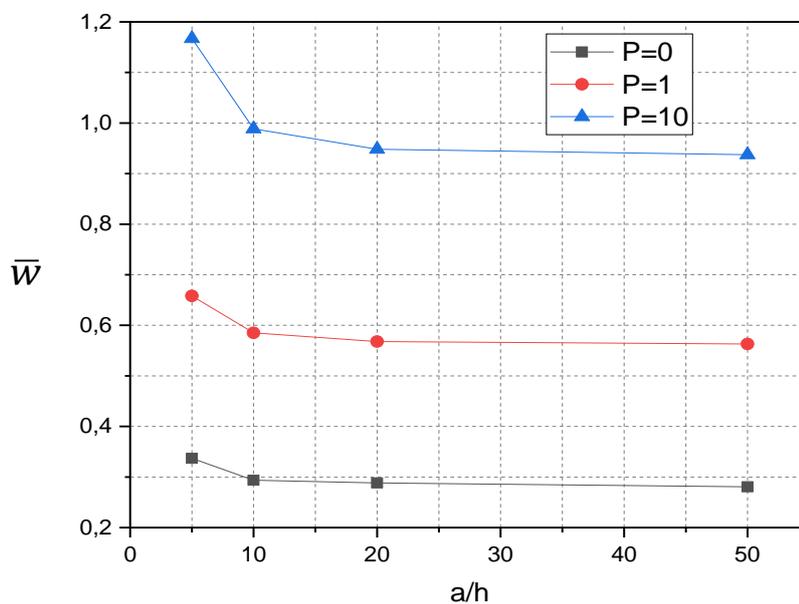


Fig.2.3 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie sinusoïdale par rapport d'épaisseur a/h

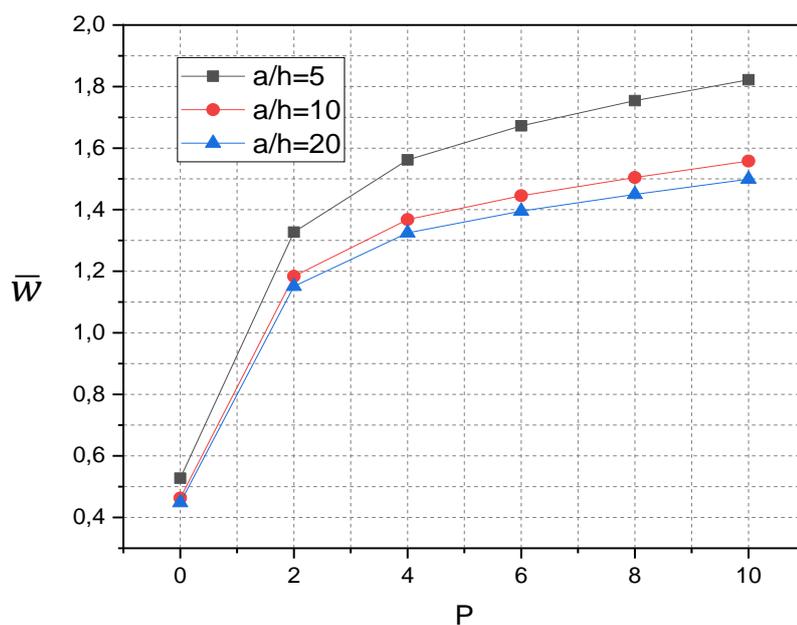


Fig.2.4 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie uniforme par rapport à l'indice de puissance p .

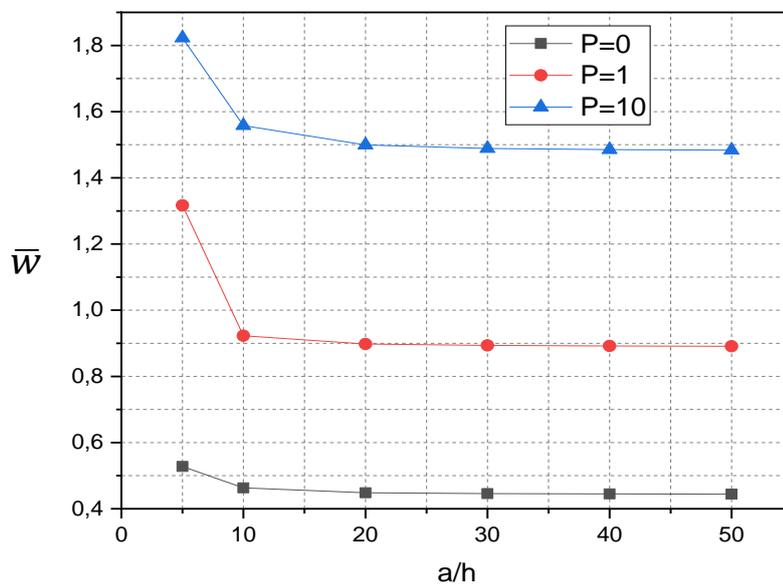


Fig.2.5 Comparaison de la variation de la flèche non dimensionnelle \bar{w} de plaque carrée sous charge répartie uniforme par rapport au rapport d'épaisseur a/h

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

D'après les graphes précédant nous pouvons conclure que pour les plaques carrées en FGM soumises à une charge répartie de façon sinusoïdale la flèche diminue lorsque le rapport d'épaisseur augmente et elle devient plus importante avec l'accroissement de l'indice de puissance p , c'est-à-dire lorsqu'il se rapproche de la zone métallique où la plaque est plus ductile. On peut voir que les allures des graphes dans le cas d'une charge uniformément répartie sont presque identiques à ceux de la charge sinusoïdale, mais la flèche de la plaque est plus importante que dans le cas de la charge sinusoïdale.

2.3.2 Problème de flambement

L'analyse du flambement est présentée dans la présente étude pour des plaques en FGM soumises à des charges dans le plan, nous avons étudié deux géométries différentes, plaque carrée et plaque rectangulaire, comme nous avons pris une plaque isotrope pour pouvoir comparer les résultats avec ceux de Tai et Vo [29] ainsi que ceux trouvés par les deux théories FSDT [40] et TSDT [40].

Tableau 2.4 Comparaison de la charge critique du flambement non dimensionnelle \hat{N} de plaques isotropes sous différents types de chargement. ($p=0$).

a /b	h/b	Méthode	Type de chargement (γ_1, γ_2)		
			(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)
1	0,1	FSDT [40]	3.7865	3.7865	1.8932
		TSDT [40]	3.7866	3.7866	1.8933
		Thai et Vo [29]	3.7869	3.7869	1.8934
		Present	3.8162	3.8161	1.9081
	0,2	FSDT [40]	3.2637	3.2637	1.6319
		TSDT [40]	3.2653	3.2653	1.6327
		Thai et Vo [29]	3.2665	3.2665	1.6332
		Present	3.3260	3.3260	1.6630
	0,3	FSDT [40]	2.6533	2.6533	1.3266
		TSDT [40]	2.6586	2.6586	1.3293
		Thai et Vo [29]	2.6612	2.6612	1.3306
		Present	2.7099	2.7099	1.3550
0,4	FSDT [40]	1.9196	1.9196	1.0513	
	TSDT [40]	1.9550	1.9550	1.0567	
	Thai et Vo [29]	1.9651	1.9651	1.0586	
	Present	2.4758	2.4758	1.0708	

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

1,5	0,1	FSDT [40]	4.0250	2.0048	1.3879
		TSDT [40]	4.0253	2.0048	1.3879
		Thai et Vo [29]	4.0258	2.0049	1.388
		Present	4.0667	2.0169	1.3963
	0,2	FSDT [40]	3.3048	1.7941	1.2421
		TSDT [40]	3.3077	1.7946	1.2424
		Thai et Vo [29]	3.3096	1.7950	1.2427
		Present	3.3825	1.8261	1.2642
	0,3	FSDT [40]	2.5457	1.5267	1.0570
		TSDT [40]	2.5545	1.5285	1.0582
		Thai et Vo [29]	2.5578	1.5295	1.0588
		Present	2.6233	1.5690	1.0863
	0,4	FSDT [40]	1.9196	1.2632	0.8745
		TSDT [40]	1.9421	1.2670	0.8772
		Thai et Vo [29]	1.9473	1.2686	0.8782
		Present	2.0083	1.3108	0.9074
2	0,1	FSDT [40]	3.7865	1.5093	1.2074
		TSDT [40]	3.7866	1.5093	1.2075
		Thai et Vo [29]	3.7869	1.5094	1.2075
		Present	3.8162	1.5175	1.2139
	0,2	FSDT [40]	3.2637	1.3694	1.0955
		TSDT [40]	3.2654	1.3697	1.0958
		Thai et Vo [29]	3.2666	1.3700	1.0960
		Present	3.3260	1.3936	1.1149
	0,3	FSDT [40]	2.5726	1.1862	0.9490
		TSDT [40]	2.5839	1.1873	0.9498
		Thai et Vo [29]	2.5882	1.1879	0.9503
		Present	2.6869	1.2243	0.9794
	0,4	FSDT [40]	1.9034	0.9991	0.7992
		TSDT [40]	1.9230	1.0015	0.8012
		Thai et Vo [29]	1.9292	1.0025	0.8020
		Present	2.1416	1.0511	0.8409

Le tableau 2.4 montre les charges de flambement non dimensionnelles \hat{N} de la plaque isotrope ($\nu=0$) soumis à différents types de charge pour différentes valeurs de rapport d'aspect a/b et rapport d'épaisseur h/b . Les résultats obtenus sont comparés à ceux de Shufrin et Eisenberger [40] sur la base de la FSDT et de la TSDT. Une légère différence est trouvée pour tous les cas allant de plaques moyennement épaisses à très épaisses pour le cas carré est rectangulaire.

L'analyse du flambement de la plaque en FGM est illustrée dans le graphe II.6 pour un indice de puissance $p=1$, pour une plaque isotrope en céramique et en métal par rapport au rapport d'épaisseur a/h .

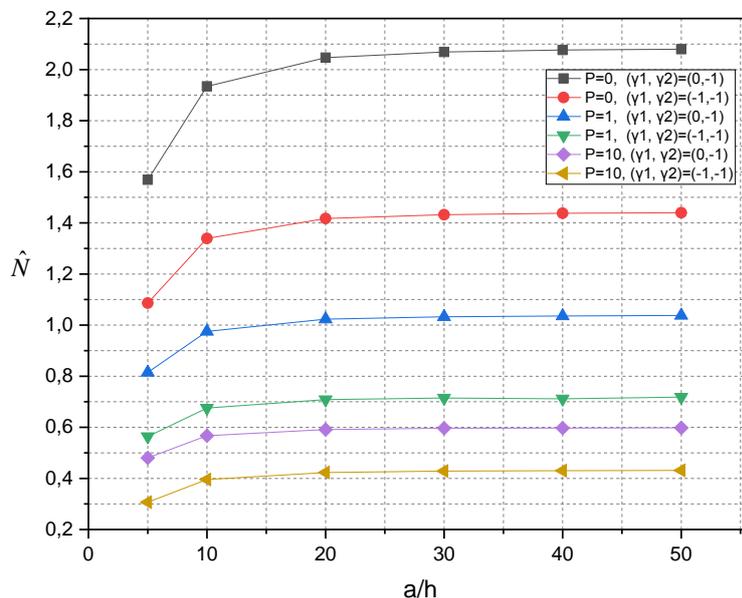


Fig.2.6 Comparaison de la variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle \hat{N} de plaque rectangulaire sous compression biaxiale par rapport au rapport d'épaisseur a/h .

Les variations de la charge critique de flambement non dimensionnelle \hat{N} en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour une plaque carrée en FGM sous compression biaxiale croît avec l'augmentation de a/h jusqu'à la valeur de $a/h=20$ ensuite on remarque que la charge critique de flambement devient constante, par ailleurs on peut remarquer que la charge critique du flambement est plus importante pour de faible valeur d'indice de puissance p et l'effet de la compression biaxiale est plus importante dans le cas où γ_1 est nul.

2.3.3 Problème de vibration libre :

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la variation de la fréquences fondamentales non dimensionnelles sous l'influence de l'indice de puissance P , Le mode (m, n) et le rapport géométrique a/h .

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

Tableau 2.5 : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de la plaque carrée

a/h	Méthode	Indice de puissance p				
		0	0.5	1	4	10
5	FSDT [12]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	HSDT [41]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Thai et Vo [29]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1377	0.1300
	Present	0.2113	0.2128	0.1642	0.1402	0.1328
10	FSDT [12]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	HSDT [41]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Thai et Vo [29]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Present	0.0579	0.0443	0.0443	0.0383	0.0367
20	FSDT [12]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	HSDT [41]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Thai et Vo [29]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Present	0.0148	0.0148	0.0113	0.0098	0.0094

Dans le tableau 2.5 nous avons analysé la fréquence fondamentale non dimensionnelles $\hat{\omega}$ d'une plaque carrée en FGM pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur et d'indice P. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par et Hosseini-Hashemi et al. [12] sur la base de FSDT et Hosseini-Hashemi et al. [41] sur la base de TSDT. Il est observé qu'il y a un excellent accord entre les résultats prédits par la théorie actuelle.

Tableau 2.6 : Comparaison des quatre premières fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ de plaque rectangulaire ($b = 2a$).

a/h	Mode(m,n)	Méthode	Indice de puissance p						
			0	0,5	1	2	5	8	10
5	(1,1)	FSDT [11]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		TSDT [12]	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		Thai et Vo [29]	3.4416	2.9350	2.6478	2.3948	2.2260	2.1688	2.1403
		Present	3,4618	2,9146	2,6180	2,3612	2,2172	2,1714	2,1445
	(1,2)	FSDT [11]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		TSDT [12]	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Thai et Vo [29]	5.2822	4.5187	4.0787	3.6804	3.3914	3.2947	3.2506
		Present	5,0010	4,3187	3,9465	3,6093	3,3227	3,2040	3,1443

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

5	(1,3)	FSDT [11]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		TSDT [12]	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Thai et Vo [29]	8.0772	6.9384	6.2678	5.6391	5.1378	4.9727	4.9044
		Present	6,7739	5,9066	5,4085	4,9208	4,4554	4,2557	4,1676
	(2,1)	FSDT [11]	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		TSDT [12]	10.1164	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954
		Thai et Vo [29]	10.1201	8.7167	7.8787	7.0756	6.4010	6.1806	6.0942
		Present	10,27	8,7974	7,9332	7,1472	6,6175	6,4334	6,3387
10	(1,1)	FSDT [11]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		TSDT [12]	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Thai et Vo [29]	3.6519	3.0991	2.7937	2.5364	2.3912	2.3408	2.3108
		Present	3,6491	3,0884	2,7660	2,4978	2,3659	2,3267	2,3000
	2(1,2)	FSDT [11]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		TSDT [12]	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368
		Thai et Vo [29]	5.7697	4.9016	4.4194	4.0089	3.7673	3.6839	3.6365
		Present	5,6717	4,8374	4,3835	3,9982	3,7551	3,6558	3,6036
	(1,3)	FSDT [11]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		TSDT [12]	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575
		Thai et Vo [29]	9.1887	7.8194	7.0519	6.3885	5.9742	5.8324	5.7566
		Present	8,6132	7,4600	6,8706	6,3496	5,8713	5,6362	5,5189
	(2,1)	FSDT [11]	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		TSDT [12]	11.8315	10.0810	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
		Thai et Vo [29]	11.8326	10.0818	9.0940	8.2306	7.6696	7.4787	7.3808
		Present	11,8991	10,1069	9,0949	8,2281	7,7426	7,5804	7,4836
20	(1,1)	FSDT [11]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		TSDT [12]	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Thai et Vo [29]	3.7123	3.1458	2.8353	2.5771	2.4401	2.3922	2.3618
		Present	3,7116	3,1335	2,8086	2,5376	2,4096	2,3772	2,3465
	(1,2)	FSDT [11]	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		TSDT [12]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		Thai et Vo [29]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8881	3.8105	3.7621
		Present	5,8928	5,0049	4,5234	4,1227	3,8973	3,8119	3,7596
	(1,3)	FSDT [11]	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		TSDT [12]	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Thai et Vo [29]	9.5671	8.1135	7.3133	6.6432	6.2753	6.1471	6.0688
		Present	9,3910	8,0695	7,403	6,8469	6,4168	6,2024	6,0862

Chapitre 2 : Modélisation Analytique, Résultats Et Discussions

20	(2,1)	FSDT [11]	12.4560	10.566	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		TSDT [12]	12.4562	10.567	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909
		Thai et Vo [29]	12.4565	10.568	9.5263	8.6508	8.1624	7.9925	7.8905
		Present	12,4766	10,562	9,4984	8,6074	8,1506	8,0011	7,9043

Dans le tableau 2.6 nous avons vérifié les modes de vibration d'ordre supérieur (m,n), les quatre premières fréquences non dimensionnelles $\hat{\omega}$ sont calculer pour les plaques rectangulaires où $b=2a$ avec un rapport d'épaisseur a/h qui varie de 5 à 20 et un indice de puissance de 0 à 10. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la théorie de Hosseini-Hashemi [11] et al, et ceux de la TSDT [12] et de Thai et Vo [29]. Nous pouvons noter qu'une excellente concordance entre les résultats est observée pour tous les modes de vibration des plaques minces à épaisses et cela confirme la précision de la théorie proposée dans ce projet.

Les variations de fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de plaque carrée par rapport à l'indice de puissance p et le rapport d'épaisseur a/h sont comparés dans les figures 2.7 et 2.8, respectivement. Et les variations de la fréquence non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaque rectangulaire par rapport à l'indice de puissance p et le rapport d'épaisseur a/h sont comparés dans la figure 2.9.

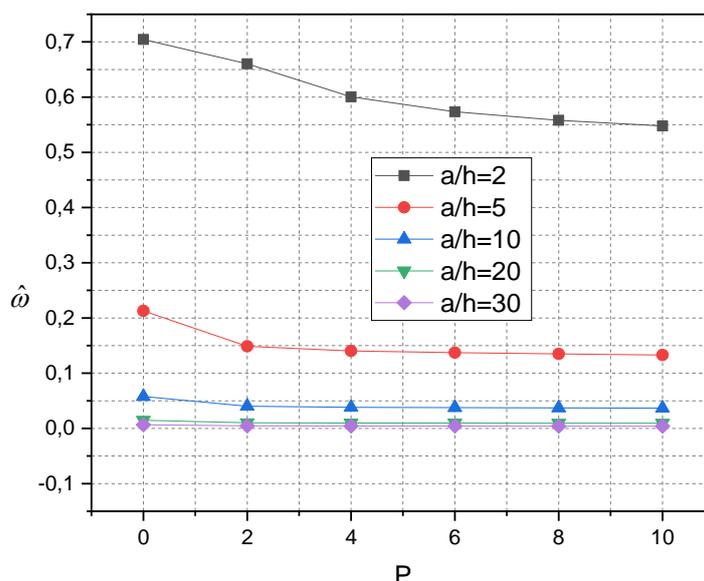


Fig.2.7 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de la plaque carrée par rapport à l'indice de puissance p .

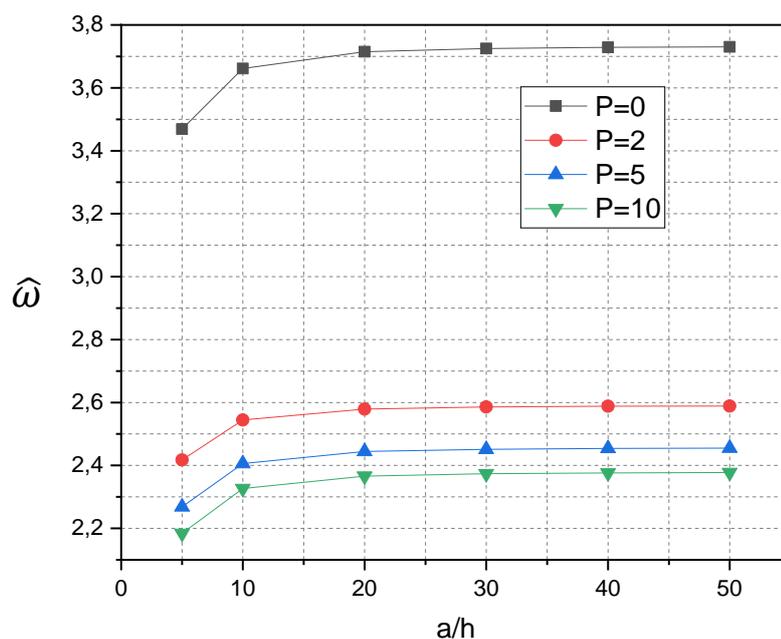


Fig.2.8 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de la plaque carrée par rapport au rapport d'épaisseur a/h .

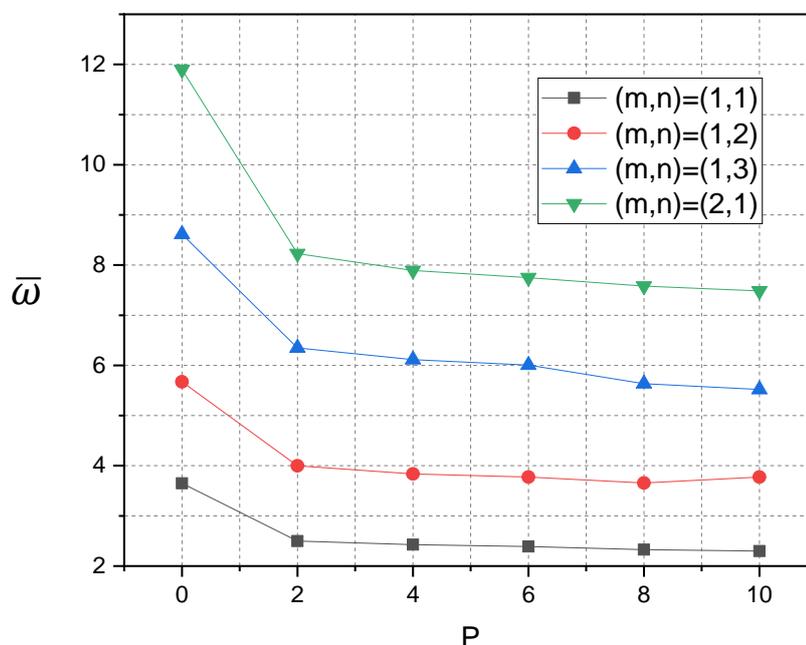


Fig.2.9 Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque rectangulaire par rapport à l'indice de puissance p pour différent mode (m,n) .

Dans la figure 2.7 il est observé que les fréquences non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de la plaque carrée et plus importante pour des rapports d'épaisseur faibles et elle diminue avec la décroissance de l'indice de puissance p pour se stabiliser au-delà de la valeur de $p=6$.

D'autre part nous remarquons que pour des valeurs de a/h dépassant la valeur de 20 la fréquence devient constante.

La figure 2.8 montre que l'indice de puissance possède un effet dominant sur la diminution de la fréquences non dimensionnelle $\hat{\omega}$, comme on peut observer que cette fréquence prend la valeur la plus importante lorsque $p=0$ où la plaque est entièrement céramique ce qui augmente sa rigidité.

Sur la figure 2.9 nous pouvons voir la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque rectangulaire par rapport à l'indice de puissance p pour différent mode (m,n) , il est à noter que la fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance p et elle prend la valeur maximal dans le mode $(2,1)$.

2.4 Conclusion :

Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal a été développée pour étudier la flexion, le flambage et les vibrations des plaques FGM. Cette théorie, contrairement à la théorie classique, présente des similitudes importantes avec le CPT (Classical Plate Theory) en termes d'équations du mouvement, de conditions limites et d'expressions des contraintes. Les équations du mouvement sont dérivées à partir du principe de Hamilton, et des solutions fermées ont été obtenues pour les plaques simplement supportées. L'exactitude de cette nouvelle théorie a été vérifiée par comparaison avec d'autres théories de déformation de cisaillement qui contiennent cinq inconnues. Les résultats montrent que la flèche, les contraintes, les charges de flambage et les fréquences naturelles prédites par la nouvelle théorie avec seulement quatre inconnues se rapproche à celles prédites par les autres théories. Cette nouvelle théorie présente plusieurs avantages pratiques, elle est simple et rapide car elle ne nécessite que quatre inconnues.

Conclusion Générale

Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal est développée pour la flexion, le flambage et les vibrations des plaques de FG. Contrairement à la théorie classique de la déformation par cisaillement sinusoïdal, la théorie proposée de la déformation par cisaillement sinusoïdal ne contient que quatre inconnues et présente de fortes similitudes avec le CPT sous de nombreux aspects tels que les équations du mouvement, les conditions limites et les expressions résultantes des contraintes. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Des solutions fermées sont obtenues pour des plaques simplement supportées. L'exactitude de la théorie proposée a été vérifiée pour les analyses de flexion, de flambage et de vibrations libres des plaques FG. Toutes les études comparatives montrent que la déviation, la contrainte, la charge de flambage et la fréquence naturelle obtenues par la théorie proposée avec quatre inconnues sont presque identiques à celles prédites par d'autres théories de déformation de cisaillement contenant cinq inconnues. Parmi les utilités pratiques de cette théorie c'est qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un facteur de correction de cisaillement et que la théorie est simple et rapide en raison de l'implication de seulement quatre inconnues. En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est efficace pour prédire les réactions de flexion, de flambement et très précise pour la vibration des plaques en FGM.

Références

- [1] Derkaoui Fatima Zohra, Gorine Somia , Analyse des contraintes d'une plaque FGM avec des couches de surface piézoélectriques par la théorie de déformation en cisaillement, Master ,2018/2019.
- [2] R. Javaheri, M.R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *J. Appl. Math. Mech.* 82 (4) (2002) 277–283.
- [3] D.G. Zhang, Y.H. Zhou, A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Comput. Mater. Sci.* 44 (2) (2008) 716–720.
- [4] M. Mohammadi, A.R. Saidi, E. Jomehzadeh, Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Appl. Compos. Mater.* 17 (2) (2010) 81–93.
- [5] M. Bodaghi, A.R. Saidi, Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation, *Arch. Appl. Mech.* 81 (6) (2011) 765–780.
- [6] L. Della Croce, P. Venini, Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193 (9–11) (2004) 705–725.
- [7] M. Ganapathi, T. Prakash, N. Sundararajan, Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads, *J. Eng. Mech.* 132 (8) (2006) 902–905.
- [8] X. Zhao, K.M. Liew, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (33–36) (2009) 2796–2811.
- [9] X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *J. Sound Vib.* 319 (3–5) (2009) 918–939.
- [10] Y.Y. Lee, X. Zhao, J.N. Reddy, Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 199 (25–28) (2010) 1645–1653.
- [11] S. Hosseini-Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan, M. Omid, Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory, *Appl. Math. Model.* 34 (5) (2010) 1276–1291.
- [12] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates, *Int. J. Mech. Sci.* 53 (1) (2011) 11–22.

- [13] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47 (1–3) (2000) 663–684.
- [14] M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Struct.* 40 (6) (2003) 1525–1546.
- [15] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses, *Int. J. Solids Struct.* 42 (18–19) (2005) 5224–5242.
- [16] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct.* 42 (18–19) (2005) 5243–5258.
- [17] A.M. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Appl. Math. Model.* 30 (1) (2006) 67–84.
- [18] J.R. Xiao, R.C. Batra, D.F. Gilhooley, J.W. Gillespie Jr, M.A. McCarthy, Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 196 (4–6) (2007) 979–987.
- [19] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Compos. Struct.* 82 (4) (2008) 499–512.
- [20] S. Pradyumna, J.N. Bandyopadhyay, Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation, *J. Sound Vib.* 318 (1–2) (2008) 176–192.
- [21] M.E. Fares, M.K. Elmarghany, D. Atta, An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 91 (3) (2009) 296–305.
- [22] M. Talha, B.N. Singh, Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory, *Appl. Math. Model.* 34 (12) (2010) 3991–4011.
- [23] M. Talha, B.N. Singh, Thermo-mechanical buckling analysis of finite element modelled functionally graded ceramic-metal plates, *Int. J. Appl. Mech.* 3 (4) (2011) 867–880.
- [24] S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi, A. Fekrar, H. Ait Atmane, E.A. Adda Bedia, Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations, *Mech. Compos. Mater.* 46 (4) (2010) 425–434.
- [25] H.A. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, *Int. J. Mech. Mater. Design* 6 (2) (2010) 113–121.
- [26] N.E. Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *Int. J. Mech. Sci.* 53 (4) (2011) 237–247.

- [27] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C. Guedes Soares, Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory, *Compos. Struct.* 94 (2) (2012) 714–723.
- [28] S. Xiang, Y.-x. Jin, Z.-y. Bi, S.-x. Jiang, M.-s. Yang, A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates, *Compos. Struct.* 93 (11) (2011) 2826–2832.
- [29] H.T. Thai, T.P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 3269–3281.
- [30] F.Zaoui, D. Ouinas, A. Tounsi, New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations, *Composites Part B* 159 (2019) 231–247.
- [31] P. Hairy TM, Les matériaux à gradient de fonction, métalblog, 1 février 2021
- [32] Anuruddh Kumar, Anshul Sharma, Rahul Vaish1, Rajeev Kumar and Satish Chandra, A numerical study on anomalous behavior of piezoelectric response in functionally graded materials, *Journal of Materials Science* volume 53, pages 2413–2423 (2018).
- [33] Benadouda Mourad, Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement graduée, Thèse de doctorat (2018/2019)
- [34] Rahmoun Yasmine, Yagoubi Zohra, Effet de la température sur les matériaux FGM en utilisant la théorie de déformation non local, Master (2019/2020)
- [35] R.Abderrahman, D.Ouinas, A.Lousdad, F.Zaoui et al. Mechanical behavior and free vibration analysis of FG doubly curved shells on elastic foundation via a new modified displacements field model of 2D and quasi-3D HSDTs, *Thin-Walled Structures* 172 (2022) 108783
- [36] Messaoudi Khalid, Implémentation des lois de comportement des matériaux graduels (FGMs) dans un code de calcul, Thèse de doctorat (2017/2018)
- [37] Ellali Mokhtar, Analyse du flambement thermique des matériaux FGM piézoélectriques, Thèse de doctorat (2018/2019)
- [38] Slimani Bachir, Ghemima Mohammed, Étude numérique de comportement mécanique des plaques isotropes et stratifiées en utilisant une formulation en éléments finis basée sur la théorie de premier ordre, Master (2019/2020)
- [39] Reddy JN. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*: John Wiley & Sons Inc; 2002.
- [40] I. Shufrin, M. Eisenberger, Stability and vibration of shear deformable plates-first order and higher order analyses, *Int. J. Solids Struct.* 42 (3-4) (2005) 1225 – 1251

[41] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure, *Compos. Struct.* 93 (2) (2011) 722-735.