Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

MENAD Imane

Étude d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaires

Soutenu le 22 juin 2022 *devant le jury composé de :*

Président :	OULD ALI BELMOUHOUB Soumia	MCB	UMAB
Examinateur :	KAID Mohammed	MCB	UMAB
Encadreur :	BEDDANI Moustafa	MCB	ENSM
Co-Encadreur :	FETTOUCH Houari	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah pour la santé, l'intelligence et le courage qu'il m'accordé tout au long de mon cursus, en particulier durant la période de réalisation de ce projet.

Je voudrais dans un premier temps remercier d'avoir accepté de m'encadrer dans cette étude Mrs BEDDANI Moustafa et FETTOUCH Houari pour leurs patiences , leurs disponibilités et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribuer à alimenter ma réflexion.

Je remercie également Mr KAID MOHAMED et Mme OULD ALI BEL-MOUHOUB Soumia qui ont accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse.

Enfin, je remercie mes amis(es) qui ont toujours été là pour moi, leurs soutiens inconditionnel et leurs encouragements m'ont été d'une grande aide.

Á tous ceux-ci, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

*****Merci à tous*****

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
Mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leurs amours, leurs tendresses, leurs soutiens et leurs prières tout au long de mes études, que Dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes chères sœurs, frères :
Aucune dédicace ne sauvait exprimer assez profonds ce que je ressens envers vous.

Je vous dirai tout simplement, un grand merci, je vous aime. À mes frères d'amours surtout mon frère Fathi et mon ange Ali et mes adorables soeurs.

À mes chères amies :

En témoignage de l'amitié sincere qui nous a liés et des bons moments passes ensemble. Je vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux et plein de bonnes promesses.

Particulièrement :

Miloudi hayat et Slimani Mohamed

BERROUACHEDI Abd Elhak et BEN CHOHRA Kheira

En souvenir de nos éclats de rire des bons moments et des nuits blanches.

À Mr BAHRI Sidi Ahmed pour m'avoir encouragé a terminer mon parcours scolaire malgré la détérioration de ma santé.

MENAD Imane

ملخص

*في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة نظرية الوجود لبعض أنواع المعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية عبر مشتق **هيلفر او ريمان-ليوفيل** معينة. الطريقة المستعملة لإثبات هذا الوجود تعتمد على نظرية النقطة الثابتة (**داربو** مقترنة بقياس عدم التراص **لكراوشكي و انكماش بناخ**).*

الكلمات و الجمل الافتتاحية : *المعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية، نظرية الوجود، مشتق **هيلفر او ريمان-ليوفيل**، التكامل ذو رتبة كسرية، النقطة الثابتة، فضاء بناخ، قياس عدم تراص **لكراوشكي**.*

Abstract

*In this paper, we present several existence results for certain classes of differential equations of fractional order via the **Hilfer or Riemann-Liouville derivatives** under certain conditions .These results used to prove existence is based on the **fixed point** theory (**Darbo** combined with the mesure of non-compactness of **Kuratowski** and **Banach contraction**).*

Key words and phrases: *fractional differential equations, existence of solutions,* Hilfer *and* Riemann-Liouville *fractional derivatives, the fractional order integral, fixed point, Banach space,measure of non-compactness of* Kuratowski .

Résumé

*Dans ce mémoire, nous présentons l'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de la dérivé de **Hilfer** ou **Reimann-Liouville** avec des conditions particulières.La méthode utilisée pour prouver l'existence dépend de la théorie de point fixe (**Darbo** combiné avec la mesure de non compacité de **Kuratowski** et la **contraction de Banach**).*

Phrases et mots clés *: Équations différentielles fractionnaires, existence des solutions, dérivée fractionnaire de type Hilfer ou Riemann-Liouville, intégrale fractionnaire, point fixe, espaces de Banach, mesure de non compacité* de Kuratowski.

Table des matières

★Index des notations★

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail :

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifes.
$\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$: Ensemble des nombres naturels à l'exclusion zéro.
$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.
$C^0([a,b]) \equiv C([a,b])$: Espace des fonctions f continues sur$[a,b]$à valeur réels.
$AC([a,b])$: Espace de fonctions absolument continues sur $[a,b]$

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \phi \in L^1([a,b])) \quad \text{telle que} \;\; f(x) = c + \int_a^x \phi(t)dt, \text{ pour p. p. } x \in [a,b].$$

Fonctions :

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.
I_a^α : Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
$\mathrm{B}(.,.)$: La fonction Bêta.
${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.

Abréviations :

R-L : Riemann-Liouville
M-L : Mittag-Leffler.

Introduction général

Le calcul fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ses origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle, l'époque où **Isaac Newton** et **Gottfried Wihelm Leibniz** ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt}$ pour désigne là n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathrm{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\dfrac{d^n f}{dt}$ si $n = \dfrac{1}{2}$?
"Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles" [Oldham et Spanier, 1974 [18]. Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695 , est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Récemment, il y a nombreuses de dérivée fractionnaires qui ont été introduites. On cite par exemple les dérivations fractionnaires suivantes : dérivée de **Riemann-Liouville, de Caputo et de Hilfer** [22, 13, 25].

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers types d'équations, la théorie de point fixe est le cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires [3, 2, 10].

Il y a deux mesures qui sont les plus importantes. la mesure de non-compacité de Kuratowski et celle de Hausdorff. Plusieurs auteurs ont utilisé la technique de la mesure de non-compacité dans les espaces de Banach pour prouver le résultat d'existence de certains problèmes différentiels, voir, par exemple, les livres [6, 11] et leurs références.

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les divers sciences appliquées (la biologie, la biophysique et le génie biologique) sont représentés par des équations différentielles fractionnaires [19, 14].

Organisation et présentation du mémoire

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre 1 regroupe les définitions des concepts utilisés tout au long de ce mémoires, nous introduisons quelques notions importantes pour le calcul fractionnaire, la mesure de noncompacité et la théorie du point fixe.

Le chapitre 2 présente l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle avec condition initiale passant par la dérivée de Hilfer de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) = f(x,y), \quad x > a, \\ I_{a^+}^{1-\gamma} y(a^+) = y_a, \quad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta. \end{cases}$$

Le chapitre 3 est consacré à l'étude le résultat d'existence du problème différentiel fractionnaire sur un intervalle non borné dans un espace de Banach qui est de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in J = [0,\infty), \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ u(0) = 0, \quad D_{0^+}^{\alpha-1} u(\infty) = u_\infty. \end{cases}$$

CHAPITRE 1

Outils de base

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utiliserons dans la suite de ce travail [20] [22] [23] [17] [25].

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est une fonction prolonge la factorielle aux nombre réelles.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \tag{1.1.1}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.1.2. Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0, \tag{1.1.2}$$

en effet, $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha+1-1}dt$.
Pour $0<a<b$ et en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t}t^{\alpha+1-1}dt &= \int_a^b e^{-t}t^{\alpha}dt,\\ &= \left(-t^{\alpha}e^{-t}\right]_a^b + \alpha\int_a^b e^{-t}t^{\alpha-1}dt,\\ &= \frac{a^{\alpha}}{e^{a}} - \frac{b^{\alpha}}{e^{b}} + \alpha\int_a^b e^{-t}t^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

Si $a\to 0^{+}$et $b\to+\infty$ on trouve :

$$\Gamma(\alpha+1)=0-0+\alpha\Gamma(\alpha).$$

Proposition 1.1.3. La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{1.1.3}$$

Raisonnons le par récurrence si $n=0$ alors :

$$\Gamma(0+1)=\Gamma(1)=1=0!.$$

Supposons que la formule est vrai pour $n-1$ i.e

$$\Gamma((n-1)+1)=\Gamma(n)=(n-1)!,$$

et montrons qu'elle est vrai pour n . D'après l'équation (1.1.2), on trouve

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!.$$

On peut calculer aussi

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt,\\ &= \left(-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=0+1=1,\end{aligned}$$

et selon le dernier résultat, on a

$$\Gamma(2)=1,\ \Gamma(1)=1,\quad \Gamma(3)=2,\quad \Gamma(4)=6.$$

Démontrons maintenant que

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

Par définitions, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(1/2)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Soient $0 < a < b$, d'après un changement de variable

$$\int_a^b e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-z^2} 2dx,$$

où

$$\begin{cases} x = t^{1/2} \\ dx = (1/2) t^{-1/2} dt. \end{cases}$$

Si $a \longrightarrow 0^+$et $b \longrightarrow +\infty$, alors nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

il est clair que

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(z+y)^2} dx dy.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement parce que $e^{-(x)^2} > 0$, alors $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

En se servant de ce important résultat et la relation fonctionnelle (1.1.2) , on voit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Remarques 1.1.4. D'après le résultat (1.1.2) et en utilisant le raisonnement par récurrence, on déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x\cdot(x+1)\dots(x+n-1)},$$

cette relation permet de définir $\Gamma(x)$ pour x réel négatif tel que $-n < x < -n+1$. On a ainsi défini $\Gamma(x)$ pour tout nombre réel x.

Dans notre cas pour $n = [\alpha]+1$, nous avons, $0 < n-\alpha < 1$, ce qui signifie que $-n < -\alpha < -n+1$ et selon la convention ci-dessus, on aura

$$\Gamma(-\alpha) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(-\alpha)\cdot(-\alpha+1)\dots(-\alpha+n-1)}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta(ou fonction d'Euler de premier espèce) est définie par :

$$B : (p,q) \longrightarrow \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau, \tag{1.1.4}$$

tels que : $p > 0$ et $q > 0$.

Proposition 1.1.5. La fonction Bêta satisfait les propriétés suivantes :

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $pB(p,q+1) = qB(p+1,q)$ et $B(p,1) = \frac{1}{p}$.

1.1.3 La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

Proposition 1.1.6. *La fonction Bêta est relié à la fonction Gamma par :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.1.5}$$

Preuve .

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{q-1}dy\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy.\end{aligned}$$

Utilisons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x/(x+y), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv, \\ y = u(1-v), \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u,$$

alors,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} (uv)^{\mathrm{p}-1}(u(1-v))^{q-1} e^{-u} |-u| du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} u^{\mathrm{p}+q-1} v^{\mathrm{p}-1}(1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\mathrm{p}+q-1} du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv\right) \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q).\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ où $\Gamma(p+q) \neq 0$. Si p, q sont des entiers naturels, on obtient :

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

∎

1.1.4 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.7. La fonction de Mittag-Leffler généralisée de deux paramètres est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par le développement en série entière :

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.1.6}$$

Pour $\beta = 1$, on obtient la fonction de $M - L$ dite d'un paramètre :

$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0). \tag{1.1.7}$$

1.1.5 Règle de Leibniz

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables en un point d'accumulation $x \in D$.

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t) + R_n^p(t),$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\zeta)(\tau-\zeta)^n d\zeta,$$

avec $\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$. Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ansi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t).$$

Définition 1.1.8. règle de dérivation de Leibniz définie par :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{b(t)} f(t,x)dx\right] = f(t,b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,x)dx.$$

Remarque 1.1.9. *pour une fonction f qui ne dépend que de la seconde variable, on retrouve bien le théorème fondamental de d'analyse en posant $b(t) = t$*

1.1.6 Espaces fonctionnels

[15]

Soit $0 \leq \gamma < 1$, On introduit les espace fonctionnels suivants

$$C_\gamma[a,b] = \{f(x) : (a,b] \to \mathbb{R} \mid (x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b]\}.$$

qui est un espace de Banach avec la norme,

$$||f||_{C_\gamma} = \sup_{x\in[a,b]} |(x-a)^\gamma f(x)|,$$

$$C_\gamma^n[a,b] = \{f \in C^{n-1}[a,b] : f^{(n)} \in C_\gamma[a,b]\}$$

qui est également un espace de Banach avec la norme

$$||f||_{C_\gamma^n} = \sum_{i=0}^{n-1} ||f^{(k)}||_\infty + ||f^{(n)}||_{C_\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En outre, $C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma[a,b]$.

1.2 Outils d'analyse fonctionnelle

Soient E, F deux espaces de Banach, on désigne par $C(E,F)$ l'espace de toutes les fonctions $f : E \to F$ continues.

1.2.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1.2.1. Soit M un sous ensemble de $C(E,F)$.

1.On dit que M est équicontinue en $u \in E$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|f(u) - f(v)\|_F < \epsilon,$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $v \in E$ vérifiant :

$$\|u - v\|_E < \eta.$$

2. On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $u \in E$. En particulier, si $E = [a,b]$ et $F = \mathbb{R}$. On dit que $M \in C(E,F)$ est équicontinue sur E si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in M, \forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Définition 1.2.2. Soit M un sous ensemble de $C(E,F)$.
On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq C \quad \forall f \in M.$$

Théorème 1.2.3. *Soit M une partie de $C([a,b])$ muni de la norme de la convergence uniforme.*
M est relativement compact dans $C([a,b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.

Définition 1.2.4. Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur. On dit que :

1. A est compact si l'image par A de tout borné de E est relativement compact (c'est-à-dire que son adhérence est compact) dans F.
2. A est complètement continu s'il est continu et compact.

Théorème 1.2.5. *(Théorème d'Arzela-Ascoli généralisé) Dans l'espace de Banach. Soient E un espace de Banach compacte et F un espace de Banach quelconque. Une partie M de $C(E,F)$ est relativement compact si et seulement si :*

— *M est équicontinue sur E.*
— *M uniformément bornée.*
— *$M(x) = \{f(x)/ f \in M\}$ est relativement compacte dans F,*

1.2.2 Principe des applications contractantes

Définition 1.2.6. Soit E un espace Banach. On dit qu'une application.
$T : E \longrightarrow E$ est contractante, s'il existe $0 < K < 1$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E : \| T(x) - T(y)\|_E \leqslant K\| x - y\|_E.$$

1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire

nous utiliserons dans la suite de ce travail les résultat de [19].

1.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale

$$I^{(1)} = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{1.3.1}$$

$$I^{(2)} f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau. \tag{1.3.2}$$

D'après le théorème du Fubini, on trouve;

$$I^{(2)} f(t) = \frac{1}{1!}\int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.3.3}$$

En répétant la même opération n fois, on obtient

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \ldots \cdot \int_a^{t_{n-1}} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$. Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-entiers, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.3.1. Soit $f \in L^1[a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f à droite de a est définie par

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ a < t < +\infty, \tag{1.3.4}$$

et on a : $I_{a_+}^0 f(t) = f(t)$ (i.e. $I_{a_+}^0$ est l'opérateur identité).

Remarque 1.3.2. Par un changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que $I_{a_+}^{\alpha}$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds, \tag{1.3.5}$$

Intégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. On pose $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $t > a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > -1$:

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^{\beta} d\tau.$$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$ où s varie de 0 à 1 et la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t-a-(t-a)s]^{\alpha-1} [s(t-a)]^{\beta} (t-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 s^{\beta} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \beta(B+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc,

$$I_{a_+}^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.3.6}$$

Pour $a = 0$, on a

$$I_{0_+}^{\alpha} t^{\beta} = I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \tag{1.3.7}$$

2. La fonction constante $f(t) = C, t \in [a, +\infty[$

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a_+} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} C d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{-(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \right]_a^t \\
&= \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$I^{\alpha}_{a_+} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha}. \tag{1.3.8}$$

Propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L

Théorème 1.3.3. *Si $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$ alors $I^{\alpha}_{a_+} f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a :*

$$I^{\alpha}_{a_+} f \in L^1[a,b].$$

Preuve . Soit $f \in L^1[a,b]$; on a :

$$I^{\alpha}_{a_+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) h(\tau) d\tau,$$

avec $-\infty \leqslant a < t < +\infty$
tel que :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 < u \leqslant b-a \\ 0, \quad u \in \mathbb{R} - (0, b-a) \end{cases}$$

et

$$\mathrm{h(u)} = \begin{cases} f(u), \quad a \leqslant u \leqslant b \\ 0, \quad u \in \mathbb{R} - [a,b] \end{cases}$$

comme $g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $I^{\alpha}_{a_+} f \in L^1[a,b]$. ■

Théorème 1.3.4. *Pour $f \in L^1[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :*

$$I^{\alpha}_{a_+}\left(I^{\beta}_{a_+}f\right)(t) = I^{\alpha+\beta}_{a_+}f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve . Soit $f \in L^1[a,b], \alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a_+}\left(I^{\beta}_{a_+}f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(I^{\beta}_{a_+}f\right)(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right]d\tau.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.5. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $h_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$*

$$I^{\alpha}_{a_+}f(t) = \int_a^t h_{\alpha}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \left(h_{\alpha} * f\right)(t).$$

Proposition 1.3.6. *L'opérateur $I^{\alpha}_{a_+}$ est linéaire.*

Preuve . En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I^{\alpha}_{a_+}f$ et $I^{\alpha}_{a_+}g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels arbitraires, on a

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a_+}\left(c_1 f + c_2 g\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(c_1 f + c_2 g\right)(\tau)d\tau \\
&= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}g(\tau)d\tau \\
&= c_1 I^{\alpha}_{a_+}f(t) + c_2 I^{\alpha}_{a_+}g(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.7. *Soit $f \in C([a,b))$. Alors on a*
1. $\frac{d}{dt}\left(I^{\alpha}_{a_+}f\right)(t) = \left(I^{\alpha-1}_{a_+}f\right)(t), \quad \alpha > 1.$
2. $\lim_{\alpha\to 0+}\left(I^{\alpha}_{a_+}f\right)(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$

Preuve . : Appliquons la définition de la règle de dérivation de Leibniz 1.1.8 nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(I_{a_+}^{\alpha}f\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau\right)\\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau\\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha-1+1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau\\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1}f(\tau)d\tau = \left(I_{a_+}^{\alpha-1}f\right)(t).
\end{aligned}$$

2. Pour la dernière identité, comme $f \in C([a,b])$, nous avons

$$I_{a_+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau$$

D'après la relation (1.3.8) on peut écrire :

$$I_{a_+}^{\alpha}1 = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1.$$

quand $\alpha \longrightarrow 0^+$. Donc pour un certain $\delta > 0$, on aura

$$\left|I_{a_+}^{\alpha}f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau\right| \tag{1.3.9}$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \tag{1.3.10}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \tag{1.3.11}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau. \tag{1.3.12}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b]$ alors,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, \tau \in [a,b] : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \epsilon.$$

Ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \le \epsilon\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{\epsilon\delta^{\alpha}}{\alpha}. \tag{1.3.13}$$

D'autre part,

$$\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}(|f(\tau)|+|f(t)|)d\tau \quad (1.3.14)$$

$$\leq 2\sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)|\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \forall t\in[a,b] \quad (1.3.15)$$

$$= 2M\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}-\frac{\delta^\alpha}{\alpha}\right), \forall t\in[a,b], \quad (1.3.16)$$

où $M=\sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)|$.
Une combinaison de (1.3.9) et (1.3.13) et (1.3.14) nous donne :

$$\left|I_{a_+}^{\alpha}f(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| \leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\epsilon\delta^\alpha+2M\left((t-a)^\alpha-\delta^\alpha\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\epsilon\delta^\alpha+2M\left((t-a)^\alpha-\delta^\alpha\right)\right],$$

faisons tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\left|I_{a_+}^{\alpha}f(t)-1f(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall\epsilon>0,$$

ce qui montre que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I_{a_+}^{\alpha}f(t)-f(t)=0.$$

■

Les lemmes suivants fournissent quelques propriétés de $I_{a^+}^{\alpha}$. Les preuves peuvent être trouvées dans [16].

Lemme 1.3.8. *Pour $\alpha>0$, $I_{a^+}^{\alpha}$ envoie $C[a,b]$ dans $C[a,b]$.*

Lemme 1.3.9. *Soit $\alpha>0$ et $0\leq\gamma<1$. Alors $I_{a^+}^{\alpha}$ est borné de $C_\gamma[a,b]$ dans $C_\gamma[a,b]$.*

Lemme 1.3.10. *Soit $\alpha>0$ et $0\leq\gamma<1$. Si $\gamma\leq\alpha$, Alors $I_{a^+}^{\alpha}$ est borné de $C_\gamma[a,b]$ dans $C[a,b]$.*

Lemme 1.3.11. *Soit $0\leq\gamma<1$ et $f\in C_\gamma[a,b]$. Alors*

$$I_{a^+}^{\alpha}f(a)=\lim_{x\to a^+}I_{a^+}^{\alpha}f(x)=0,\ 0\leq\gamma<\alpha.$$

Preuve . Notez que d'après le lemme 1.3.10, $I_{a^+}^{\alpha} f \in C_\gamma[a,b]$. Puisque $f \in C_\gamma[a,b]$ Alors $(x-a)^\gamma f(x)$ est continue sur $[a,b]$, il existe $M > 0$ telle que

$$|(x-a)^\gamma f(x)| < M, \ \ x \in [a,b].$$

Donc

$$\left|I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| < M[I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{-\gamma}].$$

Et

$$\left|I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| < M\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}(x-a)^{\alpha-\gamma}.$$

Puisque $\alpha > \gamma$, le membre de droite $\to 0$ quand $x \to a^+$. ■

1.3.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.12. Soit $f \in L^1[a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$D_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau, \tag{1.3.17}$$

$$= D^n I_{a_+}^{n-\alpha} f(t), \tag{1.3.18}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre entier $n = [\alpha]+1$.
On a en particulier
1. $D_{a_+}^0 f(t) = D^1 I_{a_+}^1 f(t) = f(t) \left(D_{a_+}^0\right.$ est l'opérateur identité).
2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n.

$$D_{a_+}^n f(t) = D^{n+1} I_{a_+}^{n+1-n} f(t) = D^{n+1} I_{a_+}^1 f(t) = D^n f(t).$$

Lemme 1.3.13. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$, alors*

$$D_{a_+}^{\alpha} = D^n I_{a_+}^{n-\alpha}.$$

Preuve . L'hypothèse sur n implique que $n \geq [\alpha]+1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D^n I_{a_+}^{n-\alpha} &= \left(D^{[\alpha]+1} D^{n-[\alpha]-1}\right)\left(I_{a_+}^{n-[\alpha]-1} I_{a_+}^{[\alpha]+1-\alpha}\right) \\ &= D^{[\alpha]+1}\left(D^{n-[\alpha]-1} I_{a_+}^{n-[\alpha]-1}\right) I_{a_+}^{[\alpha]+1-\alpha} \\ &= D^{[\alpha]+1} I_{a_+}^{[\alpha]+1-\alpha} = D_{a_+}^{\alpha}, \end{aligned}$$

car $D^{n-[\alpha]-1} I_{a_+}^{n-[\alpha]-1} = I$. ■

Théorème 1.3.14. *Soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann- Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors*

$$D^{\alpha}_{a_+}\left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) = c_1 D^{\alpha}_{a_+} f(t) + c_2 D^{\alpha}_{a_+} g(t).$$

Lemme 1.3.15. *Soit $0 < \alpha < 1$, on a alors*

$$[D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\alpha-1}](x) = 0.$$

Lemme 1.3.16. *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1(a,b)$, pour $x \in [a,b]$, on a les propriétés suivantes*

$$(I^{\alpha}_{a^+} I^{\beta}_{a^+} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a^+} f)(x),$$

et

$$(D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f)(x) = f(x).$$

En particulier, si $f \in C_\gamma[a,b]$ ou $f \in C[a,b]$, alors ces égalités restent valable.

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.3.17. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ d'une fonction $f \in L^1([a,+\infty))$ est donnée par

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)\,dx, \qquad (1.3.19)$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

Notation 1.3.18. *On note que l'operateur D^n, $n \in \mathbb{N}$ est la différentiabilité d'ordre entier n i.e :*

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Lemme 1.3.19. *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que $^{c}D^{\alpha} f(t)$ existe, alors :*

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t). \qquad (1.3.20)$$

Lemme 1.3.20. *Soit $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}$ et soit f une fonction telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe, on alors*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to n} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \text{ et}\\
&\lim_{\alpha\to n-1} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Preuve . On utilise l'intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-f^{(n)}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -f^{n+1}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dx\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f^{(n)}(0)t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha}dx\right).
\end{aligned}$$

En prenant la limite pour $\alpha\to n$ et $\alpha\to n-1$, respectivement, on a

$$\lim_{\alpha\to n} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n)}(0) + f^{(n)}(x)\Big|_{x=0}^{t} = f^{(n)}(t),$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n-1} {}^cD^\alpha f(t) &= \left(f^{(n)}(0)t + f^{(n)}(x)(t-x)\right)\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -f^{(n)}(x)dx\\
&= f^{(n-1)}(x)\Big|_{x=0}^{t}\\
&= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

■

Remarques 1.3.21. *Pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a*

$$\lim_{\alpha\to n} D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

et

$$\lim_{\alpha\to n-1} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire de Hilfer

Définition 1.3.22. *La dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre $0<\alpha<1$, et de type $0\leq\beta\leq1$, de la fonction $f(.)$ est définie par :*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} f(x) = (I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D(I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f))(x).$$

Ou

$$D = \frac{d}{dx}$$

La dérivée fractionnaire de Hilfer est considéré comme un interpolateur entre le Riemann-Liouville et Caputo, puis les remarques suivantes peuvent être présentées pour montrer la relation avec les opérateurs Caputo et Riemann-Liouville.

Remarque 1.3.23.
voir [12]

(i) L'opérateur $D_{a^+}^{\alpha,\beta}$ récrit également comme suit

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} = I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} = I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D_{a^+}^{\gamma}, \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

(ii) Si $\beta = 0$, on aura la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$D_{a^+}^{\alpha} = D_{a^+}^{\alpha,0}.$$

(iii) Si $\beta = 1$, on aura la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$^{C}D_{a^+}^{\alpha} = I_{a^+}^{(1-\alpha)} D.$$

1.4 Mesure de non compacité de Kuratowski (MNC)

Dans ce suit on donnera quelques définitions et propriétés concernant la mesure de non compacité de Kuratowski, pour plus de détail, voir [6, 11].

Définition 1.4.1. *La mesure de non compacité au sens de Kuratowski notée α est définie pour tout sous-ensemble borné $B \subset E$ par*

$$\alpha(B) = \inf\left\{\tau > 0 : B \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} M_j \;\; et\, Diam(M_j) \le \tau\right\}$$

ou le diamètre de M_j est défini par $Diam(M_j) = \sup\{|x-y| : x, y \in M_j\}_{j=1,2,\ldots,m}$

Il est clair que la MNC au sens de Kuratowski vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.2.

1. *$\alpha(B) = 0$ ssi B est relativement compact,*
2. *$\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$, où $\overline{A}$ est la fermeture de A,*

3. *$\alpha(A+B) \leq \alpha(A)+\alpha(B)$,*
4. *$A \subset B$ implique $\alpha(A) \leq \alpha(B)$,*
5. *$\alpha(a.A) = |a|.\alpha(A)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,*
6. *$\alpha(\{a\} \cup A) = \alpha(A)$ pour tout $a \in E$,*
7. *$\alpha(A) = \alpha(Conv(A))$, où $Conv(A)$ l'enveloppe convexe de A,*
8. *Soit $J = [a,b], b \geq a$, pour tout $W \subset C(J,E)$, on définie*

$$\int_0^t W(s)ds = \int_0^t u(s)ds : u \subseteq W, t \subseteq [a,b].$$

Nous présentons ci-dessous quelques propriétés bien utiles,

Proposition 1.4.3. *Si $W \subset C(J,E)$ est borné et équi-continue , alors $\overline{co}W \subset C(J,E)$ est également borne et équi-continue.*

- *Notons α et α_c la mesure de non compacité au sens de Kuratowski dans les espaces $E, C(J,E)$ respectivement*

Proposition 1.4.4. *si $W \subset C(J,E)$ est borné et équi-continue , alors $t \to \alpha(W(t))$ est continue sur J, et on a*

$$\alpha_c(W) = \max_{t\in J} \alpha(W(t)), \alpha(\int_0^t W(s)ds) \leq \int_0^t \alpha(W(s))ds, t \in [0,b]$$

1.5 Quelques résultats de la théorie du point fixe

1.5.1 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques. Voir [10] [2].

Théorème de l'application contractante

Définition 1.5.1. Soient (M,d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application, On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que, pour tout x, y de M, on a

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y). \tag{1.5.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.
Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 1.5.2. *Théorème du point fixe de Banach (1922)*
Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus,

$$\text{si } x_0 \in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \text{ on a} \tag{1.5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geq 1, \tag{1.5.3}$$

x étant le point fixe de T.

Remarques 1.5.3. *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contractante) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe. En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de $T^?$ et grâce à l'unicité $T(x) = x$ e résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.*

Remarques 1.5.4. *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :*
Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \to M$ telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B \text{ et } k < 1, \tag{1.5.4}$$

où

$$B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} \quad z \in M \text{ et } \varepsilon > 0. \tag{1.5.5}$$

Si $d(z, T(z)) < \varepsilon(1-k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

Théorème 1.5.5 (Darbo). *[6]*
Soit Ω un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach

E, $T : \Omega \to \Omega$ un opérateur continue et μ la mesure de non-compacité définie dans E. Supposons qu'il existe une constante $k \in [0,1[$ telle que :

$$\mu(TX) \leq k\mu(X)$$

pour tout sous ensemble non vide X de Ω. Alors T admet au moins un point fixe dans Ω.

CHAPITRE 2

Existence et unicité de solution pour un problème comportant la dérivée de Hilfer

2.1 Introduction

Dans ce chapitre [8], on traitera l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle avec une condition initiale via la dérivée de Hilfer de la forme suivante :

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) = f(x,y), \quad x \in (a,b], \; 0 < \alpha < 1, \; 0 \leq \beta \leq 1, \tag{2.1.1}$$

$$I_{a^+}^{1-\gamma} y(a^+) = y_a, \quad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta, \tag{2.1.2}$$

où $D_{a^+}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer introduit dans [12],[13],[14], $f : (a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées dans la suite de ce chapitre.

2.2 Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques définitions, lemmes, propriétés et notations que nous utiliserons plus tard. Pour plus de détails, veuillez consulter[14] [15] .

Nous présentons tout d'abord les espaces suivants :

$$C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b]=\Big\{f\in C_{1-\gamma}[a,b],\ D_{a^+}^{\alpha,\beta}f\in C_{1-\gamma}[a,b]\Big\},$$

et

$$C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]=\Big\{f\in C_{1-\gamma}[a,b],\ D_{a^+}^{\gamma}f\in C_{1-\gamma}[a,b]\Big\}.$$

Comme $D_{a^+}^{\alpha,\beta}f=I_{a+}^{\beta(1-\alpha)}D_{a^+}^{\gamma}f$, il résulte du Lemme 1.3.10 que

$$C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]\subset C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b].$$

Les lemmes suivants découle directement de la propriété de semi-groupe du théorème 1.3.4 .

Lemme 2.2.1. *Soient* $0<\alpha<1$, $0\leq\beta\leq 1$ *et* $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$. *Si* $f\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$, *alors*

$$I_{a^+}^{\gamma}D_{a^+}^{\gamma}f=I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha,\beta}f,$$

et

$$D_{a^+}^{\gamma}I_{a^+}^{\alpha}f=D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f.$$

Lemme 2.2.2. *Soient* $0\leq\gamma<1,\ a<c<b,\ g\in C_{\gamma}[a,b],\ g\in C[c,b]$ *et* g *continue en* c. *Alors,* $g\in C_{\gamma}[a,b]$.

Lemme 2.2.3. *Soit* $f\in L^1(a,b)$. *Si* $D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f$ *existe est dans* $L^1(a,b)$, *alors*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta}I_{a^+}^{\alpha}f=I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f.$$

Preuve .

$$\begin{aligned}D_{a^+}^{\alpha,\beta}I_{a^+}^{\alpha}&=I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}DI_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}I_{a^+}^{\alpha}=I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}DI_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}\\&=I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.4. *Soient* $0<\alpha<1$, $0\leq\beta\leq 1$ *et* $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$. *Si* $f\in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et* $I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f\in C_{1-\gamma}^{1}[a,b]$, *alors* $D_{a^+}^{\alpha,\beta}I_{a^+}^{\alpha}f$ *existe sur* $(a,b]$ *et,*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta}I_{a^+}^{\alpha}f(x)=f(x),\quad x\in(a,b].$$

Preuve . D'après les lemmes 1.3.11 et 2.2.1 , nous avons

$$I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}DI_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f(x)=f(x)+\frac{I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)}f(a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(x-a)^{\beta(1-\alpha)-1}=f(x),\quad x\in(a,b].$$

■

Lemme 2.2.5. *[21] Soient* $0<\alpha<1$ *et* $0<\gamma\leq 1$. *Si* $f\in C_\gamma[a,b]$ *et* $I_{a^+}^{1-\alpha}f\in C_\gamma^1[a,b]$. *Alors*

$$I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f(x)=f(x)-\frac{I_{a^+}^{1-\alpha}f(a)}{\Gamma(a)}(x-a)^{\alpha-1},\quad \forall x\in(a,b].$$

Le théorème suivant donne l'équivalence entre le problème de type Cauchy (2.1.1) − (2.1.2) et l'équation d'intégrale du second type

$$y(x)=\frac{y_a}{\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta)}(x-a)^{(\alpha-1)(1-\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt,\;\; x\in(a,b]. \tag{2.2.1}$$

Théorème 2.2.6. *Soient* $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$ *où* $0<\alpha<1$ *et* $0\leq\beta\leq 1$, *soit* $f:(a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(.,y(.))\in C_{1-\gamma}[a,b]$, *pour tout* $y\in C_{1-\gamma}[a,b]$. *Si* $y\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$. *Alors, y satisfait* (2.1.1) − (2.1.2) *si et seulement si y satisfait* (2.2.1).

Preuve . Nous prouvons d'abord la nécessité. Soit $y\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$ une solution de (2.1.1) − (2.1.2). On veut montrer que y est une solution de l'équation intégrale (2.2.1) . Par la définition de $C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$, lemme 1.3.10 et définition 1.3.12, on a

$$I_{a^+}^{1-\gamma}y\in C[a,b]\;\text{ et }\; D_{a^+}^{\gamma}y=D(I_{a^+}^{1-\gamma}y)\in C_{1-\gamma}[a,b].$$

Par la remarque 1.3.23, nous avons :

$$I_{a^+}^{1-\gamma}y\in C_{1-\gamma}[a,b].$$

En appliquant maintenant le lemme 2.2.5, on obtient

$$I_{a^+}^{\gamma}D_{a^+}^{\gamma}y(x)=y(x)-\frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1},\;\; x\in(a,b]. \tag{2.2.2}$$

Comme $D_{a^+}^{\gamma}y\in C_{1-\gamma}[a,b]$, le lemme 2.2.1 donne

$$\begin{aligned}I_{a^+}^{\gamma}D_{a^+}^{\gamma}y&=I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha,\beta}y\\&=I_{a^+}^{\alpha}f,\text{dans}(a,b].\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

D'après (2.2.2) et (2.2.3) on obtient :

$$y(x)=\frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1}+[I_{a^+}^{\alpha}f(t,y(t))](x),\;\; x\in(a,b]. \tag{2.2.4}$$

Réciproquement. Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ satisfait l'eq (2.2.1]) qui peut s'écrire comme (2.2.4). En appliquant l'opérateur $D^{\gamma}_{a^+}$ aux deux membres de l'équation (2.2.4), il résulte de lemme 1.3.15 , lemme 2.2.1 et de définition 1.3.12 que

$$D^{\gamma}_{a^+} y = D^{\alpha(1-\beta)}_{a^+} f. \tag{2.2.5}$$

A partir de (2.2.5) et de l'hypothèse $D^{\gamma}_{a^+} y \in C_{1-\gamma}[a,b]$, on a

$$DI^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C_{1-\gamma}[a,b]. \tag{2.2.6}$$

Puisque $f \in C_{1-\gamma}[a,b]$, d'après le lemme 1.3.10, on trouve

$$I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C_{1-\gamma}[a,b]. \tag{2.2.7}$$

Il découle de (2.2.6) et (2.2.7) et de la définition 1.1.6 que,

$$I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C^{1}_{1-\gamma}[a,b].$$

Ainsi f et $I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f$ vérifient les conditions du lemme 2.2.5, maintenant en appliquant $I^{\beta(1-\alpha)}$ aux deux membres de (2.2.6) et en utilisant la définition 1.3.22 et le lemme 2.2.5, on obtient

$$D^{\alpha,\beta}_{a^+} y = f(x,y(x)) - \frac{[I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t,y(t))](a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha)}(x-a)^{\beta(1-\alpha)-1}. \tag{2.2.8}$$

Puisque $1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha)$, le lemme 1.3.11 implique que,

$$[I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t,y(t))](a) = 0.$$

La relation (2.2.8) se réduit donc à,

$$D^{\alpha,\beta}_{a^+} y = f(x,y(x)),\ x \in (a,b].$$

Montrons maintenant que la condition initiale (2.1.2) est également vérifiée. On applique $I^{1-\gamma}_{a^+}$ aux deux côtés de (2.2.4) et utilisant les lemmes 1.3.15 et 1.3.16, on trouve :

$$I^{1-\gamma}_{a^+} y(a) = y_a + [I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t,y(t))](x). \tag{2.2.9}$$

En prenant la limite comme $x \to a$, on obtient :

$$I^{1-\gamma}_{a^+} y(a) = y_a + [I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t,y(t))](a) = y_a.$$

■

Remarque 2.2.7. *Remarquons que sous les hypothèses du théorème* 2.2.6*, la solution satisfait la relation*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) = D_{a^+}^{\alpha} y(x) - \frac{y_a}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Ainsi, d'après le lemme 1.3.11, la solution satisfait le problème de type Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} &D_{a^+}^{\alpha} y = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1} + f(x,y), \\ &I_{a^+}^{1-\alpha} y(a^+) = y_a \end{aligned}$$

avec $D_{a^+}^{\alpha} y \in C_{1-\gamma+\alpha}^{1}[a,b]$ en général. Ce problème est une forme plus faible de $(2.1.1)-(2.1.2)$

2.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette partie, nous établissons l'existence et l'unicité de solution du problème $(2.1.1)-(2.1.2)$ dans l'espace $C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b]$. Supposons que $f(.,y)$ est Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire que, il existe $A>0$ telle que

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \leq A\left|y_1-y_2\right|, \tag{2.3.1}$$

pour tout $x \in (a,b]$ et pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.3.1. *Soient* $0<\alpha<1, 0\leq\beta\leq 1$ *et* $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, *soit* $f:(a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}^{\beta}[a,b]$, *pour tout* $y \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et satisfait la condition* (2.3.1). *Alors il existe une solution unique* y *pour le problème de type Cauchy* $(2.1.1)-(2.1.2)$ *dans l'espace* $C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$.

Preuve . [8] D'après le théorème 2.2.6 , il suffit de prouver le résultat pour l'équation intégrale (2.2.1). On considère l'opérateur $T: C_{1-\gamma}[a,b] \to C_{1-\gamma}[a,b]$ définie par

$$Ty(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + [I_{a^+}^{\alpha} f(t,y(t))](x). \tag{2.3.2}$$

On prouve d'abord l'existence d'une unique solution y dans l'espace $C_{1-\gamma}[a,b]$. Notre méthode est basée sur la partition de l'intervalle $(a,b]$ en sous-intervalles sur lesquels l'opérateur T soit une contraction, puis nous utilisons la théorème du point fixe de Banach. Notons que $C_{1-\gamma}[c_1, c_2]$, $a \leq c_1 < c_2 \leq b$ est un espace métrique complet avec la métrique d définie par

$$d(y_1, y_2) = \left\| y_1 - y_2 \right\|_{C_{1-\gamma}[c_1,c_2]} := \max_{x\in[c_1,c_2]} \left|(x-a)^{1-\gamma}[y_1(x) - y_2(x)]\right|.$$

On choisit $x_1 \in (a, b]$ tel que

$$w_1 = \frac{A\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}(x_1 - a)^{\alpha} < 1. \tag{2.3.3}$$

Oú $A > 0$ est la constante de Lipschitz définie dans (2.3.1), il est claire que T envoie $C_{1-\gamma}[a, x_1]$ sur lui-même. De plus, d'après (2.3.1) , (2.3.2) et le lemme 1.3.9, et pour tout $y_1, y_2 \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| Ty_1 - Ty_2 \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x1]} &= \left\| I^{\alpha}_{a^+} f(t, y_1(t)) - I^{\alpha}_{a^+} f(t, y_2(t)) \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq \left\| I^{\alpha}_{a^+} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq (x_1 - a)^{\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \left\| [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq A(x_1 - a)^{\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \left\| y_1(t) - y_2(t) \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq w_1 \left\| y_1(t) - y_2(t) \right\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]}.
\end{aligned}$$

Comme $w_1 < 1$, La théorème de Banach assure l'existence de point fixe $y_0^* \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$ qui est une solution du Problème (2.2.1) sur l'intervalle $(a, x_1]$.
Si $x_1 \neq b$, on choisit $x_2 \in (x_1, b]$ tel que

$$w_2 = \frac{A}{\alpha\Gamma(\gamma)}(x_2 - x_1)^{\alpha} < 1. \tag{2.3.4}$$

On considéré l'opérateur $T : C[x_1, x_2] \to [x_1, x_2]$ définie par

$$Ty(x) = y_{01} + [I^{\alpha}_{a^+} f(t, y(t))](x). \tag{2.3.5}$$

où

$$y_{01}(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt. \tag{2.3.6}$$

Comme la solution est définie de manière unique sur l'intervalle $(a, x_1]$, on peut considérer y_{01} comme une fonction connue. Soit $y_1, y_2 \in C[x_1, x_2]$, d'après la condition (2.3.1) et le lemme 1.3.8, on a

$$\begin{aligned}
||Ty_1 - Ty_2||_{C[x_1,x_2]} &= ||I^{\alpha}_{x_1^+} f(t, y_1(t)) - I^{\alpha}_{x_1^+} f(t, y_2(t))||_{C[x_1,x_2]} \\
&\leq ||I^{\alpha}_{x_1^+} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]||_{C[x_1,x_2]} \\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\gamma)} (x_2 - x_1)^{\alpha} ||f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))||_{C[x_1,x_2]} \\
&\leq \frac{A}{\alpha\Gamma(\gamma)} (x_2 - x_1)^{\alpha} ||y_1(t) - y_2(t)||_{C[x_1,x_2]} \\
&= w_2 ||y_1(t) - y_2(t)||_{C[x_1,x_2]}.
\end{aligned}$$

Donc T est une contraction. D'après le théorème de Banach, T a un unique point fixe $y_0^*(x) \in C[x_1, x_2]$ qui est une solution de (2.2.1) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. De plus, $y_1^*(x_1) = y_0^*(x_1)$. On définit $y^* : (a, x_2] \to (a, x_2]$ comme suit

$$y^*(x) = \begin{cases} y_0^*(x), & a < x \leq x_1 \\ y_1^*(x), & x_1 < x \leq x_2 \end{cases}$$

Par le lemme 2.2.2, $y^* \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$. Alors y^* est l'unique solution de (2.2.1) dans $C_{1-\gamma}[a, x_2]$.

Si $x_2 \neq b$, nous répétons la processus jusqu'on trouvra $x_{m+1} = b$, soit y_k^* l'unique solution de (2.2.1) dans $C[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, ..., m$, où $a = x_0 < x_1 < < x_{m+1} = b$ sachant que

$$w_{k+1} = \frac{A}{\alpha\Gamma(\alpha)} (x_{k+1} - x_k)^{\alpha} < 1.$$

Alors l'unique solution $y^* \in C_{1-\gamma}[a, b]$ de (2.2.1) est donné par

$$y^*(x) = y_k^*(x), \ x \in (x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, 2, ..., m. \tag{2.3.7}$$

Il reste à montrer qu'une telle solution unique $y^* \in C_{1-\gamma}[a, b]$ est en fait dans $C^{\gamma}_{1-\gamma}[a, b]$. De l'éq (2.2.1) nous avons,

$$y^*(x) = y_0(x) + [I^{\alpha}_{a^+} f(t, y^*(t))](x).$$

Appliquer $D^{\gamma}_{a^+}$ des deux cotés donne,

$$\begin{aligned}
D^{\gamma}_{a^+} y^*(x) = D^{\gamma}_{a^+} [I^{\alpha}_{a^+} f(t, y^*(t))](x) &= [D^{\gamma-\alpha}_{a^+} f(t, y^*(t))](x), \\
&= [D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t, y^*(t))](x).
\end{aligned}$$

puisque $\gamma \geq \alpha$. Par hypothèse, le second membre est dans $C_{1-\gamma}[a, b]$ et donc $D^{\gamma}_{a^+} \ y^*(x) \in C_{1-\gamma}[a, b]$.

d'après la théorème 2.2.6, y^* est l'unique solution de (2.1.1) – (2.1.2). ■

CHAPITRE 3

Problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire sur un intervalle non borné dans un espace de Banach

3.1 Introduction

Dans ce chapitre [24], on s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, \infty), \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) = 0, \quad D_{0^+}^{\alpha-1} u(\infty) = u_\infty, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

oú $D_{0^+}^{\alpha-1}$ sont des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach, $f \in C(J \times E, E), u_\infty \in E, D_{0^+}^{\alpha}$ et $D_{0^+}^{\alpha-1} u(\infty) = \lim_{t\to\infty} D_{0^+}^{\alpha-1} u(t)$. Nous établissons l'existence de solutions sur l'intervalle $[0, \infty)$ pour BVP (3.1.1) dans un spécial espace de Banach. La technique repose sur les propriétés de la mesure de non-compacité de Kuratowski et du théorème du point fixe de Darbo.

3.2 Préliminaires

Nous introduisons tout d'abord quelques définitions et lemmes concernant ce chapitre. Soit $I \subset J$ un intervalle compact et notons que $C(I, E)$ est un espace de Banach des fonctions continues : $y : I \to E$ avec sa norme $\|y\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$.

Considérons l'espace des fonctions suivant

$$X = \left\{ u(t) \in C(J,E) : \sup_{t \in j} \frac{\| u(t) \|}{1 + t^{\alpha - 1}} < \infty \right\},$$

associé à la norme

$$\| u \|_X = \sup_{t \in j} \frac{\| u(t) \|}{1 + t^{\alpha - 1}}.$$

Il est facile de vérifier que X est un espace de Banach. On note respectivement que α, α_C et α_X les mesures de non-compacité de Kuratowski dans les espaces E, $C(I,E)$ et X.

Lemme 3.2.1. *Soit $h \in C([0,\infty)) \cap L^1([0,\infty))$, on a alors*

$$I^{\delta}_{a^+} D^{\delta}_{a^+} h(t) = h(t) + c_1(t-a)^{\delta-1} + c_2(t-a)^{\delta-2} + ... + c_n(t-a)^{\delta-n},$$

pour certains $c_j \in E$, $j = 1,2,3,....., n$.

Lemme 3.2.2. *Soit h une fonction de $L^1([0,\infty))$, on a les relations suivantes*

$$D^{\delta}_{a^+} I^{\delta}_{a^+} h(t) = h(t), \;\; \delta > 0 \;\; et$$
$$D^{\delta}_{a^+} I^{\gamma}_{a^+} h(t) = I^{\gamma-\delta}_{a^+} h(t), \; 0 < \delta < \gamma, \; t \in]a, \infty).$$

3.3 Résultat d'existence

Afin d'utiliser le point fixe de Darbo pour établir le résultat d'existence pour le problème (3.1.1), on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) Il existe des fonctions positives $a(.), b(.) \in C(J)$ telles que

$$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| + b(t), \; t \in J, \; x \in E, \; \text{ et}$$
$$\int_0^{\infty} (1 + t^{\alpha-1}) a(t) dt < \Gamma(\alpha), \quad \int_0^{\infty} b(t) dt < \infty.$$

(H_2) Pour tout $r > 0$ et tout intervalle compact $I \subset J$, $f(t,x)$ est uniformément continue sur $I \times B_E(\theta, r)$, où θ est l'élément nul de E et $B_E(\theta, r) = \{x \in E : ||x|| \leq r\}$.

(H_3) Il existe une fonction positive $l(.) \in L^1(J)$ tel que

$$\alpha(f(t,B)) \leq l(t)\alpha(B), \quad t \in J,$$

où B est tout sous-ensemble borné de E et

$$\int_0^{\infty} (1 + t^{\alpha-1}) l(t) dt < \Gamma(\alpha).$$

Remarque 3.3.1. *On peut déduire de la condition* $(H1)$ *que :*

$$\int_0^\infty ||f(t,u(t))||dt \leq ||u||_x \int_0^\infty (1+t^{(\alpha-1)})a(t)dt + \int_0^\infty b(t)dt \leq \infty, \qquad (3.3.1)$$

Lemme 3.3.2. *Supposons que la condition* (H_1) *soit vérifiée. Alors le problème* (3.1.1) *est équivalent à l'équation intégrale*

$$u(t) = \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}]f(s,u(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}f(s,u(s))ds. \qquad (3.3.2)$$

Preuve . D'après les lemmes 3.2.1, 3.2.2 et en utilisant une méthode similaire comme la preuve du lemme dans [4], on démontre facilement le lemme 3.3.2. ■.
Le lemme précédent 3.3.2 indique que les solutions du problème (3.1.1) coïncide avec les points fixe de l'opérateur $T : X \to X$ défini comme suit

$$Tu(t) = \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}]f(s,u(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}f(s,u(s))ds. \qquad (3.3.3)$$

Les lemmes suivants présentent quelques propriétés de l'opérateur T qui sont très utiles à la preuve de notre résultat.

Lemme 3.3.3. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont valides. Alors l'opérateur* $T : X \to X$ *est borné et continu.*

Preuve . Soit $u \in X$, d'après (H_1), (3.3.1) et (3.3.3), il est facile de déduire que $Tu(t) \in C(J,E)$. De plus, (H_1) garantit que

$$\begin{aligned}
\frac{||Tu(t)||}{1+t^{\alpha-1}} &\leq \frac{||u_\infty||}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u(s))||ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u(s))||ds, \\
&\leq \frac{||u_\infty||}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ||f(s,u(t))||dt, \\
&\leq \frac{||u_\infty||}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[||u|| \times \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \int_0^\infty b(t)dt] < \infty.
\end{aligned}$$

Donc, $T : X \to X$ est borné. Prouvons ensuite que T est continue. Soient $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ et $u \in X$ tels que $u_n \to u$ quand $n \to \infty$. Alors, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ est bornée dans X, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $||u_n||_X \leq M$ pour $n \geq 1$. On a aussi $||u||_X \leq M$.

Selon les hypothèses (H_1) et (H_2), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L > 0$ tel que

$$\int_L^{\infty}(1+t^{\alpha-1})a(t)dt < \frac{\Gamma(\alpha)}{6M}\varepsilon, \quad \int_L^{\infty} b(t)dt \quad < \frac{\Gamma(\alpha)}{6}\varepsilon, \tag{3.3.4}$$

et qu'il existe $N > 0$ tel que pour $n > N$ et $t \in [0, L]$,

$$||f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))|| < \frac{\Gamma(\alpha)}{3L}\varepsilon. \tag{3.3.5}$$

Donc, pour $t \in [0, L]$ et $n > N$, on peut déduire de $(3.3.3) - (3.3.5)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{||Tu_n(t) - Tu(t)||}{1+t^{\alpha-1}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))||ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^L ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \int_L^{\infty} ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{\infty} (1+t^{\alpha-1})a(t)dt \\
&+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{\infty} b(t)dt < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si $t > L$ et $n > N$, d'après $(3.3.3) - (3.3.5)$ on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{||Tu_n(t) - Tu(t)||}{1+t^{\alpha-1}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))||ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}||f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))||ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\int_0^L ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \int_L^t ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\int_0^L ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \int_L^\infty ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt], \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L ||f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||dt \\
&+ \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt \\
&+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty b(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On conclut que $||Tu_n - Tu||_X \leq \varepsilon$ lorsque $n > N$. Donc, T est continue. ■

Lemme 3.3.4. *Supposons que (H_1) est satisfaite, soit B un sous-ensemble borné de X. Alors*

(a) $\{\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact I de J.

(b) Pour $\epsilon > 0$, il existe une constante $N > 0$ telle que

$$\left\| \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right\| < \epsilon, \text{ pour tout } t_1, t_2 \geq N \text{ et } u \in B.$$

Preuve .

On réécrit l'opérateur $T : X \to X$ de façon équivalente suivante

$$Tu(t) = \frac{u_\infty - \int_0^\infty f(t,u(t))dt}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds.$$

A partir de la condition (H_1) et de la bornitude de B, il existe $M > 0$ tel que

$$\int_0^\infty \|f(t,u(t))\|\, dt \leq M, \quad \text{pour tout } u \in B. \tag{3.3.6}$$

Premièrement, montrons l'axiome **(a)**, soient $R > 0$ telle que $\|u(t)\|_X \leq R$ pour tout $u \in B$ et $[a,b] \subset J$ un intervalle compact et $t_1, t_2 \in [a,b]$ avec $t_1 < t_2$. Ensuite, par (3.3.6) et la monotonie de $\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}$ en t pour $s < t$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{\left\| u_\infty - \int_0^\infty f(t,u(t))dt \right\|}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s,u(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s,u(s))ds \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds\right\|,\\
&\leq\frac{\|u_\infty\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\|f(s,u(s))\|\,ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\|f(s,u(s))\|\,ds\\
&\leq\frac{\|u_\infty\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\frac{R}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(1+t^{\alpha-1})a(t)dt\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt+\frac{R}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}](1+s^{\alpha-1})a(s)ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}]b(s)ds,\\
&\leq\frac{\|u_\infty\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\
&+\frac{R}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(1+t^{\alpha-1})a(t)dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt\\
&+\frac{R(A_1+A_1b^{\alpha-1})+A_2}{\Gamma(\alpha+1)}[\frac{t_2^{\alpha}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{(t_2-t_1)^{\alpha}}{1+b^{\alpha-1}}],
\end{aligned}
$$

où $A_1=\max_{t\in[a,b]}a(t)$, $A_2=\max_{t\in[a,b]}b(t)$, ceci assure que $\{\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur $[a,b]$. Ensuite, nous vérifions l'assertion **(b)**. Notons que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right\|&\leq\frac{\left\|u_\infty-\int_0^\infty f(t,u(t))dt\right\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds\right\|.
\end{aligned}
$$

Il suffit de prouver que

$$
\left\|\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds\right\|<\epsilon.
$$

La relation (3.3.6) implique qu'il existe $N_1>0$ tel que,

$$
\int_{N_1}^{\infty}\|f(t,u(t))\|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ uniformément par rapport à }\ u\in B. \tag{3.3.7}
$$

D'autre part, puisque $\lim_{t\to\infty} \frac{(t-N_1)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} = 1$, il existe $N > N_1$ tel que pour tout $t_1, t_2 \geq N$ et $s \in [0, N_1]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right| &\leq (1-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}) + (1-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}),\\ &\leq (1-\frac{(t_1-N_1)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}) + (1-\frac{(t_2-N_1)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}) < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (3.3.8)\end{aligned}$$

En prenant maintenant $t_1, t_2 \geq N$, par (3.3.6) − −(3.3.8) on arrive à

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s,u(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} f(s,u(s))ds\right\|\\ &\leq \int_0^{N_1} \left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right| \|f(s,u(s))\|\, ds\\ &+ \int_{N_1}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \|f(s,u(s))\|\, ds + \int_{N_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} \|f(s,u(s))\|\, ds\\ &< \frac{\varepsilon}{3M} \int_0^{\infty} \|f(t,u(t))\|\, dt + 2\int_{N_1}^{\infty} \|f(t,u(t))\|\, dt \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.5. *Supposons que* (H_1) *est vérifiée, soit* B *un sous-ensemble borné de* X*. Alors* $\alpha_X(TB) = \sup_{t\in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})$.

Preuve . Premièrement, montrons que $\alpha_X(TB) \leq \sup_{t\in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})$. Par le lemme 3.3.4, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour $t_1, t_2 > N$,

$$\left\|\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right\| < \varepsilon \text{ uniformément par rapport à } u \in B. \quad (3.3.9)$$

Notons que $TB\,|_{[0,N]}$ est la restriction de TB sur $[0, N]$. La proposition 1.4.4 et le lemme3.3.4 assurent que

$$\alpha_X(TB\,|_{[0,N]}) = \max_{t\in[0,N]} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}) \leq \sup_{t\in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}).$$

Donc, il existe une partition de B telle que $B = \cup_{i=1}^n TB\,|_{[0,N]} = \cup_{i=1}^n TB_i\,|_{[0,N]}$ et

$$\operatorname{diam}_X(TB_i\,|_{[0,N]}) < \sup_{t\in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}) + \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., n. \quad (3.3.10)$$

où diam_X désigne le diamètre du sous-ensemble borné de X. De plus, pour tout Tu_1, $Tu_2 \in TB_i$ et $t \geq N$, il résulte de (3.3.9) et (3.3.10) que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right\| &\leq \left\|\frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu_1(N)}{1+N^{\alpha-1}}\right\|+\left\|\frac{Tu_1(N)}{1+N^{\alpha-1}}-\frac{Tu_2(N)}{1+N^{\alpha-1}}\right\| \\ &+\left\|\frac{Tu_2(N)}{1+N^{\alpha-1}}-\frac{Tu_2(N)}{1+t^{\alpha-1}}\right\| \\ &< \varepsilon+\sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})+\varepsilon+\varepsilon, \\ &\leq \sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})+3\varepsilon, \quad i=1,2,...,n. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Donc,(3.3.10) et (3.3.11) impliquent que

$$\operatorname{diam}_X(TB_i) \leq \sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})+3\varepsilon.$$

En observant que $TB=\cup_{i=1}^{n}TB_i$, on obtient

$$\alpha_X(TB) \leq \sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})+3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a

$$\alpha_X(TB) \leq \sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}).$$

Inversement, on prouve que $\sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}) \leq \alpha_X(TB)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partition $TB=\cup_{i=1}^{n}TB_i$ tel que $\operatorname{diam}_X(TB_i) < \alpha_X(TB)+\varepsilon$, donc, pour tout $t \in J$ et $u_1, u_2 \in B_i$, on obtient

$$\left\|\frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right\| \leq \|Tu_1-Tu_2\| < \alpha_X(TB)+\varepsilon,$$

puisque $TB(t)=\cup_{i=1}^{n}TB_i(t)$, on a

$$\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}) \leq \alpha_X(TB)+\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on trouve

$$\sup_{t\in J}\alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}) \leq \alpha_X(TB).$$

■

Théorème 3.3.6. *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *sont valides. Alors, il existe au moins une solution* $u \in X$ *du problème* (3.1.1).

Preuve . Choisissons un nombre réel $R >$ vérifiant
$$R > \frac{\|u_\infty\| - \int_0^\infty b(t)dt}{\Gamma(\alpha) - \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt}.$$
Posons
$$B = \Big\{ u \in X : \|u\|_X \leq R \Big\}.$$
Alors, on peut en déduire que $T : B \to B$. En effet, pour tout $u \in B$, par (H_1), on obtient
$$\begin{aligned}
\left\| \frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \left\| f(s,u(s)) \right\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \left\| f(s,u(s)) \right\| ds \\
&\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left\| f(t,u(t)) \right\| dt \\
&\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\|u\| \times \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \int_0^\infty b(t)dt] < R.
\end{aligned}$$
Donc, $\|Tu\|_X \leq R$. Donc, T défini de B dans lui même.
On pose $D = \overline{co}(TB)$, il est clair que D est un sous-ensemble borné, convexe et fermé de B. En observant que $TD \subset TB \subset D$, par le lemme 3.3.3 nous savons que $T : D \to D$ est borné et continu. Il reste à montrer qu'il existe une constante $0 \leq \lambda < 1$ telle que
$$\alpha_X(TS) \leq \lambda \alpha_X(S) \text{ pour tout } S \subset D. \tag{3.3.12}$$
Soit $n >$, on définit $T_n : X \to X$ par
$$\begin{aligned}
T_n u(t) = \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] f(s,u(s))ds \\
- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^n t^{\alpha-1} f(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$
A partir de (H_1), on obtient
$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T_n u(t)}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_n^\infty \left\| f(t,u(t)) \right\| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [R \int_n^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \int_n^\infty b(t)dt].
\end{aligned}$$

Cela montre que $d_H\left(\frac{T_nS(t)}{1+t^{\alpha-1}}, \frac{TS(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \to 0$ lorsque $n \to \infty,\ t \in J$, où d_H désigne la métrique de Hausdorff dans l'espace E. Par les propriétés de la mesure de non-compacité, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(\frac{T_nS(t)}{1+t^{\alpha-1}}) = \alpha(\frac{TS(t)}{1+t^{\alpha-1}}),\ t \in J. \tag{3.3.13}$$

Maintenant, nous estimons $\alpha(\frac{T_nS(t)}{1+t^{\alpha-1}})$. Le lemme 3.3.4 implique que $\{\frac{D(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact de J, donc, $\{\frac{S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact de J. Par l'hypothèse (H_2), il est facile de savoir que $\{f(t,u(t)):\ u(t) \in S\}$ est équicontinue sur$[0,n]$. De plus, $\{f(t,u(t)) : u(t) \in S\}$ est borné sur $[0,n]$ par (H_1). En utilisant le proposition 1.4.4, lemme 3.3.5 et l'hypothèse (H_3), on arrive à

$$\begin{aligned}
\alpha(\frac{T_nS(t)}{1+t^{\alpha-1}}) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \alpha(\{f(t,u(t)) : u(t) \in S\})dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^n \alpha(\{f(t,u(t)) : u(t) \in S\})dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^n (1+t^{\alpha-1})l(t)\alpha(\frac{S(t)}{1+t^{\alpha-1}})dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^n (1+t^{\alpha-1})l(t)\alpha_X(S).
\end{aligned}$$

D'après (3.3.13), on a

$$\alpha(\frac{TS(t)}{1+t^{\alpha-1}}) \leq \lambda\alpha_X(S)$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})l(t)dt < 1.$$

D'après le lemme 3.3.5, il résulte que

$$\alpha_X(TS) \leq \lambda\alpha_X(S).$$

Par conséquent, le théorème du point fixe de Darbo affirme que le problème (3.1.1) admet au moins une solution dans D. ∎

3.4 Exemple

Considérons le problème d'équations différentielles d'ordre fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u_n(t) = \left(\frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{\sin t + \ln(1+|u_{n+1}(t)|}{30ne^{\sqrt{t}}}\right)_{n=1}^{\infty}, \ t \in J, \ \ J = [0,\infty) \\ \quad u_n(0) = 0, \qquad D^{\frac{1}{2}}u_n(\infty) = u_\infty. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Soit $E = \{u = (u_1,...,u_n,...) : \sup_n |u_n| < \infty\}$ avec la norme $||u|| = \sup_n |u_n|$, alors E est un espace de Banach et le problème (3.4.1) peut être considéré comme le problème (3.1.1), où $\alpha = \frac{3}{2}$, $f(t,u) = (f_1(t,u),..., f_n(t,u),...)$ avec

$$f_n(t,u) = \frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{\sin t \ + \ln(1+|u_{n+1}(t)|}{30ne^{\sqrt{t}}}.$$

Il est clair que $f(t,u) \in C(J\times E, E)$ et

$$\left\|f(t,u)\right\| \leq \left[\frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}\right]\|u\| + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}.$$

A l'aide d'un calcul rapide, on trouve

$$\int_0^{\infty}(1+\sqrt{t})[\frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}]dt = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{5} \approx 0.3571.$$

Notons que $\Gamma(\frac{3}{2}) \approx 0.8862$ et $\int_0^{\infty}\frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}dt < \infty$. Donc, $(H1)$ est satisfaite avec

$$a(t) = \frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}} \text{ et } b(t) = \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}.$$

Il est facile de voir que la condition (H_2) est aussi satisfaite. En suite, nous vérifions la condition (H_3). Posons

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} \text{ avec}$$

$$f_n^{(1)} = \frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} \text{ et } f_n^{(2)} = \frac{\sin t \ + \ln(1+|u_{n+1}(t)|}{30ne^{\sqrt{t}}}.$$

Alors, on peut obtenir que pour tout ensemble borné $B \subset E$, $\alpha(f^{(2)}(t,B)) = 0$.

En effet, soit $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}^*} \subset E$ une suite bornée, c'est-à-dire que

$$\left\|u^{(m)}\right\| \leq M, \ \ m = 1,2,3,..., \ \text{ où}$$

$$u^{(m)} = (u_1^{(m)},...,u_n^{(m)},...)$$

On a alors, pour $t \in J$ fixé .

$$\left|f_n^{(2)}(t, u^{(m)})\right| \leq \frac{1+M}{30n}, \quad n, m = 1, 2, 3, ..., \tag{3.4.2}$$

Donc $\left\{f_n^{(2)}(t, u^{(m)})\right\}$ est bornée, alors il existe une sous-suite $\{u^{(m_k)}\} \subset \{u^{(m)}\}$ telle que

$$f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) \to v_n \text{ quand } \; K \to \infty, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.4.3}$$

Par (3.4.2), on obtient

$$|v_n| \leq \frac{1+M}{30n}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.4.4}$$

Donc $v = \{v_1, ..., v_n, ...\} \in E$. Soit $\varepsilon > 0$, alors, (3.4.2) et (3.4.4) impliquent qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\left|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)})\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |v_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \; n > N, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{3.4.5}$$

Par contre, de (3.4.3), on obtient qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\left|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n\right| < \varepsilon, \; k > K, \quad n = 1, 2, 3, ... N. \tag{3.4.6}$$

Il découle de (3.4.5) et (3.4.6) que $\left|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n\right| \leq \varepsilon$, pour $k > K$. Cela signifie que $\left|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n\right| \to 0$, lorsque $k \to \infty$, donc $f^{(2)}(t, B)$ est relativement compacte pour tout sous ensemble borné B de E, alors, $\alpha(f^{(2)}(t, B)) = 0$. Par conséquent, on trouve que

$$\alpha(f(t, B)) \leq \alpha(f^{(1)}(t, B)) = \frac{\alpha(B)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)}.$$

Puisque $\int_0^{\infty}(1+\sqrt{t})\frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)}dt < \Gamma(\alpha)$, nous concluons que la condition (H_3) est satisfaite pour $l(t) = \frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)}$.
Finalement, le théorème 3.3.6 assure que le problème (3.4.1) a au moins une solution.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, Problèmes d'intervale infini pour les équations différentielles et intégrales, Kluwer Academic Publisher, Pays-Bas,2001.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan : Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in Mathematics, 141. Cambridge University press, 2001.

[3] A. Aghajani, J. Banaś and N. Sabzali, Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stenin **20** (2013), 345-358.

[4] Z. B. Bai, H. S. Lü, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. **311** (2005) 495-505.

[5] J. banaś, J. Rocha and K.B. Sadarangani, solvability of a nonlinear integral equation of Voltera type, Journal of computational and Applied Mathematics, 2003,157,pp.31-48.

[6] J. banaś, K. Goebel, Measures of noncompacitness in Banach spaces, Lect. Notes Pure Appl. Math., Dekker, New York, 1980, vol.60.

[7] T. A. Burton : Krasnoselskii's inversion principle and fixed points, Nonlinear Anal. **30** (1997), 3975-3986.

[8] K. M. Furati, M. D. Kassim, N.e. Tatar, Computers and Mathematics with Applications.

[9] J. M. Gomes, L. Sanchez, une approche variationnelle de certains problèmes aux limites dans demi-droite,Z. Angew, Math. Phys. **56**(2005) 192-209.

[10] A. Granas and J. Dugundji : Fixed point theory, Springer-Verlag, New-York, (2003).

[11] D. J. Guo, V. Lakshmikantham, X. Liu, Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[12] R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapour, 2000.

[13] R. Hilfer, Fractional calculus and regular variation in thermodynamics, Applications of Fractional Calculus in Physics [1], page 429.

[14] R. Hilfer, Fractional time evolution, Applications of Fractional Calculus in Physics [1], page 87.

[15] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Théorie et applications des équations différentielles fractionnaires, dans : Mathematics Studies , vol.204,Elsevier, 2006.

[16] C. Kou, J. Liu, Y. Ye, Existence and uniqueness of solutions for the Cauchy-type problems of fractional differential equations, Discrete Dynamics in Nature and Society 2010 (2010) 1–15.

[17] W. Liu and C. Ren, Existence of solutions for multi-point nonlinear differential equations of fractional orders with integral boundary conditions, Electronic Journal of differential equations, No. 54, pp. 1-10.

[18] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus. Academic Press, NewYork, 1974.

[19] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Acadimic Press, Sandiego, (1999).

[20] H. Rinehart and Winston : The Gamma Function, New Yor, 1964.

[21] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, 1987, Engl. Transfrom the Russian.

[22] H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006.

[23] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional diferential equation and their Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, 2010.

[24] X. Su, Solutions to boundary value problem of fractional order on unbounded domains in a Banach space, Nonlinear Anal . 74(2011),2844-2852.

[25] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equation, Electron. J. Differential Equations , No. 36 (2006), pp. 12.