

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Marwa BOUMAZA

Calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type

soutenu publiquement le 30 juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB
Examineur :	Djemaia BENSİKADDOUR	MAB	UMAB
Encadreur :	Zineb KAİSSERLI	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Dieu merci pour tout le bien et les privilèges que tu m'as procurés toute ma vie, lesquels m'ont permis d'atteindre ce savoir-faire.

Je dédie ce travail à :

Mon père Allah yerahmou et ma très chère mère qui se sont tant sacrifiés pour les besoins de mes études. Vous trouverez à travers ce travail, l'expression de toute mon affection, ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes frères, Abdeldjalil qui quand était jeune, a complété le rôle de mon père Allah yerahmou et Dhiaa eddine.

Mes sœurs Fatima, Amal, Rachida et leurs enfants, Mohamede, Areej, Maryame et toute la famille.

Toute ma famille.

Ma cousine Chems Mohammed Seghir.

Toutes mes amies.

Madame Zineb Kaiserli pour sa disponibilité et sa patience.

Ma petite ville Ouled Boughalem, Je te garderai toujours dans mon cœur.

Tous ceux et celles qui me sont chers.

Marwa

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier du fond du cœur "Allah" qui m'a donné la force, la volonté pour achever ce travail.

Je voudrais adresser sincèrement mes remerciements à mon encadreur Zineb KAISSERLI, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour sa disponibilité, sa gentillesse et surtout pour ces conseils et son énorme confiance en moi.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

J'adresse, aussi, mes remerciements à Madame Djemaia BENSİKADDOUR, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, qui a bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.

Je tiens à saisir cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants de l'Université de Mostaganem. Ils m'ont fourni les outils nécessaires pour la réussite dans mes études universitaires.

Un grand merci à mon père Allah yarahmou et à ma mère, à mes frères et sœurs pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et financier, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Je n'oublie pas de remercier tous mes camarades de la promotion 2021-2022.

Merci à tous.

Marwa

Table des matières

Index des notations	iv
Introduction	1
1 Notions de base	3
1 Introduction	3
2 Préliminaires	3
3 Système dynamique à temps continu	6
4 Système dynamique fractionnaire	13
5 Conclusion	19
2 Énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type	20
1 Introduction	20
2 Préliminaires	20
3 Énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type : État de l'art	22
4 Énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type : Une nouvelle approche	24
5 Conclusion	27
3 Validation numérique	28
1 Introduction	28
2 Système dynamique d'ordre fractionnaire	28
3 Système dynamique d'ordre ordinaire	30
4 Conclusion	31
Conclusion	32
Bibliographie	33

Index des notations

\mathbb{N}	: Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{N}^*	: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
\mathbb{R}	: Corps des nombres réels.
\mathbb{R}^*	: Corps des nombres réels non nuls.
\mathbb{R}_+	: Corps des nombres réels positifs ou nuls.
\mathbb{R}_-	: Corps des nombres réels négatifs ou nuls.
\mathbb{R}^n	: Espaces des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}^{n \times m}$: Espaces des matrices réelles de dimension $n \times m$.
\mathbb{C}	: Corps des nombres complexes.
\mathbb{C}^*	: Corps des nombres complexes non nuls.
$[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b , $a < b$.
\mathcal{C}^n	: Espace des fonctions n fois continument différentiable.
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}_2}$: Norme \mathcal{H}_2 .
$\Gamma(\cdot)$: Fonction Gamma d'Euler.
$f^{(n)}$: Dérivée n -ième de la fonction f .
\mathbf{D}^α	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α où $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
\mathcal{L}	: Transformation de Laplace.
\mathcal{L}^{-1}	: Transformation de Laplace inverse.
\mathcal{M}	: Transformation de Mellin.
tr	: Trace d'une matrice.
arg	: Argument d'un nombre complexe.
Re	: Partie réelle d'un nombre complexe.
det	: Déterminant d'une matrice.
δ	: Fonction Delta de Dirac.
I	: Matrice Identité.
*	: Produit de convolution.
!	: Factorielle d'un entier naturel.
BIBO	: <i>bounded-input, bounded-output</i> , i. e. ; Entrée bornée, sortie bornée.
EDO	: Équation différentielle ordinaire.
EDF	: Équation différentielle fractionnaire.

Introduction

Les modèles mathématiques sont considérés comme des outils complémentaires, pour comprendre le fonctionnement des phénomènes concrets et pour prévoir leurs évolutions. Transformer un phénomène réel en un modèle mathématique revient à le modéliser. Autrement dit, modéliser un phénomène consiste à élaborer une représentation mathématique qui permet de décrire et de prédire son comportement dynamique et permanent lorsqu'il est soumis à des influences externes (entrée de commande, perturbations, ...).

La modélisation mathématiques et la simulation d'un phénomène sont basées sur la description de ces propriétés en termes de dérivation. Les dérivations peuvent être :

- ordinaire, ainsi, le phénomène sera modélisé, par exemple, par une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + u(t),$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, y est la sortie, $y^{(i)}$ et a_i , pour $i = \overline{1, n}$, sont, respectivement, les dérivées d'ordre i de la fonction y par rapport à la variable t et les coefficients réels de l'EDO et u représente le contrôle ;

ou bien

- non entière, ainsi, le phénomène sera modélisé, par exemple, par une équation différentielle fractionnaire de la forme

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{D}^{\alpha_i} a_i y(t) = u(t),$$

telle que \mathbf{D}^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction y par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$, a_i , pour $i = \overline{1, n}$, sont les coefficients réels de l'EDF et u est la commande ;

ou par d'autres types de dérivations.

Ces équations différentielles peuvent être transformées, sous certaines conditions, en des systèmes différentiels, dit aussi système dynamique. Dans le cas où la dérivée est ordinaire, le système dynamique linéaire à temps continue correspondant est décrit par les équations

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, la trajectoire, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice commande, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice d'observation, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matrice de transmission, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Par contre, si la dérivée est non entière, le système dynamique devient

$$\begin{cases} \mathbf{E}\mathbf{D}^\alpha x(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t), \end{cases} \quad (2)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α , $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^n$ est la trajectoire, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande et $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie. \mathbf{A} , $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

En plus des équations différentielles et des systèmes dynamiques, les phénomènes réels peuvent être représentés par d'autres modèles mathématiques, parmi eux, nous trouvons la représentation par la fonction de transfert. Elle permet de donner une description, en moyennant la transformation de Laplace, entre la sortie y du système dynamique et son contrôle u , i. e. ;

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, où Y et U sont, respectivement, les transformées de Laplace de la sortie y et du contrôle u .

L'étude d'un système dynamique quelconque fait partie de la théorie du contrôle. C'est une science mathématique qui analyse les propriétés d'un système dynamique sur lequel nous pouvons agir au moyen d'un contrôle dans le but de l'amener d'un état initial donné à un état final souhaité.

L'une des propriétés de cette théorie est le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle, connue aussi sous le terme la norme \mathcal{H}_2 . Elle permet de calculer la performance du système dynamique via sa fonction de transfert.

L'objectif de ce travail est de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type à coefficients réels par deux techniques différentes. La première méthode consiste à évaluer cette norme en utilisant des formulations analytiques et algébriques [14]. Tandis que pour la deuxième méthode [13], le calcul de la norme \mathcal{H}_2 se fait en utilisant des techniques de la théorie des matrices et une transformation intégrale [6].

Ce manuscrit, lequel traite une étude théorique suivit par des simulations numériques, est composé de trois chapitres

- Le chapitre 1 est consacré aux définitions et aux notions de base dont nous aurons besoin pour élaborer ce travail. Il s'agit de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, suivi par, les transformations intégrales de Laplace et celle de Mellin. La solvabilité et les différentes représentations d'un système dynamique dans le cas où la dérivée est ordinaire sont, ensuite, étayées. En dernier, la solvabilité d'un système dynamique et la généralisation des représentations sont présentées dans le cas où la dérivée du système dynamique est non entière.
- Le chapitre 2 est dédié au calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type à coefficients réels par une méthode analytique [14] et une technique, développer récemment, plus simple à exploiter [13].
- Dans le chapitre 3, des exemples numériques sont présentés afin de comparer les deux approches utilisées et de montrer l'efficacité de l'approche proposée dans [13].

Ce manuscrit est clôturé par une conclusion et une bibliographie contenant les différents ouvrages et articles utilisés pour l'élaborer ce travail.

Chapitre 1

Notions de base

1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous rappellerons quelques concepts mathématiques. Il s'agit de définir la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, puis de présenter certaines transformations intégrales. Ensuite, l'étude d'un système dynamique ordinaire, y compris ces représentations, seront traitées, suivie par la généralisation de la notion du système dynamique avec ces représentations dans le cas où les dérivées sont d'ordre fractionnaire.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous présenterons quelques définitions et théorèmes qui vont nous aider à la compréhension et au développement des autres sections et chapitres.

2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.1 [3] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , où $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, est donnée par

$$\mathbf{D}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds,$$

où $f^{(n)}$ représente la dérivée d'ordre n de la fonction f par rapport à la variable s .

Exemple 1.1 Considérons la fonction constante $f(t) = c$. Pour tout $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de la fonction f est

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_a^\alpha f(t) &= \mathbf{D}_a^\alpha c, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n}{ds^n} c ds, \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Transformations intégrales

2.2.1 Transformation de Laplace

Définition 1.2 [5] Soit f une fonction à temps continu. La transformée de Laplace de la fonction f est la fonction F de la variable complexe s définie par

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Définition 1.3 [5] Une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $a = a_1 < \dots < a_{N+1} = b$ telle que sa restriction à tout intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ coïncide avec une fonction g_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, $k = \overline{1, N}$.

Définition 1.4 [5] La fonction f est dite d'ordre exponentiel, d'ordre a , s'il existe une constante $M > 0$, tel que pour un certain $T \leq 0$, nous avons

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t \leq T.$$

Théorème 1.1 [5] Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ est une intégrale généralisée bien définie si

- f est une fonction réelle continue par morceaux ;
- $\exists \beta \in]0, 1[$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\beta |f(t)| = 0$;
- f est une fonction d'ordre exponentiel.

Exemple 1.2 Soit $f(t) = e^{at}$. Il est clair que la fonction f vérifie les conditions du théorème 1.1, ainsi, sa transformée de Laplace existe et est donnée par

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt, \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-(s-a)t} \Big|_0^B, \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a, \\ &= \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 [5] Pour toutes fonctions f et g admettant des transformées de Laplace et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés suivantes

- **Linéarité :**

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(t)](s) + \beta \mathcal{L}[g(t)](s).$$

La linéarité de la transformation de Laplace découle des propriétés de l'intégrale.

- **Dérivation :**

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(t_0) \Big|_{t_0=0}.$$

- **Produit de convolution :**

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = F(s)G(s),$$

où

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.2 [2] Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\mathcal{L}[t^a](s) = \Gamma(a+1) s^{-(a+1)},$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler, elle donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Définition 1.5 [10] La transformée de Laplace inverse f de la fonction F , notée par \mathcal{L}^{-1} , est donnée par

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0,$$

où c_0 réside dans le demi plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

Exemple 1.3 Pour tout $s \in \mathbb{C} - \{-1, 2\}$, considérons la fonction $F(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2}$. Ainsi, sa transformée de Laplace inverse est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - s - 2}\right](t), \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right](t), \\ &= \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}), \end{aligned}$$

vu que $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ (voir exemple 1.2).

Théorème 1.2 [10] Soit f une fonction vérifiant les conditions du théorème 1.1. La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+)$, est donnée par

$$\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t_0) \Big|_{t_0=0},$$

où $n-1 < \alpha < n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, F est la transformée de Laplace de la fonction f et $f^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction f au point $t_0 = 0$.

2.2.2 Transformation de Mellin

Définition 1.6 [4] La transformation de Mellin d'une fonction f définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ est la fonction notée $\mathcal{M}[f]$ et définie par l'intégrale généralisée

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.3 [4] Supposons que

- f est continue sur $]0, +\infty[$;
- Pour un nombre réel a , $f(t) = \mathcal{O}(t^{-a})$ quand $t \rightarrow 0$;
- pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \mathcal{O}(t^{-\beta})$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > a$ et définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > a$.

Exemple 1.4 Soit $f(t) = e^{-at}$ où $t \in [0, +\infty[$. Il est clair que la fonction f vérifie les conditions du théorème 1.3 pour $\text{Re}(a) > 0$, ainsi, sa transformée de Mellin existe et est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(t)](s) &= \mathcal{M}[e^{-at}](s), \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at} t^{s-1} dt, \\ &= \frac{\Gamma(s)}{a^s}, \quad \text{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 [6] La transformation de Mellin de la fonction $f(t) = \frac{1}{t+a}$ est donnée par

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = \frac{\pi a^{s-1}}{\sin(\pi s)},$$

avec $0 < \text{Re } s < 1$ et $|\arg(a)| < \pi$.

3 Système dynamique à temps continu

Dans cette section, la solvabilité ainsi que les différentes représentations d'un système dynamique linéaire à temps continu seront traitées.

3.1 Définitions

Soit le système dynamique linéaire à temps continu

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente la trajectoire, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice d'observation, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matrice de transmission, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.7 [1] Le système dynamique (1.1) est dit *singulier*, si et seulement si,

$$\det(E) = 0.$$

Définition 1.8 [1] Le système dynamique (1.1) est dit *standard*, si et seulement si,

$$E = I.$$

Définition 1.9 [1] Le système dynamique (1.1) est dit *régulier*, si et seulement si,

$$\det(Es - A) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.4 [8] Pour tout système dynamique singulier et régulier de la forme (1.1), la matrice $(Es - A)$ peut s'écrire comme unique série de Laurent au voisinage de ∞

$$(Es - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-i-1}, \quad (1.2)$$

où $\mu = \text{rg } E - \deg(\det(Es - A)) + 1$ est appelé *indice de nilpotence du faisceau* $(Es - A)$ et ϕ_i est la matrice fondamentale associée au système (1.1).

3.2 Solvabilité d'un système dynamique

Considérons le système dynamique linéaire à temps continu de la forme

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, la trajectoire, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ avec $\det E \neq 0$.

Le condition initial associée au système (1.3) est

$$x(0) = x_0.$$

Supposons, de plus, que le système (1.3) est régulier, c'est-à-dire, la matrice

$$(Es - A)$$

est inversible pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Ainsi, la trajectoire du système (1.3) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\phi_i}{i!} \left(B \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau) d\tau + E t^i x_0 \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(B u^{(i-1)}(t) + E \delta^{(i-1)}(t) x_0 \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

où ϕ_i est la matrice fondamentale, μ est appelé indice de nilpotence du faisceau $(Es - A)$ avec $\mu = \text{rg } E - \text{deg}(\det(Es - A)) + 1$ et δ est la fonction Delta de Dirac, elle est donnée par

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

La trajectoire x est obtenue en utilisant la transformation de Laplace. En effet, de la transformation de Laplace et de la régularité du système (1.3), il découle

$$X(s) = (Es - A)^{-1} [BU(s) + Ex_0],$$

où X et U sont, respectivement, les transformées de Laplace des fonction x et u .

En remplaçant $(Es - A)^{-1}$ par l'expression de sa série de Laurant (formule (1.2)), nous obtenons

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-i-1} [BU(s) + Ex_0], \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i \left(s^{-i-1} BU(s) + s^{-i-1} Ex_0 \right) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(s^{i-1} BU(s) + s^{i-1} Ex_0 \right). \end{aligned}$$

En dernier, l'expression de la trajectoire (formule (1.4)) est obtenue par l'utilisation de la transformée de Laplace inverse.

Si $\det E \neq 0$, alors, la trajectoire de système dynamique (1.3) devient

$$x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(E^{-1}A)^i}{i!} \left(E^{-1}B \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau) d\tau + t^i x_0 \right). \quad (1.5)$$

3.3 Représentations d'un système dynamique

Tout système dynamique peut être représenté par plusieurs manières, lesquelles sont la représentation d'état (A, B, C, D), la fonction de transfert G , la réponse impulsionnelle g , l'équation différentielle et enfin la matrice de Schur S_G . Dans cette partie, avant de définir les représentations et faire le lien entre eux, nous présenterons la modélisation du phénomène de la masse-ressort-amortisseur classique.

3.3.1 Modélisation du phénomène de la masse-ressort-amortisseur classique

La figure 1.1 représente le phénomène de la masse-ressort-amortisseur

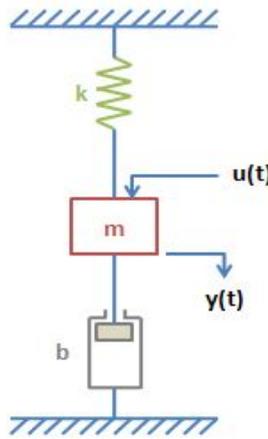


FIGURE 1.1 – Modèle de la masse-ressort-amortisseur classique.

Le système étudié consiste en une masse m reliée à un bâti immobile par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de constante d'amortissement b . La masse peut se déplacer dans une seule direction et est, en outre, soumise à une force $u(t)$. On suppose que les forces sont appliquées au centre d'inertie de la masse et que les mouvements et les forces intervenant dans les autres directions sont négligeable. De plus, l'effet de la gravité n'est pas pris en compte.

L'application du principe fondamental de la dynamique au système masse-ressort-amortisseur permet d'aboutir à l'équation du mouvement

$$m \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + k y(t) = u(t), \quad (1.6)$$

Si on prend, par exemple, $m = 1$, $b = 3$ et $k = 2$, l'équation du mouvement (1.6) devient

$$\ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) + 2 y(t) = u(t), \quad (1.7)$$

3.3.2 De l'équation différentielle à la représentation en espace d'état

Principe 1.1 *Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire avec second membre à coefficients constants*

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + u(t), \quad (1.8)$$

où y est la fonction de sortie, $y^{(i)}$ et a_i , pour $i = \overline{1, n}$, sont, respectivement, les dérivées d'ordre i de la fonction y par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$ et les coefficients réels de l'EDO. u est considérée comme fonction second membre.

Les conditions initiales associées à l'équation (1.8) sont

$$y^{(i)}(0) = y_{0,i}, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (1.9)$$

Pour des raisons de simplification, nous prenons $y_{0,i} = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

L'utilisation d'un changement de fonction adéquat permet de transformer l'équation (1.8) en un système dynamique. En effet, pour

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) \\ \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}(t) + u(t) \end{cases},$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

où

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \quad \text{et} \quad D = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Les conditions initiales (1.9) deviennent

$$x(0) = x_0 = y_{0,i} = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Exemple 1.5 Considérons l'équation différentielle ordinaire décrivant le phénomène de la masse-ressort-amortisseur classique

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t), \quad (1.10)$$

où $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ (pour des raisons de simplification).

L'équation (1.10) peut être transformée en un système différentiel. Pour se faire, posons

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Ainsi, la forme matricielle associée à l'EDO (1.10) est

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales deviennent

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou tout simplement

$$x(0) = 0.$$

3.3.3 De la représentation en espace d'état à la fonction de transfert

Principe 1.2 *Considérons le système dynamique suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, le vecteur d'état, d'entrée et de sortie avec $t \in \mathbb{R}_+$. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

x_0 représente la condition initiale, cependant, pour des raisons de simplification, nous prenons $x_0 = 0$, c'est-à-dire,

$$x(0) = 0.$$

L'application de la transformation de Laplace au système (1.12) donne

$$\begin{cases} X(s) = (Is - A)^{-1}BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s), \end{cases}$$

où X , U et Y sont les transformations de Laplace des fonctions x , u et y respectivement.

Si nous remplaçons $X(s)$ par $(Is - A)^{-1}BU(s)$ dans $Y(s)$, il découle

$$Y(s) = C(Is - A)^{-1}BU(s) + DU(s).$$

Ainsi, par définition, la fonction de transfert est

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}, \\ &= C(Is - A)^{-1}B + D, \end{aligned}$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Exemple 1.6 Soit le système dynamique décrivant le phénomène de masse-ressort-amortisseur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$.

L'application de la transformée de Laplace sur le système (1.13), permet de trouver

$$\begin{cases} X(s) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s), \\ Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X(s), \end{cases}$$

où X , Y et U sont, respectivement, les transformées de Laplace de x , y et u , alors,

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s).$$

Ainsi, la fonction de transfert associée au système (1.13) est

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 La commande `ss2tf` du logiciel MATLAB permet de transformer des équations d'état à une fonction de transfert.

3.3.4 De la fonction de transfert à la représentation en espace d'état

Principe 1.3 Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Comme $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, alors,

$$Y(s) = C(Is - A)^{-1}BU(s) + DU(s).$$

Ainsi, pour

$$X(s) = (Is - A)^{-1}BU(s), \quad (1.14)$$

nous aurons

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (1.15)$$

L'application de la transformation inverse de Laplace sur les équations (1.14) et (1.15) donne

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.7 Soit la fonction de transfert modélisant le phénomène de la masse-ressort-amortisseur

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Comme

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

alors,

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) - \frac{1}{s+2}U(s).$$

Posons

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{s+1}, \\ X_2(s) = \frac{U(s)}{s+2}, \\ Y(s) = X_1(s) - X_2(s). \end{cases} \quad (1.16)$$

L'application de la transformée inverse de Laplace sur (1.16), nous donne

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

D'où, une autre représentation d'espace en état possible

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t). \end{cases}$$

Remarque 1.2

1. La commande `tf2ss` du logiciel MATLAB permet de transformer la fonction de transfert a des équations en espace d'état.

2. Par l'utilisation de la commande `tf2ss`, la fonction de transfert $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$, admet la représentation en espace d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t). \end{cases} \quad (1.17)$$

3.3.5 De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle

Principe 1.4 La réponse impulsionnelle, notée g , d'un système dynamique est la transformée de Laplace inverse de sa fonction de transfert G , i. e. ;

En effet,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t), \\ &= \mathcal{L}^{-1}[C(Is - A)^{-1}B + D](t), \\ &= Ce^{At}B + D\delta(t), \end{aligned}$$

où δ est la fonction Delta de Dirac.

Exemple 1.8 Soit la fonction de transfert G modélisant le modèle masse-ressort-amortisseur

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Comme

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t),$$

alors,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right](t), \\ &= e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

3.3.6 De la fonction de transfert à la matrice de Schur

Définition 1.10 [17] Considérons la matrice block M de dimension $(n+m) \times (n+m)$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} N & O \\ \hline Q & R \end{array} \right],$$

avec N , O , Q et R sont des matrices de dimension $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$ respectivement.

Le complément de Schur de la matrice régulière N en M est la matrice S_M donnée par

$$M/N = S_M = R - QN^{-1}O.$$

Principe 1.5 En se basant sur la définition 1.10, la matrice de Schur de la fonction de transfert

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D,$$

associée au système dynamique régulier (1.12) est donnée par

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right].$$

Exemple 1.9 La matrice de Schur de la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2},$$

du modèle masse-ressort-amortisseur, est donnée par

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s & -1 & 0 \\ 2 & s+3 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

4 Système dynamique fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons la solvabilité et les différentes représentations d'un système dynamique fractionnaire linéaire à temps continu.

4.1 Définitions

Un système dynamique fractionnaire linéaire à temps continu est défini par

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \mathbf{A} x(t) + \mathbf{B} u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C} x(t) + \mathbf{D} u(t), \end{cases} \quad (1.18)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α , avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^n$ est la trajectoire, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. \mathbf{A} , $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.18) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0}, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Définition 1.11 [1] *Le système dynamique (1.18) est dit singulier, si et seulement si,*

$$\det(\mathbf{E}) = 0.$$

Définition 1.12 [1] *Le système dynamique (1.18) est dit standard, si et seulement si,*

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}.$$

Définition 1.13 [1] *Le système dynamique (1.18) est dit régulier, si et seulement si,*

$$\det(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A}) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.5 [8] *Pour tout système dynamique régulier de la forme (1.18), la matrice $(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})$ peut s'écrire comme unique série de Laurent au voisinage de ∞ comme*

$$(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)\alpha}, \quad (1.19)$$

où $\mu = \text{rg } \mathbf{E} - \deg(\det(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})) + 1$ est appelé indice de nilpotence du couple (\mathbf{E}, \mathbf{A}) et ϕ_i est la matrice fondamentale associée au système (1.18).

4.2 Solvabilité d'un système dynamique fractionnaire

Considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire singulier à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \mathbf{A} x(t) + \mathbf{B} u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C} x(t) + \mathbf{D} u(t), \end{cases} \quad (1.20)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α , $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. \mathbf{A} , $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ avec $\det \mathbf{E} = 0$.

Les conditions initiales associées au système (1.20) sont

$$x^{(k)}(0) = x_{k,0}, \quad \forall k = \overline{0, n-1}.$$

Supposons que le système (1.20) est régulier, i. e. ;

$$\det(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A}) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

La solution x du système (1.20) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes [2]

- $s^{\alpha-1-k} E x^{(k)}(0)$ existe pour tout $s \in [0, +\infty[$, $n-1 < \alpha < n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$;
- $u(t)$ existe, $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\forall k \geq 0$.

L'application de la transformation de Laplace sur la première équation du système (1.20), donne

$$E s^\alpha X(s) - E \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x^{(k)}(0) = AX(s) + BU(s),$$

ce qui est équivalent à

$$(E s^\alpha - A)X(s) = BU(s) + E \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x_{k,0},$$

où $x_{k,0} = x^{(k)}(0)$ pour tout $k = \overline{0, n-1}$.

Comme le système est régulier, alors,

$$X(s) = (E s^\alpha - A)^{-1} BU(s) + (E s^\alpha - A)^{-1} E \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x_{k,0},$$

ainsi, par l'utilisation de la série de Laurant (formule (1.19)), il découle

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)\alpha} BU(s) + \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)\alpha} E \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x_{k,0}.$$

Par la transformation inverse de Laplace, nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} Bu(\tau) d\tau + E \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)} x_{k,0} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(B D^{(i-1)\alpha} u(t) + E \sum_{k=0}^{n-1} D^{i\alpha - k - 1} \delta(t) x_{k,0} \right). \end{aligned}$$

Si $E = I$, la trajectoire du système dynamique fractionnaire (1.20), devient

$$x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} Bu(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{\alpha i + k}}{\Gamma(\alpha i + k + 1)} x_{k,0}. \quad (1.21)$$

Remarque 1.3 La trajectoire du système dynamique fractionnaire (1.20) peut être obtenue par d'autres transformations intégrales. Par exemple, dans [11] et dans [12], l'état a été obtenue en utilisant la transformation de Sumudu.

4.3 Généralisation des représentations d'un système dynamique

Avant de passer aux différentes représentations d'un système dynamique fractionnaire, rappelons la définition d'un système dynamique fractionnaire commensurable.

Définition 1.14 [15] Un système dynamique fractionnaire est dit commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle d'ordre non entier qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Considérons le système dynamique standard fractionnaire commensurable d'ordre α suivant

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1.22)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, la trajectoire, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

Les conditions initiales associées au système dynamique fractionnaire (1.22) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0},$$

pour tout $i = 0, \dots, n - 1$. Toutefois, pour des raisons de simplifications, nous prenons

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0} = 0,$$

pour tout $i = 0, \dots, n - 1$.

Le système dynamique (1.22) peut être représenté par différentes représentations, lesquelles sont

- **Équation différentielle fractionnaire** : L'équation différentielle fractionnaire associée au système (1.22) est donnée par

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{D}^{\alpha_i} y(t) = u(t),$$

où les conditions initiales sont

$$y^{(i)}(0) = 0,$$

pour $0 \leq i \leq n$;

- **Fonction de transfert** : Par l'utilisation de la transformation de Laplace sur le système (1.22), nous obtenons la fonction de transfert

$$G(s) = C(Is^\alpha - A)^{-1}B + D;$$

- **Réponse impulsionnelle** : La réponse impulsionnelle, notée g , est la transformation inverse de Laplace de la fonction de transfert G , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t), \\ &= \mathcal{L}^{-1}[C(Is^\alpha - A)^{-1}B + D](t). \end{aligned}$$

Il est simple de montrer que

$$D\mathcal{L}^{-1}[1](t) = D\delta(t),$$

où δ est la fonction Delta de Dirac.

Cependant, il est difficile de trouver la transformée inverse de Laplace de $(Is^\alpha - A)^{-1}$. En effet, dans le cas réel, i. e. ; $A \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\frac{1}{s^\alpha + (-A)} = \frac{1}{s^\alpha} - \frac{-A}{s^{2\alpha}} + \frac{(-A)^2}{s^{3\alpha}} + \dots,$$

et comme

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad (1.23)$$

alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha - A}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} - \frac{-A}{s^{2\alpha}} + \frac{(-A)^2}{s^{3\alpha}} + \dots\right](t), \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{-At^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{A^2 t^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} + \dots, \\ &= t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la réponse impulsionnelle g associée au système (1.22) est

$$g(t) = Ct^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} B + D\delta(t)$$

- **Matrice de Schur :** La matrice de Schur est, aussi, considérée comme une représentation du système (1.22). Elle est donnée par

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} Is^\alpha - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right].$$

Le schéma ci-dessous regroupe les différentes représentations possible d'un phénomène réel

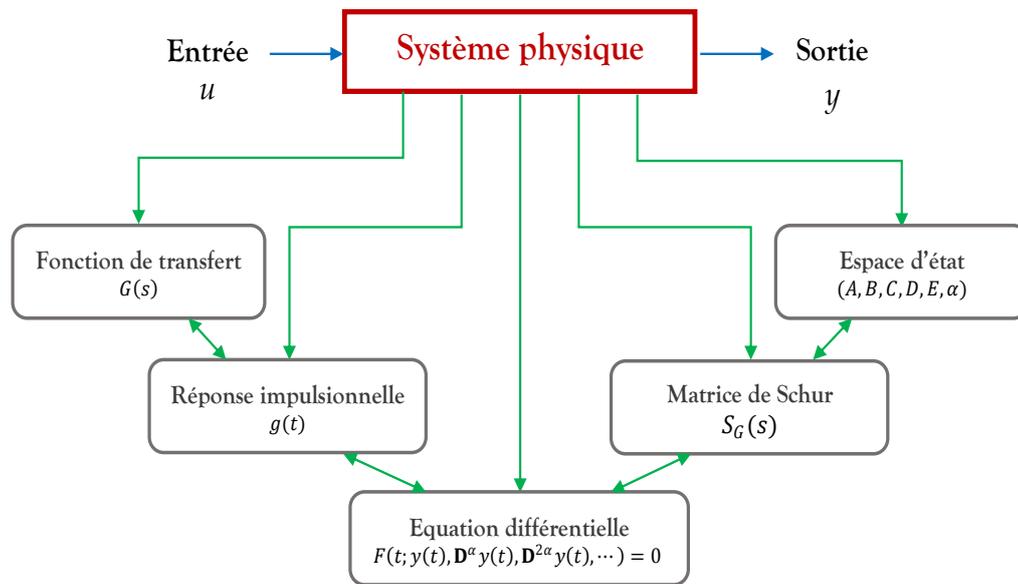


FIGURE 1.2 – Les différentes formes de modélisation

Exemple 1.10 La figure 1.3 représente le modèle de suspension des voitures de degré 1

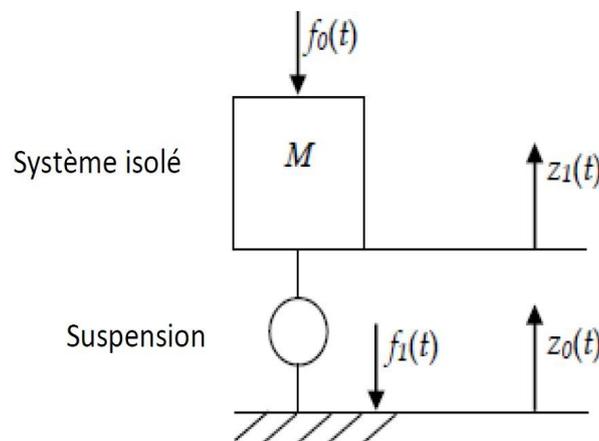


FIGURE 1.3 – Modèle de suspension des voitures de degré 1 [7]

M représente la masse de la voiture, z_0 est le profil de la roue, f_0 est l'effort appliqué lors de la suspension et z_1 , f_1 sont la force générée par la suspension et le mouvement vertical de la masse respectivement.

L'équation différentielle fractionnaire

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + \omega_h^{1.5} \mathbf{D}^{2\alpha} y(t) - u(t) = 0, \quad (1.24)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{3}{2}$ au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, et $\omega_h = 20$, modélise le phénomène de suspension des voitures de degré 1.

Pour des raisons de simplification, nous supposons que les conditions initiales associées à l'équation (1.24) sont nulles, i. e. ;

$$y^{(i)}(0) = 0, \quad \text{pour } i = \overline{0, 2}.$$

Le phénomène de suspension des voitures de degré 1 admet d'autres représentations lesquelles sont

- **La représentation en espace d'état :** Pour passer de l'équation différentielle fractionnaire (1.24) au système dynamique fractionnaire, il suffit de poser

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \mathbf{D}^\alpha y(t) \\ x_3(t) = \mathbf{D}^{2\alpha} y(t) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = \mathbf{D}^\alpha y(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = \mathbf{D}^{2\alpha} y(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_3(t) = \mathbf{D}^{3\alpha} y(t) \end{cases}, \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = x_3(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_3(t) = -\omega_h^{1.5} x_3(t) + u(t) \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, la représentation en espace d'état de l'équation différentielle fractionnaire (1.24) est

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\frac{3}{2}} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1.25)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\omega_h = 20$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_h^{1.5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (1 \ 0 \ 0),$$

et les conditions initiales deviennent

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **La fonction de transfert :** La fonction de transfert fractionnaire associée à l'équation (1.24) est obtenu par l'application de la transformée de Laplace au système dynamique (1.25), i. e. ;

$$Y(s) = C(Is^\alpha - A)^{-1}BU(s),$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}, \\
 &= C(Is^\alpha - A)^{-1}B, \\
 &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{s^\alpha} & \frac{1}{s^{2\alpha}} & \frac{1}{s^{2\alpha}(s^\alpha + \omega_h^{1.5})} \\ 0 & \frac{1}{s^\alpha} & \frac{1}{s^\alpha(s^\alpha + \omega_h^{1.5})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^\alpha + \omega_h^{1.5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 &= \frac{1}{s^{2\alpha}(s^\alpha + \omega_h^{1.5})}.
 \end{aligned}$$

- **La réponse impulsionnelle :** *La réponse impulsionnelle associée à l'équation différentielle fractionnaire (1.24) est*

$$\begin{aligned}
 g(t) &= Ct^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} A^n B, \\
 &= (1 \ 0 \ 0) t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_h^{1.5} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

- **La matrice de Schur :** *La matrice de Schur associée à l'équation (1.24) est*

$$\begin{aligned}
 S_G(s) &= \left[\begin{array}{ccc|c} Is^\alpha - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right], \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|c} s^\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s^\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s^\alpha + \omega_h^{1.5} & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et quelques transformations intégrales. Ensuite, la solvabilité et les différentes représentations d'un système dynamique linéaire à temps continu à la fois dans le cas ordinaire et fractionnaire ont été présentées. Ces notions nous seront d'une grande utilité pour le développement du second chapitre.

Chapitre 2

Énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement au calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle, dite aussi la norme \mathcal{H}_2 , d'une fonction de transfert du premier type associée à un système dynamique fractionnaire. Cette norme est utilisée pour mesurer la performance et la précision d'une fonction de transfert stable, causale et propre.

Dans un premier temps, nous allons rappeler quelques notions sur la norme \mathcal{H}_2 , puis, nous reproduirons les calculs déjà établis dans [14] où des formulations analytiques et algébriques seront utilisées. Ensuite, nous nous focaliserons sur une approche développée récemment [13]. L'idée principale de cette dernière est l'utilisation des outils de la théorie des matrices et des transformations intégrales.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous présenterons les différents outils utilisés pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 . Il s'agit de la forme générale d'un système dynamique fractionnaire du premier type à temps continu, sa matrice de Schur correspondante et les différentes définitions de la norme \mathcal{H}_2 .

2.1 Système dynamique fractionnaire associé à une fonction de transfert du premier type

Considérons le système dynamique fractionnaire du premier type propre

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = -ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^*$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^*$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}^*$ est la sortie, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}^*$. \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons, de plus, que le système est régulier, c'est-à-dire,

$$(s^\alpha + a) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

L'utilisation de la transformée de Laplace permet de transformer le système (2.1) de l'espace d'état à la fonction de transfert, cette dernière est donnée par

$$G(s) = c \frac{1}{s^\alpha + a} b,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$. Elle représente aussi le complément de Schur de la matrice

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} s^\alpha + a & b \\ \hline -c & 0 \end{array} \right].$$

D'autre part, la fonction de transfert complexe conjuguée associée au système (2.1) est

$$G^*(s) = b \frac{1}{s^\alpha + a} c,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, elle est le complément de Schur de la matrice

$$S_{G^*}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \overline{s^\alpha + a} & c \\ \hline -b & 0 \end{array} \right].$$

Par des manipulations algébriques sur les matrices de Schur S_G et S_{G^*} , nous obtenons la matrice parahermitienne. Elle est exprimée par

$$S_\phi(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{s^\alpha + a} & c \\ s^\alpha + a & -b^2 & 0 \\ \hline -c & 0 & 0 \end{array} \right],$$

de plus, elle correspond à la fonction de transfert parahermitienne suivante

$$\phi(s) = c(s^\alpha + a)^{-1} b^2 (\overline{s^\alpha + a}) c.$$

2.2 Énergie de la réponse impulsionnelle : norme \mathcal{H}_2

Définition 2.1 [16] On appelle norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert G d'un système dynamique entre la commande u et la sortie y le réel positif défini par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G^*(-j\omega) G(j\omega)] d\omega. \quad (2.2)$$

Définition 2.2 [16] Soit G une fonction de transfert associée à un système dynamique, si $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$, alors, la norme \mathcal{H}_2 est définie par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{tr} [G^*(-j\omega) G(j\omega)] d\omega. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant montre les variations de α pour qu'un système dynamique fractionnaire soit stable.

Théorème 2.1 [14] La fonction de transfert commensurable $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, d'ordre α est stable au sens bounded input, bounded output (i. e. ; d'entrée bornée et de sortie bornée) si

- $0 < \alpha < 2$;
- $\forall s \in \mathbb{C}$, telle que $U(s) = 0$

$$|\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Théorème 2.2 [14] Soient G et g , la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle, respectivement, associées au système dynamique (2.1), alors,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s). \quad (2.4)$$

Remarque 2.1 [14] Il est à noter que dans le cas où le système dynamique est d'ordre fractionnaire, sa norme \mathcal{H}_2 peut être égale à l'infinie pour une certaine valeur de α . En effet, l'utilisation du théorème 2.2 et le comportement de la réponse impulsionnelle au voisinage de 0 permet d'en déduire que la fonction de transfert G a une réponse impulsionnelle infinie en $t = 0$, par conséquent, une norme \mathcal{H}_2 infinie lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

3 Énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type : État de l'art

Dans cette section, nous présenterons la méthode proposée par *Malti et al.* dans [14] pour calculer la norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type où des formulations algébriques et analytiques seront utilisées.

Théorème 2.3 [14] La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert fractionnaire du premier type

$$G(s) = c \frac{1}{s^\alpha + a} b,$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b, c \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \alpha < 2$ est donnée selon les variations de α par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}; \\ -c^2 b^2 \frac{a^{\frac{1}{\alpha}-2}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < 2 \quad \text{et} \quad \alpha \neq 1; \\ \frac{c^2 b^2}{2a} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Preuve. Considérons la fonction de transfert du premier type

$$G(s) = c \frac{1}{s^\alpha + a} b, \quad (2.5)$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, b et $c \in \mathbb{R}^*$.

Un passage au domaine fréquentiel nécessite le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} s = j\omega &\Rightarrow s^\alpha = (j\omega)^\alpha, \\ &\Rightarrow s^\alpha = j^\alpha \tilde{\omega}, \quad \text{avec } \omega^\alpha = \tilde{\omega} \quad \text{et} \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de transfert (2.5) devient

$$G(\tilde{\omega}) = c \frac{1}{j^\alpha \tilde{\omega} + a} b,$$

et son conjugué devient

$$G^*(\tilde{\omega}) = b \frac{1}{(-j)^\alpha \tilde{\omega} + a} c.$$

Comme

$$\tilde{\omega} = \omega^\alpha,$$

alors,

$$d\omega = \frac{1}{\alpha} \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}.$$

Ainsi, la norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert (2.5) est

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{2\alpha\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\tilde{\omega}) G^*(j\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}, \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \frac{c b}{(j^\alpha \tilde{\omega} + a)} \frac{b c}{((-j)^\alpha \tilde{\omega} + a)} \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}, \\ &= \frac{c^2 b^2}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(\tilde{\omega} + a e^{-j\frac{\pi}{2}})(\tilde{\omega} + a e^{j\frac{\pi}{2}})} d\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Nous distinguons trois cas :

- Pour $\alpha = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{c^2 b^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega + a e^{-j\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\omega + a e^{j\frac{\pi}{2}}} d\omega, \\ &= \frac{c^2 b^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega, \\ &= \frac{c^2 b^2}{\pi a} \arctan(\omega) \Big|_0^A, \text{ avec } A \rightarrow +\infty, \\ &= \frac{c^2 b^2}{2a}; \end{aligned}$$

- Pour $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ et $\alpha \neq 1$, nous aurons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{c^2 b^2}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(\tilde{\omega} + a e^{-j\frac{\pi}{2}})(\tilde{\omega} + a e^{j\frac{\pi}{2}})} d\tilde{\omega}, \\ &= \frac{c^2 b^2}{2\alpha\pi a j \sin(\frac{\pi}{2})} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + a e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}} d\tilde{\omega} - \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + a e^{j\frac{\alpha\pi}{2}}} d\tilde{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 1.3, nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\omega} + a e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}} \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega} = \frac{\pi \left(a e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\omega} + a e^{j\frac{\alpha\pi}{2}}} \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega} = \frac{\pi \left(a e^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{c^2 b^2}{2\alpha\pi a j \sin(\frac{\alpha\pi}{2})} \left(\frac{\pi \left(a e^{-j\alpha\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} - \pi \left(a e^{j\alpha\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})} \right), \\ &= \frac{-c^2 b^2 a^{\frac{1}{\alpha}-2}}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right);\end{aligned}$$

- Pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \infty,$$

d'après la remarque 2.1, ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.

■

4 Énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type : Une nouvelle approche

Dans cette section, nous allons calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type par une approche développée récemment [13]. L'idée clé de cette nouvelle technique est l'utilisation de la représentation en espace d'état, la matrice parahermitienne et des transformations matricielles et intégrales.

Pour cela, considérons le système dynamique fractionnaire linéaire régulier et propre suivant

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= -ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= cx(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, avec $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, x , u , $y \in \mathbb{R}^*$ sont, respectivement, l'état, l'entrée, et la sortie et $a \in \mathbb{R}_+$ et $b, c \in \mathbb{R}^*$.

Les conditions initiales associées au système dynamique (2.6) sont

- $x(0) = 0$ si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$
- $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ si $1 \leq \alpha < 2$

De plus, le système (2.6) est régulier, ce qui est équivalent à

$$(s^\alpha + a) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Les matrices de Schur S_G et son conjuguée S_{G^*} associées au système (2.6), dans un domaine fréquentiel, sont exprimées par

$$S_G(\tilde{\omega}) = \left[\begin{array}{c|c} j^\alpha \tilde{\omega} + a & b \\ \hline -c & 0 \end{array} \right],$$

et

$$S_{G^*}(\tilde{\omega}) = \left[\begin{array}{c|c} (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a & c \\ \hline -b & 0 \end{array} \right].$$

4. ÉNERGIE DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE DE LA FONCTION DE TRANSFERT FRACTIONNAIRE DU PREMIER TYPE : UNE NOUVELLE APPROCHE

Par des manipulations algébriques entre la matrice de Schur S_G et son conjugué S_{G^*} , nous obtenons la matrice parahermitienne S_ϕ . Elle est donnée par

$$\begin{aligned} S_\phi(\tilde{\omega}) &= S_G(\tilde{\omega}) \times S_{G^*}(\tilde{\omega}), \\ &= \left[\begin{array}{c|c} j^\alpha \tilde{\omega} + a & b \\ \hline -c & 0 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a & c \\ \hline -b & 0 \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} + a & -b^2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c \\ 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Il est très connu dans la littérature [9], que la matrice parahermitienne S_ϕ reste invariante par des transformations colonnes et lignes. En effet, la multiplication de la matrice S_ϕ par des matrices de transformations M_1 et M_2 donne

$$\begin{aligned} S_{\tilde{\phi}}(\tilde{\omega}) &= M_1(\tilde{\omega}) \times S_\phi(\tilde{\omega}) \times M_2(\tilde{\omega}), \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ p & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} + a & -b^2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} 1 & p \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} + a & (j^\alpha \tilde{\omega} + a)p + p((-j)^\alpha \tilde{\omega} + a) - b^2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c \\ pc \\ 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Les matrices de transformation dépendent du paramètre p , lequel est la solution de l'équation

$$(j^\alpha \tilde{\omega} + a)p + p((-j)^\alpha \tilde{\omega} + a) - b^2 = 0,$$

d'où

$$p = \frac{b^2}{2 \left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} + a \right)}.$$

Ainsi, la matrice parahermitienne $S_{\tilde{\phi}}$ devient

$$S_{\tilde{\phi}}(\tilde{\omega}) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a \\ \hline j^\alpha \tilde{\omega} + a & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c \\ \frac{c b^2}{2 \left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} + a \right)} \end{array} \right],$$

où sa fonction de transfert parahermitienne est

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{\omega}) &= - \left(-c \quad -\frac{c b^2}{2 \left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} + a \right)} \right) \begin{pmatrix} 0 & (-j)^\alpha \tilde{\omega} + a \\ j^\alpha \tilde{\omega} + a & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ \frac{c b^2}{2 \left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} + a \right)} \end{pmatrix}, \\ &= c^2 b^2 \left(\tilde{\omega} + j^{\frac{1}{\alpha}} a \right)^{-1} \left(\tilde{\omega} + (-j)^{\frac{1}{\alpha}} a \right)^{-1}, \\ &= \frac{c^2 b^2}{2 a j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(\frac{1}{\tilde{\omega} + a e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}} - \frac{1}{\tilde{\omega} + a e^{j\frac{\alpha\pi}{2}}} \right). \end{aligned}$$

En dernier,

$$\begin{aligned}
 \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega, \\
 &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} G(j\tilde{\omega}) G^*(j\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}, \\
 &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}, \\
 &= \frac{c^2 b^2}{2\alpha\pi j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\tilde{\omega} + ae^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}} - \frac{1}{\tilde{\omega} + ae^{j\frac{\alpha\pi}{2}}} \right) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}.
 \end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas

1. Pour $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, $\alpha = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(\omega) d\omega, \\
 &= \frac{c^2 b^2}{2a\pi j} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega + ae^{-j\frac{\pi}{2}}} d\omega - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega + ae^{j\frac{\pi}{2}}} d\omega \right], \\
 &= \frac{c^2 b^2}{2a\pi j} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\tilde{\omega} + ae^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \Big|_0^\lambda - \ln\left(\tilde{\omega} + ae^{j\frac{\pi}{2}}\right) \Big|_0^\lambda \right], \\
 &= \frac{c^2 b^2}{2a\pi j} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\tilde{\omega} + ae^{-j\frac{\pi}{2}}}{\tilde{\omega} + ae^{j\frac{\pi}{2}}}\right) \Big|_0^\lambda, \\
 &= \frac{c^2 b^2}{2a}.
 \end{aligned}$$

2. Pour $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, $\alpha \in]\frac{1}{2}, 2[$ et $\alpha \neq 1$, nous aurons

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{c^2 b^2}{2\alpha\pi j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\tilde{\omega} + ae^{-j\frac{\alpha\pi}{2}}} - \frac{1}{\tilde{\omega} + ae^{j\frac{\alpha\pi}{2}}} \right) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega},$$

par l'utilisation de la transformation de Mellin, il découle

$$\begin{aligned}
 \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{c^2 b^2}{2\alpha\pi a j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(\frac{\pi \left(ae^{-j\alpha\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} - \pi \left(ae^{j\alpha\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \right), \\
 &= \frac{c^2 b^2 a^{\frac{1}{\alpha}-2}}{2\alpha j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{-2j \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}, \\
 &= -c^2 b^2 \frac{a^{\frac{1}{\alpha}-2}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

d'où le théorème

Théorème 2.4 [13] *La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert du premier type associée à la représentation en espace d'état $\{a, b, c, \alpha\}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ et $(s^\alpha + a) \neq 0$ pour certains $s \in \mathbb{C}$, est donnée, selon les variations de α , par*

- Si $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ et $\alpha \neq 1$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = -\frac{b^2 c^2 a^{\frac{1}{\alpha}-2} \cot\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}. \quad (2.7)$$

- Si $\alpha = 1$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{b^2 c^2}{2a}. \quad (2.8)$$

La technique présentée précédemment peut être appliquée, sans gêne, pour tout système dynamique décrit par la représentation en espace d'état $\{A, B, C\}$ pour $\alpha = 1$.

Corollaire 2.1 [13] *La norme \mathcal{H}_2 du système dynamique*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(0) &= 0, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, la trajectoire, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie, pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr}(CPC^T),$$

telle que la matrice P est la solution de l'équation de Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad (2.9)$$

où A^T, B^T et C^T sont, respectivement, les matrices transposées des matrices A, B , et C .

5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de faire une synthèse sur les méthodes existantes pour le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert fractionnaire du premier type. Nous avons commencé par rappeler quelques définitions et théorèmes essentiels, puis nous avons présenté deux méthodes de calcul de la norme \mathcal{H}_2 . La première méthode est basée sur l'utilisation des formulations algébriques et analytique, or, des outils de la théorie des matrices ainsi que des transformations intégrales sont utilisés pour établir la deuxième approche. La validation numérique des deux approches sera traitée dans le troisième chapitre.

Chapitre 3

Validation numérique

1 Introduction

Dans ce chapitre, la validation numérique des approches proposées précédemment sera présentée aussi bien pour un système dynamique d'ordre fractionnaire que d'ordre ordinaire. De plus, la solvabilité des systèmes dynamiques envisagés sera, également, considérée.

2 Système dynamique d'ordre fractionnaire

Dans cette section, la solvabilité et le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire seront présentés.

2.1 Exemple

Considérons le système dynamique fractionnaire à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= -2x(t) + u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où \mathbf{D}^α , avec $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ est l'état, $u \in \mathbb{R}$ est le contrôle et $y \in \mathbb{R}$ représente la sortie.

Les conditions initiales associées au système dynamique (3.1) sont

- $x(0) = 0$ si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$
- $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ si $1 \leq \alpha < 2$

Supposons, de plus, que le système (3.1) est régulier, c'est-à-dire,

$$s^\alpha + 2 \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, et qu'il vérifie les conditions suivantes

(C.1) $s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(0)$ est nulle pour tout $s \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, et $k = 0, 1$;

(C.2) $u(t)$ existe, $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\forall k \geq 0$.

2.2 Solvabilité du système dynamique fractionnaire (3.1)

Le système dynamique d'ordre fractionnaire (3.1) est un système régulier, de plus, suite aux conditions (C.1) et (C.2), sa trajectoire est sans impulsion, ainsi, d'après la formule (1.21), sa solution est donnée par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-2)^i}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau.$$

2.3 Norme \mathcal{H}_2 du système (3.1)

Le système dynamique fractionnaire (3.1) vérifie les conditions des théorèmes 2.1, 2.3 et 2.4, ainsi, sa norme \mathcal{H}_2 est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \alpha = 1 \\ 2^{\frac{1}{\alpha}-2} \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < 2 \text{ et } \alpha \neq 1. \end{cases}.$$

En utilisant un code MATLAB, une comparaison entre les approches proposées par [13] et [14] a été faite par rapport aux différentes valeurs de $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[$. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 3.1.

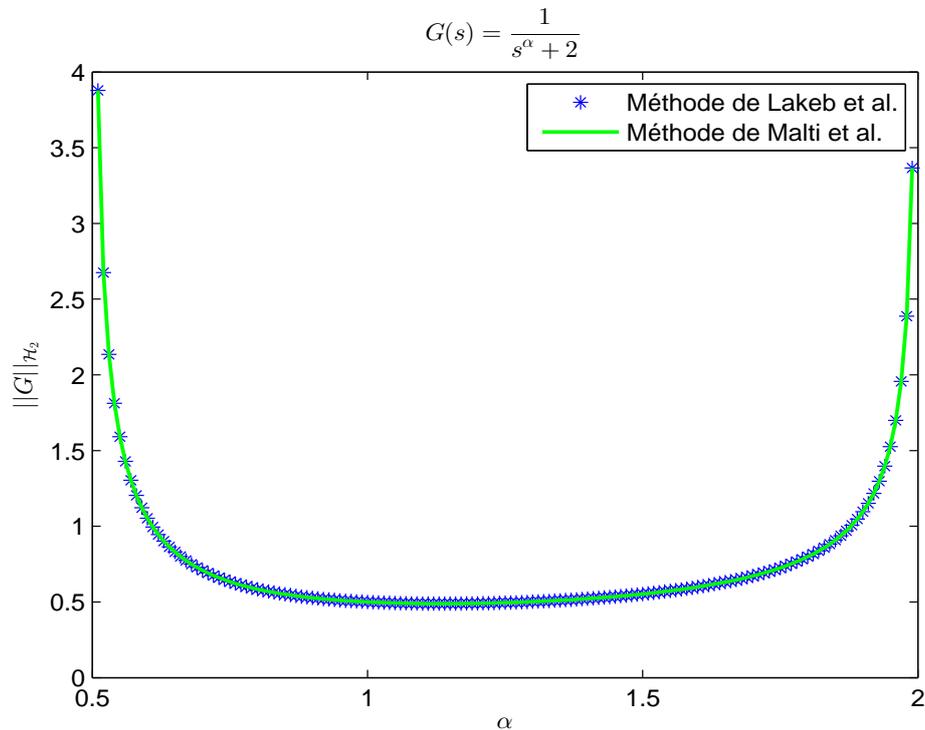


FIGURE 3.1 – Comparaison entre les valeurs de la norme \mathcal{H}_2 entre les méthodes proposées dans [13] et [14] pour $G(s) = \frac{1}{s^\alpha + 2}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

Les deux courbes coïncident, ce qui confirme que les deux approches sont identiques.

3 Système dynamique d'ordre ordinaire

La solvabilité et le calcul de la norme \mathcal{H}_2 du système dynamique modélisant le phénomène de la masse-ressort-amortisseur seront traités dans cette section.

3.1 Exemple

Le phénomène de la masse-ressort-amortisseur représenté par la figure 1.1 est décrit par les équations suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^2$ est la trajectoire, $u \in \mathbb{R}$ est la commande et $y \in \mathbb{R}$ représente la sortie.

Les conditions initiales associées au système dynamique (3.2) sont

$$x(0) = 0.$$

Supposons, de plus, que le système (3.2) est régulier, i. e. ;

$$s^2 + 3s + 2 \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

3.2 Solvabilité du système dynamique (3.2)

Comme le système dynamique (3.2) est régulier pour certains $s \in \mathbb{C}$, alors, d'après la formule (1.5), sa trajectoire est exprimée par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau) d\tau.$$

3.3 Norme \mathcal{H}_2 du système dynamique (3.2)

Il est clair que le système dynamique (3.2) vérifie les conditions du corollaire 2.1, ainsi, l'utilisation de la commande `lyap` du logiciel MATLAB permet de déterminer les valeurs de la matrice P. Cette dernière est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Ensuite, par un code MATLAB nous pouvons calculer la valeur de la norme \mathcal{H}_2 du système dynamique (3.2), elle est estimée à

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= CPC^T, \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

4 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la validation numérique des deux approches. Nous avons, dans un premier temps, traité la solvabilité des systèmes dynamiques proposés, puis nous avons calculé la norme \mathcal{H}_2 de chaque système dynamique. Par un exemple numérique nous avons montré que les approches proposées par [13] et [14] sont identiques.

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est de calculer l'énergie la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type en utilisant deux manières différentes.

La première méthode, introduite par *Malti et al.* [14], est basée sur l'utilisation des formulations algébriques et analytiques sur la fonction de transfert fractionnaire. Tandis que l'idée clé de la deuxième méthode est l'utilisation des outils de la théorie des matrices comme la matrice de Schur, la matrice parahermitienne, les matrices de transformation et des transformations intégrales. Cette approche a été développée par *Lakeb et al.* dans [13].

Pour ce faire, nous avons, dans un premier temps, défini quelques notions de base sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et les transformations intégrales. L'étude de la solvabilité d'un système dynamique linéaire à temps continu dans le cas où les dérivées sont ordinaire et fractionnaire a été étayée suivit par les différentes représentations d'un système dynamique.

Ensuite, nous avons rappelé les définitions de l'énergie de la réponse impulsionnelle, dite norme \mathcal{H}_2 , suivit par quelque résultat sur la stabilité d'un système dynamique fractionnaire. Le calcul de la norme \mathcal{H}_2 par deux techniques différentes a été ensuite considéré.

L'efficacité de l'approche proposée par *Lakeb et al.* dans [13] a été confirmée via des exemples numériques.

Comme perspective, nous envisageons d'étendre l'approche proposée par *Lakeb et al.* dans [13] aux différents types de systèmes dynamiques fractionnaires où les matrices $\{A, B, C\}$ sont de tailles quelconques.

Bibliographie

- [1] **Bouagada, D.** (2007), *Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs*, Thèse de Doctorat d'État en Mathématiques, Université d'Oran Es-Sénia, Algérie. [6](#), [14](#)
- [2] **Bouagada, D., and Van Dooren, P.** (2012), *State space solution of implicit fractional continuous time systems*, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 15(3), 356–361. [4](#), [14](#)
- [3] **Caputo, M.** (1969), *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna. [3](#)
- [4] **Cohen, H.** (2007), *Number Theory. Volume II : Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Mathematics, 240, Springer New York. [5](#)
- [5] **Debnath, L., and Bhatta, D.** (2007), *Integral Transforms and their Applications*, Chapman and Hall/CRC. [3](#), [4](#)
- [6] **Erdélyi, A., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G.** (1954), *Tables of Integral Transforms I*. McGraw-Hill Book Company, New York. [2](#), [6](#)
- [7] **Fadiga, L., Farges, C., Sabatier, J. and Moze, M.** (2011), *On computation of \mathcal{H}_∞ -norm for commensurate fractional order systems*, 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, 8231–8236. [17](#)
- [8] **Gantmacher, F. R.** (2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society, Chelsea Publishing, Rhode Island. [6](#), [14](#)
- [9] **Genin, Y., Hachez, Y., Nesterov, Y., Stefan, R., Van Dooren, P. and Xu, S.** (2002), *Positivity and linear matrix inequalities*, *European Journal of Control*, 8(3), 275–298. [25](#)
- [10] **Kaczorek, T., and Rogowski, K.** (2015), *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, *Studies in Systems, Decision and Control*, 13, Springer International Publishing, Switzerland. [5](#)
- [11] **Kaiserli, Z., and Bouagada, D.** (2021), *Application of the Sumudu transform to solve regular fractional continuous-time linear systems*, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 45(2), 267–274. [15](#)
- [12] **Kaiserli, Z., and Bouagada, D.** (2021), *Solution of state-space singular continuous-time fractional linear systems using Sumudu transform*, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42, 110–117. [15](#)
- [13] **Lakeb, A., Kaiserli, Z. and Bouagada, D.** (2023), *Computing the \mathcal{H}_2 -norm of a fractional order system using the state-space linear model*, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 47(4), 531–538. [2](#), [20](#), [24](#), [26](#), [27](#), [29](#), [31](#), [32](#), [35](#)
- [14] **Malti, R., Aoun, M., Levron, F. and Oustaloup, A.** (2011), *Analytical computation of the \mathcal{H}_2 -norm of fractional commensurate transfer functions*, *Automatica*, 47, 2425–2432. [2](#), [20](#), [21](#), [22](#), [29](#), [31](#), [32](#), [35](#)
- [15] **Padula, F., and Visioli, A.** (2015), *Advances in Robust Fractional Control*, Springer International Publishing, Switzerland. [15](#)

- [16] **Valério, D., and Da Costa, J. S.** (2013), *An Introduction to Fractional Control*, The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. [21](#)
- [17] **Zhang, F.** (2005), *The Schur Complement and its Applications*, Springer Science and Business Media. [13](#)

Calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type

Résumé : L'objectif principal de ce manuscrit est de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle, dite aussi norme \mathcal{H}_2 , d'une fonction de transfert fractionnaire du premier type par deux méthodes différentes. La première approche, introduite par *Malti et al.* dans [14], est basée sur l'utilisation de quelques formulations algébriques et analytiques sur la fonction de transfert. Par contre, la deuxième méthode, proposée par *Lakeb et al.* dans [13], utilise essentiellement des outils et techniques de la théorie des matrices et des transformations intégrales.

L'efficacité et la performance de la deuxième approche ont été prouvées via des exemples numériques en moyennant des programmes MATLAB.

Comme perspective, nous envisageons d'étendre l'approche proposée par *Lakeb et al.* dans [13] aux différents types de systèmes dynamiques fractionnaires où les matrices sont de tailles quelconques.

Mots-Clés. Complément de Schur, Dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Énergie de la réponse impulsionnelle, Norme \mathcal{H}_2 , Matrices de transformations, Matrice parahermitienne, Représentation en espace d'état.

Calculation of the impulse response energy of a fractional transfer function of the first kind

Abstract : The main objective of this work is to calculate the impulse response energy, known also as the \mathcal{H}_2 -norm, of a fractional transfer function of the first kind using different methods. The first approach, introduced by *Malti et al.* in [14], is based on the use of some algebraic and analytical formulations on the transfer function. However, the second method, proposed by *Lakeb et al.* in [13], uses tools and techniques from matrix theory and some integral transformations.

The effectiveness and the performance of the second approach have been illustrated using numerical examples.

Through the promising result, we plan to extend the approach proposed by *Lakeb et al.* in [13] to different types of fractional dynamical systems.

Key Words. Schur complement, Caputo fractional derivative, Impulse response energy, \mathcal{H}_2 -norm, Matrix transformation, Parahermitienne matrix, State-space model.

