

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

HAMZA HAFSA

le 16 Juin 2022

Le modèle prédateur-proie avec comportement cannibalisme chez les proies

Encadeur : **BELHAMITI OMAR (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Mme Ali Merina Houria, MCB Présidente (Université de Mostaganem, Algérie)
M. Bouziane Mehdi, MAA Examineur (ENS-Mostaganem, Algérie)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

**M
A
S
T
E
R**

Table des figures

1.1	Compétition entre deux chiens sauvages.	8
1.2	La concurrence interspécifique entre lion et Zèbre.	8
1.3	La pollinisation.	9
1.4	Predation entre leopard et gazelle.	9
3.1	La convergence du point E_1 dans le graphe 2D.	28
3.2	La stabilité du point E_1 avec les condition initiales $x_0 = 100, y_0 = 45$	28
3.3	La convergence du point E_2 dans le graphe 2D.	29
3.4	La stabilité du point E_2 avec les condition initiales $x_0 = 100$	29
3.5	Effet le taux de cannibalisme sur les prédateurs avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$	31
3.6	Effet le taux de cannibalisme sur les proies avec les condition initiales $x_0 = 100, y_0 = 45$	31
3.7	Effet du temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes sur les prédateurs avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$	32
3.8	Effet du temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes sur les proies avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$	32

Liste des tableaux

1.1	L'étude des effets de la guerre sur la pêche de la sardine dans les ports de la mer Adriatique du zoologiste italien Umberto d'Anconna (1896-1964)	10
3.1	Les données opérationnelles pour converger vers E_1	27
3.2	Les données opérationnelles pour converger vers E_2	28

Remerciements

Le premier à remercier et à louer jour et nuit est dieu qui nous a imprégnés de ses innombrables graces, a illuminé nos chemins, je le loue et le remercie pour tout.

Mes remerciements vont à chaque enseignant qui m'a aidé avec ses connaissances, depuis le début de la scolarité jusqu'à ce moment.

Je remercie mon encadreur Monsieur Belhamiti Omar, qui m'a aidé à compléter ce travail et les conseils fournis et les efforts déployés.

Je remercie l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail.

Je remercie tous ceux qui ont communiqué avec moi et m'ont la main de près ou de loin, merci beaucoup.

Enfin, je remercie mes parents et ma famille qui ont vécu avec moi le détail de mes études et m'ont apporté beaucoup d'aide et d'encouragement et qui m'ont soutenu à chaque fois.

Dédicaces

Je dédie le fruit de mes efforts à :

À mes chers parents

À la fontaine qui ne se lasse pas de donner, à la source de mon bonheur, mon père Mohamed.

À la dame de ma vie et à la chère de mon coeur, ma mère samira.

Quoi que je dise et écris, je ne pouvais exprimer ma profonde affection et ma profonde gratitude. J'espère que cela ne vous déçoit pas et ne trahit pas votre confiance et vos sacrifices, je vous aime. Que Dieu vous protège pour nous In Chaa Allah.

Aux grands-mères

À ma grand-mères bakhta (la mère de mon mère), ma grand-père djamile (la père de mon mère) et à ma grand-mères mahdjouba (la mère de ma père) grâce à leurs appels qui ne me quittaient pas tous les jours, Merci à vous.

À qui leur amour coule dans mes veines mes frères et mes soeurs

À mes frères : Sohaib et Moad.

À mes soeurs : Asmaa, Aya et Assiya.

À mes amis et mes collègue : Nour El Houda, Fatima, Samia,...

En souvenir de notre amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble, vous trouverez dans cet ouvrage l'expression de mon plus profond respect et de mon amour le plus sincère.

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	5
1 Notions de bases en écologie des populations	6
1 Définitions	6
1.1 L'individu	6
1.2 La population	6
1.3 L'écosystème	6
1.4 La dynamique des populations	6
2 Types d'interactions entre population	7
2.1 La compétition (concurrence)	7
2.2 Le mutualisme	7
2.3 La prédation	7
3 Historique du modèle Lotka Volterra (proies-prédateurs)	10
2 Modélisation Mathématique	11
1 Le modèle proie-prédateur classique	11
1.1 Les points d'équilibre	12
1.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre	12
1.3 Conclusion	13
2 Le modèle proie-prédateur (variante 1)	13
2.1 Les points d'équilibre	14
2.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre	14
3 Le modèle proie-prédateur (variante 2)	16
3.1 Les points d'équilibre	16
3.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre	17
4 Le modèle proie-prédateur (variante 3)	18
4.1 Les points d'équilibre	19
4.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre	20
5 Conclusion	21
6 Le modèle proie-prédateur avec comportement cannibalisme chez les proies	21
6.1 L'existence des points d'équilibre	22
6.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibres	23
3 Simulation numérique	26
1 Rappel sur les méthodes de Runge-Kutta	26
2 Stabilité numérique des points d'équilibres	27
2.1 Le point d'équilibre E_1	27
2.2 Le point d'équilibre E_2	27

3	Simulation de quelques senarios	30
3.1	L'influence de c le taux de cannibalisme	30
3.2	L'influence de b le temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes	30
4	Conclusion	33

Introduction

La dynamique des populations est la science qui explique la variation au cours du temps, du nombre d'individus dans une population. L'importance de la dynamique des populations en biologie, et particulièrement en écologie, est très importante aujourd'hui, elle peut en effet décrire les variations d'une ou plusieurs populations occupant un milieu et interagissant entre elles [10].

Le modèle de Lotka Volterra est l'un des premiers modèles qui décrit l'interaction entre populations, il s'appuie sur une ou plusieurs équation différentielle ou sur plusieurs équations différentielles couplées, il est utilisé dans l'analyse de la dynamique des populations. La construction et l'étude d'un modèle prédateur-proie est restée un domaine important de l'écologie théorique depuis les fameuses équations de Lotka (1924) et de Volterra (1926). Ce modèle permet de prendre en compte chaque individu d'une population et de simuler son comportement et son interaction avec d'autres individus.

Le phénomène du cannibalisme des proies est lorsque les adultes ne trouvent pas de nourriture, ils mangent les plus faibles et les plus jeunes de leurs espèces[10], ce phénomène arrive généralement chez les poissons. Les premiers scientifiques commencé à étudier le cannibalisme dans les années 1970. En 1981, une étude publiée dans l'Annual Journal of Ecology and Systematics a examiné les données de centaines études liées au cannibalisme, des chercheurs de l'Université de Jyväskylä en Finlande étaient curieux de savoir si la grenouille venimeuse colorée (*Dendrobates tinctorius*) présentait un comportement cannibale.

Dans ce mémoire, on propose le modèle proie-prédateur avec comportement cannibalisme chez les proies et croissance logistique des proies dans le but d'étudier les effets du cannibalisme sur l'interaction entre les prédateurs et proies.

Le mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le chapitre 1, on décrit les définitions de quelques structures biologiques essentielles en écologie et on identifie aussi les interactions essentielles, qui sont les bases de nombreux systèmes écologiques et l'historique de modèle proie-prédateur.

Dans le chapitre 2, on calcule les points d'équilibres de quelques variantes du modèle proie-prédateur et on étudie leurs stabilités. On calcule les points d'équilibre du modèle proies-prédateurs avec comportement cannibalisme chez les proies avec croissance logistique des proies et on étudie la stabilité de ces points.

Dans le dernier chapitre, on rappelle la méthode de Raunge Kutta d'ordre 4, et on termine avec des simulations numériques de notre modèle.

Chapitre 1

Notions de bases en écologie des populations

Dans ce chapitre, on décrit les définitions de quelques structures biologiques essentielles en écologie et on identifie aussi les interactions essentielles, qui sont les bases de nombreux systèmes écologiques.

1 Définitions

1.1 L'individu

L'individu est une entité indivisible et unique, quels que soient son espèce et son âge [1]. L'individu est également séparé de son milieu par une barrière physique, ce qui ne l'empêche pas d'interagir avec son environnement. L'individu peut être représenté par un système dynamique ouvert à part entière [2]. La vie d'un individu est caractérisée par des étapes, appelées traits d'histoire de vie : il grandit, se développe, se reproduit puis meurt. Tout au long de sa vie, l'individu interagit avec son environnement qui, en retour, l'influence profondément et peut induire une certaine variabilité. De plus, l'individu puise l'énergie nécessaire à son développement dans l'environnement.

1.2 La population

La population est un ensemble d'individus d'une même espèce qui vivent sur un même territoire, qui sont en interaction entre eux, et qui se reproduisent entre eux [3]. Une population est dite fermée si les individus ne peuvent ni immigrer ni émigrer dans ou en dehors de l'habitat [7]. La notion de population est un concept très utilisé en écologie et a fait l'objet de très nombreuses investigations au cours du siècle dernier [8].

1.3 L'écosystème

Un écosystème est un ensemble de populations, qui vivent dans un même lieu et interagissent entre elles [4].

1.4 La dynamique des populations

La dynamique des populations est la science qui explique la variation au cours du temps, du nombre d'individus dans une population. La dynamique des populations est

très importante en biologie, et en écologie, elle peut en effet décrire les variations d'une ou plusieurs populations vivant dans un milieu et interagissant entre elles [10].

2 Types d'interactions entre population

Dans l'écosystème, on distingue essentiellement trois types d'interaction :

- la compétition (concurrence),
- le mutualisme (harmonie),
- la prédation.

D'autres interactions existent comme la coopération et le parasitisme.

2.1 La compétition (concurrence)

La compétition est la recherche simultanée, par deux ou plusieurs êtres vivants, de la maîtrise des ressources du milieu dans lequel ils vivent. La compétition existe lorsque :

- Des individus de la même espèce ou d'espèces différentes, recherchent et exploitent la même ressource présente en quantité limitée.
- Les ressources ne sont pas limitées mais que les individus en concurrence se nuisent.

Il y a deux types de compétition :

- Intraspécifique : la compétition entre les membres d'une même espèce, exemple : Deux chiens sauvages d'Asie (*Cuon alpinus*) se livrent un combat, une compétition alimentaire entre deux individus de la même espèce pour une proie, comme le montre la figure 1.1.
- Interspécifique :
La compétition entre les individus de différentes espèces, exemple : concurrence interspécifique entre lion et Zèbre, voir figure 1.2.

2.2 Le mutualisme

Le mutualisme est une interaction biologique dans laquelle les deux partenaires trouvent un avantage, qui peut être la protection, l'apport de nutriments, la pollinisation, la dispersion, voir figure 1.3.

2.3 La prédation

Dans toutes les communautés, la prédation constitue la plus évidente des relations entre populations, exprime l'acte d'un animal ou d'une plante, un prédateur capturant ou se nourrissant d'un autre organisme, la proie, appartenant à une espèce différente et en général moins forte. La prédation est une interaction biologique naturelle, dans laquelle un prédateur individuel se nourrit d'autres individus la proie. La prédation joue un rôle important dans la régulation du nombre de proies et de prédateurs, exemple : prédation entre Leopard et Gazelle, voir figure 1.4.



FIGURE 1.1 – Compétition entre deux chiens sauvages.

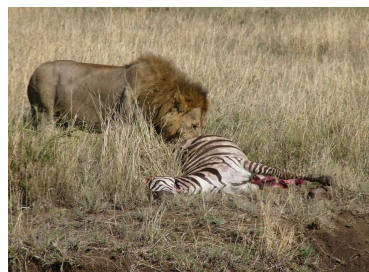


FIGURE 1.2 – La concurrence interspécifique entre lion et Zèbre.



FIGURE 1.3 – La pollinisation.



FIGURE 1.4 – Predation entre leopard et gazelle.

3 Historique du modèle Lotka Volterra (proies-prédateurs)

L'écologie mathématique est née des travaux du mathématicien Américain Alfred James Lotka (1880-1949) et de le mathématicien italien Vito Volterra (1860-1940), dans les années 1920 [12]. Ils ont proposé de manière indépendante et presque en même temps le premier modèle mathématique pour tenter de décrire l'interaction entre une population proie et une population prédatrice. L'histoire de ces équations débute par une histoire de pêche. Après la première guerre mondiale, le zoologiste italien Umberto d'Anconna (1896-1964) étudié les effets de la guerre sur la pêche de la sardine dans les ports de la mer Adriatique. Le résultat de cette étude a été surprenant, car pendant la guerre, malgré que la pêche de la sardine a diminué, la population des sardines a baissé, et ceci due à la prédation des requins. Les résultats de cette étude sont présentés dans le tableau 1.1 [6].

Une étude similaire a été faite par Volterra, et son objectif était de décrire les fonctions $S(t)$ et $R(t)$ représentant respectivement les populations de sardines et de requins au temps t .

La population de sardines

$$S'(t) = \alpha S(t) - \beta S(t) R(t).$$

La population de requins

$$R'(t) = -\gamma R(t) + \delta S(t) R(t).$$

où

α représente le taux de croissance des Sardines en absence des Requins.

γ représente le taux de croissance des Requins.

β et δ représentent les taux d'interaction entre population.

Année	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Prédateurs	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16	15.9	14.8	10.7
Proies	88.1	78.6	77.9	78.8	63.6	72.7	84	84.1	85.2	89.3

TABEAU 1.1 – L'étude des effets de la guerre sur la pêche de la sardine dans les ports de la mer Adriatique du zoologiste italien Umberto d'Anconna (1896-1964)

Chapitre 2

Modélisation Mathématique

Dans ce chapitre, on va présenter plusieurs variantes du modèle proie-prédateur, ainsi que leur analyse de stabilité.

1 Le modèle proie-prédateur classique

Un modèle proie-prédateur est un modèle dans lequel deux espèces sont considérées, où on a deux espèce dont l'une est la nourriture de l'autre, par exemple le lynx et le lièvre, le requin et la sardine, le hibou et le campagnol,...etc.

L'objectif est de pouvoir prédire l'évolution du nombre de proie et de prédateur dans le temps. Afin de décrire la dynamique des populations. On pose les hypothèses suivantes :

- Les proies sont la seule nourriture des prédateurs.
- Les proies $x(t)$ disposent de nourriture en quantité illimitée, seuls les prédateurs $y(t)$ s'opposent à leur croissance et en l'absence de prédateurs la population des proies a une croissance exponentielle (modèle malthusien),

$$\alpha \times x(t).$$

- Le nombre de prédateurs est limité par la quantité des proies, dont ils disposent pour se nourrir et en l'absence des proies, la population des prédateurs a une décroissance exponentielle (modèle malthusien),

$$-\gamma \times y(t).$$

- Le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est à la fois proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$ donc proportionnel au produit $x(t) \times y(t)$.
- Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entre les deux populations.

Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où

α est le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

γ le taux de croissance des prédateurs.

β, δ sont les taux d'interactions entre les deux populations.

Ces paramètres sont positifs[9].

1.1 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibre, on résout le système algébique suivant,

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ -\gamma y + \delta xy = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

D'après la première équation du système (2.2), on a

$$x(\alpha - \beta y) = 0,$$

alors, on distingue 2 cas :

— 1^{ère} cas : si $x = 0$, alors la deuxième équation donne :

$$y = 0.$$

— 2^{ème} cas : si $y = \frac{\alpha}{\beta}$, la deuxième équation du système (2.2) donne :

$$-\gamma + \delta x = 0,$$

— et

$$x = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Finalement, on a deux points d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T,$$

et

$$E_1 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right)^T.$$

existent quelque soit les données du modèle.

1.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on calcule la matrice jacobienne,

$$Jac \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

— La matrice jacobienne au premier point d'équilibre E_0 est

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $Jac(E_0)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\gamma - \alpha)X - \alpha\gamma,$$

et les valeurs propres de la jacobienne au point E_0 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_0 est instable.

— La jacobienne au deuxième point d'équilibre E_1 est

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_1)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + \alpha\gamma$$

Enfin, les valeurs propres de la jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma} \end{cases}.$$

Alors, le point E_1 est instable.

1.3 Conclusion

Le modèle proie-prédateurs classique a un sérieux problèmes, les deux points d'équilibre sont instables et le modèle n'est pas réaliste. Pour régler ce problème, on propose trois variantes du modèle.

2 Le modèle proie-prédateur (variante 1)

Le modèle proie-prédateur avec croissance logistique des proies est construit sous les hypothèses suivantes :

- Les proies sont la seule nourriture des prédateurs.
- Les proies $x(t)$ disposent de nourriture **en quantité limitée**, seuls les prédateurs $y(t)$ s'opposent à leur croissance et en l'absence de prédateurs la population des proies a une croissance logistique (modèle de Verhulst)

$$\alpha \times \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) \times x(t)$$

K_x représente la capacité de charge des proies.

- Le nombre de prédateurs est limité par la quantité des proies, dont ils disposent pour se nourrir et en l'absence des proies, la population des prédateurs a une décroissance exponentielle (modèle malthusien).

$$-\gamma \times y(t)$$

- Le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est à la fois proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$ donc proportionnel au produit $x(t) \times y(t)$.
- Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entre les deux populations.

Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) x(t) - \beta x(t) y(t) \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

où

α est le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

γ le taux de croissance des prédateurs.

β, δ sont les taux d'interactions entre les deux populations.

Tous les paramètres du modèle sont positifs[9].

2.1 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibres, on résout le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) x - \beta x y = 0 \\ -\gamma y + \delta x y = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

La deuxième équation du système (2.4) donne :

$$y(-\gamma + \delta x) = 0,$$

alors, on distingue 2 cas :

— 1^{er} cas : si $y = 0$, la première équation du système (2.4) donne :

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) x = 0,$$

Là aussi, on distingue deux cas : $x = 0$ ou $x = K_x$.

Alors, on a deux points d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T,$$

et

$$E_1 = (K_x, 0)^T.$$

— 2^{eme} cas : si $x = \frac{\gamma}{\delta}$, donc la première équation du système (2.4) donne :

$$\alpha \left(1 - \frac{\gamma}{\delta K_x}\right) \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) - \beta \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) y = 0,$$

alors,

$$y = \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)}{\beta \delta K_x}.$$

— On a, le troisième point d'équilibre

$$E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)}{\beta \delta K_x}\right)^T.$$

2.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on calcule la matrice jacobienne,

$$Jac \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) - \alpha \frac{x}{K_x} - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

— La matrice jacobienne au premier point d'équilibre E_0 est

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_0)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\gamma - \alpha)X - \alpha\gamma,$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_0 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_0 instable.

— La matrice jacobienne au deuxième point d'équilibre E_1 est

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta K_x \\ 0 & -\gamma + \delta K_x \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_1)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\alpha + \gamma - \delta K_x)X + \alpha(\gamma - \delta K_x),$$

et les valeurs propres de la jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = \delta K_x - \gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_1 est stable si

$$\delta K_x < \gamma.$$

— La matrice jacobienne au troisième point d'équilibre E_2 est

$$Jac(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\gamma}{\delta K_x} & -\beta\frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)}{\beta K_x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_2)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + \alpha\frac{\gamma}{\delta K_x}X - \alpha\frac{\gamma}{\delta K_x}(\gamma - \delta K_x),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_2 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2\delta K_x} \left(\alpha\gamma - \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4\alpha\gamma\delta K_x(\gamma - \delta K_x)} \right) \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2\delta K_x} \left(\alpha\gamma + \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4\alpha\gamma\delta K_x(\gamma - \delta K_x)} \right) \end{cases}.$$

— Si $\gamma - \delta K_x > 0$, alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, donc le points E_2 est instable.

— Si $\gamma - \delta K_x < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2\delta K_x} \left(\alpha\gamma + \sqrt{\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma\delta K_x(\delta K_x - \gamma)} \right) \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2\delta K_x} \left(\alpha\gamma - \sqrt{\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma\delta K_x(\delta K_x - \gamma)} \right). \end{cases}$$

— Si $(\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma\delta K_x(\delta K_x - \gamma)) > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

— Si $(\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma\delta K_x(\delta K_x - \gamma)) < 0$, alors

$$\begin{cases} \text{Re}\lambda_1 < 0 \\ \text{Re}\lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Finalement, le point E_2 est stable si

$$\gamma - \delta K_x < 0.$$

Récapitulatif:

	E_0	E_1	E_2
$\gamma - \delta K_x < 0$	instable	instable	stable
$\gamma - \delta K_x > 0$	instable	stable	instable

3 Le modèle proie-prédateur (variante 2)

Le modèle proie-prédateur avec croissance logistique des prédateurs est construit sous les hypothèses suivantes :

- Les proies sont la seule nourriture des prédateurs.
- Les proies $x(t)$ disposent de nourriture en quantité illimitée, seuls les prédateurs $y(t)$ s'opposent à leur croissance et en l'absence de prédateurs la population des proies a une croissance exponentielle (modèle malthusien)

$$\alpha \times x(t).$$

- La nourriture des prédateurs est limitée, en l'absence des proies, la population des prédateurs a une décroissance logistique (modèle de Verhulst).

$$-\gamma \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) y(t),$$

K_y représente la capacité de charge des prédateurs.

- Le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est à la fois proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$ donc proportionnel au produit $x(t) \times y(t)$.
- Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entre les deux populations.

Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = -\gamma \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

où

α est le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

γ le taux de croissance des prédateurs.

β, δ sont les taux d'interactions entre les deux populations.

Tous les paramètres du modèle sont positifs[9].

3.1 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibre, on résout le système algébrique suivant,

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ -\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) y + \delta xy = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

D'après la première équation du système (2.6), on a

$$x(\alpha - \beta y) = 0,$$

alors, on distingue 2 cas :

- 1^{ier} cas : si $x = 0$, alors la deuxième équation du système donne :

$$-\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) y = 0,$$

Là aussi, on distingue deux cas : $y = 0$ ou $y = K_y$.

— Alors, on a deux points d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T,$$

et

$$E_1 = (0, K_y)^T.$$

— 2^{ème} cas : si $y = \frac{\alpha}{\beta}$, donc la deuxième équation du système donne :

$$-\gamma \left(1 - \frac{\alpha}{\beta K_y}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \delta x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0,$$

alors,

$$x = \frac{\gamma(\beta K_y - \alpha)}{\beta \delta K_y}.$$

Le troisième points d'équilibre

$$E_2 = \left(\frac{\gamma(\beta K_y - \alpha)}{\beta \delta K_y}, \frac{\alpha}{\beta} \right)^T.$$

3.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on calcule la matrice jacobienne

$$Jac \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) + \frac{\gamma y}{K_y} + \delta x \end{pmatrix}.$$

— La matrice jacobienne au premier point d'équilibre E_0 est

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_0)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\gamma - \alpha)X - \alpha\gamma,$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_0 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma. \end{cases}$$

Alors, le points E_0 est instable.

— La matrice jacobienne au deuxième point d'équilibre E_1 est

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta K_y & 0 \\ \delta K_y & \gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_1)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\beta K_y - \gamma - \alpha)X + \gamma(\alpha - \beta K_y),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - \beta K_y \\ \lambda_2 = \gamma \end{cases}.$$

Alors, le point E_1 est instable.

— La matrice jacobienne au troisième point d'équilibre E_2 est

$$Jac(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma(\beta K_y - \alpha)}{\delta K_y} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\alpha \gamma}{\beta K_y} \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_2)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 - \frac{\alpha \gamma}{\beta K_y} X - \frac{\alpha \gamma}{\beta K_y} (\alpha - \beta K_y),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2\beta K_y} \left(\alpha \gamma + \sqrt{\alpha^2 \gamma^2 + 4\alpha \beta \gamma K_y (\alpha - \beta K_y)} \right) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2\beta K_y} \left(\alpha \gamma - \sqrt{\alpha^2 \gamma^2 + 4\alpha \beta \gamma K_y (\alpha - \beta K_y)} \right) \end{cases}.$$

Alors, les deux valeurs propres sont positives quelque soit les données et le point E_2 est instable.

4 Le modèle proie-prédateur (variante 3)

Le modèle proie-prédateur avec croissance logistique des proies et des prédateurs est construit sous les hypothèses suivantes :

- Les proies sont la seule nourriture des prédateurs.
- Les proies $x(t)$ disposent de nourriture en quantité limitée, seuls les prédateurs $y(t)$ s'opposent à leur croissance et en l'absence de prédateurs la population des proies a une croissance logistique (modèle de Verhulst)

$$\alpha \left(1 - \frac{x(t)}{K_x} \right) x(t)$$

K_x représente la capacité de charge des proies.

- La nourriture des prédateurs est limitée, en l'absence des proies, la population des prédateurs a une décroissance logistique (modèle de Verhulst).

$$-\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y} \right) y(t)$$

K_y représente la capacité de charge des prédateurs.

- Le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est à la fois proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$ donc proportionnel au produit $x(t) \times y(t)$.
- Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entre les deux populations.

Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha \left(1 - \frac{x(t)}{K_x} \right) x(t) - \beta x(t) y(t) \\ y'(t) = -\gamma \left(1 - \frac{y(t)}{K_y} \right) y(t) + \delta x(t) y(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

où

α est le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

γ le taux de croissance des prédateurs.

β, δ sont les taux d'interactions entre les deux populations.

Tous les paramètres du modèle sont positifs[9].

4.1 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibre, on résout le système algébrique suivant,

$$\begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) x - \beta xy = 0 \\ -\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) y + \delta xy = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

D'après la première équation du système (2.8), on a

$$x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) - \beta y \right) = 0$$

Alors, on distingue 2 cas :

— 1^{er} cas : si $x = 0$, alors la deuxième équation de le système donne :

$$-\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) y = 0,$$

Là aussi, on distingue deux cas : $y = 0$ ou $y = K_y$.

— Alors, on a deux points d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T,$$

et

$$E_1 = (0, K_y)^T.$$

— 2^{ème} cas : si $x = K_x - \frac{\beta K_x}{\alpha} y$, alors la deuxième équation de le système algébrique (2.6) donne :

$$\left((\delta K_x - \gamma) + \left(\frac{\gamma}{K_y} - \frac{\delta \beta K_x}{\alpha} \right) y \right) y = 0$$

— si $y = 0$, alors

$$x = K_x,$$

— si $y = \frac{\alpha K_y (\gamma - \delta K_x)}{\alpha \gamma - \beta \delta K_x K_y}$, alors

$$x = \frac{\gamma K_x (\alpha - \beta K_y)}{\alpha \gamma - \beta \delta K_x K_y}.$$

Donc, on a deux points d'équilibre,

$$E_2 = (K_x, 0)^T,$$

— et

$$E_3 = \left(\frac{\gamma K_x (\alpha - \beta K_y)}{\alpha \gamma - \beta \delta K_x K_y}, \frac{\alpha K_y (\gamma - \delta K_x)}{\alpha \gamma - \beta \delta K_x K_y} \right)^T.$$

4.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on calcule la matrice jacobienne,

$$Jac \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) - \alpha \frac{x}{K_x} - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) + \frac{\gamma y}{K_y} + \delta x \end{pmatrix}.$$

— La matrice jacobienne au premier point d'équilibre E_0 est

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_0)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\gamma - \alpha)X - \alpha\gamma,$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_0 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_0 est instable.

— La matrice jacobienne au deuxième point d'équilibre E_1 est

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta K_y & 0 \\ \delta K_y & \gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de $Jac(E_1)$ est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\beta K_y - \gamma - \alpha)X + \gamma(\alpha - \beta K_y),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - \beta K_y \\ \lambda_2 = \gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_1 est instable.

— La matrice jacobienne au troisième point d'équilibre E_2 est

$$Jac(E_2) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta K_x \\ 0 & -\gamma + \delta K_x \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de E_2 est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\alpha + \gamma - \delta K_x)X + \alpha(\gamma - \delta K_x)$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_2 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = \delta K_x - \gamma. \end{cases}$$

Alors, le point E_2 est stable si

$$\delta K_x < \gamma.$$

— La matrice jacobienne de la quatrième point d'équilibre E_3 est

$$Jac(E_3) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\gamma(\beta K_y - \alpha)}{\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y} & -\beta \frac{\gamma K_x (\alpha - \beta K_y)}{\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y} \\ \delta \frac{\alpha K_y (\gamma - \delta K_x)}{\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y} & \frac{\alpha\gamma (\gamma - \delta K_x)}{\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y} \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de E_3 est donné par :

$$P(X) = X^2 + \alpha\gamma \left(\frac{(\alpha - \beta K_y) - (\gamma - \delta K_x)}{\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y} \right) X - \frac{\alpha\gamma (\gamma - \delta K_x) (\alpha - \beta K_y)}{(\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y)},$$

Donc les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_3 sont,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2(\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y)} \left(A - \sqrt{A^2 + 4\alpha\gamma (\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y) (\alpha - \beta K_y) (\gamma - \delta K_x)} \right), \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2(\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y)} \left(A + \sqrt{A^2 + 4\alpha\gamma (\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y) (\alpha - \beta K_y) (\gamma - \delta K_x)} \right) \end{array} \right\}$$

avec

$$A = (\alpha\gamma (\alpha - \beta K_y) - \alpha\gamma (\gamma - \delta K_x))$$

	$(\alpha - \beta K_y) > 0$	$(\alpha - \beta K_y) < 0$
$(\gamma - \delta K_x) > 0$	$(\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y) > 0$	n'a pas de sens biologique
$(\gamma - \delta K_x) < 0$	n'a pas de sens biologique	$(\alpha\gamma - \beta\delta K_x K_y) < 0$

Si $(\alpha - \beta K_y) > 0$ et $(\gamma - \delta K_x) > 0$ alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, donc le point E_3 est instable.

Si $(\alpha - \beta K_y) < 0$ et $(\gamma - \delta K_x) < 0$ alors $\lambda_1 < 0$. Si de plus $(\alpha - \beta K_y) > (\gamma - \delta K_x)$ alors $\lambda_2 < 0$ ou $\text{Re}(\lambda_2) < 0$, donc le point E_3 est stable.

Finalement :

— Le point E_2 est stable si $\gamma > \delta K_x$.

— Le point E_3 est stable si

$$\begin{cases} \gamma < \delta K_x \\ \alpha < \beta K_y \\ \alpha - \beta K_y > \gamma - \delta K_x. \end{cases}$$

5 Conclusion

On a étudié le modèle proie-prédateur classique, les modèles proies-prédateurs (variante 1-2-3). Les points d'équilibre du modèle proie-prédateur classique et ceux du variante 2 sont instable, par contre, le modèle proies-prédateurs variante 1-3 ont chacun deux points d'équilibre stables. Pour la suite de notre travail, on va choisir le modèle proie-prédateur variante 1.

6 Le modèle proie-prédateur avec comportement cannibalisme chez les proies

Pour modéliser le comportement cannibalisme, on choisit l'interaction de Holling II, ici, il peut être considéré comme une prédation intérieure ou concurrence, c'est-à-dire

$$C(x) = cx \frac{x}{1 + bx},$$

où

c est le taux de cannibalisme,

b représente le temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes.

Le modèle (2.3) devient en présence du cannibalisme,

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) x(t) - \beta x(t)y(t) - cx(t) \frac{x(t)}{1 + bx(t)} \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

où

$\alpha > 0$, est le taux de natalité (naturel) des proies,

$\gamma > 0$, le taux de mortalité (naturel) des prédateurs,

$\beta > 0$ et $\delta > 0$, le taux d'interaction entre les deux populations[13].

6.1 L'existence des points d'équilibre

Dans cette sous-section, on va étudier l'existence des points d'équilibres du système (2.9).

Soit l'ensemble invariant positive, $\Omega = \mathbb{R}_+^2$.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.1 Notre modèle 2.9 admet trois points d'équilibre,

1. la première $E_0 = (0, 0)^T$ existe toujours sans condition,
2. la deuxième $E_1 = \left(\frac{-(\alpha + (c - \alpha b)K_x) + \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b)K_x)^2 + 4\alpha^2 b K_x}}{2\alpha b}, 0 \right)^T$ existe aussi sans condition,
3. la troisième $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - \gamma c \delta K_x}{\beta \delta K_x (\delta + b\gamma)} \right)^T$ existe si

$$\delta K_x - \gamma > \frac{c\gamma\delta}{\alpha(\delta + b\gamma)} K_x.$$

Preuve. Pour calculer les points d'équilibres, on a

$$\begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) x - \beta xy - cx \frac{x}{1 + bx} = 0 \\ -\gamma y + \delta xy = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

La deuxième équation du système algébrique (2.10) donne :

$$y(-\gamma + \delta x) = 0,$$

Alors, on distingue 2 cas :

- 1^{ier} cas : si $y = 0$, alors la première équation de (2.10) donne :

$$x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) - c \frac{x}{1 + bx} \right) = 0.$$

Là aussi, on distingue deux cas :

- $x = 0$, donc

$$E_0 = (0, 0)^T$$

— $\alpha \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) - c \frac{x}{1+bx} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(K_x - x)}{K_x} - \frac{cx}{1+bx} &= 0 \\ \frac{\alpha(K_x - x)(1+bx) - cxK_x}{K_x(1+bx)} &= 0 \\ \alpha(K_x - x)(1+bx) - cxK_x &= 0 \\ -\alpha bx^2 - (\alpha + (c - \alpha b)K_x)x + \alpha K_x &= 0. \end{aligned}$$

On a une équation algébrique du second ordre, alors les racines de cette équation sont données par,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(\alpha + (c - \alpha b)K_x) + \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b)K_x)^2 + 4\alpha^2 bK_x}}{2\alpha b} > 0 \\ x_2 &= \frac{-(\alpha + (c - \alpha b)K_x) - \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b)K_x)^2 + 4\alpha^2 bK_x}}{2\alpha b} < 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a un deuxième point d'équilibre,

$$E_1 = \left(\frac{-(\alpha + (c - \alpha b)K_x) + \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b)K_x)^2 + 4\alpha^2 bK_x}}{2\alpha b}, 0 \right)^T.$$

— 2^{ème} cas : si $x = \frac{\gamma}{\delta}$, alors la première équation du système algébrique (2.10) donne :

$$\alpha \left(1 - \frac{\gamma}{\delta K_x}\right) - \beta y - c \frac{\gamma}{(\delta + b\gamma)} = 0$$

et

$$y = \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - c\gamma\delta K_x}{\beta\delta(\delta + b\gamma)K_x}.$$

Un troisième point $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - c\gamma\delta K_x}{\beta\delta(\delta + b\gamma)K_x} \right)^T$ existe si

$$\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - c\gamma\delta K_x > 0,$$

et

$$\delta K_x - \gamma > \frac{c\gamma\delta}{\alpha(\delta + b\gamma)} K_x.$$

■

6.2 L'étude de la stabilité des points d'équilibres

Dans cette sous section, on va étudier la stabilité des points d'équilibre de la sous section précédente, pour cela, la matrice jacobienne du système (2.10) s'écrit,

$$Jac \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2\alpha}{K_x}x - \beta y - c \frac{2x+bx^2}{(1+bx)^2} & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2 1. Le premier point d'équilibre du système (2.10) $E_0 = (0, 0)^T$ est toujours instable.

2. Le deuxième point d'équilibre $E_1 = \left(\frac{-(\alpha + (c - \alpha b) K_x) + \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b) K_x)^2 + 4\alpha^2 b K_x}}{2\alpha b}, 0 \right)^T$

est stable si

$$\gamma > \delta K_x.$$

3. Le troisième point équilibre $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - \gamma c \delta K_x}{\beta \delta K_x (\delta + b\gamma)} \right)^T$ est stable si

$$\gamma < \delta K_x.$$

Preuve.

1. La matrice jacobienne du premier point d'équilibre E_0 est

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de E_0 est donné par :

$$P(X) = X^2 + (\gamma - \alpha)X - \alpha\gamma,$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_0 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma, \end{cases}$$

alors, le point E_0 instable.

2. La matrice jacobienne de la deuxième point d'équilibre E_1

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2\alpha}{K_x} m - \frac{cm}{(1+bm)^2} - \frac{cm}{(1+bm)} & -\beta m \\ 0 & -\gamma + \delta m \end{pmatrix}$$

avec

$$m = -\frac{1}{2\alpha b} \left((\alpha + (c - \alpha b) K_x) - \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b) K_x)^2 + 4\alpha^2 b K_x} \right) > 0$$

Le polynome caractéristique de E_0 est donné par :

$$P(X) = X^2 + \left(-\alpha + (\gamma - m\delta) + \frac{2\alpha m}{K_x} + \frac{cm}{bm+1} + \frac{cm}{(bm+1)^2} \right) X - (\gamma - m\delta) \left(\alpha - \frac{2\alpha m}{K_x} - \frac{cm}{bm+1} - \frac{cm}{(bm+1)^2} \right),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_1 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\gamma + \delta m, \\ \lambda_2 = \frac{1}{K_x} \frac{\alpha(K_x - 2m)(bm+1)^2 - cm(2+bm)K_x}{1+bm(2+bm)} \end{cases}$$

Alors le point E_1 est stable si

$$\begin{cases} \delta m < \gamma \\ K_x < 2m. \end{cases}$$

avec

$$m = -\frac{1}{2\alpha b} \left((\alpha + (c - \alpha b) K_x) - \sqrt{(\alpha + (c - \alpha b) K_x)^2 + 4\alpha^2 b K_x} \right) > 0.$$

3. La matrice jacobienne du troisième point d'équilibre $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - \gamma c \delta K_x}{\beta \delta K_x (\delta + b\gamma)} \right)^T$ est

$$Jac(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\delta K_x} (2\gamma - \delta K_x) - \beta M - c\gamma \left(\frac{2\delta + b\gamma}{(\delta + b\gamma)^2} \right) & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \delta M & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$M = \frac{\alpha(\delta K_x - \gamma)(\delta + b\gamma) - \gamma c \delta K_x}{\beta \delta K_x (\delta + b\gamma)}.$$

Le polynome caractéristique de E_2 est donné par :

$$P(X) = X^2 + \left(-\alpha + M\beta + 2\alpha \frac{\gamma}{\delta K_x} + c \frac{\gamma}{(\delta + b\gamma)^2} (2\delta + b\gamma) \right) X + M\beta\gamma,$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne au point E_2 sont,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{A + \sqrt{A^2 - 4BC}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{A - \sqrt{A^2 - 4BC}}{2} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{\delta K_x} (2\gamma - \delta K_x) + \beta M + c\gamma \left(\frac{2\delta + b\gamma}{(\delta + b\gamma)^2} \right) \\ B &= \frac{\beta\gamma}{\delta} > 0 \\ C &= \delta M > 0. \end{aligned}$$

Si $A > 0$, c-à-d $2\gamma > \delta K_x$ alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, donc le points E_2 est stable.

Si $A < 0$, alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, donc le points E_2 est instable.

■

Chapitre 3

Simulation numérique

1 Rappel sur les méthodes de Runge-Kutta

Dans ce chapitre, nous rappelons la méthode de Runge-Kutta, une des méthodes les plus utilisées dans la résolution numérique des équations différentielles. Cette méthode sera utilisée pour le reste de ce travail. Définissons le système d'équations différentielles ordinaires sur $[t_0, t_f]$ par

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} .$$

Avec

$$y'(t) = (y'_1(t), y'_2(t), \dots, y'_n(t)),$$

et

$$F(t, y(t)) = (f_1(t, y(t)), f_2(t, y(t)), \dots, f_n(t, y(t))).$$

où F est une fonction donnée et Y est la solution du système.

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes en une étape qui estiment la solution du système à un instant t_{i+1} en utilisant uniquement y_i qu'à t_i . Ces méthodes nécessitent plusieurs évaluations du second membre F sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Le schéma Runge-Kutta d'ordre 4 (en abrégé RK4) est le choix le plus courant, il est utilisé de manière quasi universelle dans les sciences de l'ingénieur. Une méthode RK4 est écrit :

$$\begin{cases} y^{(i)} = y(t_i) \\ t_{i+1} = h + t_i \\ k_1 = F(t_i, y_i) \\ k_2 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = F(t_i + h, y_i + hk_3) \\ y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} .$$

Soit le système suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x, y) \\ y'(t) = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} .$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(i)} = x(t_i) \\ y^{(i)} = y(t_i) \\ t_{i+1} = h + t_i \\ k_1 = f(t_i, x_i, y_i) \\ l_1 = g(t_i, x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1, y_i\right) \\ l_2 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i, y_i + \frac{h}{2}l_1\right) \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2, y_i\right) \\ l_3 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i, y_i + \frac{h}{2}l_2\right) \\ k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3, y_i) \\ l_4 = g(t_i + h, x_i, y_i + hl_3) \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{array} \right. .$$

2 Stabilité numérique des points d'équilibres

Dans cette section on va confirmer numériquement la stabilité des points d'équilibres E_1 et E_2 que sont déjà étudiés théoriquement dans le section 5 de chapitre 2.

2.1 Le point d'équilibre E_1

On prend les valeurs des paramètres opérationnels du tableau 3.1.

D'après la figure 3.1, on voit bien qu'après un temps assez grand la solution du système converge vers le point d'équilibre.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 184 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors ce point est localement asymptotiquement stable dans l'ensemble Ω .

2.2 Le point d'équilibre E_2

Pour les valeurs des paramètres opérationnels du tableau 3.2.

D'après la figure 3.3, on voit bien qu'après un temps assez grand la solution du système converge vers le point d'équilibre

$$E_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Alors ce point est localement asymptotiquement stable dans l'ensemble Ω .

α	β	γ	δ	K_x	b	c
0.25	0.0006	0.2	0.001	1000	0.2	5

TABEAU 3.1 – Les données opérationnelles pour converger vers E_1 .

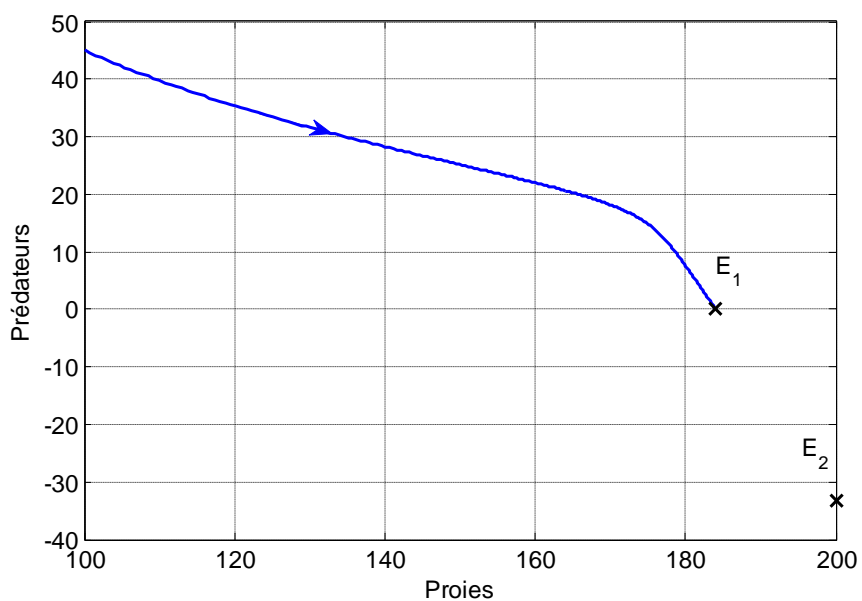


FIGURE 3.1 – La convergence du point E_1 dans le graphe 2D.

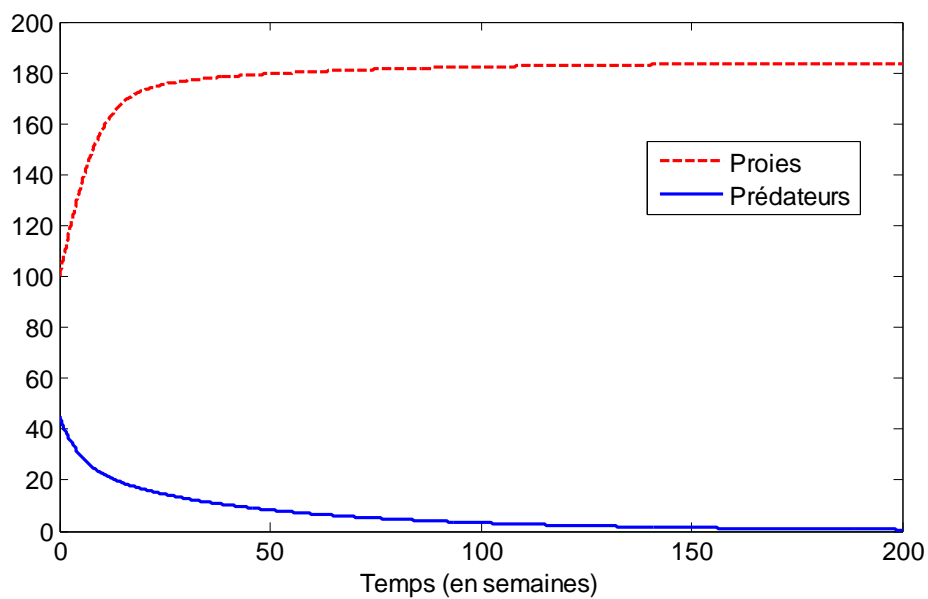


FIGURE 3.2 – La stabilité du point E_1 avec les condition initiales $x_0 = 100$, $y_0 = 45$.

α	β	γ	δ	K_x	b	c
0.25	0.0006	0.2	0.001	200	5	0.1

TABLEAU 3.2 – Les données opérationnelles pour converger vers E_2 .

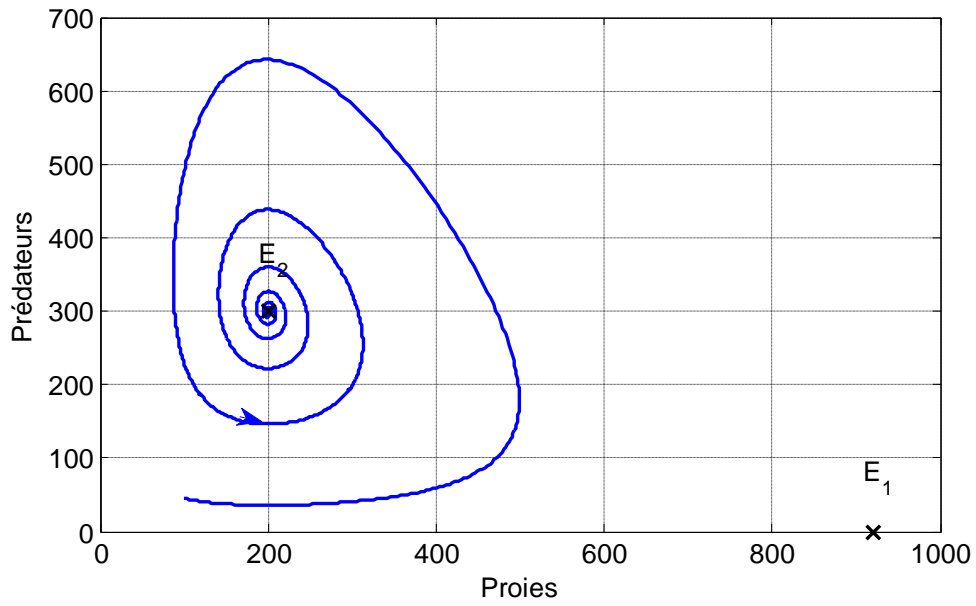


FIGURE 3.3 – La convergence du point E_2 dans le graphe 2D.

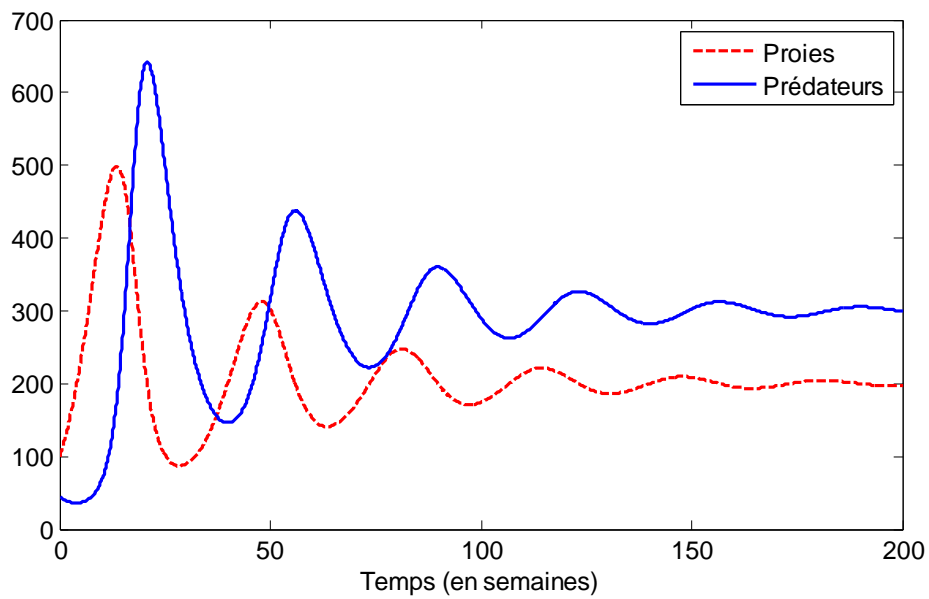


FIGURE 3.4 – La stabilité du point E_2 avec les condition initiales $x_0 = 100$.

3 Simulation de quelques senarios

Dans cette section, on va sumiler deux senerios :

- L'influence de le taux de cannibalisme des proies, représenté par le paramètre c dans notre modèle.
- L'influence de letemps moyen de recherche des faibles ou des jeunes, représentée par le paramètre b dans notre modèle.

3.1 L'influence de c le taux de cannibalisme

Notre but dans cette sous-section est de simuler le taux du canibalisme, pour voir son impact sur l'évolution des proies et des prédateurs.

pour différentes valeurs du taux de cannibalisme $c = (0.1; 0.45; 0.85)$, on obtient les resultats dans les figures 3.5-3.6.

Les figures 3.5-3.6 montrent l'influence de c le taux de cannibalisme sur les prédateurs et les proies.

Les constatations :

1. Plus c est petit, plus le pic de courbe de prédateur et proie est grand, et plus le temps pour attendre le pic augmante (voir fig 3.5).
2. Pour $c = 0.1$, on atteint le nombre maximal des proies a peu près égale 517 individus, après 13 semaines et le nombre des prédateurs atteint presque le minimum égale 200 individus.

Le nombre maximum des prédateurs près de 689 individusest atteint après 20 semaines, alors que le nombre des proies diminu jusqu'à 190 individus.

3. Pour $c = 0.45$, Le nombre maximum des proies (454 individus) est atteint après 15 semaines, en même temps le nombre des prédateurs atteint le minimum égale 161. Après 23 semaines, le nombre des prédateurs est égale 528 individus, tandis que le nombre des proies déminu jusqu'à 191.
4. Même chose pour $c = 0.85$ avec un pic plus bas et un temps pour atteindre le pic plus long.

3.2 L'influence de b le temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes

Notre but dans cette sous-section est de simuler la moyenne du temps de recherche des faibles ou des jeunes, pour voir son impact sur les proies et les prédateurs.

En variant les valeurs $b = (1; 2; 5)$, on obtient les resultats dans les figures 3.7-3.8.

Les figures 3.7-3.8 montrent l'influence de b le temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes sur les prédateurs et les proies.

Les constatations :

1. Plus b est grand, plus le pic de courbe de prédateur et proie est grand, et plus le temps pour attendre le pic diminué.
2. Pour $b = 1$, on a après 20 semaines le nombre des proies maximales a peu près égale 360 et le nombre des prédateurs atteint le minimum 108 individus. Après 31 semaines le nombre des prédateurs a peu près égale 301, mais le nombre des proies déminu au minimum 203.

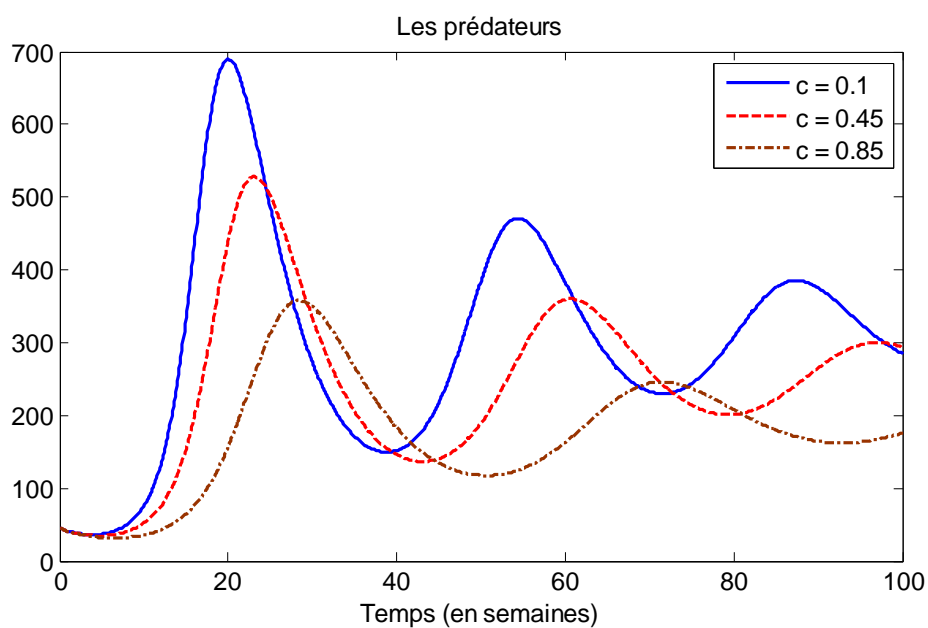


FIGURE 3.5 – Effet le taux de cannibalisme sur les prédateurs avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$.

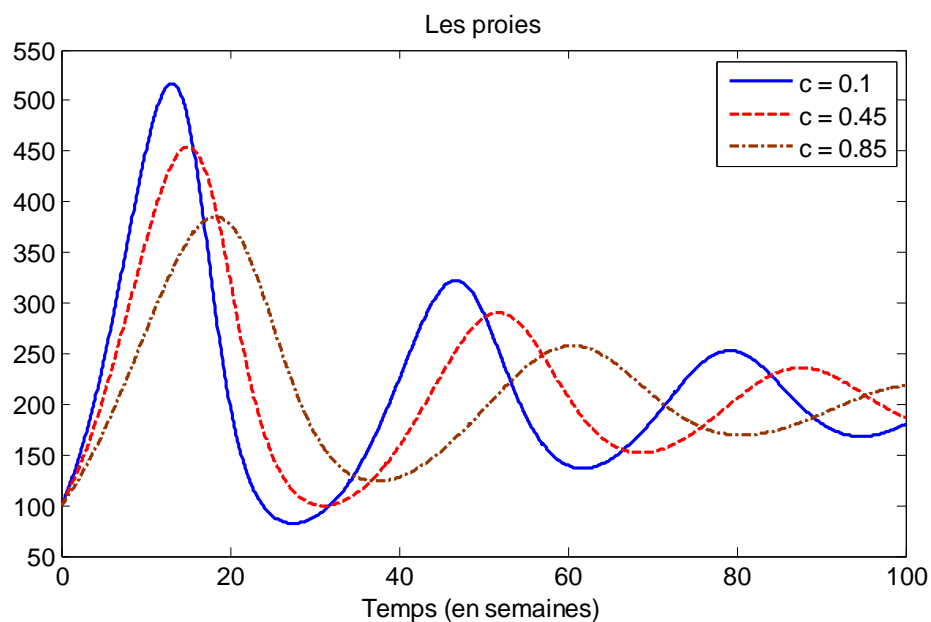


FIGURE 3.6 – Effet le taux de cannibalisme sur les proies avec les condition initiales $x_0 = 100$, $y_0 = 45$.

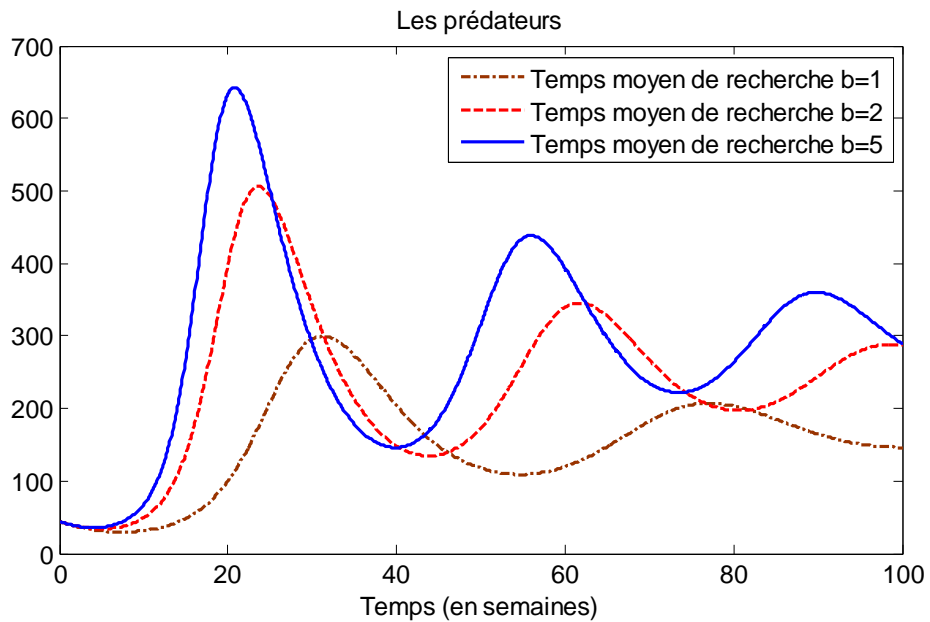


FIGURE 3.7 – Effet du temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes sur les prédateurs avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$.

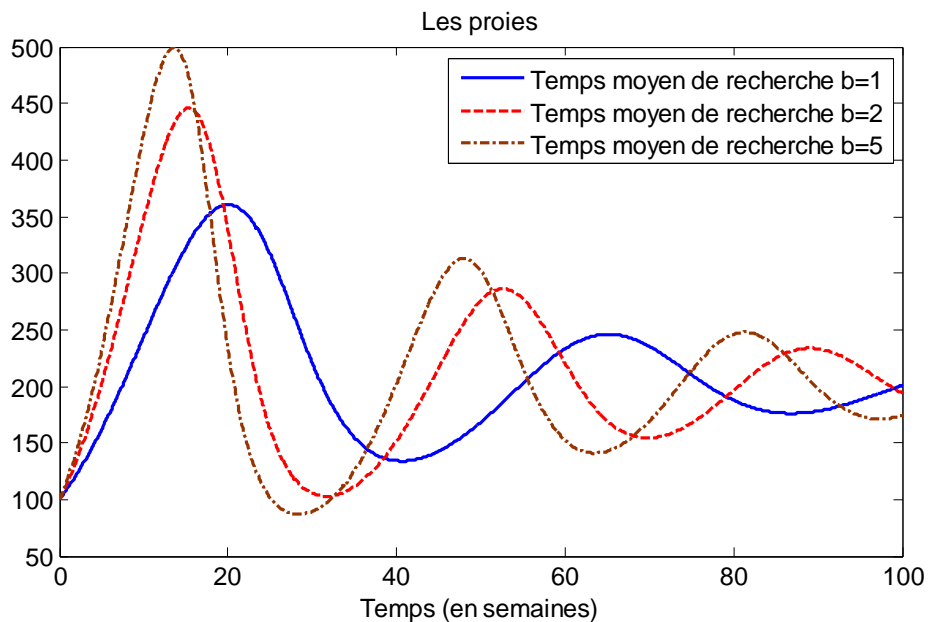


FIGURE 3.8 – Effet du temps moyen de recherche des faibles ou des jeunes sur les proies avec les condition initiales $x_0 = 100$ et $y_0 = 45$.

3. Pour $b = 2$ et 5, on a les même constatations avec des pics plus bas et des temps pour atteindre les pics plus long.

4 Conclusion

Modèle proie-prédateur classique n'est pas réaliste, on va ajouter le facteur logistique pour les proies de ce modèle. Notre contribution , on va ajouter le cannibalisme chez les proies parce que le cannibalisme diminué du dynamique des population.

Bibliographie

- [1] Volker Grimm and Steven F. Railsback : Individual-based Modeling and Ecology. Volume 8 in the series Princeton Series in Theoretical and Computational Biology. <https://doi.org/10.1515/9781400850624> 6
- [2] S.A.L.M. Kooijman : Dynamic Energy and Mass Budgets in Biological Systems. Cambridge University Press, Great Britain (2000). ISBN 0-521-78608-8 6
- [3] W. Sutherland : From individual behaviour to population ecology. Oxford [GBR] : Oxford University press, 1996. ISBN/ISSN/EAN :0-19-854911-3 6
- [4] M. Begon, C.R. Townsend and J. L. Harper, *Ecology : from individuals to ecosystems*. Fourth edition ed. Blackwell Publishing, (2006). 6
- [5] A.A. Berryman, *Population : a central concept for ecology?* Oikos, 97 :439–442 (2002)
- [6] P. Etchécopar, *Des prédateurs et leurs proies*. 2013. <https://accromath.uqam.ca/2013/05/des-predateurs-et-leurs-proies/> 10
- [7] S. Frontier, D. Pichod-Viale, A. Lepretre, D. Davoult, and C. Luczak, *Ecosystèmes, structure, fonctionnement, évolution*. Dunod, 2008. 6
- [8] S. Kingland, *Modeling Nature*. University of Chicago Press 1985. 6
- [9] Francine et Marc Diener, *Le modèle proie-prédateur de Lotka Volterra*. Cours de Mathématiques Appliquées à la Biologie (MAB) en Licence SV1, 2006-2007. <https://math.unice.fr/~diener/MAB06/LotVolt.pdf>. 11, 13, 16, 18
- [10] Beroual Nabil, *Modèles Mathématiques Appliqués à la Dynamique des Populations*. Thèse de doctorat, 2015. <http://dspace.univ-setif.dz:8888/js-pui/bitstream/123456789/1731/1/Th%c3%a8se%20Finale2015.pdf> 5, 7
- [11] E. Renshaw, *Modelling Biological Populations in Space and Time*. Cambridge Studies in Mathematical Biology, Cambridge University Press (1991).
- [12] J.R. Chazottes et M. Monticelli, *Sur les modèle proies-prédateurs en écologie*. Brève histoire et expérimentation numérique interactive, (2013). <https://www.espace-turing.fr/Sur-les-modeles-proie-predateur-en-ecologie?artpage=2-6> 10
- [13] A.Mezouaghi,S.Djilali,O.Belhamiti.Bifurcation analysis of a diffusive predator-prey.model with schooling behaviour and cannibalism in prey,Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol. 11, No. 3, 2021 209.