

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité “Modélisation, Contrôle et Optimisation”

présenté et soutenu publiquement par

BOUZIANE ABDELKADER

le 16 Juin 2022

Le modèle prédateur-proie avec comportement troupeau chez les proies

Encadeur : **BELHAMITI OMAR (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

Jury

Mme Bouzid Leila, MCB Présidente (Université de Mostaganem, Algérie)
M. Bouziane Mehdi, MAA Examineur (ENS-Mostaganem, Algérie)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

**M
A
S
T
E
R**

À mes parents

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à :

Toutes celles et ceux qui m'ont assistée et soutenue de près ou de loin dans ma contribution.

Monsieur Omar BELHAMITI professeur à l'Université de Mostaganem pour m'avoir proposé un thème de recherche intéressant. Il a su par ses conseils permanents et sa présence tout le long de la réalisation de ce modeste travail me faire connaître le domaine de la Modélisation.

Tous les professeurs que j'ai rencontré ou cotoyé durant tout mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Enfin, je ne peux omettre mes parents, ni ma famille dont l'affection et le soutien continus ont constitué un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

ABDELRAOUF

Table des matières

Introduction	i
1 Notions préliminaires	2
1.1 Le modèle de Malthus	3
1.2 Modèle de Verhulst (Modèle logistique)	4
1.3 Les points stationnaires pour un système linéaire	6
1.4 Les points stationnaires pour les systèmes non-linéaire	11
1.4.1 Théorème de lyapunov	12
2 Modélisation Mathématique	13
2.1 Modèle du proie-prédateur classique	13
2.1.1 Les hypothèses de Lotka Volterra	13
2.1.2 Étude mathématique du système	14
2.2 La variante 1	15
2.2.1 Étude mathématique du système	16
2.3 La variante 2	18
2.3.1 Étude mathématique du système	18
2.4 La variante 3	20
2.4.1 Étude mathématique du système	20
2.5 Modèle de proie-prédateur avec comportement troupeau chez les proies	23
2.5.1 Étude mathématique du système	24
3 Simulation numérique	27
3.1 La méthode de résolution	27
3.1.1 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 :	27
3.2 Stabilité numérique du modèle (2.5.1)	28
3.2.1 Le point E_1	28
3.2.2 Le point E_2	29
3.3 L'effet de la prédation sur l'évolution des deux populations	31
Conclusion	33

Bibliographie

34

INTRODUCTION

Les équations différentielles ordinaires modélisent une grande partie de phénomènes dans plusieurs domaines (électronique, biologie, mécanique,...etc). Elles sont souvent innombrables et non linéaires.

En biologie, la construction des modèles dynamiques est basée sur l'accumulation des données expérimentales, ces dernier nous aide à comprendre et à décrire l'évolution au cours du temps de certaines variables biologiques. Ces modèles permettent de simuler le comportement de chaque individu d'une population et son interaction avec les autres individus.

Il y a près d'un siècle le mathématicien italien Vito Volterra a élaboré un modèle décrivant l'évolution de deux populations dans un même écosystème, l'une étant la proie de l'autre. Ce modèle est fondamental en biologie. Il explique la dynamique des population de sardines et de requins en mer Adriatique ; donne aussi des informations sur les quantités de sardines pêchées après l'interruption due à la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment (ce qui peut sembler contre intuitif) et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requins avait augmenté.

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) - x(t) = (\textit{Croissance} - \textit{Prédation}) \Delta t \\ y(t + \Delta t) - y(t) = (\textit{Production} - \textit{Mortalité}) \Delta t \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Mathématiquement, il s'agit d'un système non linéaire de deux équations différentielles du premier ordre (0.0.1), auquel on ajoute des conditions initiales (population de départ de chacune des espèces) sous les hypothèses suivant :

- les proies disposent de nourriture en quantité illimitée
- l'évolution de population proie est exponentielle
- le milieu est fermé
- la seule source d'alimentation des prédateurs sont les proies
- il n'y a pas de migration

Dans ce mémoire, on va développer un modèle mathématique temporel décrivant la dynamique de l'interaction de deux populations (proie et prédateur). Ensuite, on va intégrer le terme du comportement troupeau chez les proies, on va analyser la stabilité du système. Finalement, on va terminer par une simulation numérique.

Notre manuscrit est composé de trois chapitres : dans le 1^{ier} chapitre, on commence tout d'abord par donner quelques définitions qui permet au lecteur de comprendre le contenu de ce mémoire. Concernant le 2^{ième} chapitre, on va présenter quelques modèles mathématiques existants dans la littérature sur le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra, ensuite on va proposer un modèle de proie-prédateur là où on a intégré le facteur troupeau chez les proies. On termine ce chapitre par une analyse mathématique du système. Finalement le 3^{ième} chapitre, on va donner une description sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la résolution d'un système à deux équations différentielles. Ensuite, on va faire une simulation numérique pour illustrer le résultat obtenu.

NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

\mathbb{R}	:	Le corp du nombre réel
Λ_i	:	ouvert d'un espace de banach \mathbb{R}
$\frac{\partial}{\partial x_i}$:	<i>la derrivé partielle au point x_i</i>
$\frac{d}{dx}$:	<i>la derrivé au point x</i>
$\text{Re}(\cdot)$:	La partie réel d'un nombre complexe

Notions préliminaires

Les mathématiques sont de plus en plus présentes dans divers domaines (mécanique, biologie, etc.). La modélisation en biologie a commencé à être utilisée en dynamique des populations afin de modéliser la croissance des populations et aussi les différentes interactions qui peuvent exister entre elles.

Dans ce chapitre nous exposons les outils mathématiques dont nous aurons besoin dans la suite. Les concepts que nous rappelons ici sont classiques et pour la plupart de nature élémentaire pour un mathématicien. Nous les introduisons ici dans le but de rendre plus facile, pour un biologiste, la lecture des autres chapitres.

Dans ce chapitre on va utiliser comme référence ([1]) ([10]) ([14])

Définition 1.0.1 (Modélisation) *La modélisation est la spécialité des mathématiques qui nous permet de transformer un phénomène réel en une formule mathématique qu'on appelle modèle.*

Définition 1.0.2 (Modèle mathématique) *Un modèle mathématique est la description mathématique d'un phénomène issu du monde réel.*

Définition 1.0.3 (Population) *Une population est un ensemble d'êtres vivants (individus), animaux ou végétaux, appartenant à la même espèce, vivant dans le même milieu et au même moment et qui sont capables d'interagir entre eux.*

Définition 1.0.4 (Dynamique de population) *La dynamique des populations c'est l'évolution dans le temps de la taille d'une population, elle dépend de :*

- la natalité,
- la mortalité,
- l'émigration : nombre d'individu sortant d'une population,
- l'immigration : nombre d'individu se déplaçant dans une population.

Définition 1.0.5 (Taux de variation) *Le taux de variation permet d'étudier, en pourcentage, l'évolution de la valeur d'une variable sur une période donnée.*

Définition 1.0.6 (Taux de croissance) *Le taux de croissance est le nombre d'individus produits par individus présents par unité de temps.*

1.1 Le modèle de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766-1834) était un pasteur anglican et un économiste. Afin d'expliquer et de répondre au problème de pauvreté qui fait la rage en Angleterre à la fin du 18e siècle, il tente tout d'abord de savoir quel serait la croissance naturelle de la population en l'absence de toute contrainte, en particulier si celle-ci ne connaissait aucune restriction alimentaire. Il remarque alors que la croissance d'une population p est de type géométrique alors que celui des ressources vitales est plutôt de type arithmétique. Le modèle de Malthus est le plus simple parmi les modèles existants ; il se base sur les travaux de Léonard Euler 1707-1783.

Les hypothèses de Malthus sont :

- Il n'y a pas de migration,
- Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels à l'effectif initial de cette population d'un côté et à la durée de cette période de l'autre côté.

$$\begin{cases} p'(t) = rp(t) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \quad \text{avec } r = b - d \quad (1.1.1)$$

avec

p' : la variation de la population au cours du temps

t_0 : temps initial

b : taux de natalité

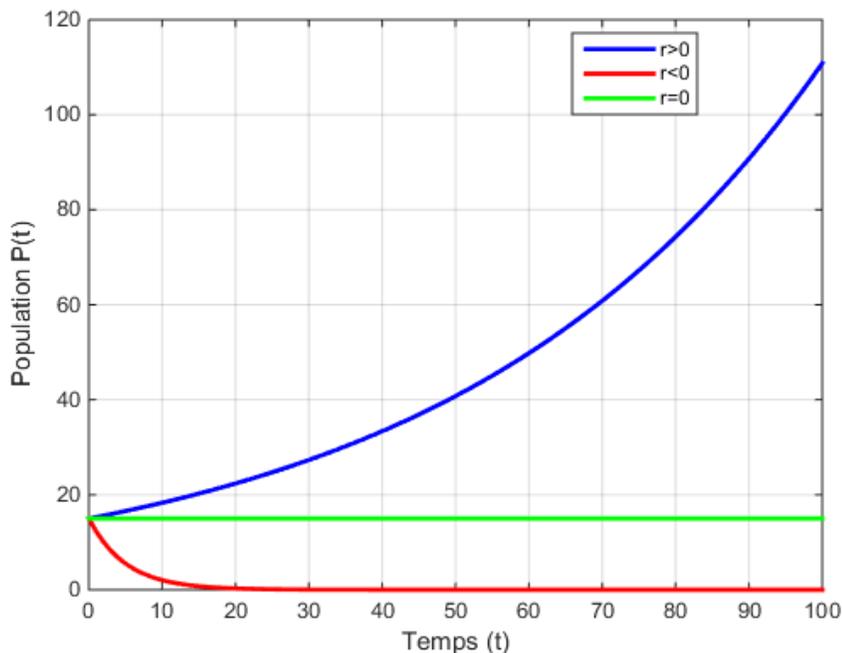
d : taux de décès

r : taux de croissance de la population

p_0 : effectif de la population à l'instant $t = t_0$

L'unique solution du problème (1.1.1) avec $p(t_0) = p_0$ est :

$$p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)} \quad \text{avec } t_f > t_0 \quad (1.1.2)$$



(1.1.3)

le graphe de la fonction p solution du système (1.1.1) avec $p_0 = 15$, $r = 0.02$, $r = -0.2$, $r = 0$.

1.2 Modèle de Verhulst (Modèle logistique)

Le modèle de Malthus n'est pas réaliste car la croissance exponentielle d'une population p sous les hypothèses de Malthus ne correspond pas à la réalité, il ne tient pas compte du fait que le taux d'accroissement de la population r va diminuer à cause de différents facteurs comme la capacité de charge (la diminution de l'espace disponible) ou les ressources d'alimentation. Le mathématicien Belge "Pierre François Verhulst" (1804–1849) propose un nouveau modèle où le taux de croissance relative r dépend du temps.

L'idée de "Verhulst" est que dans la réalité, le taux de croissance relative diminue au fur et à mesure que la population augmente.

Cela veut dire que le nombre d'individus de la population est limité par une valeur maximale K (capacité de charge), en raison du milieu qui ne permet de nourrir que K individus, il faut donc que $r(t)$ diminue lorsque p s'approche de K pour s'annuler en $p = K$,

$$r(t) = a - bp(t) \quad (1.2.1)$$

avec :

a : le taux de croissance de Malthus

b : la compétition due à la limite des ressources du milieu

L'hypothèse de Verhulst se traduit par :

$$p'(t) = (a - bp(t))p(t). \quad (1.2.2)$$

Alors, d'après l'hypothèse de Verhulst on a :

$$a - bK = 0 \quad (1.2.3)$$

Lorsque $p(t) \rightarrow K$ on trouve :

$$b = \frac{a}{K}. \quad (1.2.4)$$

Et

$$p'(t) = a \left(1 - \frac{p(t)}{K} \right) p(t) \quad (1.2.5)$$

Donc, le modèle devient :

$$\begin{cases} p'(t) = a \left(1 - \frac{p(t)}{K} \right) p(t) & t \geq t_0 \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

La résolution analytique du problème (1.2.6) est :

$$p(t) = \frac{p_0 K}{p_0 + e^{-r(t_f - t_0)} (K - p_0)} \quad (1.2.7)$$

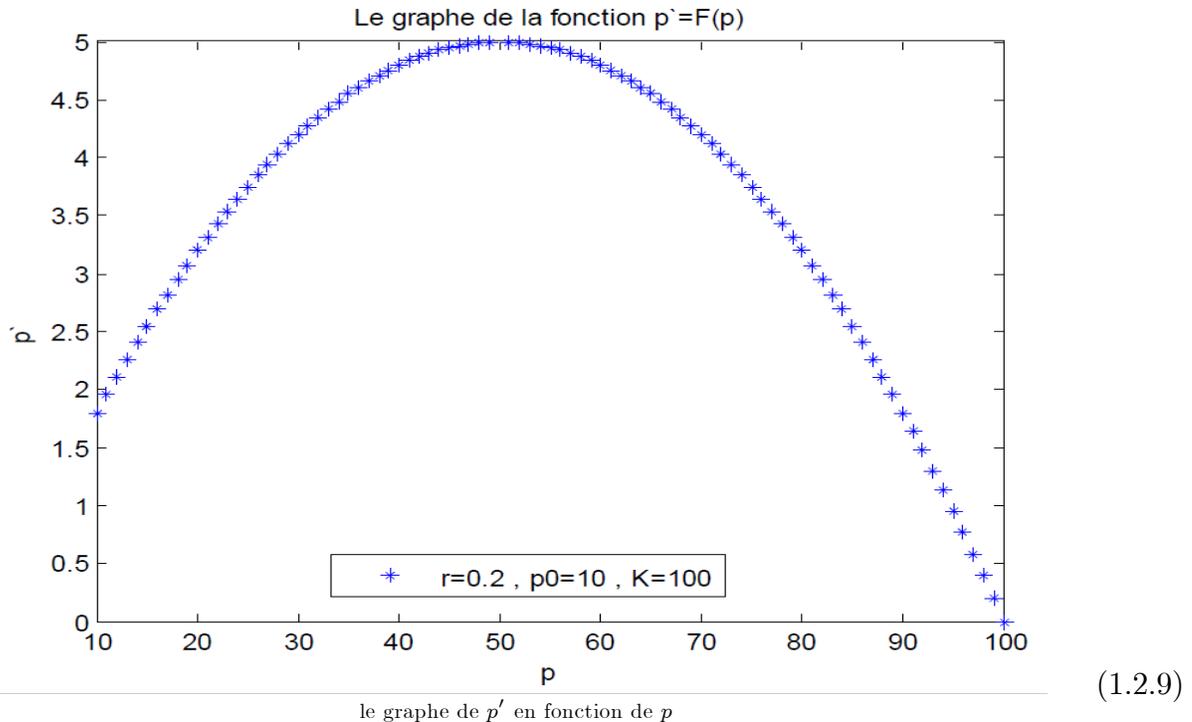
Le comportement de $p(t)$ suivant K :

Pour savoir l'allure du graphe de la solution (1.2.7) de l'équation différentielle (1.2.6), la dérivée p' comme une fonction de p comme suit :

$$\begin{aligned} p' &= a \left(1 - \frac{p}{K} \right) p \\ &= F(p) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

On voit donc, que :

- p' s'annule lorsque $p = 0$ et $p = K$.
- $p' > 0$ lorsque p est compris entre 0 et K .
- $p' < 0$ lorsque $p > K$.



Il en résulte que :

– Si $p_0 < K$, $p(t)$ croît (puisque $p' > 0$) donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = K \quad (1.2.10)$$

– À l'inverse, si $p_0 > K$, $p(t)$ décroît (puisque $p' < 0$) et que aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = K \quad (1.2.11)$$

En effet, le maximum de F est atteint pour $p = \frac{K}{2}$, ce qui signifie que lorsque la taille de la population est égale à la moitié de sa capacité biotique, le taux d'accroissement atteint son maximum.

1.3 Les points stationnaires pour un système linéaire

On considère le système différentiel de deux équations suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = f(y_1(t), y_2(t)) \\ y_2'(t) = g(y_1(t), y_2(t)) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Où les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R}^2 à valeurs réels.

On suppose que le système vérifie les hypothèses du théorème de l'existence et l'unicité c'est à dire pour tout couple $(y_{1,0}; y_{2,0})$ avec t_0 donné, il existe une et une seule solution $s(t) = (y_1(t), y_2(t))$ vérifiant la solution $s_0 = (y_{1,0}; y_{2,0})$.

Un point stationnaire $s = (y_1^*, y_2^*)$ est un point qui vérifie :

$$\begin{cases} f(y_1^*, y_2^*) = 0 \\ g(y_1^*, y_2^*) = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Considérons un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = ay_1(t) + by_2(t) \\ y_2'(t) = cy_1(t) + dy_2(t) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Ce système peut être ré-écrit comme suit :

$$Y' = AY \quad (1.3.4)$$

Avec A une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

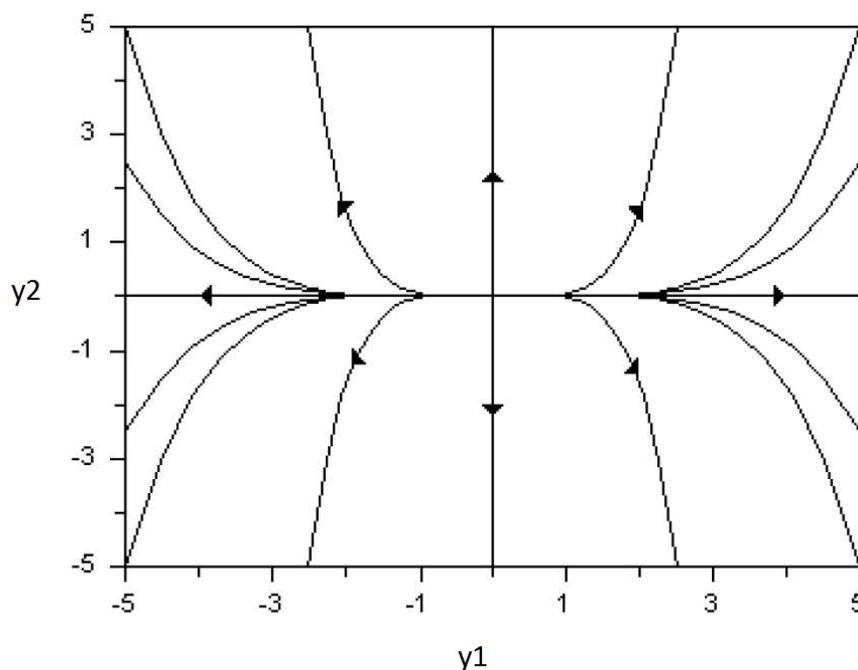
Et

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (1.3.6)$$

Il est clair que le point $(0; 0)$ est un point stationnaire (on l'appelle aussi un point critique, point d'équilibre).

Dans la suite, on va étudier selon la classification due à Henri Point Carré, le type des portraits de phase d'un système linéaire en fonction du type des valeurs propres de la matrice A .

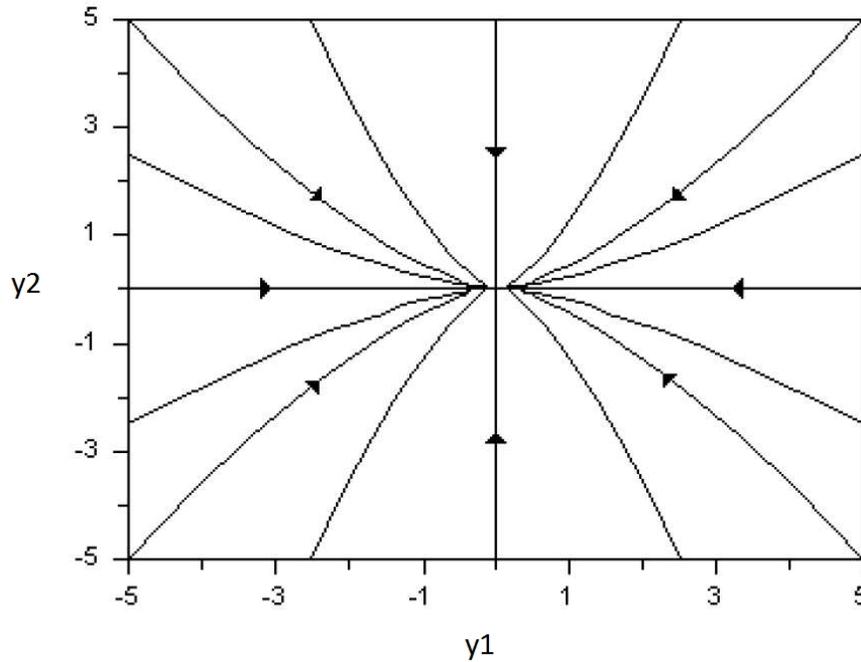
Définition 1.3.1 (Noeud instable) *Si la matrice A possède deux valeurs propres réelles positives $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Alors le point $(0; 0)$ est un noeud instable.*



Noeud instable

(1.3.7)

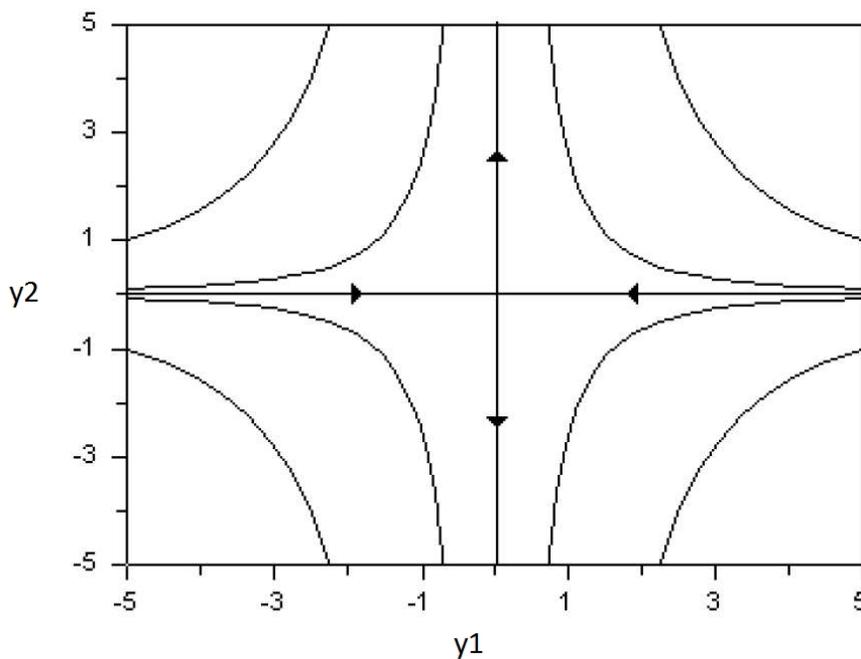
Définition 1.3.2 (Noeud stable) *Si la matrice A possède deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Alors le point $(0;0)$ est un noeud stable.*



Noeud stable

(1.3.8)

Définition 1.3.3 (Point col (ou selle)) *Si la matrice A possède deux valeurs propres réelles $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Alors le point stationnaire $(0;0)$ est un point col.*



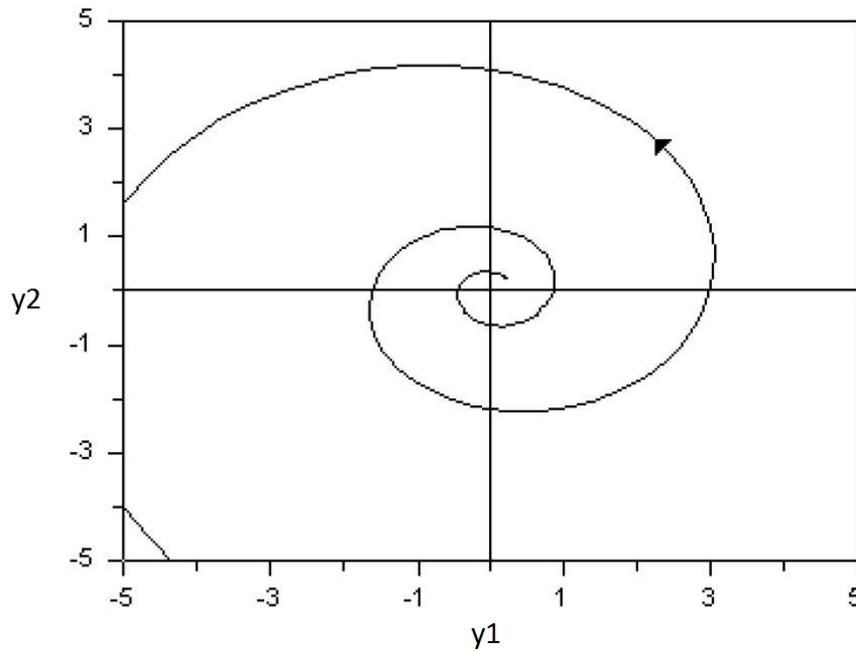
Point selle

(1.3.9)

Définition 1.3.4 (Foyer) Si la matrice A possède deux valeurs propres complexes forcément sont conjuguées

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + \beta i \\ \lambda_2 = \alpha - \beta i \end{cases} \quad (1.3.10)$$

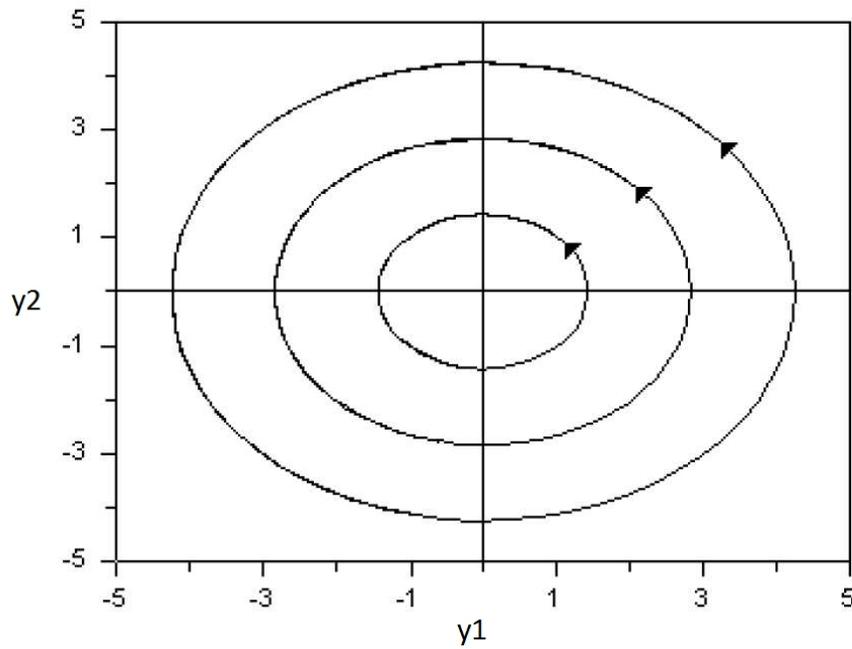
le premier cas : Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0; 0)$ est un foyer instable.



foyer instable

(1.3.11)

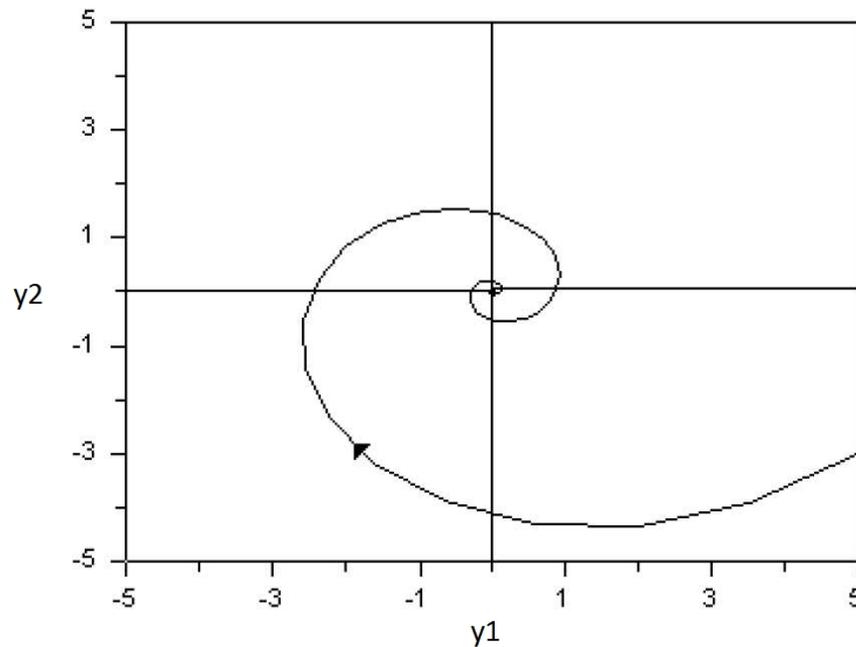
Le deuxième cas : Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0; 0)$ est un centre.



centre

(1.3.12)

Le troisième cas : Si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0; 0)$ est un foyer stable.

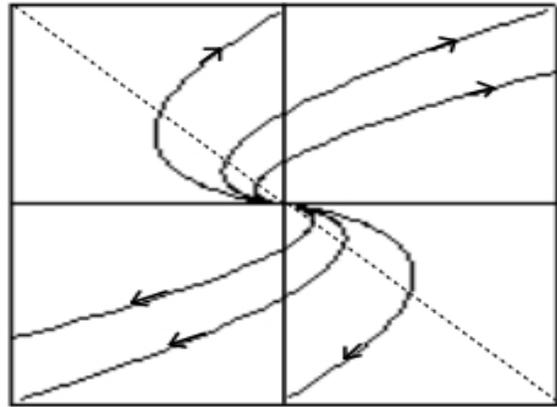


foyer stable

(1.3.13)

Définition 1.3.5 (noeud dégénéré) Si A possède une valeur propre double ($\Delta = 0$) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$

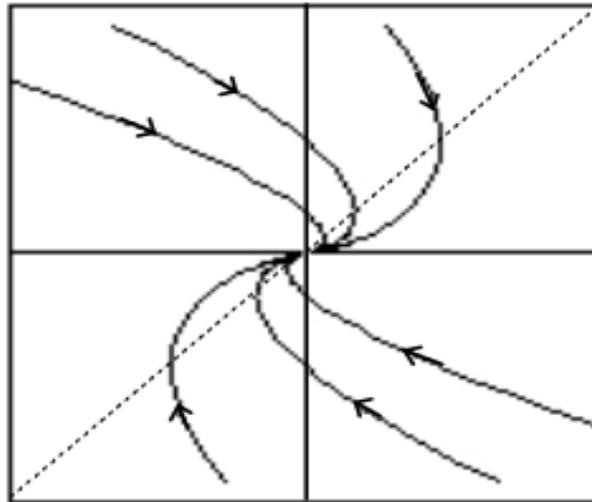
Le premier cas : Si la trace est positive ($\lambda_0 > 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré instable.



noeud dégénéré instable

(1.3.14)

Le deuxième cas : Si la trace est négative ($\lambda_0 < 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré stable.



noeud dégénéré stable

(1.3.15)

1.4 Les points stationnaires pour les systèmes non-linéaire

On considère un système différentiel non-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = f(y_1(t), y_2(t)) \\ y_2'(t) = g(y_1(t), y_2(t)) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

– Les points stationnaires de ce système sont donnés par :

$$\begin{cases} f(y_1; y_2) = 0 \\ g(y_1; y_2) = 0 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

- Pour faire l'étude de stabilité d'un système non-linéaire, il faut linéariser le système au voisinage des points d'équilibre, pour cela on calcule la jacobienne du système :

$$j(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(y_1; y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f(y_1; y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g(y_1; y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g(y_1; y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

- Puis l'étude de la nature des points d'équilibres, suivant les signes des valeurs propres de la jacobienne $j(y_1; y_2)$ du système au voisinage du point d'équilibre mais le principe de linéarisation ne s'applique pas dans le cas d'un point d'équilibre centre. Pour cela, il y'a d'autre principe comme le théorème de lyapunov.

1.4.1 Théorème de lyapunov

Une fonction de Lyapunov est un outil permettant de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre, cette méthode peut également être utilisée pour déterminer la stabilité d'un équilibre lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure [12] [13].

Définition 1.4.1 soit $(y_1^*; y_2^*)$ un point d'équilibre du système (1.4.1) et $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de $(y_1^*; y_2^*)$, et $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U - \{(y_1^*; y_2^*)\}$ telle que :

- $v(y_1^*; y_2^*) = 0$ et $\forall u \in U - \{(y_1^*; y_2^*)\}, v(u) > 0$.

- $\dot{v}(u) := \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \nabla v(u) \right\rangle \leq 0, \forall u \in U - \{(y_1^*; y_2^*)\}$.

On appelle une telle fonction fonction de lyapunov.

Théorème 1.4.1 (Lyapunov) S'il existe une fonction de lyapunov au point d'équilibre $(y_1^*; y_2^*)$ pour le système (1.4.1), alors le point d'équilibre est stable.

Proposition 1.4.1 soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $y_1, y_2 > 0$, alors h est une intégrale première pour le système (1.4.1) i.e si $(y_1(t), y_2(t))$ est solution de (1.4.1) sur $[0, T]$, alors $\forall t < T$, $h(y_1(t), y_2(t)) = \text{constante}$

Modélisation Mathématique

Dans ce chapitre on va utiliser comme référence ([2]) ([3]) ([4]) ([5]) ([6]) ([7]) ([11])

2.1 Modèle du proie-prédateur classique

Dans tout la suite, on s'intéresse aux modèles proie-prédateur de Lotka Voltera qui est un système biologique composé de deux espèces : proies et prédateurs, et il est parmi les premiers modèles qui décrit l'interaction proie-prédateur.

Pour cela, on note $x(t)$ et $y(t)$ le nombre des proies et des prédateurs respectivement au temps t .

Mathématiquement, le modèle de proie-prédateur de Lotka Voltera est un système d'équations différentielles couplées non-linéaires d'ordre 1, donc il s'agit d'un système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où :

$\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$ représentent la variation des populations au cours du temps « taux de variation instantanée »,

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

α_1 : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;

β_1 : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;

α_2 : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;

β_2 : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

les deux termes α_1 et β_1 ont une croissance malthusienne.

2.1.1 Les hypothèses de Lotka Volterra

1. Les proies sont supposées avoir une source d'alimentation illimitée et ont une croissance exponentielle s'ils ne sont exposé à aucune prédation, cette croissance exponentielle est représentée dans le système (2.1.1) par le terme $\alpha_1 x(t)$.

2. Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies, il est représenté dans le système (2.1.1) par β_1 .
3. Si l'un des termes $x(t)$ ou $y(t)$ est nul, alors il ne peut y avoir aucune prédation.
4. La croissance de la population prédatrice est proportionnel au taux de prédation β_2 .

2.1.2 Étude mathématique du système

Points d'équilibre

Un état d'équilibre de la population est observé lorsque il n'y a pas d'évolution pour les deux population, c'est à dire lorsque les dérivées correspondantes sont nulles, ce qui se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha_1 x - \beta_1 xy = 0 \\ -\alpha_2 y + \beta_2 xy = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

La première équation du système algébrique, donne :

$$x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \quad (2.1.3)$$

Ceci présente, deux cas :

Le premier cas : $x = 0$, ce qui donne par la deuxième équation :

$$y = 0 \quad (2.1.4)$$

d'où, le premier point d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T. \quad (2.1.5)$$

Le deuxième cas : $\alpha_1 - \beta_1 y = 0$ alors $y = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ et la deuxième équation donne

$$x = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad (2.1.6)$$

d'où, le deuxième point d'équilibre

$$E_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^T. \quad (2.1.7)$$

Le premier point d'équilibre E_0 correspond à une extinction définitive des deux espèces.

La deuxième point d'équilibre E_1 correspond à un état d'équilibre naturel et ceci dépend des paramètres α_1 , α_2 , β_1 et β_2 .

Stabilité des points d'équilibre

Pour faire l'étude de stabilité d'un système non-linéaire, il faut linéariser le système au voisinage des points d'équilibre, pour cela on calcule la matrice jacobienne du système :

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ \beta_2 y & -\alpha_2 + \beta_2 x \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

1. Au premier point d'équilibre $E_0 = (0, 0)^T$, cette matrice prend la valeur :

$$j(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = -\alpha_2$.

Ces valeurs propres sont de signes opposés, ce qui montre que ce point d'équilibre E_0 est un point selle (col), ce qui implique que E_0 est instable, ce qui montre que l'extinction des deux espèces est difficile à obtenir dans ce modèle.

2. Pour le second point d'équilibre $E_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^T$, en évaluant la matrice jacobienne en ce point, on obtient :

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ \beta_2 \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont : $\lambda_1 = -i\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ et $\lambda_2 = i\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$.

Il est clair que les deux valeurs propres sont imaginaires pures, le principe de linéarisation ne s'applique pas.

Cependant la fonction $v : u \rightarrow \mathbb{R}$, $u \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ définit par :

$$v(x, y) = h(x, y) - h\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right), \quad (2.1.11)$$

est une fonction de lyapunov et $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'intégrale première du système (2.1.1).

En effet

$$\dot{v}(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \nabla v(u) \right\rangle = 0 \quad (2.1.12)$$

et $v(x, y) \geq 0$, nul seulement pour $(x, y) = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, par application du théorème de lyapunov, on conclut que l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ est stable.

Conclusion

Le modèle de lotka Volterra (modèle de base) est réaliste sous des conditions du théorème de lyapunov.

Pour cette raison, on cherche d'autre variantes pour rendre le modèle réaliste.

2.2 La variante 1

Dans cette variante du proie-prédateur, on remplace le taux de croissance malthusien pour les proies par un taux de croissance logistique, alors le système différentiel (2.1.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \alpha_1 \left(1 - \frac{x(t)}{k_1}\right) x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$ représentent la variation des populations au cours du temps « taux de variation instantanée ».

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

k_1 : la capacité de charge du milieu (i.e le milieu contient une quantité d'alimentation pour nourrir k_1 individus des proies) ;

α_1 : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;

β_1 : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;

α_2 : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;

β_2 : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

2.2.1 Étude mathématique du système

Points d'équilibre

Soit le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x - \beta_1 xy = 0 \\ -\alpha_2 y + \beta_2 xy = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

La deuxième équation du système algébrique, s'écrit

$$y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \quad (2.2.3)$$

alors, on a deux cas :

1. $y = 0$ alors la première équation donne

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x = 0 \quad (2.2.4)$$

Cas 1 : $x = 0$, d'où, le premier point d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T. \quad (2.2.5)$$

Cas 2 : $x = k_1$, d'où, le deuxième point d'équilibre

$$E_1 = (k_1, 0)^T. \quad (2.2.6)$$

2. $x = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, alors la première équation donne

$$y = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{k_1 \beta_2}\right) \quad (2.2.7)$$

d'où, le troisième point d'équilibre

$$E_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{k_1 \beta_2}\right) \right)^T \quad (2.2.8)$$

existe si

$$k_1 \beta_2 > \alpha_2. \quad (2.2.9)$$

Stabilité des points d'équilibre

On calcul la matrice jacobienne :

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \left(1 - \frac{2x}{k_1}\right) - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ \beta_2 y & -\alpha_2 + \beta_2 x \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

1. Au premier point d'équilibre E_0 , cette matrice prend la valeur :

$$j(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = -\alpha_2$.

Ces valeurs propres sont de signes opposés, ce qui donne que ce point E_0 est un point selle (col), ce qui implique que E_0 est instable.

2. Pour le second point d'équilibre $E_1 = (k_1, 0)^T$, en évaluant la matrice jacobienne en E_1 , la matrice suivante est obtenue

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 k_1 \\ 0 & -\alpha_2 + \beta_2 k_1 \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

et elle a pour valeurs propres : $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = k_1 \beta_2 - \alpha_2$

il est clair que $\lambda_1 < 0$ quelques soient les données.

Si $k_1 \beta_2 - \alpha_2 > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ d'ou E_1 est instable (point col).

Si $k_1 \beta_2 - \alpha_2 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ d'ou E_1 est noeud stable.

3. Pour le second point d'équilibre $E_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{k_1 \beta_2}\right)\right)^T$, en évaluant la matrice jacobienne en E_2 , la matrice suivante est obtenue :

$$j(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 k_1} & -\beta_1 \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{k_1}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{k_1 \beta_2} \left(-\frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 + 4k_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 (\alpha_2 - \beta_2 k_1)} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{k_1 \beta_2} \left(-\frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 + 4k_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 (\alpha_2 - \beta_2 k_1)} \right) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Il est clair que , $\lambda_1 < 0$ quelques soient les données.

si $\alpha_2 - \beta_2 k_1 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ ce qui implique que E_2 est un noeud stable.

si $\alpha_2 - \beta_2 k_1 > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ ce qui implique que E_2 est un col d'où, E_2 est instable

si $\alpha_2 - \beta_2 k_1 < 0$ et si de plus $\alpha_1^2 \alpha_2^2 + 4k_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 (\alpha_2 - \beta_2 k_1) < 0$ alors $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ ce qui implique que E_2 est un foyer stable.

Finalement, le point d'équilibre E_2 est stable, si

$$\alpha_2 - \beta_2 k_1 < 0. \quad (2.2.15)$$

2.3 La variante 2

Dans cette variante du proie-prédateur, on remplace le taux de croissance malthusien pour les prédateurs par un taux de croissance logistique, alors le système différentiel (2.1.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\alpha_2 \left(1 - \frac{y(t)}{k_2}\right) y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$ représentent la variation des populations au cours du temps « taux de variation instantanée ».

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

k_2 : la capacité de charge du milieu (i.e le milieu contient une quantité des proies pour nourrir k_2 prédateurs) ;

α_1 : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;

β_1 : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;

α_2 : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;

β_2 : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

2.3.1 Étude mathématique du système

Points d'équilibre

Soit le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 x - \beta_1 xy = 0 \\ -\alpha_2 \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) y + \beta_2 xy = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

La première équation du système algébrique, s'écrit

$$x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \quad (2.3.3)$$

alors, on a deux cas :

1. $x = 0$, alors la deuxième équation donne

$$-\alpha_2 \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) y = 0 \quad (2.3.4)$$

Cas 1 : $y = 0$, alors le premier point d'équilibre $E_0 = (0, 0)^T$.

Cas 2 : $1 - \frac{y}{k_2} = 0$ alors $y = k_2$ et le deuxième point d'équilibre

$$E_1 = (0, k_2)^T. \quad (2.3.5)$$

2. $y = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, alors la deuxième équation donne

$$x = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{k_2 \beta_1}\right) \quad (2.3.6)$$

et le troisième point d'équilibre

$$E_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{k_2\beta_1} \right), \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^T \quad (2.3.7)$$

existe si

$$k_2\beta_1 > \alpha_1. \quad (2.3.8)$$

Stabilité des points d'équilibre

On calcul la matrice jacobienne :

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ \beta_2 y & -\alpha_2 \left(1 - \frac{2y}{k_2} \right) + \beta_2 x \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

1. Au premier point d'équilibre E_0 , cette matrice prend la valeur :

$$j(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = -\alpha_2$.

Ces valeurs propres sont de signes opposés, ce qui montre que ce point E_0 est un point selle (col), ce qui implique que E_0 est instable.

2. Pour le second point d'équilibre $E_1 = (0, k_2)^T$, en évaluant la matrice jacobienne, on obtient

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 k_2 & 0 \\ \beta_2 k_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

et elle a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_1 - k_2\beta_1$

il est clair que $\lambda_1 > 0$ quelques soient les données.

Si $\alpha_1 - k_2\beta_1 > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ d'où, E_1 est instable (noeud instable).

Si $\alpha_1 - k_2\beta_1 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ d'où, E_1 est instable (point col), d'où, E_1 est instable.

3. Pour le second point d'équilibre $E_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{k_2\beta_1} \right), \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^T$, en évaluant la matrice jacobienne, on obtient :

$$j(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1 k_2} \right) \\ \frac{\beta_2 \alpha_1}{\beta_1} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 k_2} \end{pmatrix} \quad (2.3.12)$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{k_2\beta_1} \left(-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4k_2\alpha_1\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - k_2\beta_1)} \right) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{k_2\beta_1} \left(-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4k_2\alpha_1\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - k_2\beta_1)} \right) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Il est clair que $\lambda_1 > 0$ car :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{k_2\beta_1} \left(-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4k_2\alpha_1\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - k_2\beta_1)} \right) \\ &= \frac{1}{k_2\beta_1} \left(\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4k_2\alpha_1\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - k_2\beta_1)} \right)\end{aligned}\quad (2.3.14)$$

et pour λ_2 :

alors λ_2 et $(\alpha_1 - k_2\beta_1)$ ont le même signe et on distingue deux cas :

premier cas :

si $(\alpha_1 - k_2\beta_1) < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ ce qui implique que E_2 est un col (selle).

Deuxième cas :

Si $(\alpha_1 - k_2\beta_1) > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ ce qui implique que E_2 est un noeud instable.

Si $\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4k_2\alpha_1\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - k_2\beta_1) < 0$ alors $\text{Re}(\lambda_2) > 0$, E_2 est un foyer instable

Finalement, le point d'équilibre E_2 est un noeud instable.

2.4 La variante 3

Dans cette variante du proie-prédateur, on remplace le taux de croissance malthusien pour les proies et les prédateurs par un taux de croissance logistique, alors le système différentiel (2.1.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \alpha_1 \left(1 - \frac{x(t)}{k_1}\right) x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\alpha_2 \left(1 - \frac{y(t)}{k_2}\right) y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \end{cases}\quad (2.4.1)$$

$\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$ représentent la variation des populations au cours du temps « taux de variation instantanée ».

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

k_1 : la capacité de charge du milieu (i.e le milieu contient une quantité d'alimentation pour nourrir k_1 individus des proies) ;

k_2 : la capacité de charge du milieu (i.e le milieu contient une quantité des proies pour nourrir k_2 prédateurs) ;

α_1 : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;

β_1 : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;

α_2 : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;

β_2 : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

2.4.1 Étude mathématique du système

Points d'équilibre

Soit le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x - \beta_1 xy = 0 \\ -\alpha_2 \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) y + \beta_2 xy = 0 \end{cases}\quad (2.4.2)$$

La première équation du système algébrique, s'écrit

$$x \left(\alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1} \right) - \beta_1 y \right) = 0 \quad (2.4.3)$$

alors, on a deux cas :

1. $x = 0$, alors la deuxième équation donne

$$-\alpha_2 \left(1 - \frac{y}{k_2} \right) y = 0 \quad (2.4.4)$$

Cas 1 : $y = 0$, alors le premier point d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T \quad (2.4.5)$$

Cas 2 : $1 - \frac{y}{k_2}$ alors $y = k_2$ et le deuxième point d'équilibre

$$E_1 = (0, k_2)^T. \quad (2.4.6)$$

2. $\alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1} \right) - \beta_1 y = 0$, alors

$$y = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{x}{k_1} \right) \quad (2.4.7)$$

et la deuxième équation donne

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{x}{k_1} \right) \left(\left(\beta_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1} \right) x + \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{k_2 \beta_1} - \alpha_2 \right) \right) = 0 \quad (2.4.8)$$

alors

Cas 1 : $x = k_1$ et $y = 0$ d'où, le troisième point d'équilibre

$$E_2 = (k_1, 0)^T. \quad (2.4.9)$$

Cas 2 : $\left(\beta_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1} \right) x + \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{k_2 \beta_1} - \alpha_2 \right) = 0$ alors $x = k_1 \frac{\alpha_2 k_2 \beta_1 - \alpha_1 \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}$ et $y = \alpha_1 k_2 \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}$ d'où, le quatrième point d'équilibre

$$E_3 = \left(k_1 \alpha_2 \frac{k_2 \beta_1 - \alpha_1}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}, \alpha_1 k_2 \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} \right)^T \quad (2.4.10)$$

existe si

$$\begin{cases} \beta_2 k_1 - \alpha_2 > 0 \text{ et } k_2 \beta_1 - \alpha_1 > 0 \text{ (ceci implique que } k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2 > 0) \\ \text{ou bien} \\ \beta_2 k_1 - \alpha_2 < 0 \text{ et } k_2 \beta_1 - \alpha_1 < 0 \text{ (ceci implique que } k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2 < 0) \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Stabilité des points d'équilibre

On calcul la matrice jacobienne :

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \left(1 - \frac{2x}{k_1}\right) - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ \beta_2 y & -\alpha_2 \left(1 - \frac{2y}{k_2}\right) + \beta_2 x \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

– Au premier point d'équilibre E_0 , cette matrice prend la valeur :

$$j(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = -\alpha_2$.

Ces valeurs propres sont de signes opposés, ce qui montre que ce point fixe E_0 est un point selle (col), ce qui implique que E_0 est instable, ce qui montre que l'extinction des deux espèces est difficile à obtenir dans ce modèle.

– Pour le second point d'équilibre $E_1 = (0, k_2)^T$, en évaluant la matrice jacobienne, on obtient

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 k_2 & 0 \\ \beta_2 k_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.14)$$

et elle a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_1 - k_2 \beta_1$

il est clair que $\lambda_1 > 0$ quelques soient les données.

si $\alpha_1 - k_2 \beta_1 > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ d'ou E_1 est instable (noeud instable)

si $\alpha_1 - k_2 \beta_1 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ d'ou E_1 est instable (point col)

d'ou E_1 est instable.

– Pour le troisième point d'équilibre $E_2 = (k_1, 0)^T$, en évaluant la matrice jacobienne en E_2 , la matrice suivante est obtenue

$$j(E_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 k_1 \\ 0 & -\alpha_2 + \beta_2 k_1 \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

et elle a pour valeurs propres : $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = k_1 \beta_2 - \alpha_2$.

il est clair que $\lambda_1 < 0$ quelques soient les données.

Si $k_1 \beta_2 - \alpha_2 > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ d'ou E_2 est instable (point col).

Si $k_1 \beta_2 - \alpha_2 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ d'ou E_2 est noeud stable.

E_2 est stable si $k_1 \beta_2 - \alpha_2 < 0$.

– Pour le quatrième point d'équilibre $E_3 = \left(k_1 \alpha_2 \frac{k_2 \beta_1 - \alpha_1}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}, \alpha_1 k_2 \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}\right)^T$

$$j(E_3) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \alpha_2 \frac{k_2 \beta_1 - \alpha_1}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} & -\beta_1 k_1 \alpha_2 \frac{k_2 \beta_1 - \alpha_1}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} \\ \beta_2 \alpha_1 k_2 \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} & \alpha_1 \alpha_2 \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_1 \alpha_2 c_1 & -\beta_1 k_1 \alpha_2 c_1 \\ \alpha_1 \beta_2 k_2 c_2 & \alpha_1 \alpha_2 c_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

Avec,

$$c_1 = \frac{k_2 \beta_1 - \alpha_1}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} \text{ et } c_2 = \frac{\beta_2 k_1 - \alpha_2}{k_1 k_2 \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2} \quad (2.4.18)$$

Donc, les valeurs propres de cette matrice sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2(c_2 - c_1) - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(c_2 - c_1)^2 - 4\alpha_1\alpha_2c_1c_2(k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2(c_2 - c_1) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(c_2 - c_1)^2 - 4\alpha_1\alpha_2c_1c_2(k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)} \end{cases} \quad (2.4.19)$$

1- Si $c_1c_2(k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) = \frac{(\beta_2k_1 - \alpha_2)(k_2\beta_1 - \alpha_1)}{k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} > 0$ ce qui veut dire que

$$\begin{cases} \beta_2k_1 - \alpha_2 > 0 \\ k_2\beta_1 - \alpha_1 > 0 \\ k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0 \end{cases} \quad (2.4.20)$$

1- $c_2 - c_1 > 0$ c'est à dire $\beta_2k_1 - \alpha_2 > k_2\beta_1 - \alpha_1$ ceci implique que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors le point d'équilibre E_3 est instable.

2- $c_2 - c_1 < 0$ c'est à dire $\beta_2k_1 - \alpha_2 < k_2\beta_1 - \alpha_1$ ceci implique que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre E_3 est stable.

2- Si $c_1c_2(k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) = \frac{(\beta_2k_1 - \alpha_2)(k_2\beta_1 - \alpha_1)}{k_1k_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} < 0$ alors λ_1 est toujours négative et λ_2 est toujours positive alors le point d'équilibre E_3 est instable

Finalement, le points E_3 est stable si

$$\begin{cases} \beta_2k_1 > \alpha_2 \text{ et } k_2\beta_1 > \alpha_1 \\ \text{et} \\ k_2\beta_1 - \alpha_1 > \beta_2k_1 - \alpha_2 \end{cases} \quad (2.4.21)$$

2.5 Modèle de proie-prédateur avec comportement troupeau chez les proies

Soit $x(t)$ la densité de la population proie et $y(t)$ la densité de la population prédateur au temps t . En supposant que les proies vivent en troupeaux.

troupeau veut dire que les individus forts de la population forme un cercle a l'intérieur du cercle on trouve les faible pour les protéger.

On aboutit au modèle proie-prédateur décrit dans (2.5.1) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \alpha_1 \left(1 - \frac{x(t)}{k_1}\right) x(t) - \beta_1 y(t) \sqrt{x(t)} \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 y(t) \sqrt{x(t)} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

$\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$ représentent la variation des populations au cours du temps « taux de variation instantanée ».

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

k_1 : la capacité de charge du milieu (i.e le milieu contient une quantité d'alimentation pour nourrir k_1 individus des proies) ;

α_1 : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;

β_1 : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;

α_2 : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;

β_2 : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

2.5.1 Étude mathématique du système

Points d'équilibre

Pour trouver les points d'équilibres, on resout le système algébrique suivant,

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x - \beta_1 y \sqrt{x} = 0 \\ -\alpha_2 y + \beta_2 y \sqrt{x} = 0 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

d'après la deuxième équation du système, on a

$$y (-\alpha_2 + \beta_2 \sqrt{x}) = 0 \quad (2.5.3)$$

on a deux cas :

– $y = 0$, alors la première équation peut s'écrire

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x = 0 \quad (2.5.4)$$

Alors, on a deux points d'équilibre

$$E_0 = (0, 0)^T \quad (2.5.5)$$

Et

$$E_1 = (k_1, 0)^T. \quad (2.5.6)$$

– $-\alpha_2 + \beta_2 \sqrt{x} = 0$, ceci donne

$$x = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 \quad (2.5.7)$$

et la première équation peut s'écrire

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1}\right) \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2} - \beta_1 y \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0 \quad (2.5.8)$$

alors

$$y = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1}\right) \quad (2.5.9)$$

Le troisième point d'équilibre

$$E_2 = \left(\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1}\right) \right) \quad (2.5.10)$$

existe si

$$\beta_2^2 k_1 > \alpha_2^2. \quad (2.5.11)$$

Stabilité des points d'équilibre

On calcul lamatrice jacobienne :

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \left(1 - \frac{2x}{k_1}\right) - \frac{\beta_1 y}{2\sqrt{x}} & -\beta_1\sqrt{x} \\ \frac{\beta_2 y}{2\sqrt{x}} & -\alpha_2 + \beta_2\sqrt{x} \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

– Au premier point d'équilibre $E_0 = (0, 0)^T$, cette matrice prend la valeur :

$$j(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.5.13)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = \alpha_1$ et $\lambda_2 = -\alpha_2$

Ces valeurs propres sont de signes opposés, ce qui montre que ce point fixe E_0 est un point selle (col), ce qui implique que E_0 est instable, ce qui montre que l'extinction des deux espèces est difficile à obtenir dans ce modèle.

– second point d'équilibre $E_1 = (k_1, 0)^T$, En évaluant la matrice jacobienne en le second point d'équilibre E_1 , la matrice suivante est obtenue :

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1\sqrt{k_1} \\ 0 & -\alpha_2 + \beta_2\sqrt{k_1} \end{pmatrix} \quad (2.5.14)$$

qui a pour valeurs propres : $\lambda_1 = -\alpha_1$ et $\lambda_2 = \sqrt{k_1}\beta_2 - \alpha_2$.

Si $\sqrt{k_1}\beta_2 - \alpha_2 < 0$ alors le point E_1 est un noeud stable.

Si $\sqrt{k_1}\beta_2 - \alpha_2 > 0$ alors le point E_1 est un col (selle) ce qui implique que E_1 est instable.

– Troisième point d'équilibre E_2 , Pour que

$$E_2 = \left(\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^2, \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} \right) \right) \quad (2.5.15)$$

ait un sens, il faut que

$$1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} > 0 \quad (2.5.16)$$

En évaluant la matrice jacobienne en le second point d'équilibre E_2 , la matrice suivante est obtenue :

$$j(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \frac{3\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} \right) & -\beta_1 \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ \frac{\beta_2 \alpha_1}{2\beta_1} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.17)$$

Posons $c = \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1}$, la matrice décrit dans (2.5.17) devient :

$$j(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} (1 - 3c) & -\beta_1 \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ \frac{\beta_2 \alpha_1}{2\beta_1} (1 - c) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.18)$$

Qui a pour valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\alpha_1}{4} (1 - 3c) - \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_1^2 (1 - 3c)^2 - 8\alpha_1\alpha_2 (1 - c)} \\ \lambda_2 = \frac{\alpha_1}{4} (1 - 3c) + \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_1^2 (1 - 3c)^2 - 8\alpha_1\alpha_2 (1 - c)} \end{cases} \quad (2.5.19)$$

- Si $c < \frac{1}{3}$, alors $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ et E_2 est un noeud instable.
- Si $\frac{1}{3} < c < 1$, alors $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ et E_2 est un noeud stable.
- Si $c > 1$, alors $1 - 3c < 0$, on a $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ et E_2 est un col ce qui implique que E_2 est instable

En conclusion

	$c < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < c < 1$	$c > 1$
E_0	<i>instable</i>	<i>instable</i>	<i>instable</i>
E_1	<i>instable</i>	<i>instable</i>	<i>stable</i>
E_2	<i>instable</i>	<i>stable</i>	<i>instable</i>

(2.5.20)

Simulation numérique

Dans ce chapitre on va utiliser comme référence ([8]) ([9])

3.1 La méthode de résolution

La méthode de résolution qu'on va utiliser est celle de Runge-Kutta d'ordre 4, elle est parmi les méthodes numériques a un pas qui nous permette de résoudre un système d'équations différentielles ordinaires de la forme (3.1.1) où pour tout $i = 1, 2$ les fonctions $f_i : [t_0, T] \times \Lambda_1 \times \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continûment différentiables avec $[t_0, T] \subseteq \mathbb{R}$ et $\Lambda_i, i = 1, 2$ sont des ouverts d'un espace de Banach $E \subseteq \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(t; y_1(t), y_2(t)); & y_1(t_0) &= y_{1,0} \\ y_2' &= f_2(t; y_1(t), y_2(t)); & y_2(t_0) &= y_{2,0} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Où $y_i, i = 1, 2$ sont les fonctions que l'on cherche, $y_{i,0}, i = 1, 2$ sont leurs valeurs initiale et $f_i, i = 1, 2$ sont des fonctions connues.

on veut trouver la valeur approchée de la solution en un point $t = t_n$ par des méthodes numériques. Pour cela, nous subdivisons l'intervalle $[t_0, T]$ en N_h sous intervalles de longueur $h = \frac{T-t_0}{N_h}$ ou $t_n = t_0 + nh, n = \overline{1..N_h}$.

3.1.1 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 :

Étant donné un système d'équations différentielles ordinaires de la forme (3.1.1), un intervalle $[t_0, T]$, un pas de discrétisation h et un nombre maximal d'itération $N_h - 1$, l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 est donné par :

$$\begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h \\ p_{1,i} &= f_i(t_n; y_{1,n}, y_{2,n}) \\ p_{2,i} &= f_i(t_n + \frac{h}{2}; y_{1,n} + \frac{h}{2}p_{1,1}, y_{2,n} + \frac{h}{2}p_{1,2}) \\ p_{3,i} &= f_i(t_n + \frac{h}{2}; y_{1,n} + \frac{h}{2}p_{2,1}, y_{2,n} + \frac{h}{2}p_{2,2}) \\ p_{4,i} &= f_i(t_n + h; y_{1,n} + hp_{3,1}, y_{2,n} + hp_{3,2}) \\ y_{i,n+1} &= y_{i,n} + \frac{h}{6}(p_{1,i} + 2p_{2,i} + 2p_{3,i} + p_{4,i}) \\ y_i(t_0) &= y_{i,0} \end{cases}, i = 1, 2 \quad (3.1.2)$$

$y_{i,n}$ est la valeur approchée de la solution y_i au point t_n pour $1 < n < N_h$.

Pour pouvoir utiliser l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 (3.1.2), il est nécessaire de calculer toutes les valeurs de $p_{1,i}$ avant de passer au calcul des constantes $p_{2,i}$ et ainsi de suite.

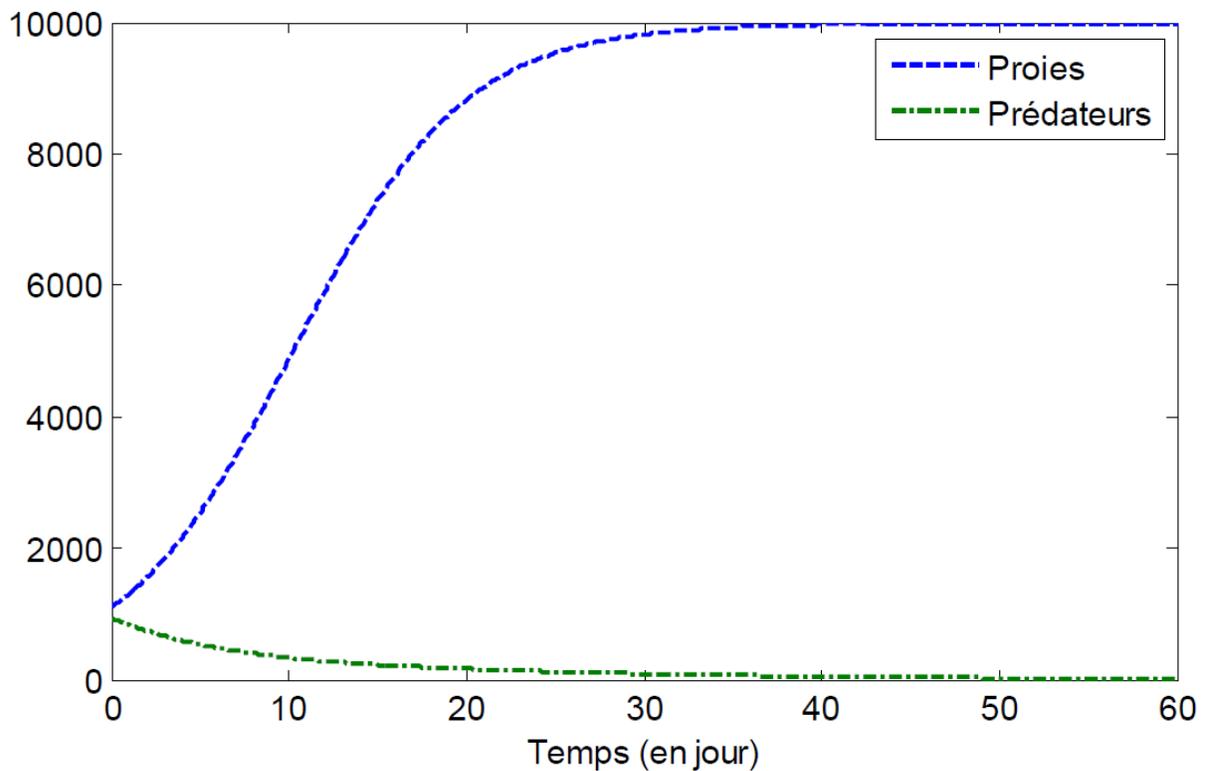
3.2 Stabilité numérique du modèle (2.5.1)

Dans cette section, on confirme numériquement les résultats théoriques obtenus dans l'étude du système (2.5.1).

3.2.1 Le point E_1

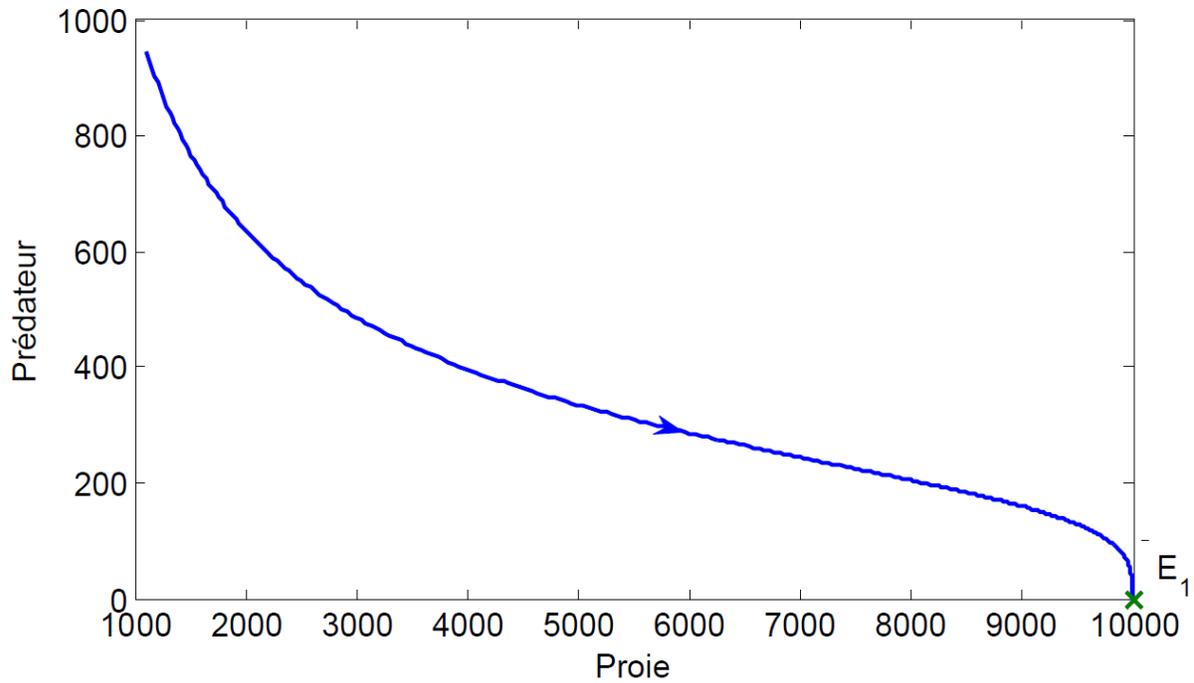
On utilise les estimations des paramètres du tableau suivant, pour simuler la convergence vers E_1

<i>Paramètres</i>	α_1	β_1	α_2	β_2	k_1
<i>Estimations</i>	0.21	0.00032417	0.15	0.000949341	10^4

(3.2.1)


Les courbes des proies et prédateurs dans la situation du point E_1 .

(3.2.2)



La convergence du système vers le point E_1 .

(3.2.3)

On a obtenu la convergence vers

$$E_1 = (k_1, 0) = (10^4, 0) \quad (3.2.4)$$

avec la condition de stabilité

$$\sqrt{k_1}\beta_2 - \alpha_2 = -0.055 < 0. \quad (3.2.5)$$

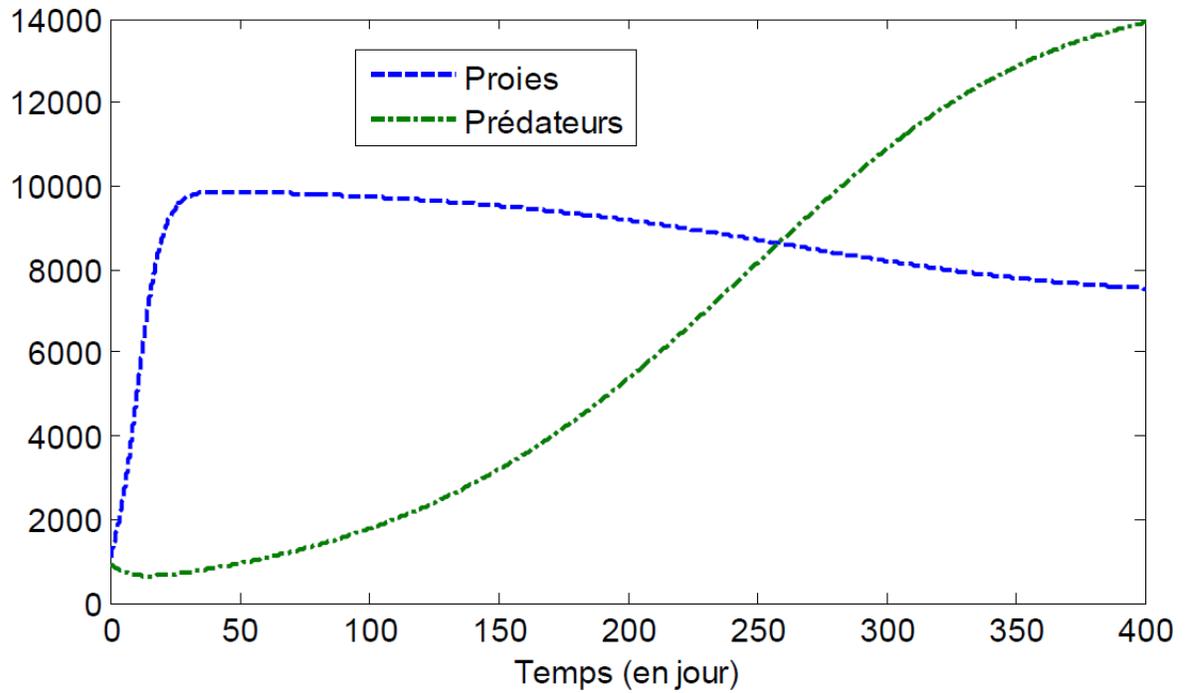
On constate une diminution de la population des prédateurs jusqu'à l'extinction et une augmentation de la population des proies jusqu'à le maximum.

3.2.2 Le point E_2

On utilise les estimations des paramètres du tableau suivant, pour simuler la convergence vers E_2 ,

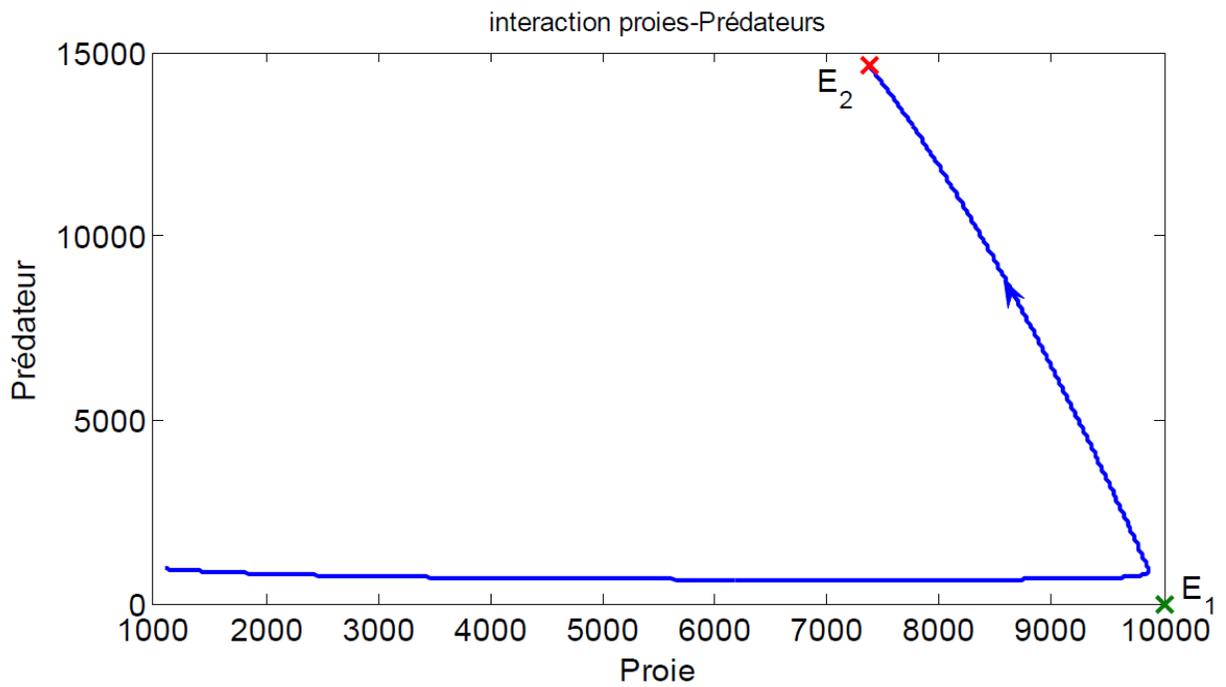
Paramètres	α_1	β_1	α_2	β_2	k_1
Estimations	0.21	0.00032417	0.0815	0.000949341	10^4

(3.2.6)



Les courbes des proies et prédateurs dans la situation du point E_2 .

(3.2.7)



La convergence du système vers le point E_2 .

(3.2.8)

On a obtenu la convergence vers

$$E_2 = \left(\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^2, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} \right) \right) = (7370, 14626) \quad (3.2.9)$$

avec la condition d'existence

$$1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} = 0.26 > 0 \quad (3.2.10)$$

et la condition de stabilité

$$\frac{1}{3} < \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_1} = 0.73 < 1. \quad (3.2.11)$$

On constate une diminution de la population des prédateurs ce qui entraîne une augmentation de la population des proies, après certain apse du temps cette augmentation des proies cause une augmentation des prédateurs ce qui provoque aussi une diminution des proies, puis on remarque une stabilisation des deux populations.

3.3 L'effet de la prédation sur l'évolution des deux populations

Le β_1 représente le taux de mortalité des proies due aux prédateurs.

Dans cette section, on va montrer l'impact du taux de prédation β_1 sur l'évolution des deux populations.

Pour cela on va proposer trois valeurs pour β_1 :

$$\beta_1 = 0.00032417..; ..0.0032417..; ..0.0082417$$

Le reste des données, on a choisit les valeurs suivantes :

<i>Paramètres</i>	α_1	α_2	β_2	k_1
<i>Estimations</i>	0.21	0.15	0.000949341	10^4

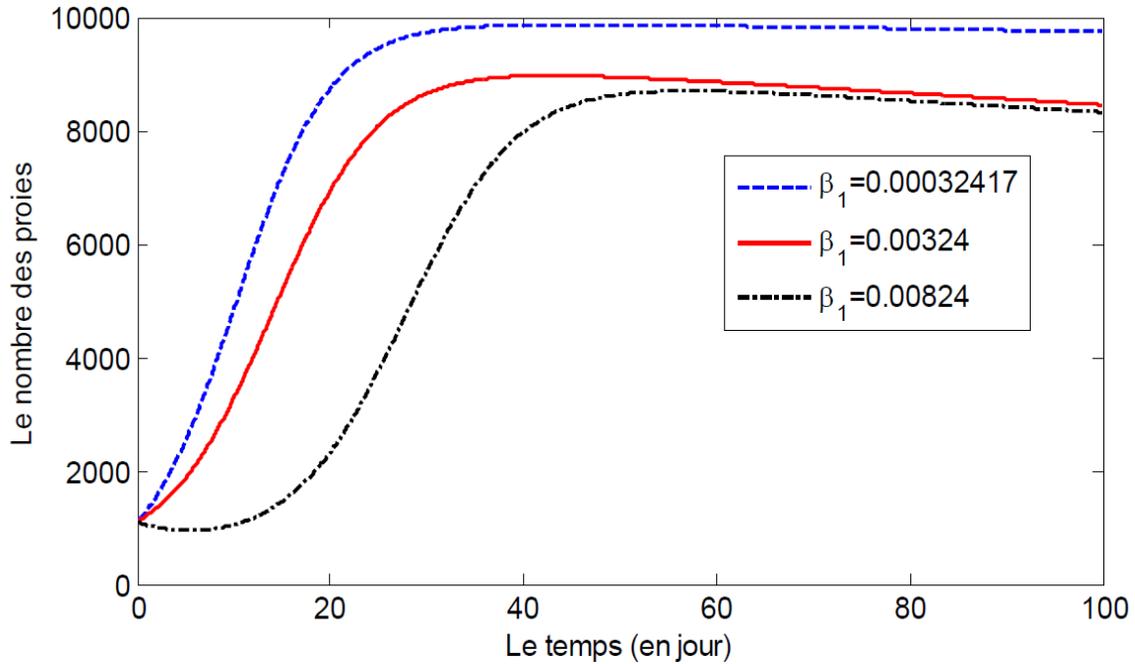
(3.3.1)

Pour $\beta_1 = 0.00032417..; ..0.0032417$ on remarque une croissance de la population des proies et une décroissance de population de prédateurs.

Pour $\beta_1 = 0.0082417$ on remarque une décroissance de la population des proies dans un petit apse du temps puis une croissance des proies et une décroissance des prédateurs.

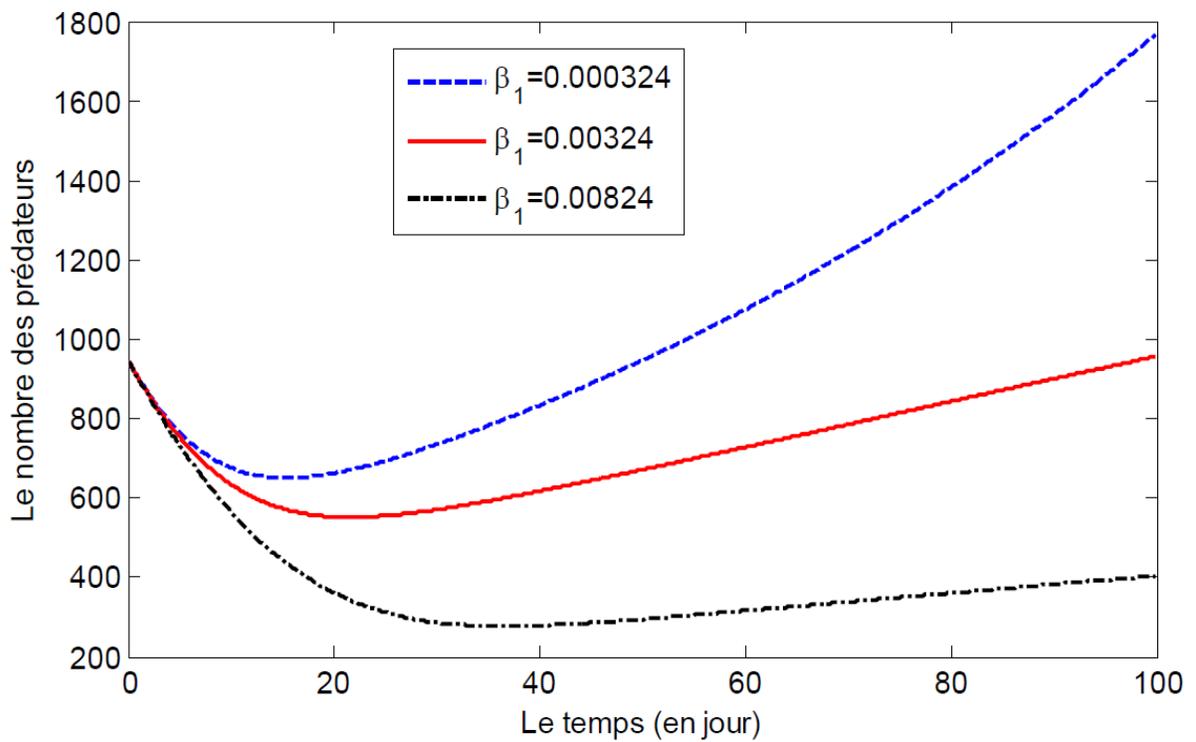
On remarque que l'augmentation du valeur de β_1 contribue au ralentissement de croissance

de la population des proies et à l'accélération de décroissance de la population des prédateurs



Les courbes des proies pour différentes valeurs de β_1 .

(3.3.2)



Les courbes des prédateurs pour différentes valeurs de β_1 .

(3.3.3)

CONCLUSION

Dans ce mémoire, On a considéré un modèle proie-prédateur où la proie montre un comportement de troupeau.

On a analysé le comportement des cinq systèmes modélisant les interactions entre proies, les prédateurs, dans le cinquième système on a intégré le comportement troupeau chez les proies avec l'un des autres quatre systèmes qui est plus réaliste que les autres qui est le système (2.2.1) (voir chapitre 2)

On a cherché les conditions qui assurent la stabilité des solutions.

Finalement, on a illustré cette étude par une simulation numérique qui veut dire la vérification numérique des résultats qu'on a obtenue théoriquement.

Bibliographie

- [1] Dr.l.bouzid . cours Master 1 : l'analyse des systèmes dynamiques, Université de Mostaganem.
- [2] Berryman, A.A. : The origins and the evolution of predator–prey theory. *Ecology* 73 (5), 1530–1535 (1992).
- [3] Luckinbill, L.S. : Coexistence in laboratory populations of *Paramecium aurelia* and its predator. *Didinium nasutum*. *Ecology* 54, 1320–1327 (1973).
- [4] Rosenzweig, M.L., Mac Arthur, R.K. : Graphical representation and stability conditions of predator–prey interactions. *Am. Nat.* 97, 209–223 (1963).
- [5] Xiao, D., Ruan, S. : Global dynamics of a ratio–dependent predator–prey system. *J. Math. Biol.* 43, 268–290 (2001).
- [6] Othmani, Fatma Zohra : prey-predator system, Alley effect, stability, Hopf bifurcation
Identifiant auteur : MS-510-96-01.
- [7] J.D.Murray. *Mathematical biology*. Springer, 2002.
- [8] Brian stout, methode numérique de résolution d'équations différentielles, université de provence 2007
- [9] Dr.K. Zineb . cours Master 1 : Méthodes numériques pour la résolution de système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 avec des conditions initiales, université de Mostaganem.
- [10] Dominique Rojat, Biomathématique, IGEN sciences de la vie et de la Terre.
- [11] *Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, Vol. 11, No. 3, 2021
- [12] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT. Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Masson, Paris, second edition 1997. Analyse 3
- [13] M. W. HIRSCH, S. SMALE. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, New York-London 1974. *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 60
- [14] Alix Helme-Guizon, *Les populations, leur dynamique et les relations interspécifiques*, l'académie de Nantes 2015

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié le comportement dynamique d'un système proie-prédateur. La proie présente un comportement troupeau. Quelques critères d'extinction des prédateurs et des populations des proies sont démontrés. L'analyse de stabilité des points d'équilibres. Des simulations numériques sont effectuées pour valider les résultats analytiques.

Mots clés

Système, dynamique, Modèle proie-prédateur, troupeau, Stabilité, prédation, points d'équilibres, proie, prédateur.