

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Touatia MOUMENE

**Sur l'analyse d'une classe de systèmes 2D fractionnaires linéaires
décrits sous la formulation Roesser**

soutenu publiquement le 30 juin 2022 devant le jury composé de :

Président:	Djillali BOUAGADA	Prof	UMAB
Examineur:	Zineb KAISSERLI	MCA	UMAB
Encadreur:	Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

M
A
S
T
E
R

Table des matières

Index des notations	4
Introduction	5
1 Notions fondamentales	8
1 Matrices particulières	8
2 Calcul fractionnaire	10
2.1 Notions de base sur la théorie des matrices et du calcul fractionnaire	11
2.2 Relations entre les dérivées fractionnaires	13
3 Transformé de Laplace	13
4 Transformée en Z	14
5 Conclusion	15
2 Dérivée et intégrales fractionnaire conforme	16
1 Dérivée fractionnaire conforme	16
2 Quelques propriétés de dérivation conforme fractionnaire	16
3 Intégration conforme fractionnaire	18
4 Transformation de Laplace conforme fractionnaire	19
4.1 Quelques propriétés de la transformation de Laplace conforme fractionnaire	22
5 Conclusion	24
3 Système dynamique	25
1 Rappel sur le système 1D	25
1.1 Système 1D linéaire à temps continu	25
1.2 Système 1D linéaire à temps discret	27
1.3 Positivité des systèmes 1D linéaires	28
2 Systèmes bidimensionnels	29
2.1 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini	29
2.2 Modèle bidimensionnel de Attasi	30
2.3 Modèle bidimensionnel de Roesser	30
2.4 Modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps discret	30
2.5 Modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret	30
2.6 Solution du modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret	31
3 Conclusion	31

4	Modèle de Roesser linéaire fractionnaire 2D au sens de la dérivée conforme	32
1	Modèle de Roesser au sens de la dérivée conforme	32
2	Solution du modèle Roesser au sens de la dérivée conforme	33
3	Positivité du modèle Roesser au sens de la dérivée conforme	34
4	Application numérique	37
5	Conclusion	38
	Conclusion générale	39
	Bibliographie	39

Dédicaces

Ce travail est dédié :

À mon père.

A Ma famille.

A mes sœurs.

A mes encadreurs.

Remerciements

Avant tout, nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Je voudrais en premier remercier mon encadreur **Dr. Mohammed Amine Ghezzar** pour la disponibilité, la gentillesse et aussi M. Kamel Benyettou pour l'aide que vous m'avez apporté.

Mes reconnaissances viennent aussi aux membres de jury, **Pr. Bouagada Djillali** et **Dr. Kaiserli Zineb** qui ont accepté d'évaluer ce mémoire et d'avoir contribué aux discussions lors de la soutenance.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père, ma mère et mes sœur .

J'adresse également mes reconnaissances à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques et informatique.

Je remercie tous ceux qui m'ont encouragé de près ou de loin pour accomplir ce modeste travail.

Index des notations

\mathbb{Z}	: Corps des nombres entiers.
\mathbb{Z}_+	: Corps des entiers non négatifs.
\mathbb{R}	: Corps des nombres réels.
\mathbb{R}_+	: Corps des nombres réels non négatifs.
\mathbb{R}^n	: Espaces des vecteurs à n entrées réelles.
\mathbb{R}_+^n	: Espaces des vecteurs à n entrées réelles non négatifs.
\mathbb{M}_n	: Ensemble des matrices de Metzler de dimensions $n \times n$.
\mathbb{N}	: Ensemble des nombres entiers.
Γ	: Fonction gamma d'Euler.
$n!$: Factorielle de n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$: Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathbb{R}_+^{n \times m}$: Espace des matrices à entrées réelles non négatives .
$X(s)$: Transformée de Laplace.
$X(z)$: Z-Transformée.
$\text{Re}(z)$: Partie réelle du nombre complexe z .
$\rho(A)$: Rayon spectral de la matrice A .
$\sigma(A)$: Spectre de la matrice A .
I_n	: Matrice identité de dimension n .

Introduction

Lors de la première révolution industrielle, la science a joué un rôle limité, et partir des années 50, la nouvelle révolution industrielle a été liée au progrès de la science. C'est le début de la théorie des systèmes.

La théorie des systèmes peut être brièvement vue comme un ensemble de techniques de raisonnement et d'outils mathématiques au service d'un système, et aussi pour un meilleur fonctionnement et une bonne prise de décision. Mais alors qu'est-ce qu'un système? Un système peut être défini d'un point de vue réel ou d'un point de vue abstrait. Le point de vue réel concerne le système physique. C'est un ensemble d'objets ou d'entités connectés et interagissant les uns avec les autres en fonction d'un objectif. Qu'il s'agisse de procédé industriel, de climatologie, d'économie, de corps humain, de population, etc. On peut parler de système d'un point de vue abstrait, le système est assimilé à une maquette virtuelle, matérialisée par des symboles et équations, qui a pour qualité de représenter et de décrire au mieux le comportement et l'évolution du système dit réel.

Depuis la fin des années 60, l'étude des systèmes a été considérée à partir d'une représentation dite interne. Les systèmes ne sont plus considérés comme des boîtes noires avec des actions et des mesures. On définit un vecteur de variables pertinentes inhérentes au fonctionnement intime du système. Toute étude est alors calée sur ces variables, dites variables d'état. Le système est alors modélisé par une équation d'état. En analyse des systèmes, il existe une activité importante. Nous nous sommes intéressées à la classe des systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, quelle que soit sa nature (physique, chimique, électromécanique, biologique, économique, etc). Cette évolution peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, applications (inversibles ou non). Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles. Un point important en théorie des systèmes est la relation qui existe entre le système et son environnement. Le système subit des actions (assimilées à des commandes ou contrôles) et renvoie des informations. On parle alors d'entrée-sortie, d'actionneurs et de capteurs. Les contrôles peuvent être passifs ou actifs tandis que les capteurs sont passifs, les contrôles sont actifs dans le cas d'un système sur lequel on agit depuis l'extérieur directement, c'est le cas usuel. Ils sont passifs lorsque indépendamment de tout apport externe ou toute action voulue, son évolution va être forcée par certains événements ou contraintes. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes continus, systèmes discrets. Dans certaines applications industrielles des comportements

différents peuvent interagir dans la dynamique des systèmes mis en jeu. En particulier les comportements d'impact ou de commutation qui sont souvent rencontrés dans les systèmes électroniques ou les systèmes de manipulation en robotique. La dynamique de ces systèmes est particulière puisqu'elle met en jeu des interactions entre processus continus et des processus discrets. Les systèmes dynamiques abordés dans notre travail sont multiples : systèmes unidimensionnels, systèmes bidimensionnels, systèmes unidimensionnels et bidimensionnels à dérivée fractionnaire. Les systèmes unidimensionnels peuvent être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régi par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes unidimensionnels à temps discret (comme un programme informatique), des systèmes unidimensionnels à temps continu (comme une réaction chimique). Dans le même cadre de notre étude nous nous focalisons aussi sur la classe des systèmes bidimensionnels discret-discret et continu-discret (hybride). Les systèmes linéaires à deux variables ou bidimensionnels discret- discret, les deux variables sont discrètes. Ces systèmes trouvent un grand champs d'applications, citons l'économie, la robotique, le traitement d'images, électricité, etc.

D'autre part les systèmes linéaires bidimensionnels discrets-continus autrement dit hybrides (mixte). Les systèmes dynamiques hybrides ont attiré l'attention de nombreux chercheurs durant les dernières années en raison de leur capacité à décrire les dynamiques à la fois continues et discrètes de plusieurs processus réels. L'étude de ces systèmes a retenu l'attention de la communauté automatique, ainsi que celle de la communauté informatique.

Enfin les systèmes à dérivée fractionnaire. Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaires (d'ordre non entier) dans plusieurs domaines. En mathématique, l'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Beaucoup des systèmes peuvent être décrits par des systèmes d'ordre fractionnaire. Par exemple : – Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la visco-élasticité des matières. – En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire. – En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire, et alors est classé en groupe des modèles d'ordre non-entier. Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre **Sur l'analyse d'une classe de systèmes 2D fractionnaires linéaires décrits sous la formulation Roesser** L'étude s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre :

Le premier chapitre regroupe les différentes notions préliminaires utiles pour la réalisation et la compréhension de ce document. Nous citons quelques notions des matrices ainsi que des notions des dérivées d'ordre non entier en passant par la suite à la transformer de Laplace et son inverse est la transformer en Z.

Le deuxième chapitre :

Nous traitons une nouvelle dérivée dite dérivée d'ordre fractionnaire conforme avec ses propriétés.

Le troisième chapitre :

Nous traitons un type des systèmes appelé système 1D linéaire à temps invariant. Nous allons consacrer cette partie du travail pour étudier la positivité et la stabilité, plus particulièrement nous nous intéressons à la solvabilité de ce type de système.

La deuxième partie de ce chapitre contient un nouveau types des systèmes 2D linéaire.

Le quatrième chapitre :

Au dernier chapitre une étude modèle de Roesser linéaire fractionnaire 2D au sens de la dérivée conforme et positivité avec application numérique en Matlab.

Chapitre 1

Notions fondamentales

Nous présentons dans ce premier chapitre la théorie générale des matrices non-négatives, des matrices positives et des matrices de Metzler. Dans la littérature, on peut trouver une multitude de références sur ces classes de matrices (voir [1],[15]). Nous commençons par donner les définitions et quelques propriétés générales relatives à ces matrices. Ces matrices rentrent dans la caractérisation de la positivité des systèmes linéaires. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous donnons les notions générales du calcul fractionnaire, nous définissons la dérivée d'ordre non entier d'une fonction réelle au sens de Caputo, ainsi que quelques unes de ses propriétés importantes.

1 Matrices particulières

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des matrices à entrées réelles.

Définition 1.1 [1] On dit que A est une matrice **non-négative** si $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m} : a_{ij} > 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Définition 1.2 [1] On dit que A est une matrice **positive** si A est non-négative et $\exists k = \overline{1, n}, \exists l = \overline{1, m} : a_{kl} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$.

Définition 1.3 [1] On dit que A est une matrice **strictement positive** si $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m} : a_{ij} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice $A \gg 0$.

Remarque 1.1 Les définitions précédentes restent valables pour les vecteurs de dimensions n , où $n \geq 2$. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif $\varphi \gg 0$ coïncide avec $\varphi > 0$.

Définition 1.4 [1] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on dit que A est une matrice de **Metzler** si $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}, i \neq j : a_{ij} > 0$, i.e., toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ est noté \mathbb{M}_n .

Exemple 1.1 La matrice G suivante est une matrice de Metzler.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Les matrices de Metzler trouvent leurs applications majeurs dans l'analyse de stabilité et la positivité des systèmes linéaires. Les livres de Berman et Plemmons donnent 50 conditions équivalentes pour qu'une matrice de Metzler soit asymptotiquement stable. Pour cela, nous devons rappeler deux notions primaires du calcul matriciel, qui sont : Le module de stabilité $s(A)$ d'une matrice A , défini comme étant la plus grande partie réelle des valeurs propres de A ; i.e.

$$s(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$$

où $\sigma(A)$ est le spectre de la matrice A .

Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A , défini comme étant le plus grande module des valeurs propres de A , c-à-d.

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Nous pouvons alors, citer ces quelques résultats suivants :

Lemme 1.1 [16] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. où e^{At} étant l'exponentiel de la matrice At .

Ou de manière équivalente $\forall t \geq 0$, l'orthant positif \mathbb{R}_+^n , est e^{At} -invariant, c'est à dire $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, $e^{At} x \in \mathbb{R}_+^n$

Preuve.

- Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A + \lambda I_n) > 0$. Sachant que

$$(A + \lambda I_n) (-\lambda I_n) = (-\lambda I_n) (A + \lambda I_n) \quad (1.2)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I_n)t + (-\lambda I_n)t}, \\ &= e^{(A+\lambda I_n)t} e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}. \end{aligned}$$

du fait que $e^{(A+\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$

- Suffisance :

Supposons que $\forall t \geq 0$, $e^{At} \geq 0$. Ainsi, puisque

$$A = \frac{d}{dt} (e^{At}) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{At} - I}{t}, \quad (1.3)$$

Prenons comme e_j le j^{me} me vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\langle e^{At} e_j - e_j, e_i \rangle}{t}, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{\langle e^{At} e_j, e_i \rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i \rangle}{t} \right\}, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\langle e^{At} e_j, e_i \rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i \rangle = 0$. Dés lors, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler

■

Théorème 1.5 Si A est une matrice de Metzler, son module de stabilité est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre v dans l'orthant positif tel que : $Av = s(A)v$ où $s(A)$ étant le module de stabilité de A.

Décomposition régulière :

soit une matrice de Metzler A inversible. On appelle décomposition régulière de A, toute décomposition de la forme :

$$A = F + V$$

où $F \geq 0$ et V une matrice de Metzler asymptotiquement stable.

2 Calcul fractionnaire

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz posaient les fondements du calcul différentiel et intégral. La question a été abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre à l'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre 1/2 de la fonction x , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), Grünwald, Letnikov ...etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- Les différences finies d'une fonction se généralisent sous la forme de Grünwald-Letnikov, très utile numériquement
- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et aux formules de Caputo
- Les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(j\omega)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Donc L'idée de base de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation des dérivations et d'intégrations standards. Le mot fractionnaire est un terme trompeur mais il a été conventionnellement retenu.

2.1 Notions de base sur la théorie des matrices et du calcul fractionnaire

Définitions fondamentales

Dans cette partie, nous allons exposer quelques notions fondamentales indispensables pour la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.6 La fonction Gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$, alors la fonction Gamma notée Γ est définie :

$$\Gamma: \alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (1.4)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.5)$$

En particulier :

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.6)$$

Définition 1.7 La fonction de Mittag-Leffler

Pour $\theta \in \mathbb{C}$ et $0 < \alpha < 1$, on appelle fonction de Mittag-Leffler et on note $E_\alpha(\cdot)$ la fonction suivante :

$$E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (1.7)$$

On remarque bien sur que $E_1(\theta) = e^\theta$.

Définition 1.8 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors les intégrales $I_{a+}^{(\alpha)} f(x)$ et $I_{b-}^{(\alpha)} f(x)$ sont définis par ce qui suit :

$$I_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a \in]-\infty, +\infty[\quad (1.8)$$

est appelé intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α .

L'intégrale $I_{b-}^{(\alpha)}$ définie par :

$$I_{b-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad b \in]-\infty, +\infty[\quad (1.9)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α .

Théorème 1.9 Pour $f \in C[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe, c-à-d,

$$I_{a+}^{(\alpha)} \left[I_{a+}^{(\beta)} f(x) \right] = I_{a+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad (1.10)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons que l'intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α et nous omettons l'indice a_+ , et nous avons par convention : $I_{a+}^{(\alpha)} = I^{(\alpha)}$

Définition 1.10 *Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville*

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (avec $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}_+^*$), alors la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f et notée ${}^R D^\alpha$ est définie par :

$${}^R D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} (I^{(n - \alpha)} f(t)) \quad (1.12)$$

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle très important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires, à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (résolution des équations différentielles d'ordre entier, sommation des séries,...etc.). De nombreux nouveaux résultats des travaux de recherche sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$; $f'(a)$, ...etc. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (analytiquement ou numériquement). La solution de ce problème a été proposée par M. Caputo dans les années soixante dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de la viscoélasticité. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire où elle s'introduit naturellement, est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, et en général toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique.

Définition 1.11 *Dérivée fractionnaire au sens de Caputo*

Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$ et la fonction f vérifiant $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (à gauche) au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^C D_t^\alpha$ (ou simplement ${}^C D^\alpha$) est définie par la relation suivante :

$${}^C D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{(n - \alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (1.14)$$

Propriétés 1.12 Soient f et g deux fonction définie : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

* **Linéarité** : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$${}^C D^\alpha (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 {}^C D^\alpha f(x) + \lambda_2 {}^C D^\alpha g(x)$$

* **Semi-groupe** : soient $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ alors :

$${}^C D_a^\alpha {}^C D_a^\beta f(x) = {}^C D_a^{\alpha + \beta} f(x)$$

* **Commutativité** :

$${}^C D_a^\alpha {}^C D_a^\beta f(x) = {}^C D_a^\beta {}^C D_a^\alpha f(x)$$

Dérivée fractionnaires des fonctions usuelles au sens de Caputo de quelques fonctions usuelles.

- ${}^C D_a^\alpha (Cte) = 0, \quad Cte = \text{constante.}$
- ${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x)$
- ${}^C D_a^\alpha (x - a)^\beta = I_a^{m - \alpha} D^m (x - a)^\beta$

2.2 Relations entre les dérivées fractionnaires

Dans ce qui suit, nous allons donner quelques résultats sur la relation entre les dérivées fractionnaires. Soit $\alpha > 0$ vérifiant $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Supposons que f est une fonction dont les dérivées ${}^C D^\alpha f$ et ${}^R D^\alpha f$ existent alors,

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} \quad (1.15)$$

Nous en déduisons que si toutes les conditions initiales $f^{(p)}(a) = 0$ pour tout $p = \overline{0, (n-1)}$ alors ${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t)$.

Si la fonction f est de classe C^n , alors en faisant des intégrations par parties nous obtenons ce qui suit :

$${}^R D^\alpha f(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)} d\tau \quad (1.16)$$

3 Transformé de Laplace

La Transformation de Laplace créé par le mathématicien français Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Il est considéré comme une technique très utile pour résoudre les équations différentielles ordinaires et partielles, qui décrivent comment certaines quantités varient avec le temps, comme le flux de chaleur à travers un conducteur isolé ou le courant dans un circuit électrique. Ces équations sont généralement accompagnées de conditions initiales qui décrivent l'état du système au temps $t = 0$.

Définition 1.13 Soit f une fonction réelle ou complexe de la variable (Temps) $t > 0$, et soit s un paramètre réelle ou complexe, alors la transformée de Laplace de $f(t)$ est :

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (1.17)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t) dt. \quad (1.18)$$

Si la limite existe alors 1.17 est dite convergente, sinon elle diverge et il n'y a pas de transformation Laplace définie pour f . Le domaine du paramètre s est choisi de manière appropriée pour que la convergence de l'intégrale de Laplace 1.17 est assurée. Donc s peut appartenir au plan complexe \mathbb{C} , ou ligne vraie \mathbb{R} .

Dans ce qui suit la transformation de Laplace de certaines fonctions :

$f(t)$	$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{bt}	$\frac{1}{s-b}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$e^{bt}f(t)$	$\mathcal{F}(s-b)$
$tf(t)$	$-\mathcal{F}'(s)$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$e^{bt}f(t)$	$\mathcal{F}(s-b)$
$tf(t)$	$-\mathcal{F}'(s)$

TABLEAU 1.1 – La transformation de Laplace de certaines fonctions usuelles.

4 Transformée en Z

Dans cette section, la définition de la transformée en Z et inverse ainsi que leurs propriétés sont rappelées.

Définition 1.14 Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. La transformée en Z de x est la série de Laurent

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}.$$

qui est une fonction holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{R}\}$ où R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$

Propriétés 1.15 Les propriétés de la transformée en Z

- **Linéarité** : Soient α, β deux nombres complexes et x, y deux suites de nombres complexes. Alors

$$Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y)$$

sur $\left\{z : |z| > \max\left\{\frac{1}{R_x}, \frac{1}{R_y}\right\}\right\}$.

- **Retardé** : Soit x une suite numérique, $k \in \mathbb{N}$ et y la suite de terme général définie comme suit :

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ x_{n-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on appelle le signal x retardé de k . Alors $Z(x)$ et $Z(y)$ ont le même rayon de convergence et, dans leur domaine d'holomorphie,

$$Z(y) = z^{-k} Z(x) \tag{1.19}$$

suites	Transformée en Z	Domaine de convergence
$x_0 = 1, x_n = 0 \text{ si } n > 0$	1	\mathbb{C}
$x_k = 1, x_n = 0 \text{ si } n \neq k$	z^{-k}	\mathbb{C}^*
1	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a$

TABLEAU 1.2 – La transformation en Z de certaines fonctions

- **Avancé** Soient x une suite numérique, $k \in \mathbb{N}^*$ et y la suite définie par $y_n = x_{n+k}$. Alors $Z(x)$ et $Z(y)$ ont même rayon de convergence et, dans leur domaine d'holomorphic,

$$Z(y) = z^k \left(Z(x) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right)$$

- **Convolution** Soient x et y deux suites numériques. Alors quel que soit $|z| > \max \left\{ \frac{1}{R_x}, \frac{1}{R_y} \right\}$

$$Z(x * y) = Z(x)Z(y). \quad (1.20)$$

Voici une table des transformées en Z usuelles. On ne considère que des suites causales.

Transformation en Z inverse :

Étant donnée une fonction holomorphe f , développable en série de Laurent en $z = 0$ sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} = Z(x) \quad (1.21)$$

(donc la partie régulière est nulle) pour $|z| > r$. L'objectif est ici de retrouver la suite numérique x à partir de $f(z)$ (et non, bien entendu, à partir de son développement).

$$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) z^{n-1} dz \quad (1.22)$$

pour tout circuit simple γ , orienté dans le sens direct, tracé dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. (Rappelons qu'un circuit simple $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ est un circuit, donc $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, tel que $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ est injectif).

5 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'un rappels de quelques notions fondamentales de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire utilisées essentiellement dans la première partie de notre travail qui concerne à rappeler quelques définitions et théorèmes importants dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Certains modèles mathématiques en automatique ou en cinétique chimique, sont régis par des EDO de la forme $\dot{x} = Ax + B$, où A est une matrice de Metzler. Il est donc des plus important d'étudier les propriétés fondamentales de ce type de matrices, Dans la deuxième partie de ce chapitre La théorie de dérivation fractionnaire avec les relations entre les dérivées fractionnaires.

Chapitre 2

Dérivée et intégrales fractionnaire conforme

En 2014, [3] ont introduit une définition complètement nouvelle définition de la dérivée fractionnaire appelé * Dérivée conforme fractionnaire *. La nouvelle définition semble être très pratique par rapport aux définitions précédentes, car elle peut être étendue à la définition classique de la première dérivée quand $\alpha = 1$.

1 Dérivée fractionnaire conforme

Définition 2.1 [4] (Les Dérivées conforme fractionnaires gauche et droit) : Étant donné une fonction $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $(0, 1]$. Alors la dérivée conforme fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :

$$D_{\alpha}^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Si $D_{\alpha}^a(f)(t)$ existe sur (a, b) , Alors $D_{\alpha}^a(f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} D_{\alpha}^a(f)(t)$.

Quand $a = 0$, On écrit D_{α} qui est la définition originale fondée par [3], et nous disons que f est α -différentiable chaque fois que D_{α} existe, on donne une fonction $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conforme fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$D_{\alpha}f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f : [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conforme fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b est définie par :

$${}^bD_{\alpha}f(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b - t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Si ${}^bD_{\alpha}(f)(t)$ existe sur (a, b) alors ${}^bD_{\alpha}(f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} {}^bD_{\alpha}f(t)$

2 Quelques propriétés de dérivation conforme fractionnaire

Dans ce qui suit, quelques propriétés de dérivée conforme fractionnaire .[8, 4]

Propriétés 2.2 Pour $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $t > 0$, D_{α} sera réaliser les propriétés suivantes pour $\alpha \in (0, 1]$:

❶ Si f est α -différentiable à $t > 0$ alors f est continue à t , soit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = f(t). \quad (2.4)$$

❷

$$D_\alpha(af + bg) = aD_\alpha(f) + bD_\alpha(g) \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

❸

$$D_\alpha(t^k) = kt^{k-\alpha} \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

❹

$$D_\alpha(C) = 0 \quad C : \text{constant},$$

$$D_t^\alpha(t^p) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)} t^{p-n} & \text{si } p \in \mathbb{N} \text{ et } p > \alpha, \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{N} \text{ et } p < \alpha, \end{cases} \quad (2.7)$$

Où $n < \alpha \leq n+1$.

❺

$$D_\alpha(fg) = fD_\alpha(g) + gD_\alpha(f). \quad (2.8)$$

❻

$$D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_\alpha(f) - fD_\alpha(g)}{g^2}. \quad (2.9)$$

❼ Si f est différentiable alors :

$$D_\alpha(f) = t^{1-\alpha} f'(t). \quad (2.10)$$

❽ Si f est n fois différentiable, alors nous avons :

$$D_t^\alpha(f)(t) = t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t), \quad \forall n < \alpha \leq n+1. \quad (2.11)$$

❾ Soit $h(t) = f(g(t))$ tel que f et g des fonctions α -différentiable alors :

$$D_\alpha(h)(t) = D_\alpha(f)(g(t)) \cdot D_\alpha(g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}. \quad (2.12)$$

Les preuves des propriétés ci-dessus peuvent être dérivées directement de la définition. En appliquant la propriété aux fonctions différentiables, nous pouvons trouver la dérivée conforme fractionnaire d'ordre α pour de nombreuses fonctions des preuves.

Remarque 2.1 On a :

① Si f est α -différentiable alors :

$$D_{\alpha}^a(f)(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t). \quad (2.13)$$

② Si f est α -différentiable alors :

$${}^b D_{\alpha}(f)(t) = -(b - t)^{1-\alpha} f'(t). \quad (2.14)$$

La définition précédent peut être étendue pour inclure n'importe quel $\alpha \in (n, n + 1]$: $n \in \mathbb{N}$. Ce pendant, dans cas, les chercheurs ne considèrent que le cas où $\alpha \in (0, 1]$ pour son importance.

3 Intégration conforme fractionnaire

Définition 2.3 [4] (Les Intégrales conforme fractionnaires gauche et droite)

Étant donné une fonction $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conforme fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :

$$I_{\alpha}^a(f)(t) = \int_a^t f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_a^t f(x)(x - a)^{\alpha-1} dx \quad (2.15)$$

Tel que $a = 0$ on écrit $d_{\alpha}(x) = x^{\alpha-1} dx$ quand $a = 0$, on écrit I_{α} qui est la définition originale fondée par [3], et nous disons que f est α -différentiable chaque fois que I_{α} existe, on donne une fonction $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conforme fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$I_{\alpha}(f)(t) = \int_0^t f(x)x^{\alpha-1} dx, \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f : [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors l'intégrale conforme fractionnaire droite de f d'ordre α se terminant en b est définie par :

$${}^b I_{\alpha}(f)(t) = \int_t^b f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_t^b f(x)(x - a)^{\alpha-1} dx. \quad (2.17)$$

Lemme 2.1 [4] Étant donné une fonction continue $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :

$$D_{\alpha}^a [I_{\alpha}^a(f)(t)] = f(t). \quad (2.18)$$

Preuve. Puisque f est continue, alors $I_{\alpha}^a(f)(t)$ est clairement différentiable. donc en appliquant 2.10 sur $I_{\alpha}^a(f)(t)$ nous avons :

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^a (I_{\alpha}^a f(t)) (t) &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot \frac{d}{dt} I_{\alpha}^a(f)(t), \\ &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \int_a^t f(x)(x - a)^{\alpha-1} dx, \\ &= (t - a)^{1-\alpha} \cdot f(t)(t - a)^{\alpha-1}, \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons un lemme similaire . S'il prouvé de la même manière. ■

Lemme 2.2 [4] *Étant donné une fonction continue $f : [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t < b$ On a :*

$${}^b D_\alpha^b I_\alpha(f)(t) = f(t). \quad (2.19)$$

Lemme 2.3 [4] *Étant donné une fonction différentiable $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :*

$$(I_\alpha^a) D_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a). \quad (2.20)$$

Preuve. Puisque f est différentiable, alors $D^a(f)(x) = (t-a)^{1-a} f'(t)$, donc nous avons :

$$\begin{aligned} D_\alpha^a(I_\alpha^a f(t))(t) &= \int_a^t D_\alpha^a(f)(x)(t-a)^{1-\alpha} dx, \\ &= \int_a^t (x-a)^{1-\alpha} f'(x)(x-a)^{\alpha-1} dx, \\ &= \int_a^t f'(x) dx, \\ &= f(t) - f(a). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4 [4] *(Intégration par parties)*

Soit $0 < \beta \leq 1$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f, g différentiable. alors nous avons :

$$\int_a^b f(t) D_\beta^a(g)(x)(x-a)^{\beta-1} dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x) D_\beta^a(f)(x)(x-a)^{\beta-1} dx. \quad (2.21)$$

Preuve. En utilisant la propriété ④, lemme 2.3

$$\begin{aligned} I_\beta^a D_\beta^a f(t)(fg) &= \int_a^b (fg)(x)(x-a)^{\beta-1} dx, \\ &= \int_a^b [f(x) D_\beta^a(g)(x) + g(x) D_\beta^a(f)(x)](x-a)^{\beta-1} dx, \\ &= \int_a^b (f) D_\beta^a(g)(x)(x-a)^{\beta-1} dx + \int_a^b (g)(x) D_\beta^a(f)(x-a)^{\beta-1} dx. \end{aligned}$$

puisque f, g différentiables, nous pouvons appliquer $I_\alpha^a D_\alpha^a$ sur fg . donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_\alpha^a D_\alpha^a(fg) &= fg|_a^b \rightarrow fg|_a^b = \int_a^b f(x) D_\beta^a(g)(x)(x-a)^{\beta-1} dx + \int_a^b (g)(x) D_\beta^a(f)(x-a)^{\beta-1} dx. \\ \rightarrow \int_a^b f(x) D_\beta^a(g)(x)(x-a)^{\beta-1} dx &= \int_a^b (g)(x) D_\beta^a(f)(x-a)^{\beta-1} dx. \blacksquare \end{aligned}$$

4 Transformation de Laplace conforme fractionnaire

Dans cette section, les chercheurs présentent la définition du transformation de Laplace conforme fractionnaire et quelques propriétés de base du transformation de Laplace de conforme fractionnaire aussi.

Définition 2.5 [4] *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle, Alors le Laplace conforme fractionnaire d'ordre est défini par :*

$$\mathcal{L}_\alpha \{f(t)\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt, \quad (2.22)$$

Si $\alpha = 1$, Alors 2.22 est la définition classique de la transformation de Laplace d'ordre entier 1.17, Ce qui signifie que 2.22 est une généralisation de 1.17.

Théorème 2.6 (La transformation de Laplace conforme fractionnaire de dérivée fractionnaire)

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle différentiable, Alors :

$$\mathcal{L}_\alpha \{D_\alpha(f)(t)\}(s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0). \quad (2.23)$$

Preuve. Par la définition 2.5 et de l'intégration par partie on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{D_\alpha(f)(t)\}(s) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} D_\alpha f(t) t^{\alpha-1} dt dt, \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dt} t^{\alpha-1} dt, \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dt} dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, nous fixons :

$$\begin{aligned} u &= e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} & dv &= \frac{df}{dt} dt \\ du &= -st^{\alpha-1} e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt & & f(t) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{D_\alpha(f)(t)\}(s) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right]_0^\tau - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau -st^{\alpha-1} e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt, \\ &= [0 - f(0)] + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt, s > 0 \\ &= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0). s > 0 \end{aligned}$$

■

Lemme 2.4 [4]

Soit : $[0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}_\alpha(f(t))(s) = \mathcal{F}(s)$ existe. Alors :

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s).$$

Preuve.

Dans la définition 2.5 nous fixons $u = \frac{t^\alpha}{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(s) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt, \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-su} f \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) du, \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

■

Dans ce qui suit la transformation de Laplace conforme fractionnaire de certaines fonctions :

①

$$\mathcal{L}_\alpha \{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad s > 0. \quad (2.24)$$

②

$$\mathcal{L}_\alpha \{t\}(s) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}{s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \quad s > 0. \quad (2.25)$$

③

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\}(s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{p}{\alpha})}{s^{1 + \frac{p}{\alpha}}} \quad s > 0. \quad (2.26)$$

④

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\}(s) = \frac{1}{s-1} \quad s > 0. \quad (2.27)$$

⑤

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad s > 0. \quad (2.28)$$

⑥

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad s > 0. \quad (2.29)$$

⑦

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sinh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\}(s) = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (2.30)$$

⑧

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cosh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\}(s) = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad : s > |b|. \quad (2.31)$$

Preuve.

Les preuves suivantes facilement à l'aide du lemme 2.4 et du tableau précédent du transformation de Laplace

①

$$\mathcal{L}_\alpha \{1\}(s) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad s > 0. \quad (2.32)$$

②

$$\mathcal{L}_\alpha \{t\}(s) = \mathcal{L} \left\{ (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{L} \left\{ t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}{s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \quad s > 0. \quad (2.33)$$

③

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^p \right\} = \mathcal{L} \left\{ (\alpha t)^{\frac{p}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \mathcal{L} \left\{ t^{\frac{p}{\alpha}} \right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha}\right)}{s^{1 + \frac{p}{\alpha}}} \quad s > 0. \quad (2.34)$$

Notez quand $p = n\alpha$, Alors :

$$\mathcal{L}_\alpha \{t^p\} (s) = \alpha^n \mathcal{L} \{t^n\} \quad s > 0. \quad (2.35)$$

④

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ e^{\frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}} \right\} = \mathcal{L} \{e^t\} = \frac{1}{s-1} \quad s > 0. \quad (2.36)$$

⑤

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sin \left(b \frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \sin(bt) \} = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad s > 0. \quad (2.37)$$

⑥

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cos \left(b \frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \cos(bt) \} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad s > 0. \quad (2.38)$$

⑦

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sinh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sinh \left(b \frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \right) \right\} = \frac{b}{s^2 - b^2} \quad s > |b|. \quad (2.39)$$

⑧

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cosh \left(b \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cosh \left(b \frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \right) \right\} = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad s > |b|. \quad (2.40)$$

■

4.1 Quelques propriétés de la transformation de Laplace conforme fractionnaire

Propriétés 2.7 Certaines propriétés du transformation de Laplace conforme fractionnaire :

① La transformation de Laplace conforme fractionnaire est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mu f(t) \pm \lambda g(t) \} (s) = \mu \mathcal{F}_\alpha(s) \pm \lambda \mathcal{G}_\alpha(s). \quad (2.41)$$

Tel que μ et λ sont des constantes.

② Déplacement [4]

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} |_{s=s+k} \quad s > -k. \quad (2.42)$$

Preuve. Par le lemme 2.4, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) \right\} &= \mathcal{L} \left\{ e^{-k \frac{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}} f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}, \\ &= \mathcal{L} \left\{ e^{-kt} f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}, \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} |_{s=s+k} \quad s > -k. \end{aligned}$$

par exemple :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \{ \cos(t) \} |_{s=s+k} = \frac{s}{1+s^2} |_{s=s+k} = \frac{s+k}{1+(s+k)^2} \quad s > 0.$$

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \{ \sin(t) \} |_{s=s+k} = \frac{1}{1+s^2} |_{s=s+k} = \frac{1}{1+(s+k)^2} \quad s > 0.$$

■

③ La transformation de Laplace conforme fractionnaire de l'intégrale conforme fractionnaire :

$$\mathcal{F}_\alpha (I_\alpha (f) (t)) = \frac{\mathcal{F}_\alpha (s)}{s}. \quad (2.43)$$

④ Les dérivées de la transformée de Laplace conforme fractionnaire satisfont :

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}_\alpha \left\{ \frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n} f(t) \right\}. \quad (2.44)$$

 ⑤ Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions quelconques, Alors la transformée de Laplace conforme fractionnaire de la convolution de $f(t)$ et $g(t)$ est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g) (t) \} = \mathcal{F}_\alpha (s) \cdot \mathcal{G}_\alpha (s). \quad (2.45)$$

Où $0 < \alpha \leq 1$

Preuve. Par le lemme 2.4 et la définition de la convolution, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{ (f * g) (t) \} &= \mathcal{L} \left\{ (f * g) \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s), \\ &= \int_0^\infty (f * g) \left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-st} dt, \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f \left((\alpha (t-u))^{\frac{1}{\alpha}} \right) g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) du \right) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

On change l'ordre d'intégration, donc :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g) (t) \} = \int_0^\infty \int_u^\infty f \left((\alpha (t-u))^{\frac{1}{\alpha}} \right) g \left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-st} dt du$$

Soit $t - u = v$, alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\alpha \{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-s(v+u)} dv du, \\
 &= \left(\int_0^\infty f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-sv} dv \right) \left(\int_0^\infty g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-su} du \right), \\
 &= \mathcal{L} \left\{ f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right\} \cdot \mathcal{L} \left\{ g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right\}, \\
 &= \mathcal{L}_\alpha \{f(t)\} \cdot \mathcal{L}_\alpha \{g(t)\}, \\
 &= \mathcal{F}_\alpha(s) \cdot \mathcal{G}_\alpha(s).
 \end{aligned}$$

■

- ⑥ Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continuellement différentiable d'ordre 1, alors la transformée de Laplace conforme fractionnaire de la dérivée conforme fractionnaire séquentielle du premier ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{D_\alpha(f)(t)\}(s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.46)$$

- ⑦ Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continuellement différentiable d'ordre 2, alors la transformée de Laplace conforme fractionnaire de la dérivée conforme fractionnaire séquentielle du deuxième ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{D_{2\alpha}(f)(t)\}(s) = s^2\mathcal{F}_\alpha(s) - sf(0). \quad (2.47)$$

- ⑧ Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continuellement différentiable d'ordre 3, alors la transformée de Laplace conforme fractionnaire de la dérivée conforme fractionnaire séquentielle du troisième ordre de f est :

$$\mathcal{L}_\alpha \{D_{3\alpha}(f)(t)\}(s) = s^3\mathcal{F}_\alpha(s) - s^2f(0). \quad (2.48)$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini une nouvelle dérivée dite dérivée d'ordre fractionnaire conforme. Dans la première partie de notre travail qui concerne à rappeler la définition et quelques propriétés de cette dérivée, dans la deuxième partie de ce chapitre intégration de cette dérivée avec la transformation de Laplace conforme et quelques propriétés de la transformation de Laplace conforme.

Chapitre 3

Système dynamique

1 Rappel sur le système 1D

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la classe des systèmes linéaires dans le temps à temps continu et à temps discret. Nous introduisons par suite une nouvelle classe de Système qui est la classe des systèmes positifs. Notons que cette classe est particulière importante et fascinante, qu'on retrouve dans l'ingénierie, en sciences sociales, en électronique, les variables d'états représentent typiquement une population, quantité de marchandise, masse, chimiques etc. Ces systèmes peuvent être modélisés en tant que systèmes positifs dans lesquels la trajectoire d'état est toujours positive toutes les fois que l'état initial est positif. Nous nous basons sur ces différentes références pour donner des définitions et caractérisations des systèmes positifs en temps continu et discret.

1.1 Système 1D linéaire à temps continue

Une représentation d'état permet de modéliser un Système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être dans notre cas, nous nous intéressons à la classe des Systèmes linéaires invariants dans le temps. Nous nous plaçons dans les deux cas continu et discret. Le Système linéaire est défini par :

Cas standard :

Considérons le Système linéaire standard en temps continue suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.2)$$

tel que : $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant t , $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le contrôle et $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Pour tout $t \geq t_0$, nous obtenons

* Trajectoire d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

* Réponse du Système :

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t).$$

* Matrice de réponse impulsionnelle :

$$G(t, t_0) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 B + D\delta(t - t_0). \quad (3.3)$$

Preuve. Nous considérons le système 3.1 linéaire à temps continue définie par l'équation 3.1

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4)$$

Pour résoudre ce système, il suffit d'appliquer la transformée de Laplace pour le système 3.1.

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u] \quad (3.5)$$

Sachant que $x = x(t)$ et $u = u(t)$. Nous savons que,

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0) \quad (3.6)$$

Et,

$$X(s) = \mathcal{L}[x] = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \quad (3.7)$$

Après avoir remplacer, nous obtenons que :

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s), \text{ avec } \mathcal{L}[u] = U(s)$$

Alors,

$$[I_n s - A]X(s) = x(0) + BU(s)$$

Pour $[I_n s - A]$ est inversible.

$$X(s) = [I_n s - A]^{-1} (x(0) + BU(s))$$

Et pour,

$$[I_n s - A]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)}$$

D'où,

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)} x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)} BU(s)$$

En appliquant la transformé inverse,

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)}\right] x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)} BU(s)\right] \quad (3.8)$$

Par conséquent,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)}\right] x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{At}$$

D'où,

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{st} dt$$

■

$$\mathcal{L}[\dot{x} = A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u] \quad (3.9)$$

1.2 Système 1D linéaire à temps discret

Le système dynamique discret joue un rôle très important dans la pratique, il peut aussi être utilisé comme modèle approximatif pour l'étude de système continu.

Cas standard :

Considérons le Système linéaire standard en temps discret suivant :

Définition 3.1 Soit le système 1D linéaire à temps discret défini par :

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (3.10)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \quad (3.11)$$

tel que $x_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant i , $u_i \in \mathbb{R}^m$ représente le contrôle et $y_i \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

- Trajectoire d'états : La solution de ce système est définie par :

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)} B u_k$$

Preuve.

Pour $k = 0$, $x_1 = Ax_0 + Bu_0$.

Pour $k = 1$, $x_2 = Ax_1 + Bu_1$,

$$= A[Ax_0 + Bu_0] + Bu_1,$$

$$= A^2 x_0 + ABu_0 + Bu_1.$$

Pour $k = 2$, $x_3 = Ax_2 + Bu_2$.

$$= A[A^2 x_0 + ABu_0 + Bu_1] + Bu_2,$$

$$= A^3 x_0 + A^2 Bu_0 + ABu_1 + Bu_2,$$

$$= A^3 x_0 + \sum_{k=0}^{3-1} A^{3-(k+1)} B u_k.$$

⋮

Pour $k = i$, $x_k = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)} B u_k$.

$$x_k = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-(k+1)} B u_k, \quad k > 0$$

- Réponse du système :

$$y_k = CA^k x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B u_i.$$

■

1.3 Positivité des systèmes 1D linéaires

Considérons à présent définitions et quelques résultats sur la positivité en temps continu et en temps discret .

- **Cas continu**

Positivité externe :

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité de systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 3.2 *Un système linéaire standard est dit extérieurement positif si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour, $x_0 = x(0) = 0$ et pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, on a $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, pour $t \geq 0$.*

Positivité interne :

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition 3.3 *Le système 3.1 est dit intérieurement positif si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$ on a $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$.*

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif \mathbb{R}_+^n (frontières incluses) de l'espace d'état \mathbb{R} , obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 3.1 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

Théorème 3.4 *Le système 3.1 et 3.2 est intérieurement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.*

- **Cas discret**

Théorème 3.5 *Le système (3.10) , (3.11) est dit positif si est seulement si toutes les matrices A, B, C, D sont positives c-à-d : $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$ et $D \geq 0$.*

Preuve. La trajectoire d'état est représenté par l'égalité suivante,

$$x_{i+1} = A^i x_0 + \sum_{k=1}^{i-1} A^{k-(k+1)} B u_k, \quad i > 0$$

Et la sortie représenté par :

$$y_i = C A^i x_0 + C \sum_{k=1}^{i-1} A^{k-(k+1)} B u_k, \quad i > 0$$

Supposons que $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ alors $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$ ainsi que la sortie $y_i \in \mathbb{R}_+^p$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$. Comme

$$x_{i+1} = A x_i + B u_i$$

Supposons que $u_i = 0$ pour $i \in \mathbb{Z}$ alors nous obtenons pour $i = 0$,

$$x_1 = A x_0$$

Et qui signifie que $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ car $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ puisque $x_1 \in \mathbb{R}_+^n$. Ainsi de suite nous prenons $x_0 = 0$ afin d'obtenir,

$$x_1 = Bu_0$$

et montrer que $B \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$. Par le même raisonnement nous obtenons $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ pour $u_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ pour $x_0 = 0$.

■

2 Systèmes bidimensionnels

Récemment les systèmes bidimensionnels discrets ont fait l'objet de nombreuses recherches, cela vient du fait que plusieurs phénomènes liés à la technologie digitale, le traitement de l'image, la géophysique, la robotique, peuvent être représentés à travers la théorie des systèmes bidimensionnels. La propriété fondamentale de ces systèmes est qu'ils propagent l'information dans deux directions indépendantes ou par deux éléments z_1^{-1}, z_1^{-1} dans la théorie des circuits. L'une des méthodes d'analyse s'inscrit dans l'extension des techniques qui existent dans le cas 1 – D. L'analyse des systèmes peut être étudiée à travers les espaces d'état ou par les fonctions de transfert. Nous considérons ici les systèmes à temps discret, à temps continu-discret et à temps continu, respectivement. Il existe trois modèles d'espace d'état classiques 2 – D à temps discret, citons,

- Modèle de Fornasini-Marchesini(SF-FM), (FF-FM)
- Modèle d'Attasi
- Le modèle de Roesser

Roesser, S.Attasi, et Fornasini-Marchesini sont considérés comme les précurseurs de la théorie des systèmes bidimensionnels. Dans les années 1970, ils ont introduit une description de ces systèmes par des modèles d'état linéaires qui ont permis la conception de tests de contrôlabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de stabilité de phénomènes décrits par de tels systèmes. Plus particulièrement, le modèle de Roesser a été adapté au cas bidimensionnel continu-discret et au cas bidimensionnel continu.

2.1 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini

Nous proposons une formulation du modèle de Fornasini-Marchesini par rapport au cas continu-discret,

$$\begin{cases} x(t, i + 1) = A_0 x(t, i) + A_1 x(t, i) + A_2 x(t, i + 1) + Bu(t, i) \\ y(t, i) = C' x(t, i) \end{cases} \quad (3.12)$$

Le premier modèle 2D de Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm1}(s, z) = C'[s z I - s A_1 - z A_2 - A_0]^{-1} B \quad (3.13)$$

Le second modèle 2D de Fornasini-Marchesini,

$$\begin{cases} x(t, i + 1) = A_1 x(t, i + 1) + A_2 x(t, i + 1) + B_1 \dot{u}(t, i) + B_2 u(t, i + 1) \\ y(t, i) = C' x(t, i) \end{cases} \quad (3.14)$$

Le second modèle bidimensionnel Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm2}(s, z) = C'[s z I - s A_1 - z A_2]^{-1} B_1 s + B_2 z \quad (3.15)$$

2.2 Modèle bidimensionnel de Attasi

Le suivant modèle est adapté au cas continu-discret,

$$\begin{cases} x(t, i+1) = A_1 x(t, i) + A_2 x(t, i+1) + A_0 x(t, i) + Bu(t, i) \\ y(t, i) = C' x(t, i) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ainsi, en appliquant la 2D sZ-transformée, la fonction de transfert prend la forme suivante,

$$H_a(s, z) = C' [szI - sA_1 - zA_2 - A_0]^{-1} B \quad (3.17)$$

2.3 Modèle bidimensionnel de Roesser

C'est en 1975 que R. Roesser propose une extension du modèle d'état 1D au cas 2D. La caractéristique principale de ce modèle est que le vecteur d'état est composé de deux sous-vecteurs (généralement nommés horizontal et vertical et notés x^h x^v , respectivement). Le modèle de Roesser a été utilisé pour l'analyse et la commande de circuits linéaires itératifs (Kurek et Zaremba, 1993), le codage, le décodage et le traitement d'image (Lu et Antoniou (1992); Bracewell (1995)). Afin d'illustrer plus spécifiquement l'emploi de cette modélisation pour des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, considérons des phénomènes physico-chimiques particuliers : le processus d'absorption de gaz et le processus de sorption [14].

2.4 Modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps discret

En se référant à [8], [9], nous pourrions étendre le modèle 2D de Roesser à la forme suivante,

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, k) \\ x^v(i, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, k) \\ x^v(i, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, k) \quad (3.18)$$

$$y(i, k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, k) \\ x^v(i, k) \end{bmatrix} + D u(i, k) \quad (3.19)$$

où $(i, k) \in \mathbb{Z}^2$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_h \times n_v}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_h}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_v \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n_h}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{l \times n_v}$ et $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $x^h(i, k)$ est la partie horizontale du vecteur d'état, $x^v(i, k)$ est la partie verticale du vecteur d'état, $u(i, k)$ est le vecteur d'entrée appartenant à \mathbb{R}^m et $y(i, k)$ est le vecteur de sortie pris dans \mathbb{R}^l . Les conditions initiales pour 3.18, 3.19 sont données par $x^h(0, k)$, $x^v(i, 0)$ pour $i, k = 0, 1, 2, \dots$

2.5 Modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser est défini par les équations suivantes [1]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, k) \\ x^v(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t, k) \quad (3.20)$$

$$y(t, k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + D u(t, k) \quad t \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z} \quad (3.21)$$

où $\dot{x}^h(t, k) = \frac{\partial x^h(t, k)}{\partial t}$, $x^h(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x^v(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont respectivement les vecteurs horizontaux et verticaux $u(t, k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t, k) \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie et $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est appelé modèle Roesser continu discret.

Les conditions initiales associées au système 3.20, 3.21 sont définie comme suit :

$$\begin{aligned} x^h(t, 0) &\in \mathbb{R}^{n_1}, x^v(t, 0) \in \mathbb{R}^{n_2}, t \in \mathbb{R}, \\ x^h(0, k) &\in \mathbb{R}^{n_1}, x^v(0, k) \in \mathbb{R}^{n_2}, k \geq 1, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2.6 Solution du modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret

les solutions du système linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser est défini par les relation suivantes[1]

$$x^h(t, k) = e^{A_{11}t} x^h(0, k) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)} [A_{12}x^v(\tau, k) + B_1 u(\tau, k)] d\tau \quad (3.22)$$

$$x^h(t, k) = A_{22}^k x^v(t, 0) + \sum_{i=1}^{k-1} A_{22}^{k-i-1} [A_{21}x^h(t, i) + B_2 u(t, i)] \quad (3.23)$$

3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un rappel sur système 1D linéaire à temps continue et à temps discret après avoir été montré les conditions de positivité et stabilité des système 1D linéaire à temps continu et discret. Dans la deuxième partie du chapitre a été défini la nouvelle de classe du système bidimensionnel avec quelques exemples comme Fornasini-Marchesini, Attasi et Roesser, été intéressé par modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret avec sa solution.

Chapitre 4

Modèle de Roesser linéaire fractionnaire 2D au sens de la dérivée conforme

L'une des notions les plus importantes décrivant les systèmes dynamiques est la positivité, définie par le fait que sa trajectoire à partir de tout état initial non-négatif reste pour toujours dans le positif orthant pour tous les intrants non négatifs. Un aperçu de l'état de l'art dans la théorie positivité est donnée dans les monographies [1], [7], [11]. Une variété de modèles ayant un comportement positif peut être trouvée dans le traitement du signal, le traitement d'images, les systèmes de stockage, les processus industriels impliquant des réacteurs chimiques, des échangeurs de chaleur et des colonnes de distillation, des systèmes compartimentaux dans l'automatisation, les modèles de pollution de l'eau et de l'atmosphère, etc... L'un des systèmes 2D les plus importants est le modèle Roesser qui a été introduit dans [9], ainsi que la positivité les conditions, l'essai de stabilité asymptotique et la stabilisation ont été analysés pour la norme forme et les formes fractionnelles dans les documents [12], [13]. Récemment, Dans les travaux de Khalil [3] une nouvelle dérivée fractionnel appelé dérivé conforme a été défini, et dans le papier d'Abdeljawad [4] quelques propriétés fondamentales du calcul fractionnaire conforme ont été développés. Dans le document de Kaczorek [11] la positivité et la stabilité d'un 1D fractionnaire temps continu linéaire défini par le dérivé conforme a été étudié. Dans ce document une nouvelle classe de systèmes de temps discret continu fractionnel linéaire 2D (communément appelés hybrides) et décrit par la formulation Roesser est introduit en utilisant le dérivée conforme. Les solutions sont calculées et les conditions de positivité sont extraites.

1 Modèle de Roesser au sens de la dérivée conforme

Considérons une classe de modèle bidimensionnel linéaire fractionnaire de type Roesser à temps continu-discret au sens de la dérivée Conforme, définie comme suit :

$$\mathbf{D}^\alpha x^h(t, i) = A_{11}x^h(t, i) + A_{12}x^v(t, i) + B_1u(t, i), \quad (4.1)$$

$$x^v(t, i + 1) = A_{21}x^h(t, i) + A_{22}x^v(t, i) + B_2u(t, i), \quad (4.2)$$

$$y(t, i) = C_1x^h(t, i) + C_2x^v(t, i) + du(t, i), \quad (4.3)$$

où les matrices d'état sont définies $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ et \mathbf{D}^α dérivée fractionnaire au sens de Conforme $x^h(0, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$ et $x^v(t, 0) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ sont les conditions initiales.

2 Solution du modèle Roesser au sens de la dérivée conforme

Les équations (4.1) et (4.2) définissent une nouvelle classe de systèmes, la résolution est obligatoirement donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.1 La solution $(x^h(t, i), x^v(t, i+1))$ des équations 4.1 et 4.2 a la forme suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} x^h(t, 0) = \Phi_\alpha x^h(0, 0) + C_{\alpha t} x^v(t, 0) + Z_{\alpha t} u(t, 0), \quad \text{pour } i=0, \\ x^h(t, i) = \Phi_\alpha x^h(0, i) + \sum_{k=0}^{i-1} C_{\alpha t} (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^{i-(k+1)} \\ \quad [A_{21} \Phi_\alpha x^h(0, k) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, k)] + (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^i x^v(t, 0) Z_{\alpha t} u(t, i) \quad \text{pour } i \geq 1 \end{array} \right.$$

avec,

$$x^v(t, i) = \sum_{k=0}^{i-1} C_{\alpha t} (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^{i-(k+1)} [A_{21} \Phi_\alpha x^h(0, k) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, k)] + (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^i x^v(t, 0), \quad i \geq 1, \quad (4.4)$$

lorsque les opérateurs $C_{\alpha t}$ et $Z_{\alpha t}$ sont définis par les relations :

$$C_{\alpha t} = \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} A_{12} \tau^{\alpha-1} d\tau, \quad (4.5)$$

$$Z_{\alpha t} = \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} B_1 \tau^{\alpha-1} d\tau. \quad (4.6)$$

et les matrices de transition sont définies par la relation suivante :

$$\Phi_\alpha = e^{\frac{A_{11} t^\alpha}{\alpha}}. \quad (4.7)$$

Preuve. Par récurrence, la solution de l'équation (4.1) est donnée par :

$$x^h(t, i) = e^{\frac{A_{11} t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, i) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} [A_{12} x^v(\tau, i) + B_1 u(\tau, i)] \tau^{\alpha-1} d\tau, \quad (4.8)$$

pour $i = 0$

$$x^h(t, 0) = e^{\frac{A_{11} t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, 0) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} [A_{12} x^v(\tau, 0) + B_1 u(\tau, 0)] \tau^{\alpha-1} d\tau. \quad (4.9)$$

En suivant l'équation (4.2) et pour $i = 0$, on obtient

$$x^v(t, 1) = A_{12} x^h(t, 0) + A_{22} x^v(t, 0) + B_2 u(t, 0), \quad (4.10)$$

En remplaçant 4.9 dans 4.10, nous obtenons

$$x^v(t, 1) = A_{21} \left[e^{\frac{A_{11} t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, 0) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} [A_{12} x^v(\tau, 0) + B_1 u(\tau, 0)] \tau^{\alpha-1} d\tau \right] + A_{22} x^v(t, 0) + B_2 u(t, 0) \quad (4.11)$$

Donc

$$x^h(t, 1) = A_{21} \Phi_\alpha(t) x^h(0, 0) + (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22}) x^v(t, 0) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, 0), \quad (4.12)$$

De même, une substitution de (4.12) dans (4.8) et prenant $i = 1$ On a

$$x^h(t, 1) = \Phi_\alpha(t) x^h(0, 1) + C_{\alpha t} x^v(t, 1) + Z_{\alpha t} u(t, 1), \quad (4.13)$$

par conséquent

$$x^h(t, 1) = C_{\alpha t} A_{12} \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, 0) + \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, 1) C_{\alpha t} (C_{\alpha t} A_{21} + A_{22}) x^v(t, 0) + C_{\alpha t} (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, 0) + Z_{\alpha t} u(t, 1). \quad (4.14)$$

Supposons maintenant que la solution est vraie pour $i = k$, et prouvons qu'elle est aussi vraie pour $i = k + 1$. De la même manière et en tenant compte des relations 4.2, 4.4 pour $i = k > 1$, nous avons ce qui suit

$$\begin{aligned} A_{21} x^h(t, k) + A_{22} x^v(t, k) + B_2 u(t, k) &= A_{21} \{ \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, k) + \sum_{j=0}^{k-1} C_{\alpha t} (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^{k-(j+1)} [A_{21} \Phi_{\alpha}(t) \\ &\quad + x^h(0, j) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, j)] + C_{\alpha t} (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^k x^v(t, 0) \\ &\quad + Z_{\alpha t} u(t, k) \} + A_{22} \sum_{j=0}^{k-1} (A_{21} C_{\alpha t} x^v + A_{22})^{k-(j+1)} [A_{21} \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, j) \\ &\quad + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, j) + (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^k x^v(t, 0)] + B_2 u(t, k) \\ &= \sum_{j=0}^k (A_{21} C_{\alpha t} x^v + A_{22})^{k-j} \left[A_{21} \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, j) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, j) \right] \\ &\quad + (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^{k+1} x^v(t, 0) \\ &= x^v(t, k + 1). \end{aligned}$$

Par la même procédure 4.8, 4.4 pour $i = k > 1$, nous en déduisons ce qui suit relation :

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, k + 1) + C_{\alpha t} x^v(t, k + 1) + Z_{\alpha t} u(t, k + 1) &= \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, k + 1) + C_{\alpha t} \left\{ \sum_{j=0}^k (A_{21} C_{\alpha t} x^v + A_{22})^{k-j} \right. \\ &\quad \left. \left[A_{21} \Phi_{\alpha} x^h(0, j) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, j) \right] + (A_{21} C_{\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + A_{22})^{k+1} x^v(t, 0) + Z_{\alpha t} u(t, k + 1) \right\} \\ &= \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, k + 1) \sum_{j=0}^k (A_{21} C_{\alpha t} x^v + A_{22})^{k-j} \\ &\quad \left[A_{21} \Phi_{\alpha}(t) x^h(0, t) + (A_{21} Z_{\alpha t} + B_2) u(t, j) \right] \\ &\quad + C_{\alpha t} (A_{21} C_{\alpha t} + A_{22})^{k+1} x^v(t, 0) + Z_{\alpha t} u(t, k + 1) \\ &= x^h(t, k + 1) \end{aligned}$$

■

3 Positivité du modèle Roesser au sens de la dérivée conforme

Nous introduisons maintenant le concept de positivité par les définitions suivantes et nous allons tester la positivité pour ce type de systèmes en extrayant des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 4.2 Le système linéaire hybride bidimensionnel décrit par le modèle de Roesser défini par les équations (4.1) (et 4.2) est appelé positif si les vecteurs d'état $x^h(t, i)$ et $x^v(t, i)$ sont positifs pour chaque condition initiale positive $x^h(t, 0)$, $x^h(0, i)$ et toutes les entrées positives $y(t, i)$ c-à-d.

$$x^h(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_1} \text{ et } x^v(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_2} \text{ où } t \in \mathbb{R}_+, i \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\begin{aligned} x^h(t, 0) &\in \mathbb{R}_+^{n_1}, & x^v(t, 0) &\in \mathbb{R}_+^{n_2}, & t &\in \mathbb{R}_+, \\ x^h(0, i) &\in \mathbb{R}_+^{n_1}, & x^v(0, i) &\in \mathbb{R}_+^{n_2}, & i &\geq 1, i \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Théorème 4.3 *Le système linéaire à temps discret continu bidimensionnel décrit par le modèle Roesser défini par les équations (4.1) et (4.2) est positif si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites,*

- $A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}$, et $B_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}$;
- A_{11} est matrice de Metzler.

Preuve. *Il est bien connu que pour tous $t > 0$ et $0 < \alpha < 1$ la matrice $e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}}$ satisfait à la relation suivante : $e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}$ si et seulement si A_{11} est une matrice Metzler ([12])*

On a

$$e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{11}^k t^{\alpha k}}{\alpha^k k!},$$

Donc

$$e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} = I_n + \frac{A_{11}}{\alpha} t^\alpha + \frac{A_{11}^2}{2\alpha^2} t^{2\alpha} + \dots,$$

Alors

$$e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1} \text{ si } A_{11} \in \mathbb{M}_{n_1}, 0 < \alpha < 1, \forall t > 0.$$

D'autre part si, $\frac{A_{11}}{\alpha} \in \mathbb{M}_{n_1}$, alors il existe un réel positif β satisfaisant

$$\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n > 0.$$

Comme

$$\left(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n \right) - (\beta I_n) = -(\beta I_n) + \left(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n \right),$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} &= e^{(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n)t^\alpha - (\beta I_n)t^\alpha}, \\ &= e^{(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n)t^\alpha} e^{-(\beta I_n)t^\alpha}, \\ &= e^{(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n)t^\alpha} e^{-\beta I_n t^\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}, 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $e^{(\frac{A_{11}}{\alpha} + \beta I_n)t^\alpha} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_1}, \forall t \geq 0$.

Condition suffisante :

Maintenant, supposons que $A_{11} \in \mathbb{M}_{n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}$, et $u(t, i) \in \mathbb{R}_+^m, \forall t \geq 0$

$$\frac{d^\alpha x^h(t, i)}{dt^\alpha} = A_{11}x^h(t, i) + F_1(t, i), \quad (4.15)$$

$$x^v(t, i+1) = A_{21}x^h(t, i) + F_2(t, i), \quad (4.16)$$

$$\text{où } F_1(t, i) := A_{12}x^v(t, i) + B_1u(t, i), \quad (4.17)$$

$$\text{et } F_2(t, i) := A_{22}x^v(t, i) + B_2u(t, i), \quad (4.18)$$

Selon les équations 4.17,4.18 et pour $i = 0$, on a

$$\begin{aligned} x^v(t, 1) &= A_{21}x^h(t, 0) + F_2(t, 0) \\ &= A_{21}x^h(t, 0) + A_{22}x^v(t, 0) + B_2u(t, 0), \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si $x^v(t, 1) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, De même, à partir d'équations (4.16),(4.18) et pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x^h(t, 1)}{dt^\alpha} &= A_{11}x^h(t, 1) + F_1(t, 1) \\ &= A_{11}x^h(t, 1) + A_{12}A_{21}x^h(t, 0) + A_{12}A_{22}x^v(t, 0) \\ &\quad + A_{12}B_2u(t, 0) + B_1u(t, 1). \end{aligned}$$

D'autre part, la solution de l'équation (4.16) satisfait la relation suivante :

$$x^h(t, i) = e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, i) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} F_1(\tau, i) \tau^{\alpha-1} d\tau, \quad (4.20)$$

Alors

$$x^h(t, 1) = e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, 1) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} F_1(\tau, 1) \tau^{\alpha-1} d\tau. \quad (4.21)$$

Où $x^h(t, 1) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$.

Maintenant, supposons que $x^h(t, k) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ et $x^v(t, k) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, pour $k \geq 1$, $\forall t >$, et prouvons que selon l'hypothèse du théorème (4.3) nous aurons $x^h(t, k+1) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ et $x^v(t, k+1) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$.

$$\begin{aligned} x^v(t, k+1) &= A_{21}x^h(t, k) + F_2(t, k) \\ &= A_{21}x^h(t, k) + A_{22}x^v(t, k) + B_2u(t, k), \end{aligned} \quad (4.22)$$

Par conséquent $x^v(t, k+1) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x^h(t, k+1)}{dt^\alpha} &= A_{11}x^h(t, k+1) + F_1(t, k+1) \\ &= A_{11}x^h(t, k+1) + A_{12}A_{21}x^h(t, k+1) + B_1u(t, k+1) \\ &= A_{11}x^h(t, k+1) + A_{12} [A_{21}x^h(t, k) + A_{22}x^v(t, k) + B_2u(t, k)] \\ &\quad + B_1u(t, k+1), \end{aligned}$$

Par l'hypothèse du théorème 4.3

$$\begin{aligned} F_1(t, k+1) &= A_{12} [A_{21}x^h(t, k) + A_{22}x^v(t, k) + B_2u(t, k)] \\ &\quad + B_1u(t, k+1) \in \mathbb{R}_+^{n_1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Donc

$$x^h(t, k+1) = e^{\frac{A_{11}t^\alpha}{\alpha}} x^h(0, k+1) + \int_0^t e^{\frac{A_{11}(t^\alpha - \tau^\alpha)}{\alpha}} F_1(\tau, k+1) \tau^{\alpha-1} d\tau, \quad (4.24)$$

Par conséquent $x^h(t, k+1) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$.

Condition nécessaire :

Supposons que le système (4.1) et (4.2) soit positif, c'est-à-dire : $x^h(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $x^v(t, i) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$.

$$u(t, 0) = 0, x^v(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Selon les équations (4.1) et (4.4), pour $i = 0$ on suppose que $x^h(0, 0) = e_j$, où e_j représente la j^{eme} colonne de la matrice d'identité I_{n_1} .

Ainsi, la trajectoire du système ne quitte pas le positif orthant $\mathbb{R}_+^{n_1}$ seulement si

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x^h(t,0)}{dt^\alpha} \Big|_{t=0} &= A_{11} x^h(0,0) \\ &= A_{11} [\Phi_\alpha(0) x^h(0,1) + C_{\alpha t} x^v(0,0) + Z_{\alpha t} u(0,0)] \\ &= A_{11} e_j \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \end{aligned}$$

Cela implique que $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$. Par conséquent, nous déduisons que $A_{11} \in \mathbb{M}_{n_1}$
De la même manière, si $x^h(0,0) = x^v(0,0) = 0$ et $i = 0$ nous aurons

$$\frac{d^\alpha x^h(t,0)}{dt^\alpha} \Big|_{t=0} = B_1 u(0,0) \in \mathbb{R}_+^{n_1},$$

Où $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}$.

Si $x^h(0,0) = 0$, $u(0,0) = 0$ et $i = 0$, Où

$$\frac{d^\alpha x^h(t,0)}{dt^\alpha} \Big|_{t=0} = A_{12} x^v(0,0) \in \mathbb{R}_+^{n_2},$$

ce qui implique que $A_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$.

Par la même analogie nous prouvons la positivité des matrices A_{21} , A_{22} et B_2 . ■

4 Application numérique

Dans cette section, nous montrerons la faisabilité du résultat obtenu par quelques exemples numériques.

Exemple 4.1 Considerons le système (4.1), (4.2) définie par la matrice et $\alpha = 0.5$

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U(t, i) = 1 + i$$

En Appliquant le théorème (2) sur le système (4.1), (4.2) nous obtenons un état positif représentés par la figure .

Nous remarquons, que la matrice A est de Metzler et que tous les vecteurs d'état restent positif.

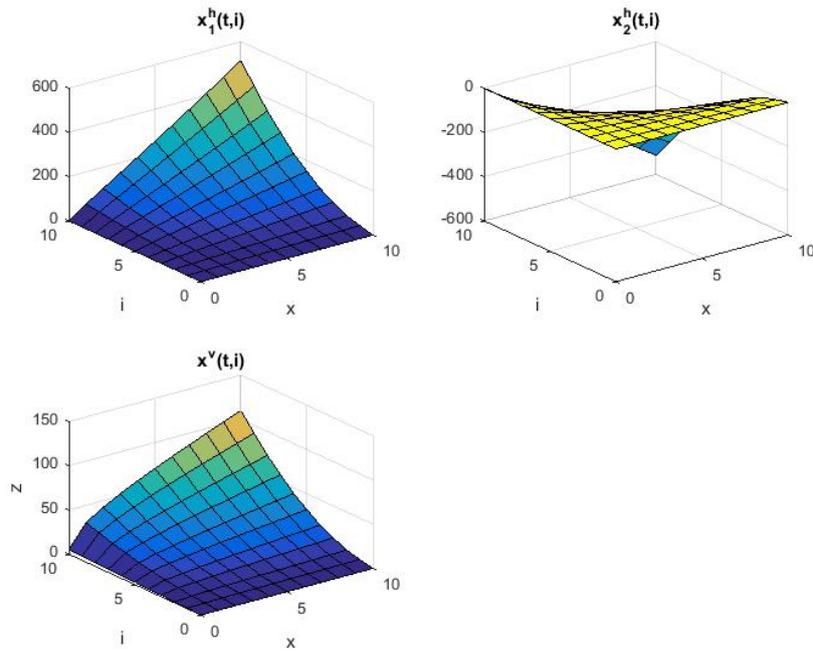


FIGURE 4.1 – Le graphique des vecteur d'état

5 Conclusion

Dans ce chapitre Nous avons étudié modèle de Roesser linéaire fractionnaire 2D au sens de la dérivée conforme, Nous avons trouvé la solution nous avons étudié les condition de positivité et validé ces résultats par une exemple numérique .

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de la positivité des systèmes standards et fractionnaires. Dans la première partie de notre travail nous avons rappelé la classe des systèmes unidimensionnels standards et fractionnaires positifs, ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes de positivité. Ensuite nous avons introduit la classe des systèmes bidimensionnels de type Roesser standards et donné la principale propriété de ces conditions de positivité. Dans les deux dernières parties de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la théorie des systèmes fractionnaires qui s'avèrent nouvelle et attirent l'attention d'un grand nombre de chercheurs. Le principal objectif était de résoudre les systèmes bidimensionnels fractionnaires pour ensuite étudier la positivité de ces systèmes. À travers cette étude, nous avons conclu que les systèmes 2D de type Roesser fractionnaires ont les mêmes conditions de positivité que les systèmes standards de même type.

Bibliographie

- [1] **T. Kaczorek**, "Positive 1D and 2D Systems," Springer-Verlag London. Ltd., 2002. [8](#), [30](#), [31](#), [32](#)
- [2] **R. Roesser**, "A discrete state-space model for linear image processing", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-20, 1975, pp. 1-10.(12), 2007, pp. 546-556.
- [3] **R. Khalil, M. AL Horani, A.Yousef, and M. Sababheh**. A new definition of fractional derivative. *journal of computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014. [16](#), [18](#), [32](#)
- [4] **T. Abdeljawad**, On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 2012, article 62(10 pages), 2015. [16](#), [18](#), [19](#), [20](#), [23](#), [32](#)
- [5] **D. Bouagada**, thèse de doctorat : "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs", université d'Oran Es-Senia, 2004.
- [6] **T. KACZOREK**, ANALYSIS OF POSITIVE LINEAR CONTINUOUS–TIME SYSTEMS USING THE CONFORMABLE DERIVATIVE, 2018.
- [7] **T.KACZOREK**, *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, 2011. [32](#)
- [8] **S. ABDELKEBIR , B. NOUIRI**. Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by fourier method. *Proceedings of International Mathematical Sciences, Volume II Issue 1(06 pages)*, 2020. [16](#), [30](#)
- [9] **D. GIVONE, D. ROESSER, R. P.**, "Multidimensional linear iterative circuits general properties," *IEEE Trans. On Computers*, Vol.C-21, no. 10, pp. 1067-1073, 1972. [30](#), [32](#)
- [10] **T. KACZOREK**, , "Structure Decomposition of Normal 2D Transfer Matrices," *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES*, Vol. 52, no. 4, 2004
- [11] **E. Fornasini and M.E. Valcher**, "Recent developments in 2D positive systems theory", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 7(4), 1997, pp.101-123. [32](#)
- [12] **T. Kaczorek**, "Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol. 28(2), 2018, pp. 335-340. [32](#), [35](#)
- [13] **M. A Ghezzar ,A. Berilh**, sur la positivité du modelé bidimensionnel de Roesser de type fractionnaire conforme PFE,Master MCO, 2018 2019 , Dpt MI,FSEI,UMAB [32](#)
- [14] **O. Bachelier, N. Yeganefar, D. Mehdi, and W. Paszke**, "On Stabilization of 2D Roesser Models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.62(5), 2017, pp. 2505-2511. [30](#)
- [15] **M. Twardy**, On the alternative stability criteria for positive systems. *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES*. 55, 2007 [8](#)
- [16] **T. Kaczorek**, *Positive linear systems and their relationship with electrical circuits*, XX-SPETO : 33-41. 1997. [9](#)

Sur l'analyse d'une classe de systèmes 2D fractionnaires linéaires décrits sous la formulation Roesser

Résumé :

Ce travail porte essentiellement sur la solution et la positivité d'un système dynamique modèle bidimensionnel de Roesser vu son importante utilisation dans de nombreux domaines.

Nous avons, tout d'abord, étudié la positivité et la stabilité des systèmes 1D linéaire à temps continue et discret .

Ensuite nous avons étudié exposé quelque propriétés fondamentales sur le calcul fractionnel conforme à sa transformation de Laplace, et donné quelques modèles de systèmes bidimensionnels 2D et nous somme itéréssé sur modèle bidimensionnel linéaire de type Roesser à temps continu-discret.

En dernier, nous avons calculé la solution et trouvé les conditions de positivité du modèle de Roesser linéaire fractionnaire au sens de la dérivée conforme avec application numérique (matlab).

Mots-Clés. *positivité, systèmes 2D linéaire , système de Roesser, Dérivée fractionnaires ,Dérivée conforme.*

On the analysis of a class of linear fractional 2D systems described under the Roesser formulation

Abstract :

This work focuses on the solution and positivity of a two-dimensional dynamic system model of Roesser given its important use in many fields.

We first studied the positivity and stability of linear 1D systems with continuous and discrete time.

Then we studied Fractional Computation conforming to its Laplace transformation, and give some models of 2D two-dimensional systems and we based on two-dimensional linear model of Roesser type continuous-discrete time.

Finally, a study we calculated the solution and found the conditions of positivity of the fractional linear Roesser model in the sense of the derivative conforming with digital application (matlab).

Key Words. *positivity, 2D linear systems , Roesser system, fractional derivative ,conformal derivative.*

على تحليل فئة من الأنظمة الجزئية الخطية ثنائية الأبعاد الموصوفة تحت تركيبة Roesser

يركز هذا العمل على حل و إيجابية نموذج النظام الديناميكي ثنائي الأبعاد لرويسر نظرا لاستخدامه المهم في العديد من المجالات.

اولا. درسنا ايجابية و استقرار الأنظمة الخطية 1D المستمرة و المنفصلة

ثم درسنا الحوسبة الكسرية لتحويل لابلاس. و نعطي بعض النماذج للأنظمة ثنائية الأبعاد و تعتمد على نموذج زمني خطي ثنائي الأبعاد من نوع روزر مستمر و منفصل.

أخيرا. قمنا بحساب الحل و وجدنا شروط الإيجابية لنموذج Roesser الخطي الجزئي بمعنى المشتق المتوافق مع التطبيق

العددي (matlab).

كلمات مفتاحية. الحساب الجزئي الصحيح. أنظمة 1D أنظمة ثنائية الأبعاد. نموذج روزر الخطي باستخدام المشتقة المتوافقة.

